

T.C.

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
HOMOTOPI PERTÜRBASYON TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMLERİ

HALİL YAVUZ MART

HAZİRAN 2015

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
HOMOTOPI PERTÜRBASYON TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMLERİ

HALİL YAVUZ MART

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN

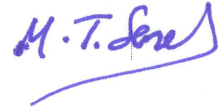
HAZİRAN 2015

HALİL YAVUZ MART tarafından **Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN** danışmanlığında hazırlanan “**LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN HOMOTOPI PERTÜRBASYON TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMLERİ**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Tuncay CANDAN; Niğde Üniversitesi



Üye : Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL; Erciyes Üniversitesi



Üye : Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN; Niğde Üniversitesi



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

HALİL YAVUZ MART

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN HOMOTOPI PERTÜRBASYON TEKNİĞİ İLE ÇÖZÜMLERİ

MART, Halil Yavuz
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Durmuş Dağhan
Haziran 2015, 65 sayfa

Lineer olmayan kısmi türevli Drinfeld-Sokolov-Wilson, Drinfeld-Sokolov ve Modifiye- Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin çözümleri homotopi pertürbasyon tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sisteminin pertürbatif çözümü için yalnızca bir iterasyon yapılmış, Drinfeld-Sokolov ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin pertürbatif çözümleri için ise altı iterasyona kadar gidilmiştir. Elde edilen bazı çözümlerin davranışı ve nümerik farkları grafiklerle de sunulmuştur. Ayrıca, bu denklemler için birinci iterasyonlardan elde edilen pertürbatif çözümler kullanılarak basit dallanma noktaları tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Homotopi Pertürbasyon Metodu, Dallanma noktası, Drinfeld-Sokolov-Wilson denklemi, Drinfeld-Sokolov denklemi, Modifiye- Benjamin-Bona-Mahony denklemi.

SUMMARY

SOLUTIONS OF THE NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY PERTURBATION TECHNIQUE

MART, Halil Yavuz

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Associate Professor Dr. Durmuş DAĞHAN

June 2015, 65 pages

The analytic solutions of the nonlinear partial differential equations, Drinfeld-Sokolov-Wilson, Drinfeld-Sokolov and Modified-Benjamin-Bona-Mahony equations are obtained by using the homotopy perturbation technique. While only one iteration is performed for the perturbative solution of Drinfeld-Sokolov-Wilson system, we have shown the perturbative solutions up until six iterations for Drinfeld-Sokolov and Modified-Benjamin-Bona-Mahony equations. The behavior of some of the solutions and their numerical differences are presented via graphics. Moreover, simple bifurcation points are noticed by using the obtained perturbative solutions of these equations computed from first iteration.

Keywords: Homotopy Perturbation Method, Bifurcation point, Drinfeld-Sokolov-Wilson equation, Drinfeld-Sokolov equation, Modified-Benjamin-Bona-Mahony equation.

ÖN SÖZ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik ya da analitik çözümlerini elde etmek çoğu zaman oldukça zordur. Bu tip denklemlerin tam yada yaklaşık çözümlerinin bulunmasının zor olması, çözümlerin çok farklı şekillerde ifade edilebiliyor olması bilim adamlarını daha basit ve alternatif çözümler araştırma ve geliştirmeye yönlendirmiştir. Bu tezde basit ve son derece kullanışlı bir metot olan homotopi pertürbasyon yöntemi bazı lineer olmayan kısmi türevli denklemlere uygulanmıştır.

Tez kapsamında; Drinfeld-Sokolov-Wilson ve Drinfeld-Sokolov denklem sistemlerinin, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin Homotopi Pertürbasyon yöntemi kullanılarak pertürbatif çözümleri elde edilmiş, birinci iterasyonlar kullanılarak basit dallanma noktaları elde edilmiştir. Drinfeld-Sokolov ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemleri için altı iterasyona kadar gidilmiş ve çözümlerin bazıları grafiklerle de sunulmuştur.

Yüksek lisans eğitimim süresince hem akademisyenlik mesleğine hem de hayata yaklaşımıyla bana örnek olan, bilgisini ve deneyimlerini her zaman çok cömertçe benimle paylaşan, bu tez çalışmasının başından bitimine kadar hiçbir şekilde desteğini esirgemeyen, bilgileri ile sürekli destekleyen ve çalışmayı yönlendiren, yüksek lisans eğitimim boyunca gerek bilimsel olarak gerek hayat tecrübesi olarak bir çok şey öğrendiğim sayın hocam, değerli büyüğüm Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, bu tez yazımında bana desteğini ve katkısını esirgemeyen Yrd. Doç Dr. Güldem YILDIZ'a ve beni bu zamana kadar ki eğitim hayatım boyunca destekleyen babama ve anneme, yüksek lisans süresinde her zaman destekçim olan abim Çağrı Tuğrul'a, bu çalışma boyunca beni her zaman destekleyen kendilerine çalışmam boyunca çok vakit ayırmasam da her türlü fedakarlıklarını benden esirgemeyen eşime ve minik kızlarım Cennet Pınar ve Kevser Irmak'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGE VE KISALTMALAR	ix
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. GENEL KAVRAMLAR	3
BÖLÜM III. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN UYGULAMALARI. 7	
3.1.Giriş	7
3.2. DSW Denklem Sisteminin Homotopi Pertürbasyon Tekniği ile Çözümü	7
3.3. DS Denklem Sisteminin Homotopi Pertürbasyon Tekniği ile Çözüm	10
3.3.1. Birinci iterasyon.....	11
3.3.2. İkinci iterasyon	15
3.3.3. Üçüncü iterasyon	17
3.3.4. Dördüncü iterasyon.....	21
3.3.5. Beşinci iterasyon.....	25
3.3.6. Altıncı iterasyon.....	31
3.4. MBBM Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Tekniği ile Çözümü.....	34
3.4.1. Birinci iterasyon.....	35
3.4.2. İkinci iterasyon	38
3.4.3. Üçüncü iterasyon	41
3.4.4. Dördüncü iterasyon.....	45
3.4.5. Beşinci iterasyon.....	49
3.4.6. Altıncı iterasyon.....	54
BÖLÜM IV. SONUÇLAR	58
KAYNAKLAR	59
ÖZ GEÇMİŞ	64
TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER	65

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. DS denklem sisteminin birinci iterasyon ile çözümü	14
Şekil 3.2. DS denklem sistemi için birinci iterasyondaki nümerik fark	14
Şekil 3.3. DS denklem sisteminin üçüncü iterasyon ile çözümü	21
Şekil 3.4. DS denklem sistemi için üçüncü iterasyondaki nümerik fark	21
Şekil 3.5. DS denklem sisteminin beşinci iterasyon ile çözümü	31
Şekil 3.6. DS denklem sistemi için beşinci iterasyondaki nümerik fark	31
Şekil 3.7. DS denklem sisteminin altıncı iterasyon ile çözümü	34
Şekil 3.8. DS denklem sistemi için altıncı iterasyondaki nümerik fark.....	34
Şekil 3.9. MBBM denklem sisteminin birinci iterasyon ile çözümü.....	38
Şekil 3.10. MBBM denklem sistemi için birinci iterasyondaki nümerik fark.....	38
Şekil 3.11. MBBM denklem sisteminin üçüncü iterasyon ile çözümü.....	44
Şekil 3.12. MBBM denklem sistemi için üçüncü iterasyondaki nümerik fark.....	45
Şekil 3.13. MBBM denklem sisteminin beşinci iterasyon ile çözümü.....	54
Şekil 3.14. MBBM denklem sistemi için beşinci iterasyondaki nümerik fark.....	54
Şekil 3.15. MBBM denklem sisteminin altıncı iterasyon ile çözümü	57
Şekil 3.16. MBBM denklem sistemi için altıncı iterasyondaki nümerik fark	57

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

α, β, γ

c, e

U'

A

B

Γ, Ω

L

N

Açıklama

Keyfi reel sabitler.

Keyfi integrasyon sabiti

$\frac{\partial U}{\partial \eta}$

Diferansiyel operatör

Sınır operatörü

Bölge sınırı

Lineer operatörler

Lineer olmayan operatör

Kısaltmalar

DSW

DS

KdV

BBM

MBBM

Açıklama

Drinfeld-Sokolov-Wilson Denklem Sistemi

Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi

Korteweg-de Vries Denklemi

Benjamin-Bona-Mahony Denklemi

Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denklemi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Genellikle bir çok fiziksel, kimyasal veya doğa olayları lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilerek çözülmeye çalışılır. Ancak, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin gerek analitik gerekse de nümerik çözümlerini elde etmek oldukça zor ve zaman alıcıdır. Bu tarz denklemlerin analitik, pertürbatif ve nümerik çözümlerine yönelik literatürde bir çok metot vardır (Daghan v.d. 2010; Daghan v.d. 2015).

Bu tez kapsamında, Drinfeld-Sokolov-Wilson (DSW) (He, 2005a; Yao, 2005; Esmail ve Ahmad, 2011), Drinfeld-Sokolov (DS) denklem sisteminin (Wang, 2002; Olver, 1993; Goktas ve Hereman, 1997) ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony (MBBM) denkleminin (Tso, 1996) pertürbatif çözümleri homotopi pertürbasyon tekniği kullanarak elde edilip birinci iterasyon için basit dallanma noktaları bulunacaktır. DS ve MBBM denklemlerinin her ikisi için de altı iterasyona kadar devam edilip çözümlerin bazılarının grafikleri ve nümerik hataları ayrıca sunulacaktır.

Drinfeld-Sokolov-Wilson (DSW) denklem sistemi Drinfeld Vladimir Sokolov ve George Wilson tarafından lineer olmayan birleşik iki kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü için geliştirilmiş bir denklem sistemidir (He, 2005a; Yao, 2005; Esmail ve Ahmad, 2011)

DS denklem sistemi ilk olarak Drinfeld ve Sokolov tarafından verilmiştir. Bu sistem, Lax çiftine sahip lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin özel formudur (Goktas ve Hereman, 1997). DS denklem sisteminin bir çok farklı formu çeşitli araştırmacılar tarafından farklı yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Örneğin; Homotopi analizi metodu ile (Sweet ve Gorder, 2010a, Sweet ve Gorder 2010b), modifiye homotopi analiz metodu ile (Sweet ve Gorder, 2010c), tanh fonksiyon ve Adomian ayrıştırma yöntemi ile (Uğurlu ve Kaya, 2008), Ansatz ve doğrudan cebirsel formülasyonun yeni yolu ile (Hu, 2004). Drinfeld-Sokolov sisteminin genelleştirilmiş açık çözümleri farklı parametreler açısından faz uzayı araştırmak için kullanılmıştır (Sweet and Gorder, 2012). DS sisteminin tam çözümleri ise $(\frac{G'}{G})$ -açılım metodu, direkt

cebirsel metot, $(\frac{G'}{G})$ -açılımının metodunun farklı formu gibi (Daghan v.d., 2015) farklı yöntemler kullanılarak da elde edilmiştir.

Farklı fiziksel sistemlerin matematiksel modellerinden biri olan Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ilk defa Benjamin ve arkadaşları (Benjamin vd., 1972) tarafından Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin alternatif model olarak verilmiştir. BBM denkleminin bir çok modifiye versiyonu olup farklı araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Wazwaz ve Helal, 2005; Nickel, 2007; Aslan, 2009; Layeni and Akinola 2010; Yusufoglu and Bekir, 2008). MBBM denklemi, ayrıca diğer fizik denklemleri olan sıkıştırılabilir dalgalar içinde akustik ağırlık, dalgalar enharmonic kristaller akustik dalgalar, soğuk plazmada hidromanyetik dalgalar gibi denklemlerin çözümünde de kullanılır (Saut ve Tzetkov, 2004; Varlamov ve Liu, 2004) . MBBM denklemi için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği ayrıca incelenmiştir (Tso, 1996). MBBM denkleminin tam çözümleri farklı teknikler kullanılarak bir çok yazar tarafından elde edilmiştir (Wang vd., 2008; Daghan vd., 2010; Bekir, 2008; Zayed ve Gepreel, 2008; Aslan ve Ozis 2009a; Aslan ve Ozis, 2009b).

Bu tez kapsamında; Drinfeld-Sokolov-Wilson, Drinfeld-Sokolov denklem sistemlerinin ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin pertürbatif çözümleri He'nin Homotopi Pertürbasyon tekniği kullanılarak elde edilecektir. Ayrıca, birinci iterasyonlar kullanılarak basit dallanma noktaları bulunacaktır. DS ve MBBM denklemleri için altıncı iterasyona kadar gidilip çözümlerin grafikleri verilecektir.

Tez dört bölümden ibaret olup, 1. Bölümde konuya giriş yapılarak çalışmanın motivasyonu verilecektir. Bölüm 2'de bu çalışmada kullanılan genel kavramlar tanıtılacaktır. Bölüm 3'de Homotopi Pertürbasyon tekniği ile yukarıda bahsi geçen denklemlerin çözümleri elde edilip basit dallanma noktaları verilecektir. Bölüm 4 ise elde edilen sonuçlar kısaca sunulacaktır.

BÖLÜM II

GENEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde, Lineer olmayan DSW, DS ve MBBM denklemlerinin ve bu denklemlere ait çözümleri elde etmek için kullanılacak Homotopi Pertürbasyon metoduna ait kavramlar ile birlikte tezin genelinde kullanılan tanımlara yer verilecektir.

Tanım 2.1. x ve t iki bağımsız değişken ve $u = u(x, t)$ bağımlı değişken olmak üzere bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini barındıran kısmi türevli diferansiyel denklemin kapalı formu

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}, \dots) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. x bağımsız değişken, $y = y(x)$ ise bağımlı değişken olmak üzere bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevleri ise $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ olmak üzere adi türevli diferansiyel denklemin kapalı formu

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3. Homotopi kavramı ilk olarak Poincare tarafından verilmiştir (Poincare, 1895). $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ Y 'de sürekli dönüşümler, $I = [0, 1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H : X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g homotopiktir denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir homotopidir denir (Poincare, 1895).

Tanım 2.4. $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $t \in I$ ve $I = [0, 1]$ olsun. Her $a \in A$ için $H(a, t) = f(a) = g(a)$ olacak biçimde bir $H : X \times I \rightarrow Y$ homotopisi varsa f ve g dönüşümleri A alt kümesine göre homotopiktir denir (Poincare, 1895).

Tanım 2.5. (Drinfeld-Sokolov Wilson Sistemi (DSW))

U ve V bağımlı değişkenler, x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemi (He, 2005a; Yao, 2005; Esmail ve Ahmad, 2011)

$$u_t + 3vv_x = 0 \quad (2.1a)$$

$$v_t + 2v_{xxx} + 2uv_x + u_xv = 0 \quad (2.1b)$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.6. (Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi (DS))

U ve V bağımlı değişkenler ve x ve t bağımsız değişkenler, a , b ve k keyfi sabitler olmak üzere Drinfeld-Sokolov denklem sistemi

$$U_t + (V^2)_x = 0 \quad (2.2)$$

$$V_t - aV_{xxx} + 3bU_xV + 3kUV_x = 0$$

şeklinde verilir (Dağhan vd., 2015).

Tanım 2.7. (Benjamin-Bona-Mahony Denklemi (BBM))

Farklı fiziksel sistemlerin matematiksel modellerinden biri olan Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ilk defa Benjamin ve arkadaşları (Benjamin vd., 1972) tarafından Korteweg-de Vries (KdV) denklemine alternatif model olarak

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde yazılmıştır.

Tanım 2.8. (Modifiye Benjamin-Bona-Mahoni Denklemi (MBBM))

MBBM denklemi bir çok fiziksel sistemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır. Modifiye versiyonlarından biri

$$U_t + \alpha U_x + \beta U^2 U_x - \gamma U_{xxt} = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde dir. α , β ve γ keyfi reel sabitlerdir (Tso, 1996).

Tanım 2.9. (Korteweg-de Vries (KdV))

Korteweg-de Vries Denklemi, bazı fiziksel olayları ifade eden kısmi türevli bir denklemdir ve

$$U_t + UU_x + \delta U_{xxx} = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde verilir (Wazwaz, 2006a).

Tanım 2.10. (Homotopi Pertürbasyon Metodu)

A bir diferansiyel operatör olsun

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi ve B sınır operatörü için

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma$$

sınır şartları olsun (He, 1999). Ayrıca Γ, Ω bölge sınırı olacak şekilde $f(r)$ analitik bir fonksiyon olsun. Böylece, A diferansiyel operatörünü L lineer ve N lineer olmayan operatörler olarak iki kısma ayırılın. Böylece

$$L(u) + N(u) = f(r), \quad r \in \Omega \quad (2.6)$$

eşitliği biçiminde yazılır (He, 1999). Buradan

$$v(r, p) = \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$$

şeklinde bir homotopi tanımlanır (He, 1999). Bu ise

$$H(v, p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[L(v) + N(v) - f(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.7)$$

ya da

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (2.8)$$

şeklinde eşitlikle verilir. Burada $r \in \Omega$ ve $p \in [0, 1]$ içine gömülü parametredir. u_0 sınır koşullarını sağlayan başlangıç yaklaşık çözümdür. (2.7) ve (2.8) denklemlerinden

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.9)$$

$$H(v, 1) = L(v) + N(v) - f(r) = 0 \quad (2.10)$$

denklemleri elde edilir (He, 1999). p parametresinin 0'dan 1'e değişmesi $V(r, p)$ fonksiyonun u_0 'dan u_r 'ye değişmesi demektir. Topolojide bu değişim $L(v) - L(u_0)$ ve

$L(v) + N(v) - f(r)$ homotopik olarak adlandırılır (He, 1999). (2.9) ve (2.10) denklemlerinin çözümlerinin p cinsinden bir kuvvet serisi

$$\begin{aligned} v &= v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots \\ L(u) + N(u) &= f(r), r \in \Omega \end{aligned} \tag{2.11}$$

olarak ifade edilir. İfade edilen (2.11) denklemi için yaklaşık çözüm

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

şeklindedir (He, 1999).

BÖLÜM III

HOMOTOPI PERTÜRBASYON METODUNUN UYGULAMALARI

3.1. Giriş

Bu bölümde Lineer olmayan Drinfeld-Sokolov-Wilson, Drinfeld-Sokolov ve Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin pertürbatif çözümleri Homotopi pertürbasyon metodunu kullanılarak elde edilecek ve birinci iterasyon ile basit dallanma noktaları verilecektir.

3.2. DSW Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Tekniği ile Çözümü

(2.1a) ve (2.1b) ile verilen DSW denkleminde

$$u(x,t) = U(\eta), \quad v(x,t) = V(\eta), \quad \eta = kx + ct \quad (3.1)$$

değişken dönüşümü yapılırsa, DSW denklem sistemi aşağıdaki adi türevli denkleme dönüşür (He, 2005a).

$$cU' + 3kVV' = 0 \quad (3.2a)$$

$$cV' + 2k^3V''' + 2kUV' + kU'V = 0 \quad (3.2b)$$

Burada $'' = \frac{d}{d\eta}$ dir. (3.2a) denklemini tam diferansiyel denklem olup, integre edilirse

$$cU + \frac{3}{2}kV^2 + s = 0 \quad (3.2c)$$

elde edilir (He, 2005a). Burada s keyfi integrasyon sabitidir. $s = 0$ için (3.2c) denklemini (3.2b) de yerine yazılır ve integre edilirse, d keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$V'' + \frac{c}{2k^3}V - \frac{1}{ck}V^3 + d = 0 \quad (3.3)$$

denklemine ulaşılır. $d=0$ durumunda (3.3) denklemine homotopi pertürbasyon tekniği uygulanacaktır (He, 2005a). Homotopi pertürbasyon metodu (He, 1999; He, 2000; He; 2005b; El-Shahed; 2005) (3.3) denklemine uygulandığında

$$V'' + \frac{c}{2k^3}V - \frac{1}{ck}pV^3 = 0, \quad p \in [0,1] \quad (3.4)$$

şeklinde bir homotopi elde edilir (He, 2005a).

$p=0$ olduğunda (3.4) denklemini lineer bir denklemdir. Ayrıca $p=1$ olduğunda da (3.3) ile verilen orjinal lineer olmayan denklem haline gelir. Böylece p 'nin sıfırdan bire değişimi lineer osilatörden orjinal non lineer denkleme kadardır (He, 2005a).

Homotopi pertürbasyon metoduna göre (3.4) denkleminin p 'nin serisi halinde çözümü:

$$V_0 = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + \dots \quad (3.5)$$

lineer terimin katsayısı p 'nin serisi halinde yazılmaktadır (He, 2005b; El-Shahed, 2005; He, 2002).

$$\frac{c}{2k^3} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + \dots \quad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6) nolu denklemleri (3.4) nolu denklemde yerine yazıldığında p 'nin katsayılarına göre lineer denklemler bir kaç seri halinde yazılarak

$$V_0'' + \omega^2V_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$V_1'' + \omega^2V_1 + \omega_1V_0 - \frac{1}{ck}V^3 = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir (He, 2005a). (3.7) nolu denklemini $V_0(0) = A$ ve $V_0'(0) = 0$ başlangıç şartı ile çözümlerse

$$V_0 = A \cos \omega \eta \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir. (3.9) denklemini (3.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \left(\omega_1 - \frac{3A^2}{4ck}\right) A \cos \omega \eta - \frac{A^3}{4ck} \cos 3\omega \eta = 0 \quad (3.10)$$

denkleminde ulaşılır (He, 2005a). Eğer $\omega_1 - \frac{3A^2}{4ck} \neq 0$ olduğunda (3.10) nolu denklemin her çözümü bir seküler terim içerecektir. O halde

$$\omega_1 = \frac{3A^2}{4ck} \quad (3.11)$$

gerekmektedir. $\cos \omega \eta$ terimini (3.10) nolu denklemden tamamıyla çıkarıldığında, denklem

$$V_1'' + \omega^2 V_1 - \frac{A^3}{4ck} \cos 3\omega \eta = 0 \quad (3.12)$$

biçimine gelmektedir. (3.11) nolu denklem göz önüne alındığında (3.12) denkleminin çözümü

$$V_1 = -\frac{A^3}{32ck\omega^2} (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta) \quad (3.13)$$

elde edilir (He; 2005).

Birinci yaklaşım yeterli ise, $p=1$ değerini (3.5) ve (3.6) nolu denklemlerde yerine yazdığımız zaman

$$V = V_0 + V_1 \quad (3.14)$$

$$V = A \cos \omega \eta - \frac{A^3}{32ck\omega^2} (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta) \quad (3.14b)$$

sonucu elde edilir (He, 2005a) ve

$$\frac{c}{2k^3} = \omega^2 + \frac{3A^2}{4ck} \quad (3.15)$$

(3.15) nolu denklem

$$\omega^2 = \frac{c}{2k^3} - \frac{3A^2}{4ck} \quad (3.16)$$

biçiminde yazıldığında $\omega^2 \geq 0$ olacağından $c < 1.22kA$ eşitsizliği gerçekleştiğinde yukarıdaki denklemin çözümü yoktur. Fakat $c > 1.22kA$ eşitsizliği gerçekleştiğinde (3.16) nolu denklem

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{2k^3} - \frac{3A^2}{4ck}} \quad (3.17)$$

biçiminde elde edilir. $c = 1.22kA$ olduğunda basit dallanma meydana gelir (He, 2005a). (3.14b) denklemini ile verilen çözüm (3.2c) denkleminde yerine yazılırsa denklem takımının U çözümü de elde edilmiş olur.

3.3. DS Denklem Sisteminin Homotopi Pertürbasyon Tekniği ile Çözümü

(2.2) denkleminde verilen kısmi türevli denklem sistemine $\eta = x - \beta t, u = U(\eta), v = V(\eta)$ dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem sistemine dönüşür (Daghan v.d., 2015).

$$-\beta U' + (V^2)' = 0 \quad (3.18a)$$

$$\beta V' + aV''' - 3bU'V - 3kUV' = 0 \quad (3.18b)$$

Burada $U' = \frac{dU}{d\eta}$ ve $V' = \frac{dV}{d\eta}$ dir. (3.18a) da integral alınırsa

$$U = \frac{1}{\beta}(V^2 + c) \quad (3.19)$$

elde edilir. Burada c keyfi bir integrasyon sabitidir. (3.19) denklemi (3.18b) denkleminde yerine yazılır ve integrali alınırsa

$$V'' + \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta}V - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta}V^3 + \frac{e}{\alpha\beta} = 0, \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada e keyfi integrasyon sabitidir (Daghan v.d., 2015). $c=0$ için (3.20) denkleminde verilen Drinfeld-Sokolov sisteminin çözümü tanh ve sine-cosine metodu (Wazwaz, 2006b) ile, genelleştirilmiş tanh metodu ile de (El-Wakil ve Abdou, 2007) kullanılarak elde edilmiştir. Bu çalışmada $c \neq 0$ için çözümler homotopi pertürbasyon tekniği kullanılarak elde edilecektir.

3.3.1. Birinci iterasyon

$p \in [0,1]$ olmak üzere (He, 1999; He, 2000; He, 2005; El-Shahed; 2005) homotopi pertürbasyon metodu (3.20) denkleminde uyguladığında

$$V'' + \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta}V - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta}pV^3 + \frac{e}{\alpha\beta} = 0, p \in [0,1] \quad (3.21)$$

denklemi elde edilir. $p=0$ olduğu zaman (3.21) denkleminin lineer bir denklem haline geldiği açıktır. $p=1$ olduğu zaman orijinal (3.20) denkleminde ulaşılır. Homotopi pertürbasyon metoduna göre, (3.21) denkleminin çözümünün

$$V = V_0 + pV_1 \quad (3.22)$$

şeklinde bir p serisi olduğunu varsayalım. Ayrıca (3.21) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1, \quad (3.23a)$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1. \quad (3.23b)$$

olmak üzere p 'nin bir serisi biçiminde yazılır (He, 2005b; El-Shahed, 2005; He, 2002). (3.22), (3.23a) ve (3.23b) denklemini (3.21) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0, \quad (3.24a)$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.24b)$$

elde edilir. (3.24a) denklemini $V_0(0) = A$ ve $V_0'(0) = 0$ başlangıç şartı ile çözümlerse

$$V_0 = A \cos \omega\eta \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. (3.25) denklemini (3.24b) de yerine yazılırsa

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \left(\omega_1 - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} \right) A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{4\alpha\beta} \cos 3\omega\eta + c_1 = 0 \quad (3.26)$$

sonucu elde edilir.

$$\omega_1 - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} = 0 \quad \text{olduğu sürece unutulmamalıdır ki (3.26)'nın her bir çözümü}$$

seküler (karakteristik) bir terim içerir.

Böylece

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}, \quad (3.27)$$

$$c_1 = 0$$

(3.26) denklemindeki $\cos \omega\eta$ terimlerini tamamen ortadan kaldırılabilir. Bu işlem ile birlikte denklem

$$V_1'' + \omega^2 V_1 - \frac{A^3(2b+k)}{4\alpha\beta} \cos 3\omega\eta + c_1 = 0 \quad (3.28)$$

olarak bulunur. (3.28) denkleminde $V_1(0) = 0$ ve $V_1'(0) = 0$ başlangıç şartları uygulanırsa

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir.

Eğer, birinci mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.22), (3.23a) ve (3.23b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$V = V_0 + V_1$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \omega_1,$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = c_1.$$

$$V = A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$U = \frac{1}{\beta} \left((A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta))^2 + c \right)$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}$$

$$e = 0$$

çözümleri elde edilir. Burada

$$\omega^2 = \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}$$

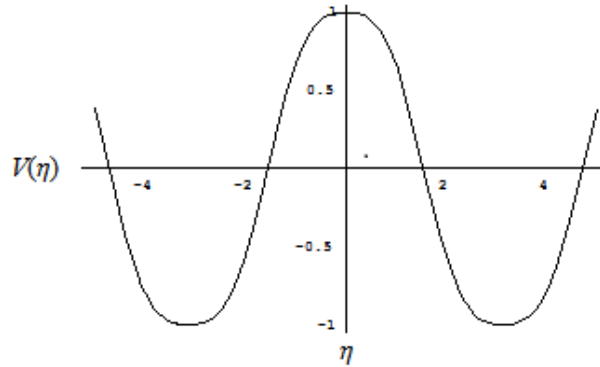
şeklinde yazılır.

DSW denklem sistemi için bir önceki bölümde hesaplanan basit dallanma noktası hesabı (He, 2005a) bu bölümde DS denklem sistemi için ise şu şekildedir.

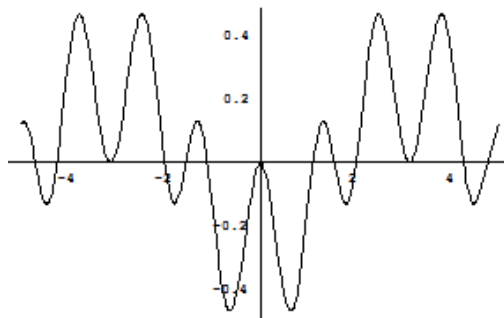
$\omega^2 \geq 0$ olacağından $c < \frac{1}{3k} \beta^2 - \frac{A^2}{4k} (2b+k)$ eşitsizliği gerçekleştiğinde yukarıdaki denklemin çözümü yoktur. Fakat $c > \frac{1}{3k} \beta^2 - \frac{A^2}{4k} (2b+k)$ eşitsizliği gerçekleştiğinde denklemin çözümü

$$\omega = \sqrt{\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece c 'de basit dallanma oluşur. Birinci iterasyon sonucunda elde edilen çözüm ($V(\eta)$) ve analitik ifadenin denklemde yerine yazılmasıyla oluşan nümerik hata aşağıda Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 deki grafiklerde sunulmuştur.



Şekil 3.1. DS denklem sisteminin birinci iterasyon ile çözümü



Şekil 3.2. DS denklem sistemi için birinci iterasyondaki nümerik fark

3.3.2. İkinci iterasyon

Homotopi pertürbasyon formu ikinci iterasyon için;

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 \quad (3.30)$$

şeklinde verilir. Ayrıca (3.21) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimi

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2, \quad (3.31a)$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2. \quad (3.31b)$$

p 'nin bir serisi biçiminde yazılır. (3.30), (3.31a) ve (3.31b) denklemleri (3.21) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0, \quad (3.32a)$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.32b)$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 V_0 + \omega_1 V_1 + c_2 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^2 V_1 = 0 \quad (3.32c)$$

denklemleri elde edilir.

$$V_0 = A \cos \omega \eta$$

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}$$

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

daha önceden elde edilen bu denklemler (3.32c) denkleminde yerine yazılırsa

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 A \cos \omega \eta + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} \cdot -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + c_2$$

$$- \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} A^2 \cos^2 \omega\eta \cdot \left(-\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} \right) (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) = 0$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 A \cos \omega \eta - \frac{3A^5(2b+k)^2}{128\alpha^2\beta^2\omega^2} \cdot (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$+ \frac{3A^5(2b+k)^2}{32\alpha^2\beta^2\omega^2} \cdot \cos^2 \omega\eta \cdot (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + c_2 = 0$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + A \cos \omega \eta \left(\omega_2 - \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \right) - \frac{3A^5(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \cos 3\omega\eta$$

$$+ \frac{3A^5(2b+k)^2}{32\alpha^2\beta^2\omega^2} \cdot \cos^2 \omega\eta \cdot (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + c_2 = 0 \quad (3.33)$$

$$\omega_2 = \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \quad (3.34)$$

(3.33) denklemindeki $\cos \omega\eta$ terimleri yok edilirse, bu işlem ile birlikte denklem

$$V_2'' + \omega^2 V_2 - \frac{3A^5(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \cos 3\omega\eta + \frac{3A^5(2b+k)^2}{32\alpha^2\beta^2\omega^2} \cdot \cos^2 \omega\eta \cdot (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + c_2 = 0$$

olarak elde edilir. Buradan

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \frac{3A^5(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta) + c_2 = 0 \quad (3.35)$$

denklemini elde edilir.

(3.35) denkleminde $V_2(0) = 0$ ve $V_2'(0) = 0$ başlangıç şartları ile çözümlerse

$$V_2 = \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) \quad (3.36)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer ikinci mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.30), (3.31a) ve (3.31b) denklemlerinde $p=1$ yazılırsa

$$V = V_0 + V_1 + V_2$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \omega_1 + \omega_2,$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = c_1 + c_2 = 0$$

$$V = A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$U = \frac{1}{\beta} \left(\left(A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) \right)^2 + c \right)$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} + \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2}$$

$$e = 0$$

çözümleri elde edilir.

3.3.3. Üçüncü iterasyon

Homotopi pertürbasyon formu (3.21) denklemi için;

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + p^3V_3 \quad (3.37)$$

eşitliği şeklinde bir p serisi osun. Ayrıca (3.21) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimi

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + p^3\omega_3, \quad (3.38a)$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3. \quad (3.38b)$$

p 'nin bir serisi biçiminde yazılsın. (3.37), (3.38a) ve (3.38b) denklemleri (3.21) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0, \quad (3.39a)$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.39b)$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 V_0 + \omega_1 V_1 + c_2 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^2 V_1 = 0 \quad (3.39c)$$

$$V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 V_0 + \omega_2 V_1 + \omega_1 V_2 + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_0 \cdot V_1^2 + V_0^2 \cdot V_2) = 0 \quad (3.39d)$$

denklemleri elde edilir.

$$V_0 = A \cos \omega \eta$$

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$V_2 = \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta)$$

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}$$

$$\omega_2 = \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2}$$

daha önceden elde edilen bu denklemler (3.39d) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 A \cos \omega \eta + \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \cdot \left(-\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} \right) (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \\ & + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} \cdot \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta) + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} \cdot \\ & \left(A \cos \omega \eta \cdot \frac{A^6(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)^2 + A^2 \cos^2 \omega \eta \cdot \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 A \cos \omega \eta - \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cdot \cos 3\omega \eta + \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cos \omega \eta \\
& + \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cos 5\omega \eta - \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cos \omega \eta + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha \beta} \cdot \\
& \left(A \cos \omega \eta \cdot \frac{A^6(2b+k)^2}{2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta)^2 + A^2 \cos^2 \omega \eta \cdot \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta) \right) = 0
\end{aligned}$$

$$V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 A \cos \omega \eta - \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cdot \cos 3\omega \eta + \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cos 5\omega \eta + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha \beta} \cdot \quad (3.40)$$

$$\left(A \cos \omega \eta \cdot \frac{A^6(2b+k)^2}{2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta)^2 + A^2 \cos^2 \omega \eta \cdot \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta) \right) = 0$$

$$\omega_3 = 0 \quad (3.41)$$

olarak bulunur. (3.40) denklemindeki $\cos \omega \eta$ terimleri yok edilirse

$$\begin{aligned}
& V_3'' + \omega^2 V_3 + \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cdot (\cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta) + c_3 \\
& - \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{10} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cos \omega \eta \left((\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta)^2 + \cos \omega \eta (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta) \right) = 0
\end{aligned}$$

$$V_3'' + \omega^2 V_3 + \frac{3A^7(2b+k)^3}{2^{12} \alpha^3 \beta^3 \omega^4} \cdot (-2 \cos 7\omega \eta + 2 \cos 3\omega \eta) = 0$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denkleme $V_3(0) = 0$ ve $V_3'(0) = 0$ başlangıç şartları uygulanırsa

$$V_3 = -\frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15} \alpha^3 \beta^3 \omega^6} (\cos 7\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta + 5 \cos \omega \eta) \quad (3.42)$$

çözümü elde edilir.

Eğer üçüncü mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.37), (3.38a) ve (3.38b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$V = A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta) - \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6 \cos 3\omega\eta + 5 \cos \omega\eta)$$

$$U = \frac{1}{\beta} \left(\left(A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta) - \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6 \cos 3\omega\eta + 5 \cos \omega\eta) \right)^2 + c \right)$$

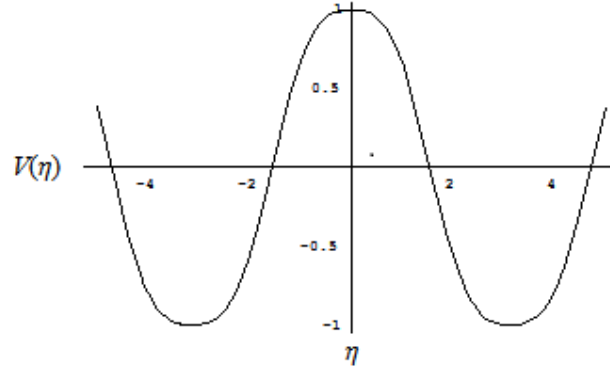
$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} + \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} + 0$$

$$e = 0$$

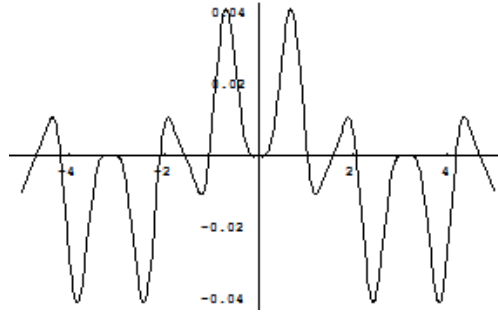
denklemleri elde edilir ve

$$\omega^2 = \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} - \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.3. DS denklem sisteminin üçüncü iterasyon ile çözümü



Şekil 3.4 DS denklem sistemi için üçüncü iterasyondaki nümerik fark

3.3.4. Dördüncü iterasyon

Homotopi pertürbasyon formu dördüncü iterasyon için (3.21) denklemine

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + p^3V_3 + p^4V_4 \quad (3.43)$$

şeklinde uygulanabilir. Ayrıca (3.21) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimi

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + p^3\omega_3 + p^4\omega_4, \quad (3.44a)$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 + p^4c_4. \quad (3.44b)$$

p 'nin bir serisi biçiminde yazılır. (3.43), (3.44a) ve (3.44b) denklemleri (3.21) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0, \quad (3.45a)$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.45b)$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 V_0 + \omega_1 V_1 + c_2 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^2 V_1 = 0 \quad (3.45c)$$

$$V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 V_0 + \omega_2 V_1 + \omega_1 V_2 + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_0 \cdot V_1^2 + V_0^2 \cdot V_2) = 0 \quad (3.45d)$$

$$V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 V_0 + \omega_3 V_1 + \omega_2 V_2 + \omega_1 V_3 + c_4 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} (V_1^3 + 6V_0 V_1 V_2 + 3V_0^2 V_3) = 0 \quad (3.45e)$$

denklemleri elde edilir.

$$V_0 = A \cos \omega \eta$$

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$V_2 = \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta)$$

$$V_3 = -\frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta)$$

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}$$

$$\omega_2 = \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2}$$

$$\omega_3 = 0$$

daha önceden elde edilen bu denklemler (3.45e) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 A \cos \omega \eta + \frac{3A^4 (2b+k)^2}{2^7 \alpha^2 \beta^2 \omega^2} \cdot \frac{A^5 (2b+k)^2}{2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta) \\
& - \frac{3A^2 (2b+k)^2}{2^2 \alpha \beta} \cdot \frac{A^7 (2b+k)^3}{2^{15} \alpha^3 \beta^3 \omega^6} (\cos 7\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta + 5 \cos \omega \eta) - \frac{(2b+k)}{\alpha \beta} \\
& \left(-\frac{A^9 (2b+k)^3}{2^{15} \alpha^3 \beta^3 \omega^6} (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta)^3 - \frac{6A \cdot A^3 (2b+k) \cdot A^5 (2b+k)^2}{2^5 \alpha \beta \omega^2 \cdot 2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} \cos \omega \eta \cdot \right. \\
& \left. (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta) \cdot (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta) - \frac{3A^2 A^7 (2b+k)^3}{2^{15} \alpha^3 \beta^3 \omega^6} \cdot \cos^2 \omega \eta \right. \\
& \left. (\cos 7\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta + 5 \cos \omega \eta) \right) + c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 A \cos \omega \eta + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (-3 \cos 7\omega \eta + 3 \cos 5\omega \eta + 18 \cos 3\omega \eta - 18 \cos \omega \eta) \\
& - \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{15} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \left((\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta)^3 - 6 \cos \omega \eta \cdot (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta) \cdot (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta) \right. \\
& \left. - \cos^2 \omega \eta \cdot (\cos 7\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta + 5 \cos \omega \eta) \right) + c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 A \cos \omega \eta + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (-3 \cos 7\omega \eta + 3 \cos 5\omega \eta + 18 \cos 3\omega \eta - 18 \cos \omega \eta) \\
& - \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} (\cos 9\omega \eta - 3 \cos 7\omega \eta + 8 \cos 3\omega \eta - 6 \cos \omega \eta + 6 \cos 9\omega \eta - 18 \cos 5\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta \\
& + 18 \cos \omega \eta + 3 \cos 9\omega \eta + 6 \cos 7\omega \eta - 15 \cos 5\omega \eta - 21 \cos 3\omega \eta + 27 \cos \omega \eta) + c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 A \cos \omega \eta + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (-3 \cos 7\omega \eta + 3 \cos 5\omega \eta + 18 \cos 3\omega \eta - 18 \cos \omega \eta \\
& + \cos 9\omega \eta - 3 \cos 7\omega \eta + 8 \cos 3\omega \eta - 6 \cos \omega \eta + 6 \cos 9\omega \eta - 18 \cos 5\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta \\
& + 18 \cos \omega \eta + 3 \cos 9\omega \eta + 6 \cos 7\omega \eta - 15 \cos 5\omega \eta - 21 \cos 3\omega \eta + 27 \cos \omega \eta) + c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 A \cos \omega \eta + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (10 \cos 9\omega \eta - 30 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta + 21 \cos \omega \eta) + c_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
& V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 A \cos \omega \eta + \frac{21A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cos \omega \eta \\
& + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (10 \cos 9\omega \eta - 30 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta) + c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$V_4'' + \omega^2 V_4 + A \cos \omega \eta \left(\omega_4 + \frac{21A^8 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \right) + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (10 \cos 9\omega \eta - 30 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta) + c_4 = 0 \quad (3.46)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemden

$$\omega_4 = -\frac{21A^8 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \quad (3.47)$$

olarak bulunur. (3.46) denklemindeki $\cos \omega \eta$ terimleri yok edilirse

$$V_4'' + \omega^2 V_4 + \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{17} \alpha^4 \beta^4 \omega^6} \cdot (10 \cos 9\omega \eta - 30 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta) + c_4 = 0$$

denklemini elde edilir. Elde edilen denklem $V_4(0) = 0$ ve $V_4'(0) = 0$ başlangıç şartları altında çözümlürse

$$V_4 = \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{20} \alpha^4 \beta^4 \omega^8} \cdot (\cos 9\omega \eta - 10 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta + 10 \cos \omega \eta) \quad (3.48)$$

$$c_4 = 0$$

sonucu elde edilir. Eğer dördüncü iterasyon yeterli olursa o zaman (3.43), (3.44a) ve (3.44b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4,$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$V = A \cos \omega \eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}(\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta) - \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6}(\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) + \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8}(\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta)$$

$$U = \frac{1}{\beta} \left((A \cos \omega \eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2}(\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4}(\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta) - \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6}(\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) + \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8}(\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta))^2 + c \right)$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} + \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} + 0 - \frac{21A^8(2b+k)^4}{2^{17}\alpha^4\beta^4\omega^6}$$

$e = 0$

denklemleri elde edilir ve

$$\omega^2 = \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} - \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} + \frac{21A^8(2b+k)^4}{2^{17}\alpha^4\beta^4\omega^6}$$

şeklinde yazılır.

3.3.5. Beşinci iterasyon

(3.21) denklemi beşinci iterasyon için;

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + p^3V_3 + p^4V_4 \quad (3.49)$$

şeklinde bir pertürbasyona sahip olsun. Burada (3.21) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimi

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + p^3\omega_3 + p^4\omega_4 + p^5\omega_5 \quad (3.50a)$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 + p^4c_4 + p^5c_5. \quad (3.50b)$$

p 'nin bir serisi olarak verilsin. (3.49), (3.50a) ve (3.50b) denklemleri (3.21) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0, \quad (3.51a)$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.51b)$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 V_0 + \omega_1 V_1 + c_2 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^2 V_1 = 0 \quad (3.51c)$$

$$V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 V_0 + \omega_2 V_1 + \omega_1 V_2 + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_0 \cdot V_1^2 + V_0^2 \cdot V_2) = 0 \quad (3.51d)$$

$$V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 V_0 + \omega_3 V_1 + \omega_2 V_2 + \omega_1 V_3 + c_4 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} (V_1^3 + 6V_0 V_1 V_2 + 3V_0^2 V_3) = 0 \quad (3.51e)$$

$$V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 V_0 + \omega_4 V_1 + \omega_3 V_2 + \omega_2 V_3 + \omega_1 V_4 + c_5 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_1^2 V_2 + V_0 V_2^2 + 2V_0 V_1 V_3 + V_0^2 V_4) = 0 \quad (3.51f)$$

denklemleri elde edilir.

$$V_0 = A \cos \omega \eta$$

$$V_1 = -\frac{A^3 (2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$V_2 = \frac{A^5 (2b+k)^2}{2^{10} \alpha^2 \beta^2 \omega^4} (\cos 5\omega\eta + \cos \omega\eta)$$

$$V_3 = -\frac{A^7 (2b+k)^3}{2^{15} \alpha^3 \beta^3 \omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6 \cos 3\omega\eta + 5 \cos \omega\eta)$$

$$V_4 = \frac{A^9 (2b+k)^4}{2^{20} \alpha^4 \beta^4 \omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10 \cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10 \cos \omega\eta)$$

$$\omega_1 = \frac{3A^2 (2b+k)}{4\alpha\beta}$$

$$\omega_2 = \frac{3A^4 (2b+k)^2}{2^7 \alpha^2 \beta^2 \omega^2}$$

$$\omega_3 = 0$$

daha önceden elde edilen bu denklemler (3.51f) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{21A^8(2b+k)^4}{2^{17}\alpha^4\beta^4\omega^6} \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \\
& - \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) \\
& + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} \cdot \\
& \left(\frac{A^6(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)^2 \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) \right. \\
& \left. + A \cos \omega\eta \cdot \frac{A^{10}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta)^2 \right. \\
& \left. + 2A \cos \omega\eta \cdot \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \cdot \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) \right. \\
& \left. + A^2 \cos^2 \omega\eta \cdot \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) \right) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{21A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \\
& - \frac{3A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) \\
& + \frac{3A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} \cdot \\
& \left(\frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)^2 (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) \right. \\
& \left. + \frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta)^2 \cdot \cos \omega\eta \right. \\
& \left. + \frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cos \omega\eta (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \cdot (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) \right. \\
& \left. + \frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cos^2 \omega\eta \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) \right) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{21A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \\
& - \frac{3A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) \\
& + \frac{3A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) + \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} \cdot \\
& \left(\frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \frac{1}{2^2} (-3\cos 11\omega\eta + 6\cos 9\omega\eta + \cos 7\omega\eta - 12\cos 5\omega\eta - 3\cos 3\omega\eta + 12\cos \omega\eta) \right. \\
& + \frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \frac{1}{2^2} (-3\cos 11\omega\eta - 3\cos 9\omega\eta + 6\cos 7\omega\eta + 12\cos 5\omega\eta + 3\cos 3\omega\eta - 15\cos \omega\eta) \\
& + \frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \frac{1}{2^2} (-6\cos 11\omega\eta + 48\cos 7\omega\eta + 30\cos 5\omega\eta - 108\cos 3\omega\eta + 96\cos \omega\eta) \\
& \left. + \frac{A^{11}(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \frac{1}{2^2} (-3\cos 11\omega\eta - 6\cos 9\omega\eta + 27\cos 7\omega\eta + 63\cos 5\omega\eta + 6\cos 3\omega\eta - 87\cos \omega\eta) \right) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{21A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) \\
& - \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (3\cos 7\omega\eta - 18\cos 3\omega\eta + 15\cos \omega\eta) \\
& + \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} \cdot (3\cos 9\omega\eta - 30\cos 5\omega\eta - 3\cos 3\omega\eta + 30\cos \omega\eta) + \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} \\
& (-3\cos 11\omega\eta + 6\cos 9\omega\eta + \cos 7\omega\eta - 12\cos 5\omega\eta - 3\cos 3\omega\eta + 12\cos \omega\eta \\
& - 3\cos 11\omega\eta - 3\cos 9\omega\eta + 6\cos 7\omega\eta + 12\cos 5\omega\eta + 3\cos 3\omega\eta - 15\cos \omega\eta \\
& - 6\cos 11\omega\eta + 48\cos 7\omega\eta + 30\cos 5\omega\eta - 108\cos 3\omega\eta + 96\cos \omega\eta \\
& - 3\cos 11\omega\eta - 6\cos 9\omega\eta + 27\cos 7\omega\eta + 63\cos 5\omega\eta + 6\cos 3\omega\eta - 87\cos \omega\eta) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (21\cos 3\omega\eta - 21\cos \omega\eta - 3\cos 7\omega\eta + 18\cos 3\omega\eta - 15\cos \omega\eta \\
& + 3\cos 9\omega\eta - 30\cos 5\omega\eta - 3\cos 3\omega\eta + 30\cos \omega\eta) + \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{22}\alpha^5\beta^5\omega^8} (-3\cos 11\omega\eta + 6\cos 9\omega\eta + \cos 7\omega\eta \\
& - 12\cos 5\omega\eta - 3\cos 3\omega\eta + 12\cos \omega\eta - 3\cos 11\omega\eta - 3\cos 9\omega\eta + 6\cos 7\omega\eta + 12\cos 5\omega\eta + 3\cos 3\omega\eta \\
& - 15\cos \omega\eta - 6\cos 11\omega\eta + 48\cos 7\omega\eta + 30\cos 5\omega\eta - 108\cos 3\omega\eta + 96\cos \omega\eta - 3\cos 11\omega\eta - 6\cos 9\omega\eta \\
& + 27\cos 7\omega\eta + 63\cos 5\omega\eta + 6\cos 3\omega\eta - 87\cos \omega\eta) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{A^{11} (2b+k)^5}{2^{22} \alpha^5 \beta^5 \omega^8} & (21 \cos 3\omega \eta - 21 \cos \omega \eta - 3 \cos 7\omega \eta + 18 \cos 3\omega \eta \\
& - 15 \cos \omega \eta + 3 \cos 9\omega \eta - 30 \cos 5\omega \eta - 3 \cos 3\omega \eta + 30 \cos \omega \eta - 3 \cos 11\omega \eta + 6 \cos 9\omega \eta + \cos 7\omega \eta \\
& - 12 \cos 5\omega \eta - 3 \cos 3\omega \eta + 12 \cos \omega \eta - 3 \cos 11\omega \eta - 3 \cos 9\omega \eta + 6 \cos 7\omega \eta + 12 \cos 5\omega \eta + 3 \cos 3\omega \eta \\
& - 15 \cos \omega \eta - 6 \cos 11\omega \eta + 48 \cos 7\omega \eta + 30 \cos 5\omega \eta - 108 \cos 3\omega \eta + 96 \cos \omega \eta - 3 \cos 11\omega \eta - 6 \cos 9\omega \eta \\
& + 27 \cos 7\omega \eta + 63 \cos 5\omega \eta + 6 \cos 3\omega \eta - 87 \cos \omega \eta) + c_5 = 0 \\
V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 \cdot A \cos \omega \eta + \frac{A^{11} (2b+k)^5}{2^{22} \alpha^5 \beta^5 \omega^8} & (-15 \cos 11\omega \eta + 79 \cos 7\omega \eta \\
& + 3 \cos 5\omega \eta - 66 \cos 3\omega \eta) + c_5 = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemden

$$\omega_5 = 0 \tag{3.53}$$

olarak bulunur. (3.52) denklemindeki $\cos \omega \eta$ terimlerini tamamen ortadan kaldırırız. Bu işlem ile birlikte

$$V_5'' + \omega^2 V_5 + \frac{A^{11} (2b+k)^5}{2^{22} \alpha^5 \beta^5 \omega^8} (-15 \cos 11\omega \eta + 79 \cos 7\omega \eta + 3 \cos 5\omega \eta - 66 \cos 3\omega \eta) + c_5 = 0$$

denklemini elde edilir. Elde edilen denklem $V_5(0) = 0$ ve $V_5'(0) = 0$ başlangıç şartları altında çözümlürse;

$$V_5 = -\frac{A^{11} (2b+k)^5}{2^{25} \alpha^5 \beta^5 \omega^{10}} (\cos 11\omega \eta - 14 \cos 7\omega \eta + 69 \cos 3\omega \eta - 56 \cos \omega \eta) \tag{3.54}$$

$$c_5 = 0$$

elde edilir. Eğer beşinci mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.49), (3.50a) ve (3.50b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5,$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

$$V = A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) - \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) + \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) - \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{25}\alpha^5\beta^5\omega^{10}} (\cos 11\omega\eta - 14\cos 7\omega\eta + 69\cos \omega\eta - 56\cos \omega\eta)$$

$$U = \frac{1}{\beta} \left(\left(A \cos \omega\eta - \frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta) + \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta) - \frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta) + \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta) - \frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{25}\alpha^5\beta^5\omega^{10}} (\cos 11\omega\eta - 14\cos 7\omega\eta + 69\cos \omega\eta - 56\cos \omega\eta) \right)^2 + c \right)$$

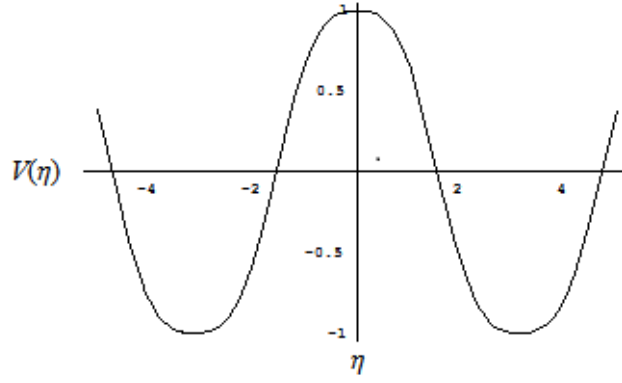
$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} + \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} + 0 - \frac{21A^8(2b+k)^4}{2^{17}\alpha^4\beta^4\omega^6} + 0$$

$$e = 0$$

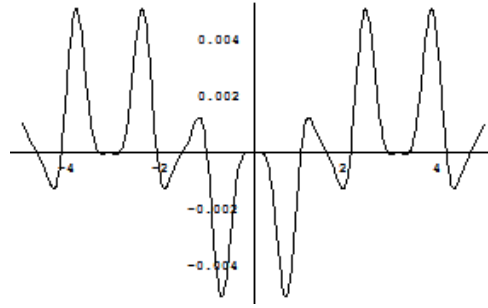
denklemleri elde edilir ve

$$\omega^2 = \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta} - \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2} + \frac{21A^8(2b+k)^4}{2^{17}\alpha^4\beta^4\omega^6}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.5 DS denklem sisteminin beşinci iterasyon ile çözümü



Şekil 3.6. DS denklem sistemi için beşinci iterasyondaki nümerik fark

3.3.6. Altıncı iterasyon

Son olarak, (3.21) denklemini için altıncı iterasyonun

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + p^3V_3 + p^4V_4 + p^5V_5 + p^6V_6 \quad (3.55)$$

eşitliği şeklinde bir p serisi olduğunu varsayalım. Yine burada (3.21) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimi ise

$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + p\omega_1 + p^2\omega_2 + p^3\omega_3 + p^4\omega_4 + p^5\omega_5 + p^6\omega_6 \quad (3.56a)$$

$$\frac{e}{\alpha\beta} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 + p^4c_4 + p^5c_5 + p^6c_6. \quad (3.56b)$$

ile verilsin. (3.55), (3.56a) ve (3.56b) denklemleri (3.21) denkleminde yerine yazıldığında

$$V_0'' + \omega^2 V_0 = 0,$$

$$V_1'' + \omega^2 V_1 + \omega_1 V_0 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^3 + c_1 = 0$$

$$V_2'' + \omega^2 V_2 + \omega_2 V_0 + \omega_1 V_1 + c_2 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} V_0^2 V_1 = 0$$

$$V_3'' + \omega^2 V_3 + \omega_3 V_0 + \omega_2 V_1 + \omega_1 V_2 + c_3 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_0 \cdot V_1^2 + V_0^2 \cdot V_2) = 0$$

$$V_4'' + \omega^2 V_4 + \omega_4 V_0 + \omega_3 V_1 + \omega_2 V_2 + \omega_1 V_3 + c_4 - \frac{(2b+k)}{\alpha\beta} (V_1^3 + 6V_0 V_1 V_2 + 3V_0^2 V_3) = 0$$

$$V_5'' + \omega^2 V_5 + \omega_5 V_0 + \omega_4 V_1 + \omega_3 V_2 + \omega_2 V_3 + \omega_1 V_4 + c_5 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_1^2 V_2 + V_0 V_2^2 + 2V_0 V_1 V_3 + V_0^2 V_4) = 0$$

$$V_6'' + \omega^2 V_6 + \omega_6 V_0 + \omega_5 V_1 + \omega_4 V_2 + \omega_3 V_3 + \omega_2 V_4 + \omega_1 V_5 + \omega_0 V_6 + c_6 - \frac{3(2b+k)}{\alpha\beta} (V_1 V_2^2 + V_1^2 V_3 + 2V_0 V_2 V_3 + 2V_0 V_1 V_4 + V_0^2 V_5) = 0$$

denklemler $V_0(0) = A$ ve $V_0'(0) = 0$ ve $V_i(0) = 0$ ve $V_i'(0) = 0$ $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olacak şekilde başlangıç şartları ile çözümlerse;

$$V_0 = A \cos \omega \eta$$

$$V_1 = -\frac{A^3(2b+k)}{32\alpha\beta\omega^2} (\cos 3\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$V_2 = \frac{A^5(2b+k)^2}{2^{10}\alpha^2\beta^2\omega^4} (\cos 5\omega\eta - \cos \omega\eta)$$

$$V_3 = -\frac{A^7(2b+k)^3}{2^{15}\alpha^3\beta^3\omega^6} (\cos 7\omega\eta - 6\cos 3\omega\eta + 5\cos \omega\eta)$$

$$V_4 = \frac{A^9(2b+k)^4}{2^{20}\alpha^4\beta^4\omega^8} \cdot (\cos 9\omega\eta - 10\cos 5\omega\eta - \cos 3\omega\eta + 10\cos \omega\eta)$$

$$V_5 = -\frac{A^{11}(2b+k)^5}{2^{25}\alpha^5\beta^5\omega^{10}} (\cos 11\omega\eta - 14\cos 7\omega\eta + 69\cos 5\omega\eta - 56\cos 3\omega\eta)$$

$$V_6 = \frac{A^{13}(2b+k)^6}{2^{30}\alpha^6\beta^6\omega^{12}} (\cos 13\omega\eta - 18\cos 9\omega\eta + 135\cos 5\omega\eta + 18\cos 3\omega\eta - 136\cos \omega\eta)$$

$$\omega_1 = \frac{3A^2(2b+k)}{4\alpha\beta}$$

$$\omega_2 = \frac{3A^4(2b+k)^2}{2^7\alpha^2\beta^2\omega^2}$$

$$\omega_3 = 0$$

$$\omega_4 = -\frac{21A^8(2b+k)^4}{2^{17}\alpha^4\beta^4\omega^6}$$

$$\omega_5 = 0$$

$$\omega_6 = \frac{264A^{12}(2b+k)^6}{2^{27}\alpha^6\beta^6\omega^{10}}$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

Eğer 6. mertebeden yaklaşım çözüm için yeterli ise; (3.55), (3.56a) ve (3.56b) denklemlerinde p yerine 1 yazılırsa

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6,$$

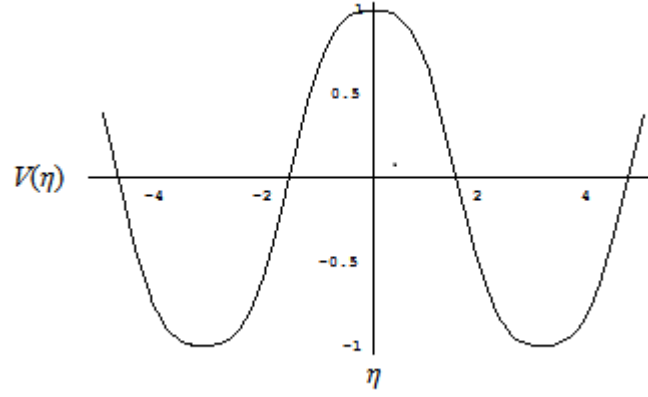
$$\frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} = \omega^2 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6,$$

$$e = 0.$$

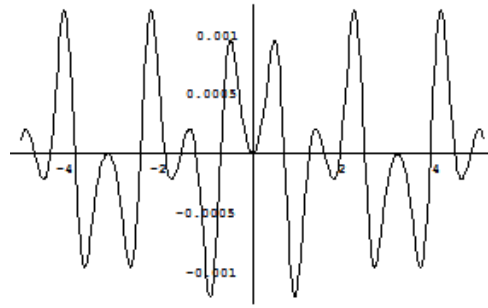
Eğer yukarıdaki denklem düzenlenirse;

$$\omega^2 = \frac{(\beta^2 - 3ck)}{\alpha\beta} - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6),$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.7. DS denklem sisteminin altıncı iterasyon ile çözümü



Şekil 3.8.DS denklem sistemi için altıncı iterasyondaki nümerik fark

3.4. MBBM Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Tekniği ile Çözümü

(2.4) şeklindeki MBBM denklemine $\eta = kx + \omega t, u = U(\eta)$ dönüşümü uygulanırsa

$$-\gamma k^2 \omega U''' + \beta k U^2 U' + (\omega + \alpha k) U' = 0 \quad (3.57)$$

denklemini elde edilir. (3.57) denklemini integre edilirse;

$$U'' - \frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} U - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U^3 - \frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0 \quad (3.58)$$

c integrasyon sabiti olmak üzere bir denklem elde edilir. (2.4) denkleminin tam çözümleri $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -açılım yöntemi kullanılarak elde edilmiştir ve bazı özel çözümler vermiştir (Aslan, 2009). Aslan tarafından elde edilen sonuçlar (Aslan, 2009) diğer kaynaklarla (Layeni ve Akinola, 2010; Yusufoglu ve Bekir, 2008) karşılaştırılarak incelenmiştir.

3.4.1. Birinci iterasyon

MBBM denkleminin dönüşüm uygulandıktan sonra integre edilerek elde edilen (3.58) denkleminin homotopi pertürbasyon metodunu uygulanırsa;

$$U'' - \frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} U - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} p U^3 - \frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0, \quad p \in [0, 1] \quad (3.59)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. $p=0$ olduğu zaman (3.59) denklemi lineer bir denklem olup, $p=1$ olduğu zaman (3.58) denkleminin ta kendisidir. Homotopi pertürbasyon metoduna göre, (3.59) denkleminin çözümünün

$$U = u_0 + p u_1 \quad (3.60)$$

şeklinde bir p serisi olduğunu varsayalım. Daha önce elde edilen (3.59) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimde p 'nin bir serisi biçiminde yazılırsa

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p \sigma_1, \quad (3.61a)$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = p c_1. \quad (3.61b)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen (3.60), (3.61a) ve (3.61b) denklemleri (3.59) denkleminde yerine yazıldığında

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0, \quad (3.62a)$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.62b)$$

elde edilir. $U_0(0) = A$ ve $U_0'(0) = 0$ başlangıç şartları (3.62a) denkleminde uygulanarak çözüm aranır;

$$U_0 = A \cos \sigma \eta \quad (3.63)$$

eşitliği elde edilir. (3.63) denkleminde (3.62b) de yerine yazılırsa

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \left(\sigma_1 - \frac{A^2 \beta}{4\gamma k \omega} \right) A \cos \sigma \eta - \frac{A^3 \beta}{12\gamma k \omega} \cos 3\sigma \eta + c_1 = 0 \quad (3.64)$$

sonucu elde edilir.

$\sigma_1 - \frac{A^2 \beta}{4\gamma k \omega} = 0$ olduğu sürece unutulmamalıdır ki (3.64)'ün her bir çözümü seküler bir terim içerir. Böylece

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{A^2 \beta}{4\gamma k \omega}, \\ c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

(3.64) denklemindeki $\cos \sigma \eta$ terimleri yok edilirse,

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 - \frac{A^3 \beta}{12\gamma k \omega} \cos 3\sigma \eta = 0$$

olarak bulunur. Bu denklemin çözümü $U_1(0) = 0$ ve $U_1'(0) = 0$ başlangıç şartları altında

$$U_1 = -\frac{A^3 \beta}{96\gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir.

Birinci mertebeden çözüm yeterli olduğu görülürse (3.60), (3.61a) ve (3.61b) denklemlerinde $p=1$ yazılır ki bu durumda

$$U = u_0 + u_1$$

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \sigma_1,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = c_1.$$

$$U = A \cos \sigma \eta - \frac{A^3 \beta}{96 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \frac{A^2 \beta}{4 \gamma k \omega}$$

$$c = 0$$

denklemleri elde edilir ve

$$\sigma^2 = -\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} - \frac{A^2 \beta}{4 \gamma k \omega}$$

şeklinde yazılır. $\sigma^2 \geq 0$ olacağından $\alpha < \frac{A^2 \beta}{4} - \frac{\omega}{k}$ eşitsizliği gerçekleştiğinde

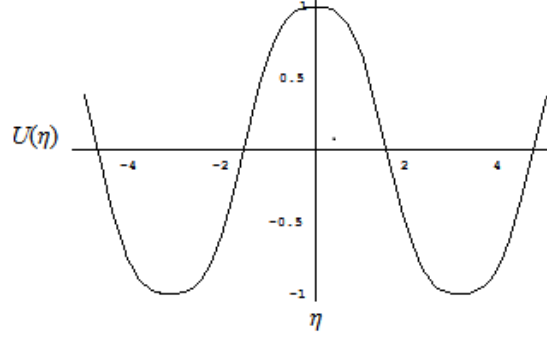
yukarıdaki denklemin çözümü yoktur. Fakat $\alpha > \frac{A^2 \beta}{4} - \frac{\omega}{k}$ eşitsizliği gerçekleştiğinde

denklemin çözümü

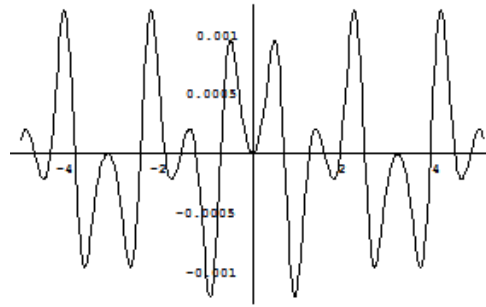
$$\sigma = \sqrt{-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} - \frac{A^2 \beta}{4 \gamma k \omega}}$$

şeklinde elde edilir. Böylece α 'da basit dallanma oluşur.

Bir önceki bölüme olduğu gibi, elde edilen çözüm $U(\eta)$ ve nümerik fark aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 3.9. MBBM denklem sisteminin birinci iterasyon ile çözümü



Şekil 3.10. MBBM denklem sistemi için birinci iterasyondaki nümerik fark

3.4.2. İkinci İterasyon

Homotopi pertürbasyon formu olan (3.59) denklemi için;

$$U = u_0 + pu_1 + p^2u_2 \quad (3.67)$$

şeklinde bir p serisi olduğunu varsayalım. Ayrıca (3.59) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p\sigma_1 + p^2\sigma_2, \quad (3.68a)$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = p c_1 + p^2 c_2. \quad (3.68b)$$

p 'nin bir serisi biçiminde yazılır. (3.67), (3.68a) ve (3.68b) denklemini (3.59) denkleminde yerine yazıldığında

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0, \quad (3.69a)$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.69b)$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 U_0 + \sigma_1 U_1 + c_2 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} U_0^2 U_1 = 0 \quad (3.69c)$$

elde edilir.

$$U_0 = A \cos \sigma \eta$$

$$U_1 = -\frac{A^3 \beta}{96\gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$\sigma_1 = \frac{A^2 \beta}{4\gamma k \omega}$$

daha önceden elde edilen bu denklemler (3.69c) denkleminde yerine yazılırsa

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 A \cos \sigma \eta - \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} \cdot \frac{A^3 \beta}{3 \cdot 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + \frac{\beta}{\gamma k \omega} A^2 \cos^2 \sigma \eta \cdot \frac{A^3 \beta}{3 \cdot 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + c_2 = 0$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 A \cos \sigma \eta - \frac{A^5 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \cdot (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + \frac{A^5 \beta^2}{2^5 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \cdot \cos^2 \sigma \eta \cdot (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + c_2 = 0$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 A \cos \sigma \eta + \frac{A^5 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \cdot (-\cos 3\sigma \eta + \cos \sigma \eta + \cos 5\sigma \eta + \cos 3\sigma \eta - 2 \cos \sigma \eta) + c_2 = 0$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + A \cos \sigma \eta \left(\sigma_2 - \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \right) + \frac{A^5 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \cdot \cos 5\sigma \eta + c_2 = 0 \quad (3.70)$$

$$\sigma_2 = \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \quad (3.71)$$

(3.70) denklemindeki $\cos \sigma \eta$ terimleri ortadan kaldırılırsa

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \frac{A^5 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \cdot \cos 5\sigma \eta + c_2 = 0$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu denklem $U_2(0) = 0$ ve $U_2'(0) = 0$ başlangıç şartları altında çözümlürse

$$U_2 = \frac{A^5 B^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \quad (3.72)$$

$$c_2 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer ikinci mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.67), (3.68a) ve (3.68b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$U = u_0 + u_1 + u_2$$

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \sigma_1 + \sigma_2,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = c_1 + c_2.$$

$$U = A \cos \sigma \eta - \frac{A^3 \beta}{3^1 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \frac{A^2 \beta}{4\gamma k \omega} + \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2},$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0.$$

çözümleri elde edilir.

3.4.3. Üçüncü iterasyon

$p \in [0,1]$ olmak üzere homotopi pertürbasyon metodu (3.58) denkleminde uygulandığında elde edilen (3.59) denklemi için;

$$U = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 \quad (3.73)$$

olacak şekilde bir p serisi kabul edelim. Bunun yanında homotopi pertürbasyon tekniği uygulanarak elde edilen (3.59) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimini p 'nin bir serisi biçiminde yazılırsa

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p \sigma_1 + p^2 \sigma_2 + p^3 \sigma_3, \quad (3.74a)$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = p c_1 + p^2 c_2 + p^3 c_3. \quad (3.74b)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.59) denkleminde elde edilen (3.73), (3.74a) ve (3.74b) denklemleri yerine yazılırlarsa

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0, \quad (3.75a)$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.75b)$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 U_0 + \sigma_1 U_1 + c_2 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} U_0^2 U_1 = 0 \quad (3.75c)$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 U_0 + \sigma_2 U_1 + \sigma_1 U_2 + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_0 U_1^2 + U_0^2 U_2) = 0 \quad (3.75d)$$

elde edilir.

$$U_0 = A \cos \sigma \eta$$

$$U_1 = -\frac{A^3 \beta}{96 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$U_2 = \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$\sigma_1 = \frac{A^2 \beta}{4 \gamma k \omega}$$

$$\sigma_2 = \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2}$$

daha önceden elde edilen bu eşitlikler (3.75d) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 A \cos \sigma \eta - \frac{A^4 \beta^2}{3^2 2^7 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \cdot \frac{A^3 \beta}{3^1 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \\ & + \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} \cdot \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} [\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta] + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} \cdot \\ & \left(A \cos \sigma \eta \cdot \frac{A^6 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 + A^2 \cos^2 \sigma \eta \cdot \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 A \cos \sigma \eta - \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} \cdot \cos 3\sigma \eta + \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} \cos 5\sigma \eta + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} \cdot \\ & \left(A \cos \sigma \eta \cdot \frac{A^6 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 + A^2 \cos^2 \sigma \eta \cdot \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 A \cos \sigma \eta + \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta) + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} \cdot \\ & \left(A \cos \sigma \eta \cdot \frac{A^6 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 + A^2 \cos^2 \sigma \eta \cdot \frac{A^6 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 A \cos \sigma \eta + \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta) + c_3$$

$$- \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{10} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} \cdot (\cos \sigma \eta (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 + \cos^2 \sigma \eta (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)) = 0$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 A \cos \sigma \eta + \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta)$$

$$+ c_3 - \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} \cdot (2 \cos 7\sigma \eta + \cos 5\sigma \eta - 3 \cos 3\sigma \eta) = 0$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 A \cos \sigma \eta + \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} (-2 \cos 7\sigma \eta + 2 \cos 3\sigma \eta) + c_3 = 0 \quad (3.76)$$

denkleminin elde edildiği görülür. Buradan

$$\sigma_3 = 0 \quad (3.77)$$

olarak bulunur. Elde edilen (3.76) denkleminde $\cos \sigma \eta$ terimi yok edilirse;

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \frac{A^7 \beta^3}{3^2 2^{12} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^4} (-2 \cos 7\sigma \eta + 2 \cos 3\sigma \eta) + c_3 = 0$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu denklemin çözümü için $U_3(0) = 0$ ve $U_3'(0) = 0$ başlangıç şartları uygulanırsa

$$U_3 = - \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \quad (3.78)$$

eşitliği elde edilir. Çözüm için üçüncü iterasyon yeterli olursa o zaman $p=1$ (3.73), (3.74a) ve (3.74b) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

$$- \frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = c_1 + c_2 + c_3.$$

$$U = A \cos \sigma \eta - \frac{A^3 \beta}{3^1 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) - \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta)$$

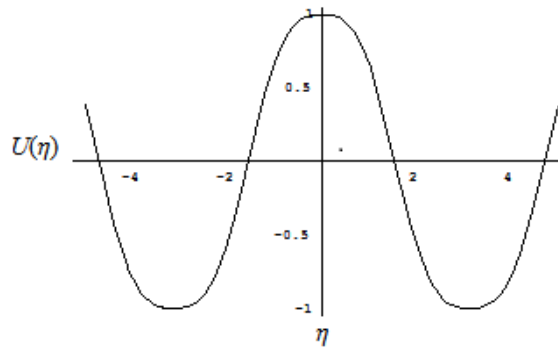
$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} + \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} + 0,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0.$$

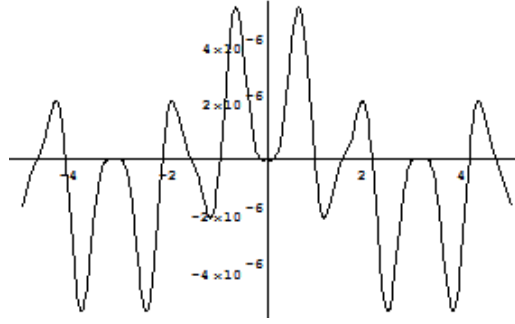
denklemleri elde edilir ve

$$\sigma^2 = -\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} - \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} - \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2},$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.11. MBBM denklem sisteminin üçüncü iterasyon ile çözümü



Şekil 3.12. MBBM denklem sistemi için üçüncü iterasyondaki nümerik fark

3.4.4. Dördüncü iterasyon

Dördüncü iterasyon için homotopi pertürbasyon formu (3.59) denkleminde bir p serisi olacak şekilde uygulanarak

$$U = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + p^4u_4 \quad (3.79)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Ayrıca (3.59) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim p 'nin bir serisi biçiminde yazılırsa;

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p\sigma_1 + p^2\sigma_2 + p^3\sigma_3 + p^4\sigma_4, \quad (3.80a)$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 + p^4c_4. \quad (3.80b)$$

Denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemler (3.59) denkleminde yerine yazılırsa

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0, \quad (3.81a)$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.82b)$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 U_0 + \sigma_1 U_1 + c_2 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} U_0^2 U_1 = 0 \quad (3.82c)$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 U_0 + \sigma_2 U_1 + \sigma_1 U_2 + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_0 U_1^2 + U_0^2 U_2) = 0 \quad (3.82d)$$

$$\begin{aligned}
& U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 U_0 + \sigma_3 U_1 + \sigma_2 U_2 + \sigma_1 U_3 + c_4 \\
& - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_1^3 + 6U_0 U_1 U_2 + 3U_0^2 U_3) = 0
\end{aligned} \tag{3.82e}$$

elde edilir.

$$U_0 = A \cos \sigma \eta$$

$$U_1 = -\frac{A^3 \beta}{96 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$U_2 = \frac{A^5 B^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$U_3 = -\frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta)$$

$$\sigma_1 = \frac{A^2 \beta}{4 \gamma k \omega}$$

$$\sigma_2 = \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

önceki iterasyonlarda elde edilen bu denklemler (3.82e) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 A \cos \sigma \eta + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \\
& - \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) - \frac{\beta}{3 \gamma k \omega} \left(-\frac{A^9 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^3 \right. \\
& - \frac{6A^9 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} \cos \sigma \eta \cdot (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \cdot (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \\
& \left. - \frac{3A^9 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} \cdot \cos^2 \sigma \eta (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \right) + c_4 = 0
\end{aligned}$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 A \cos \sigma \eta + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cdot (-3 \cos 7\sigma \eta + 3 \cos 5\sigma \eta + 18 \cos 3\sigma \eta - 18 \cos \sigma \eta) \\ - \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{15} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \left((\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^3 - 6 \cos \sigma \eta \cdot (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \cdot (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \right. \\ \left. - \cos^2 \sigma \eta \cdot (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \right) + c_4 = 0$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 A \cos \sigma \eta + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cdot (-3 \cos 7\sigma \eta + 3 \cos 5\sigma \eta + 18 \cos 3\sigma \eta - 18 \cos \sigma \eta) \\ - \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \left(\cos 9\sigma \eta - 3 \cos 7\sigma \eta + 8 \cos 3\sigma \eta - 6 \cos \sigma \eta + 6 \cos 9\sigma \eta - 18 \cos 5\sigma \eta \right. \\ \left. - 6 \cos 3\sigma \eta + 18 \cos \sigma \eta + 3 \cos 9\sigma \eta + 6 \cos 7\sigma \eta - 15 \cos 5\sigma \eta - 21 \cos 3\sigma \eta + 27 \cos \sigma \eta \right) + c_4 = 0$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 A \cos \sigma \eta + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cdot (10 \cos 9\sigma \eta - 30 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 21 \cos \sigma \eta) + c_4 = 0$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 A \cos \sigma \eta + \frac{21 A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cos \sigma \eta \\ + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cdot (10 \cos 9\sigma \eta - 30 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta) + c_4 = 0$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + A \cos \sigma \eta \left(\sigma_4 + \frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \right) \\ + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cdot (10 \cos 9\sigma \eta - 30 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta) + c_4 = 0 \quad (3.83)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\sigma_4 = - \frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \quad (3.84)$$

olarak bulunur. (3.83) denklemindeki $\cos \sigma \eta$ 'lı terimler yok edilirse;

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \frac{A^9 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \cdot (10 \cos 9\sigma \eta - 30 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta) + c_4 = 0$$

denklemini elde edilir. $U_4(0)=0$ ve $U_4'(0)=0$ başlangıç şartları altında çözüm elde edilen bu denklemde aranırsa;

$$U_4 = \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma\eta - 10 \cos 5\sigma\eta - \cos 3\sigma\eta + 10 \cos \sigma\eta) \quad (3.85)$$

$$c_4 = 0$$

sonucu elde edilir. Dördüncü mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.79), (3.80a) ve (3.80b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4.$$

$$U = A \cos \sigma\eta - \frac{A^3 \beta}{3^1 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma\eta - \cos \sigma\eta) + \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma\eta - \cos \sigma\eta)$$

$$-\frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma\eta - 6 \cos 3\sigma\eta + 5 \cos \sigma\eta)$$

$$+ \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma\eta - 10 \cos 5\sigma\eta - \cos 3\sigma\eta + 10 \cos \sigma\eta)$$

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} + \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} + 0 - \frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6},$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0.$$

eşitlikleri elde edilir ve buradan

$$\sigma^2 = -\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} - \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} - \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} - 0 + \frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6},$$

şeklinde yazılır.

3.4.5. Beşinci İterasyon

(3.59) denklemi beşinci iterasyon için;

$$U = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + p^4u_4 + p^5u_5 \quad (3.86)$$

şeklinde bir pertürbasyona sahip olsun. Ayrıca (3.59) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terim

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p\sigma_1 + p^2\sigma_2 + p^3\sigma_3 + p^4\sigma_4 + p^5\sigma_5 \quad (3.87a)$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 + p^4c_4 + p^5c_5. \quad (3.87b)$$

olacak şekilde p 'nin bir serisi olarak verilsin. (3.86), (3.87a) ve (3.87b) denklemleri (3.59) denklemine yerine yazıldığında

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0, \quad (3.88a)$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0 \quad (3.88b)$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 U_0 + \sigma_1 U_1 + c_2 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} U_0^2 U_1 = 0 \quad (3.88c)$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 U_0 + \sigma_2 U_1 + \sigma_1 U_2 + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_0 U_1^2 + U_0^2 U_2) = 0 \quad (3.88d)$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 U_0 + \sigma_3 U_1 + \sigma_2 U_2 + \sigma_1 U_3 + c_4 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_1^3 + 6U_0 U_1 U_2 + 3U_0^2 U_3) = 0 \quad (3.88e)$$

$$U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 U_0 + \sigma_4 U_1 + \sigma_3 U_2 + \sigma_2 U_3 + \sigma_1 U_4 + c_5 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_1^2 U_2 + U_0 U_2^2 + 2U_0 U_1 U_3 + U_0^2 U_4) = 0 \quad (3.88f)$$

elde edilir.

$$U_0 = A \cos \sigma \eta$$

$$U_1 = -\frac{A^3 \beta}{96 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$U_2 = \frac{A^5 B^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)$$

$$U_3 = -\frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta)$$

$$U_4 = \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cdot (\cos 9\omega \eta - 10 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta + 10 \cos \omega \eta)$$

$$\sigma_1 = \frac{A^2 \beta}{4 \gamma k \omega}$$

$$\sigma_2 = \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_4 = -\frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6}$$

daha önceden elde edilen bu denklemler (3.88f) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemelerle birlikte

$$\begin{aligned} & U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 \cdot A \cos \sigma \eta + \frac{7 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} \frac{A^3 \beta}{3^2 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) + \\ & 0 \cdot \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 \beta^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) - \frac{A^4 \beta^2}{3^2 2^7 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \\ & + \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma \eta - 10 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 10 \cos \sigma \eta) - \frac{\beta}{\gamma k \omega} \cdot \\ & \left(\frac{A^6 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 - \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \right. \\ & + A \cos \sigma \eta \cdot \frac{A^{10} \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 \\ & + 2 A \cos \sigma \eta \cdot \frac{A^3 \beta}{3^2 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \cdot \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \\ & \left. + A^2 \cos^2 \sigma \eta \cdot \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma \eta - 10 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 10 \cos \sigma \eta) \right) + c_5 = 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned}
& U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 \cdot A \cos \sigma \eta + \frac{7A^{11}\beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \\
& - \frac{A^{11}\beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \\
& + \frac{A^{11}\beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma \eta - 10 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 10 \cos \sigma \eta) - \frac{\beta}{\gamma k \omega} \cdot \\
& \left(\frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \right. \\
& + \frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} (\cos 5\sigma \eta - \cos \sigma \eta)^2 \cdot \cos \sigma \eta \\
& + \frac{2A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cos \sigma \eta (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \cdot (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \\
& \left. + \frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \cos^2 \sigma \eta \cdot (\cos 9\sigma \eta - 10 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 10 \cos \sigma \eta) \right) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 \cdot A \cos \sigma \eta + \frac{7A^{11}\beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \\
& - \frac{A^{11}\beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \\
& + \frac{A^{11}\beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma \eta - 10 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 10 \cos \sigma \eta) - \frac{\beta}{\gamma k \omega} \cdot \\
& \left(\frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \frac{1}{2^2} (-3 \cos 11\sigma \eta + 6 \cos 9\sigma \eta + \cos 7\sigma \eta - 12 \cos 5\sigma \eta - 3 \cos 3\sigma \eta + 12 \cos \sigma \eta) \right. \\
& + \frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \frac{1}{2^2} (-3 \cos 11\sigma \eta - 3 \cos 9\sigma \eta + 6 \cos 7\sigma \eta + 12 \cos 5\sigma \eta + 3 \cos 3\sigma \eta - 15 \cos \sigma \eta) \\
& + \frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \frac{1}{2^2} (-6 \cos 11\sigma \eta + 48 \cos 7\sigma \eta + 30 \cos 5\sigma \eta - 108 \cos 3\sigma \eta + 96 \cos \sigma \eta) \\
& \left. + \frac{A^{11}\beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} \frac{1}{2^2} (-3 \cos 11\sigma \eta - 6 \cos 9\sigma \eta + 27 \cos 7\sigma \eta + 63 \cos 5\sigma \eta + 6 \cos 3\sigma \eta - 87 \cos \sigma \eta) \right) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 \cdot A \cos \sigma \eta + \frac{7A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (\cos 3\sigma \eta - \cos \sigma \eta) \\
& - \frac{A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (\cos 7\sigma \eta - 6 \cos 3\sigma \eta + 5 \cos \sigma \eta) \\
& + \frac{A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} \cdot (\cos 9\sigma \eta - 10 \cos 5\sigma \eta - \cos 3\sigma \eta + 10 \cos \sigma \eta) + \frac{A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} \\
& (-3 \cos 11\sigma \eta + 6 \cos 9\sigma \eta + \cos 7\sigma \eta - 12 \cos 5\sigma \eta - 3 \cos 3\sigma \eta + 12 \cos \sigma \eta \\
& - 3 \cos 11\sigma \eta - 3 \cos 9\sigma \eta + 6 \cos 7\sigma \eta + 12 \cos 5\sigma \eta + 3 \cos 3\sigma \eta - 15 \cos \sigma \eta \\
& - 6 \cos 11\sigma \eta + 48 \cos 7\sigma \eta + 30 \cos 5\sigma \eta - 108 \cos 3\sigma \eta + 96 \cos \sigma \eta \\
& - 3 \cos 11\sigma \eta - 6 \cos 9\sigma \eta + 27 \cos 7\sigma \eta + 63 \cos 5\sigma \eta + 6 \cos 3\sigma \eta - 87 \cos \sigma \eta) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 \cdot A \cos \sigma \eta + \frac{A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (21 \cos 3\sigma \eta - 21 \cos \sigma \eta - 3 \cos 7\sigma \eta \\
& + 18 \cos 3\sigma \eta - 15 \cos \sigma \eta + 3 \cos 9\sigma \eta - 30 \cos 5\sigma \eta - 3 \cos 3\sigma \eta + 30 \cos \sigma \eta \\
& - 3 \cos 11\sigma \eta + 6 \cos 9\sigma \eta + \cos 7\sigma \eta - 12 \cos 5\sigma \eta - 3 \cos 3\sigma \eta + 12 \cos \sigma \eta \\
& - 3 \cos 11\sigma \eta - 3 \cos 9\sigma \eta + 6 \cos 7\sigma \eta + 12 \cos 5\sigma \eta + 3 \cos 3\sigma \eta - 15 \cos \sigma \eta \\
& - 6 \cos 11\sigma \eta + 48 \cos 7\sigma \eta + 30 \cos 5\sigma \eta - 108 \cos 3\sigma \eta + 96 \cos \sigma \eta - 3 \cos 11\sigma \eta \\
& - 6 \cos 9\sigma \eta + 27 \cos 7\sigma \eta + 63 \cos 5\sigma \eta + 6 \cos 3\sigma \eta - 87 \cos \sigma \eta) + c_5 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 \cdot A \cos \sigma \eta + \frac{A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (-15 \cos 11\sigma \eta + 79 \cos 7\sigma \eta \\
& + 3 \cos 5\sigma \eta - 66 \cos 3\sigma \eta) + c_5 = 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemden

$$\sigma_5 = 0 \tag{3.90}$$

olarak bulunur. Eğer (3.89) denkleminde $\cos \sigma \eta$ 'lı terimler yok edilirse;

$$U_5'' + \sigma^2 U_5 + \frac{A^{11} \beta^5}{3^4 2^{22} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^8} (-15 \cos 11\sigma \eta + 79 \cos 7\sigma \eta + 3 \cos 5\sigma \eta - 66 \cos 3\sigma \eta) + c_5 = 0$$

denklemini elde edilir. Elde edilen denklem $U_5(0) = 0$ ve $U_5'(0) = 0$ başlangıç şartları altında çözülürse;

$$U_5 = -\frac{A^{11}\beta^5}{3^5 2^{25} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^{10}} (\cos 11\sigma\eta - 14 \cos 7\sigma\eta + 69 \cos 3\sigma\eta - 56 \cos \sigma\eta)$$

$$c_5 = 0$$

elde edilir. Eğer beşinci mertebeden çözüm yeterli olursa o zaman (3.86), (3.87a) ve (3.87b) denklemlerinde $p = 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} U = & A \cos \sigma\eta - \frac{A^3 \beta}{3^1 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\sigma\eta - \cos \sigma\eta) + \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\sigma\eta - \cos \sigma\eta) \\ & - \frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\sigma\eta - 6 \cos 3\sigma\eta + 5 \cos \sigma\eta) \\ & + \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} (\cos 9\sigma\eta - 10 \cos 5\sigma\eta - \cos 3\sigma\eta + 10 \cos \sigma\eta) \\ & - \frac{A^{11} \beta^5}{3^5 2^{25} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^{10}} (\cos 11\sigma\eta - 14 \cos 7\sigma\eta + 69 \cos 3\sigma\eta - 56 \cos \sigma\eta) \end{aligned}$$

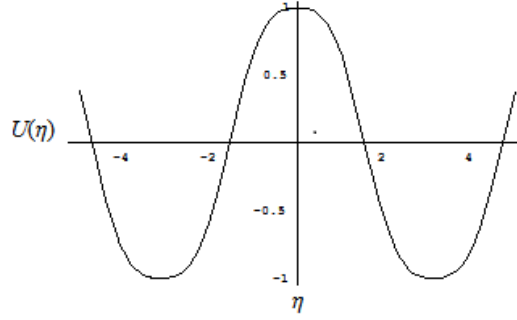
$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} + \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} + 0 - \frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} + 0,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0.$$

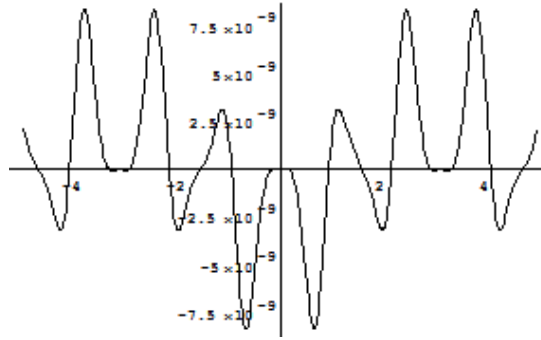
denklemleri elde edilir ve

$$\sigma^2 = -\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} - \frac{A^2 \beta}{2^2 \gamma k \omega} - \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2} - 0 + \frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6} + 0,$$

şeklinde yazılır.



Şekil 3.13 MBBM denklem sisteminin beşinci iterasyon ile çözümü



Şekil 3.14 MBBM denklem sistemi için beşinci iterasyondaki nümerik fark

3.3.6. Altıncı İterasyon

Son olarak uygulanacak altıncı iterasyonda (3.59) denklemini için;

$$U = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + p^4u_4 + p^5u_5 + p^6u_6 \quad (3.91)$$

olacak şekilde bir p serisi olduğunu varsayalım. Aynı zamanda (3.59) denkleminde lineer terimin katsayısı ve sabit terimleride bir p serisi biçiminde yazılarak

$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + p\sigma_1 + p^2\sigma_2 + p^3\sigma_3 + p^4\sigma_4 + p^5\sigma_5 + p^6\sigma_6 \quad (3.92a)$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = pc_1 + p^2c_2 + p^3c_3 + p^4c_4 + p^5c_5 + p^6c_6. \quad (3.92b)$$

elde edildiği varsayılırsa (3.91), (3.92a) ve (3.92b) denklemleri (3.59) denkleminde yerine yazıldığında

$$U_0'' + \sigma^2 U_0 = 0,$$

$$U_1'' + \sigma^2 U_1 + \sigma_1 U_0 - \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U_0^3 + c_1 = 0$$

$$U_2'' + \sigma^2 U_2 + \sigma_2 U_0 + \sigma_1 U_1 + c_2 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} U_0^2 U_1 = 0$$

$$U_3'' + \sigma^2 U_3 + \sigma_3 U_0 + \sigma_2 U_1 + \sigma_1 U_2 + c_3 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_0 U_1^2 + U_0^2 U_2) = 0$$

$$U_4'' + \sigma^2 U_4 + \sigma_4 U_0 + \sigma_3 U_1 + \sigma_2 U_2 + \sigma_1 U_3 + c_4 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_1^3 + 6U_0 U_1 U_2 + 3U_0^2 U_3) = 0$$

$$U_5'' + \sigma^2 U_5 + \sigma_5 U_0 + \sigma_4 U_1 + \sigma_3 U_2 + \sigma_2 U_3 + \sigma_1 U_4 + c_5 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_1^2 U_2 + U_0 U_2^2 + 2U_0 U_1 U_3 + U_0^2 U_4) = 0$$

$$U_6'' + \sigma^2 U_6 + \sigma_6 U_0 + \sigma_5 U_1 + \sigma_4 U_2 + \sigma_3 U_3 + \sigma_2 U_4 + \sigma_1 U_5 + \sigma_0 U_6 + c_6 - \frac{\beta}{\gamma k \omega} (U_1 U_2^2 + U_1^2 U_3 + 2U_0 U_2 U_3 + 2U_0 U_1 U_4 + U_0^2 U_5) = 0$$

Elde edilen bu denklemler için $U_0(0) = A$ ve $U_0'(0) = 0$ ve $U_i(0) = 0$ ve $U_i'(0) = 0$ $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olacak şekilde başlangıç şartları ile çözümlerse;

$$U_0 = A \cos \omega \eta$$

$$U_1 = -\frac{A^3 \beta}{3^1 2^5 \gamma k \omega \sigma^2} (\cos 3\omega \eta - \cos \omega \eta)$$

$$U_2 = \frac{A^5 \beta^2}{3^2 2^{10} \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^4} (\cos 5\omega \eta - \cos \omega \eta)$$

$$U_3 = -\frac{A^7 \beta^3}{3^3 2^{15} \gamma^3 k^3 \omega^3 \sigma^6} (\cos 7\omega \eta - 6 \cos 3\omega \eta + 5 \cos \omega \eta)$$

$$U_4 = \frac{A^9 \beta^4}{3^4 2^{20} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^8} (\cos 9\omega \eta - 10 \cos 5\omega \eta - \cos 3\omega \eta + 10 \cos \omega \eta)$$

$$U_5 = -\frac{A^{11} \beta^5}{3^5 2^{25} \gamma^5 k^5 \omega^5 \sigma^{10}} (\cos 11\omega \eta - 14 \cos 7\omega \eta + 69 \cos 3\omega \eta - 56 \cos \omega \eta)$$

$$U_6 = \frac{A^{13} \beta^6}{3^6 2^{30} \gamma^6 k^6 \omega^6 \sigma^{12}} (\cos 13\omega \eta - 18 \cos 9\omega \eta + 135 \cos 5\omega \eta + 18 \cos 3\omega \eta - 136 \cos \omega \eta)$$

$$\sigma_1 = \frac{A^2 \beta}{3^0 2^2 \gamma k \omega},$$

$$\sigma_2 = \frac{A^4 \beta^2}{2^7 3 \gamma^2 k^2 \omega^2 \sigma^2}$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_4 = -\frac{21 A^8 \beta^4}{3^3 2^{17} \gamma^4 k^4 \omega^4 \sigma^6}$$

$$\sigma_5 = 0$$

$$\sigma_6 = \frac{88 A^{12} \beta^6}{3^5 2^{27} \gamma^6 k^6 \omega^6 \sigma^{10}}$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer 6. mertebeden çözüm yeterli ise; (3.91), (3.92a) ve (3.92b) denklemlerinde $p=1$ yazılırsa

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6$$

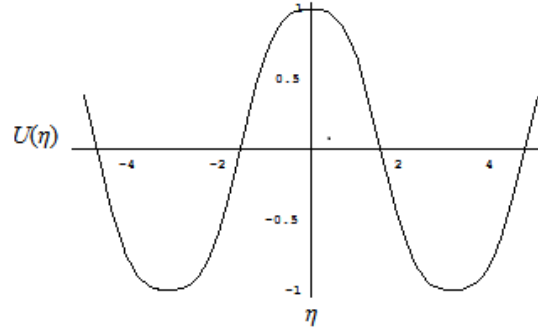
$$-\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} = \sigma^2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6,$$

$$-\frac{c}{\gamma k^2 \omega} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 0$$

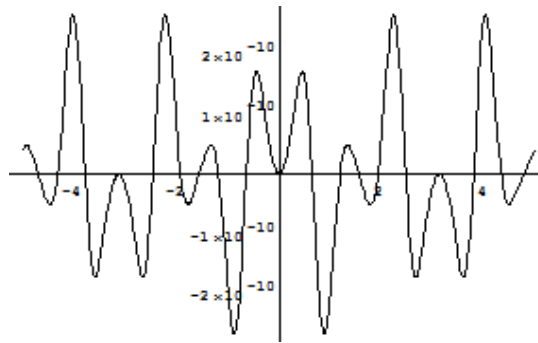
elde edilir. Yukarıdaki denklem

$$\sigma^2 = -\frac{(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2 \omega} - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6),$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3.15 MBBM denklem sisteminin altıncı iterasyon ile çözümü



Şekil 3.16 MBBM denklem sistemi için altıncı iterasyondaki nümerik fark

BÖLÜM V

SONUÇLAR

Lineer olmayan kısmi türevli Drinfeld-Sokolov-Wilson, Drinfeld-Sokolov ve Modifiye- Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin pertürbatif çözümleri homotopi pertürbasyon tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sisteminin pertürbatif çözümü için yalnızca bir iterasyon yapılmış, Drinfeld-Sokolov ve Modifiye- Benjamin-Bona-Mahony denklemlerinin pertürbatif çözümleri için ise altı iterasyona kadar gidilmiştir. Elde edilen çözümlerin bazıları ve nümerik farkları grafiklerle de sunulmuştur. Ayrıca her üç denklem için birinci iterasyon kullanılarak elde edilen pertürbatif çözümler kullanılarak basit dallanma noktaları tespit edilmiştir.

İkinci ve üçüncü iterasyonlar sonucu elde edilen çözümlerden dallanma noktaları hesabı ise daha sonraki çalışmalara bırakılmış olup, bu tez kapsamında değerlendirilmemiştir.

KAYNAKLAR

Alibeiki, E. and Neyrameh, A., “Application of Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Drinfeld-Sokolov-Wilson Equation”, *Middle-East Journal of Scientific Research* 10 (4): 440-443, 2011.

Aslan, I., “Exact and explicit solutions to some nonlinear evolution equations by utilizing the (G'/G) -expansion method”, *Appl. Math. and Comput.* 215(2) , 857–863, 2009.

Aslan, I. and Ozis, T., “Analytic study on two nonlinear evolution equations by using the (G'/G) -expansion method”, *Appl. Math. Comput.* 209 , 425-429, 2009a.

Aslan, I. and Ozis, T., “On the validity and reliability of the (G'/G) -expansion method by using higher-order nonlinear equations”, *Appl. Math. Comput.* 211 531-536, 2009b.

Bekir, A., “Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations”, *Phys. Lett. A.* 372 , 3400–3406, 2008.

Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”, *Philos Trans. R. Soc. London, Ser. A.* 272 , 47–48, 1972.

Daghan, D., Donmez, O. and Tuna, A., “Explicit solutions of the nonlinear partial differential equations, Nonlinear Anal”, *Real World App.* 11(3) , 2152–2163, 2010.

Daghan, D., Yildiz, O. and Toros, S., “Comparison of (G'/G) -methods for finding exact solutions of the Drinfeld-Sokolov system”, *Mathematica Slovaca.* 65(3), (607-632), 2015.

El-Shahed, M., “Application of He’s homotopy perturbation method to Volterra’s integrodifferential equation”, *Int J Nonlinear Sci Numer Simul*, 6(2) , 163-168, 2005.

El-Wakil, S.A. and Abdou, M.A., “Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations”, *Chaos Solit. and Fractals*. 31(5) , 1256–1264, 2007.

Goktas, U. and Hereman, E., “Symbolic computation of conserved densities for systems of nonlinear evolution equations”, *J. Symb. Comput.* 24(5) , 591–621, 1997.

He, JH., “Homotopy perturbation technique”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 178 , 257-262, 1999.

He, JH., “A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems”, *Int J Nonlinear Mech*, 35 ,37-43, 2000.

He, JH., “Modified Lindstedt-Poincare methods for some strongly nonlinear oscillations.Part I: expansion of a constant”, *Int J Nonlinear Mech* 37(2) , 309-314, 2002.

He, J.H., “The homotopy perturbation method for non-linear oscillators with Discontinuities, Applied Mathematics and Computations”, *Appl. Math. Comput.*, 151, 287-292, 2004.

He, J.H., “Application of homotopy perturbation method to non-linear wave Equation”, *Chaos Soliton. Fract.*, 26, 695-700, 2005a.

He, JH. “Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems”, *Int J. Nonlinear Sci Numer Simul*. 6(2) , 207-208, 2005b.

Hu., J. “A new method of exact travelling wave solution for coupled nonlinear differential equations”, *Phys. Lett. A*. 322 , 211-216, 2004.

Layeni, O.P. and Akinola, A.P., "A new hyperbolic auxiliary function method and exact solutions of the mBBM equation, Commun". *Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15(2); 135–138. *Corrigendum: Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15(9) , 2734, 2010.

Nickel, J., "Elliptic solutions to a generalized BBM equation", *Phys. Lett. A.* 364(34) ,221-226, 2007.

Olver, P.J., "Applications of lie groups to differential equations", *Springer, New York*, 1993.

Poincaré , H., "Analysis Situs", *Journal de l'École Polytechnique ser 2*, pages 1-123, 1895.

Saut, J.C. and Tzetkov, N., "Global well-posedness for the KP-BBM equations", *Appl. Math. Res. Express.* 1, 1–6, 2004.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., "Analytical solutions to a generalized Drinfel'd-Sokolov equation related to DSSH and KdV", *Appl. Math. and Comput.* 216 , 2783–2791, 2010a.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., "Trigonometric and hyperbolic type solutions to a generalized Drinfel'd-Sokolov equation", *Appl. Math. and Comput.* 217 , 4147–4166, 2010b.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., "Exponential-type solutions to a generalized Drinfeld-Sokolov equation", *Physica Scripta* 82 , 035006, 2010c.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., "Traveling wave solutions (u,v) to a generalized Drinfel'd-Sokolov system which satisfy $u = a_1 v^m + a_0$ ", *Appl. Math. and Comput.* 218 , 9911–9921, 2012.

Tso, T., "Existence of solution of the modified Benjamin-Bona-Mahony equation", *Chin. J. Math.* 24(4) , 327–336, 1996.

Uğurlu, Y. and Kaya, D., “ Exact and numerical solutions of generalized Drinfeld-Sokolov equations”, **Phys. Lett. A.**, 372 , 2867-2873, 2008.

Varlamov, V. and Liu, Y., “Cauchy problem for the Ostrovsky equation”, **Discrete Dynam. Syst.** 10 , 731–753, 2004.

Wang, J.P., “A list of 1 + 1 dimensional integrable equations and their properties”, **J. Nonlinear Math. Phys.** 9 , 213–233, 2002.

Wang, M.L. and Li, X., Zhang, J.,” The (G'/G) -Expansion Method and Traveling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics”, **Phys. Lett. A.** 372(4) , 417–423, 2008.

Wazwaz A.M., “Two reliable methods for solving variants of the KdV equation with compact and noncompact structures”, **Chaos, Solitons & Fractals**; 27 2,487-93, 2006a.

Wazwaz,A.M., “Exact and explicit travelling wave solutions for the nonlinear Drinfeld-Sokolov system”, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 11(3) , 311–325, 2006b.

Wazwaz, A.M. and Helal, M.A., “Nonlinear variants of the BBM equation with compact and noncompact physical structures”, **Chaos Solit. and Fractals.** 26 ,767-776, 2005.

Yao Y., “Abundant families of new traveling wave solutions for the coupled Drinfeld-Sokolov–Wilson equation”, **Chaos, Solitons & Fractal**, 24:301–7, 2005.

Yusufoglu, E. and Bekir, A., “The tanh and the sine cosine methods for exact solutions of the MBBM and the Vakhnenko equations”, **Chaos Solit. and Fractals.** 38 , 1126-1133,2008.

Zayed, E.M.E. and Gepreel, K.A., "The (G'/G) -expansion method for finding traveling wave solutions of nonlinear partial differential equations in mathematical physics", *J. Math. Phys.* 50, 013502, 2008

ÖZ GEÇMİŞ

Halil Yavuz MART 1984 yılında KAYSERİ’de doğdu. İlkokulu Şükrü Malaz İlköğretim okulunda, Ortaokulu 50. yıl Dedeman ilköğretim okulunda ve Lise öğrenimini Kayseri Nuh Mehmet Baldöktü Anadolu Lisesinde okuduktan sonra 2003 yılında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü girdi ve 2007 yılında mezun oldu. 2007 yılından itibaren çeşitli okullarda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.

TEZDEN ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından uluslararası sempozyumda sunulmuş bir adet sözel bildiri yapılmış, bir adet makale çalışması yayın için hazırlanmakta olup, bunlar aşağıda sunulmuştur.

Daghan, D. , Mart, H.Y. and Yıldız, G. , “Bifurcation Points for DS and MBBM Equations by Using the Homotopy Perturbation Method” *9th NAUN International Conference on Applied Mathematic, Simulation, Modeling (ASM’15)*, KONYA, TURKEY, p.88-82, 20-22 May 2015

Daghan, D. , Mart, H.Y. and Yıldız, G. , “Applications of Homopotpy Perturbation Method for Nonlinear Partial Differential Equations” (*Yayın İçin Hazırlanmakta*).