

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF SIRADAN
DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YARI ANALİTİK
ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL İTERASYON METODUYLA
HESAPLANMASI

OKAN KILIÇ

EYLÜL 2013

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF SIRADAN
DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YARI ANALİTİK
ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL İTERASYON METODUYLA
HESAPLANMASI

OKAN KILIÇ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

Eylül 2013

Okan KILIÇ tarafından **Yrd.Doç.Dr. Mehmet Tarık ATAY** danışmanlığında hazırlanan “**Stiff Sıradan Diferansiyel Denklem ve Stiff Sıradan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yarı Analitik Çözümlerinin Varyasyonel İterasyon Metoduyla Hesaplanması** ” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

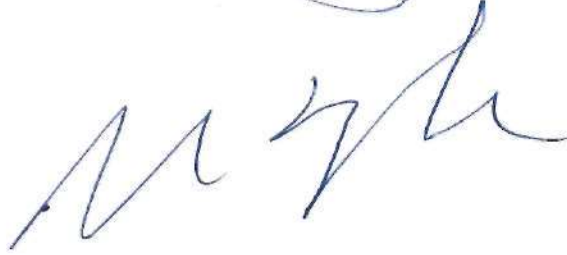
Başkan : Doç.Dr. Safa Bozkurt COŞKUN, Kocaeli Üniversitesi



Üye : Yrd.Doç.Dr. Mehmet Tarık ATAY, Niğde Üniversitesi



Üye : Yrd.Doç.Dr. Hüseyin KAPLAN, Niğde Üniversitesi



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.


Okan KILIÇ

ÖZET

STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YARI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL İTERASYON METODUYLA HESAPLANMASI

KILIÇ, Okan

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman

: Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

Eylül 2013, 67 Sayfa

Bu yüksek lisans çalışmasında lineer ve lineer olmayan stiff diferansiyel denklem ve stiff diferansiyel denklem sistemlerinin farklı stifflik oranlarına bağlı olarak Varyasyonel İterasyon Metodu ve Modifiye Varyasyonel İterasyon Metodu kullanılarak nümerik çözümlerinin hesaplanması ve bazı problemler de var olan kapalı formdaki analitik çözümlerle karşılaştırılarak kullanılan metodların etkinliği araştırılmıştır. Varyasyonel İterasyon Metodu incelenerek bir diferansiyel denklemin yarı-analitik çözümlerini bulmak için nasıl kullanılacağı gösterilmiştir. Kullanılan metodların lineer denklemlerin yarı-analitik çözümlerinde dikkate değer şekilde iyi sayısal sonuçlar verdiği ve çok düşük seviyelerde hata ile gerçek çözüme yakınsadığı görülmüştür. Ayrıca lineer olmayan denklemler için ise iterasyon sayısına bağlı olarak, kabul edilebilir derecede düşük seviyelerde hata ile sonuç verdiği görülmüştür. Burada, denklem sistemlerinin stifflik katsayısının da sayısal sonuçlarda etkili olduğu ve artan stifflik değerinin, yine artan iterasyon sayısını gerektirdiği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Varyasyonel İterasyon Metodu ve Modifiye Varyasyonel İterasyon Metodu, Diferensiyel Denklem Sistemleri, Stifflik , Başlangıç değer Problemleri

SUMMARY

COMPUTATION OF SEMI-ANALYTIC SOLUTIONS OF STIFF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SYSTEMS OF STIFF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING VARIATIONAL ITERATION METHOD

KILIÇ, Okan

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet Tarık ATAY

September 2013, 67 Paper

In this M.Sc. study , research was conducted to calculate numerical solutions of linear and nonlinear stiff ordinary differential equations and differential equations systems with varying stiffness ratio by using Variational Iteration Method and Modified Variational Iteration Method and to compare obtained numerical results with some of the problems' analytical closed form solutions. By detailed study of Variational Iteration Method, how to use this method for finding semi-analytical solutions of ordinary differential equations was explained. It has been observed that the methods have given exceptionally good numerical results for linear problems with very small amount of numerical error values in finding semi-analytic solutions of the problems. Furthermore, for nonlinear problems, the methods have given very small amount of error values depending on the iterations which were conducted. In this study, it has been observed that the greater the stiffness ratio is, the higher the iteration number that we need to conduct for better numerical results.

Keywords: Variational Iteration Method , Modified Variational Iteration Method , Differential Equations Systems , Stiff , Initial Value Problems.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamda, çalışmalarına yön veren, bilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY'a ve bu süreçte manevi desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET.....	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
BÖLÜM I GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II	2
2.1 Genel Bilgiler.....	2
2.2 Temel Kavramlar	4
2.2.1 Diferansiyel denklem.....	4
2.2.2 Adi diferansiyel denklem.....	4
2.2.3 Kısmi diferansiyel denklem	4
2.2.4 Diferansiyel denklemin mertebesi.....	4
2.2.5 Diferansiyel denklemin derecesi	4
2.2.6 Lineer diferansiyel denklem	5
BÖLÜM III STİFF DİFERANSİYEL DENKLEMLER	6
3.1 Temel Çalışmalar	6
3.2 Stiff Adi Diferansiyel Denklem Nedir?	6
3.3 Rijitlik (Stiffness).....	8
BÖLÜM IV VARYASYONEL İTERASYON METODU	11
4.1 VİM Literatürü.....	11
4.2 Varyasyonel İterasyon Metodu.....	11
BÖLÜM V STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN VİM ÇÖZÜMÜ	15

5.1 VİM Formülasyonu.....	15
5.2 VİM Çözümleri.....	17
5.2.1 Stiff sıradan diferansiyel denklem.....	17
5.2.2 Stiff sıradan diferansiyel denklem sistemleri.....	20
BÖLÜM VI TARTIŞMA VE SONUÇLAR	62
KAYNAKLAR	63
ÖZ GEÇMİŞ	65
TEZ ÇALIŞMASINDA ÜRETİLEN ESERLER	66

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.2.1. Örnek 5.2.1'deki $y(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi.....	18
Çizelge 5.2.2. Örnek 5.2.2'deki $y(t)$ 'nin dördüncü iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi.....	19
Çizelge 5.2.3. Örnek 5.2.3'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri.....	22
Çizelge 5.2.4. Örnek 5.2.3'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri.....	23
Çizelge 5.2.5. Örnek 5.2.3'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi.....	23
Çizelge 5.2.6. Örnek 5.2.3'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi.....	23
Çizelge 5.2.7. Örnek 5.2.4'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri.....	27
Çizelge 5.2.8. Örnek 5.2.4'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri.....	27
Çizelge 5.2.9. Örnek 5.2.4'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi.....	27
Çizelge 5.2.10. Örnek 5.2.4'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi.....	28
Çizelge 5.2.11. Örnek 5.2.5'deki $u(t)$ ve $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri.....	29
Çizelge 5.2.12. Örnek 5.2.5'deki $u(t)$ ve $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi.....	30
Çizelge 5.2.13. Örnek 5.2.6'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri.....	33
Çizelge 5.2.14. Örnek 5.2.6'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi.....	33

Çizelge 5.2.15. Örnek 5.2.7'deki $u(t)$ 'nin yirmidördüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	36
Çizelge 5.2.16. Örnek 5.2.7'deki $v(t)$ 'nin yirmidördüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	37
Çizelge 5.2.17. Örnek 5.2.7'deki $u(t)$ 'nin yirmidördüncü iterasyonunun hata analizi.....	37
Çizelge 5.2.18. Örnek 5.2.7'deki $v(t)$ 'nin yirmidördüncü iterasyonunun hata analizi.....	37
Çizelge 5.2.19. Örnek 5.2.8'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	40
Çizelge 5.2.20. Örnek 5.2.8'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	41
Çizelge 5.2.21. Örnek 5.2.8'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi.....	41
Çizelge 5.2.22. Örnek 5.2.8'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi.....	41
Çizelge 5.2.23. Örnek 5.2.9'deki $u(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	44
Çizelge 5.2.24. Örnek 5.2.9'deki $v(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	44
Çizelge 5.2.25. Örnek 5.2.9'deki $u(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun hata analizi.....	44
Çizelge 5.2.26. Örnek 5.2.9'deki $v(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun hata analizi.....	45
Çizelge 5.2.27. Örnek 5.2.10'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	48
Çizelge 5.2.28. Örnek 5.2.10'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	48

Çizelge 5.2.29. Örnek 5.2.10'deki $w(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	49
Çizelge 5.2.30. Örnek 5.2.10'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi.....	49
Çizelge 5.2.31. Örnek 5.2.10'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi.....	49
Çizelge 5.2.32. Örnek 5.2.10'deki $w(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi.....	49
Çizelge 5.2.33. Örnek 5.2.11'deki $u(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	54
Çizelge 5.2.34. Örnek 5.2.11'deki $v(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	54
Çizelge 5.2.35. Örnek 5.2.11'deki $w(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun $\dot{V}İM$ ve $M\dot{V}İM$ değerleri ile gerçek değeri.....	55
Çizelge 5.2.36. Örnek 5.2.11'deki $u(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun hata analizi.....	55
Çizelge 5.2.37. Örnek 5.2.11'deki $v(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun hata analizi.....	55
Çizelge 5.2.38. Örnek 5.2.11'deki $w(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun hata analizi.....	56
Çizelge 5.2.39. Örnek 5.2.12'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ değeri ile gerçek değeri ve hata analizi.....	58
Çizelge 5.2.40. Örnek 5.2.12'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ değeri ile gerçek değeri ve hata analizi.....	59
Çizelge 5.2.41. Örnek 5.2.12'deki $w(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ değeri ile gerçek değeri ve hata analizi.....	59
Çizelge 5.2.42. Örnek 5.2.12'deki $r(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun $\dot{V}İM$ değeri ile gerçek değeri ve hata analizi.....	59

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu tezin ikinci bölümünde diferansiyel denklemlerle ilgili temel kavramlar verilmiş, üçüncü bölümde stiff diferansiyel denklem ve stiff diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili temel çalışmalar ve stiff diferansiyel denklem, stiffness oranı tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ve VİM literatürü verilmiştir. Beşinci bölümde Varyasyonel İterasyon Metodu ve Modifiye Varyasyonel İterasyon Metodunun Stiff diferansiyel denklem ve Stiff diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmasıyla ilgili örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

BÖLÜM II

2.1 Genel Bilgiler

Bir ya da daha fazla fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem diyoruz. Diğer bir ifadeyle diferansiyel denklem bir takım fonksiyonlar ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu kavram ilk olarak 1676 yılında Leibniz tarafından kullanıldı ve diferansiyel denklemler uzun zamandır çok çeşitli pratik problemin modellenmesi ve çözülmesi için bilim adamları ve mühendisler tarafından kullanılmaktadır. Çoğu bilimsel problemlerin tarif edilmesi bazı anahtar değişkenlerin diğer değişkenlere göre olan değişimlerini içerir. Genellikle bu değişkenlerdeki çok küçük değişimlerin dikkate alınması daha genel ve hassas bir tanımlama sağlar. Değişkenlerin sonsuz küçük veya diferansiyel değişimlerinin dikkate alınması durumunda, değişim hızlarını türevlerle ifade etmek suretiyle, fiziksel prensip ve kanunlar için kesin matematiksel formülasyonlar sağlayan diferansiyel denklemler elde edilir. Bu yüzden diferansiyel denklemler uzun zamandır doğa bilimleri ve mühendislikte karşılaşılan çok farklı problemlere başarıyla uygulanmaktadır. Araştırmalar, diferansiyel denklemlerin yeni uygulamalarını keşfetmeye sadece fiziksel bilimlerde değil aynı zamanda biyoloji, tıp, istatistik, sosyoloji, psikoloji ve ekonomi gibi alanlarda da devam etmektedirler. Hem teorik hem de uygulamalı diferansiyel denklem araştırmaları günümüzde çok aktif araştırma konuları arasında bulunmaktadır. Fiziksel kanun ve prensiplerin, göz önüne alınan değişkenlerdeki sonsuz küçük değişimleri dikkate almak suretiyle, bir probleme uygulanmasıyla diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Dolayısıyla diferansiyel denklemlerin elde edilmesi problem hakkında yeterli bilgi sahibi olmayı, probleme dahil olan değişkenleri belirleyebilmeyi, uygun basitleştirmeler ve varsayımlar yapabilmeyi, kullanılacak fiziksel prensip ve kanunları bilmeyi ve de dikkatli bir analiz yapabilmeyi gerektirir. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1 Newton'un hareket yasası

Newton'un ikinci kanununu kullanarak düz bir çizgi boyunca F kuvvetinin etkisi altında hareket eden m kütleli bir cismin konumunu s tanımlayan diferansiyel denklemini elde ediniz.

Çözüm:

Dinamik derslerinde hız ve ivme tanımlarının

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

olarak verildiğini biliyoruz. Newton'un ikinci kanunu Kuvvet = Kütle x İvme şeklinde ifade edildiğinden

$$F(t) = m \times a(t) = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

yazılabilir. Düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek 2.2 Newton'un soğuma kanunu

Başlangıçta belirli sıcaklığa sahip küresel bir cisim sıcaklığı T_0 olan sıcak su içerisine bırakılıyor. Cismin başlangıç sıcaklığı su sıcaklığından düşük ise, cisme ısı transferi başlayacağı bilinmektedir. Buna göre cismin herhangi bir t anında sıcaklığını $T(t)$ veren diferansiyel denklemi belirleyiniz.

Çözüm:

Suyun bulunduğu kabı mükemmel şekilde yalıtılmış düşünelim(çevreye ısı kaybı yok) ve buna göre enerjinin korunumu prensibini uygulayalım. Cisim sıcak suya bırakıldıktan Δt süre sonra cismin enerjisindeki artış, cismin yüzeyinden cisme taşınılma(konveksiyon) geçen ısı enerjisi kadar olacaktır. Buna göre

$$mc\Delta T = hA(T(t) - T_0)\Delta t$$

elde ederiz. Her iki tarafı $mc\Delta t$ ye bölersek

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{hA}{mc} (T(t) - T_0)$$

Zaman dilimini sonsuz küçük aldığımızda (limit durumunda, yani $\Delta t \rightarrow 0$)

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{hA}{mc}(T(t) - T_0)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem küresel cismin sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak ifade etmektedir. Diferansiyel denklemler fiziksel olayı, bağımsız değişken(ler)in belirli bir aralıktaki değerleri için tanımlayabilir. Örneğin bu denklem küresel cismin merkezinden yüzeyine kadar olan sıcaklık değişimini tanımlar, bu sınırların dışında geçersizdir. Ayrıca denklem, cismin sıcak suya daldırıldığı andan itibaren ($t=0$) sıcaklığını verir ve dolayısıyla elde edilecek çözüm $0 \leq t < \infty$ aralığında geçerli olacaktır.

2.2 Temel Kavramlar

2.2.1 Diferansiyel denklem

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre (diferansiyel) türevlerini içeren bağıntıya diferansiyel denklem denir.

2.2.2 Adi diferansiyel denklem

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken bir tane ise bu diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir.

2.2.3 Kısmi diferansiyel denklem

Bir veya daha çok bağımlı değişken, birden fazla bağımsız değişken ve bunların türevlerinden oluşan diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

2.2.4 Diferansiyel denklemin mertebesi

Bir diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi o diferansiyel denklemin mertebesini belirtir.

2.2.5 Diferansiyel denklemin derecesi

Bir diferansiyel denklemin mertebesinin kuvvetine o diferansiyel denklemin derecesi denir. Örneğin;

$$y^{(4)} + x^2y^2 + x^5y = \sin x \quad (4.\text{mertebeden ve } 1.\text{dereceden})$$

$$4x^2y^{(2)} + y = 0 \quad (2.\text{mertebeden ve } 1.\text{dereceden})$$

$$(y')^2 = 2xy \quad (1.\text{mertebeden ve } 2.\text{dereceden})$$

2.2.6 Lineer diferansiyel denklem

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri 1. dereceden ve denklemi bağımlı değişken ve onların türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlere bağlı ise bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir.

Örneğin; $\frac{dy}{dx} = x \sin x$ diferansiyel denklemini sınıflandırırsak; bu denklemde y bağımlı x bağımsız değişken, adi diferansiyel denklem, 1. mertebeden, 1. derece ve lineer diferansiyel denklemdir.

Bir diferansiyel denklem $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ veya genel olarak $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ şeklinde yazılır.

BÖLÜM III

STİFF DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1 Temel Çalışmalar

Tek adımlı stiff problemler genellikle kimyasal reaksiyon denklemleri, elektrik devre sistemleri, difüzyon denklemleri, yüksek osilasyon davranışı gösteren diferansiyel denklemlerde rastlanır.

Bu tip problemleri çözmek için daha çok açık runge-kutta metodları, kapalı runge-kutta metodları ki bunlardan Radau IA ve Radau IIA metodları, Lobatta IIIA, Lobatta IIIB ve Lobatta IIIC metodları sayılabilir. Ayrıca bunlara ek olarak Rosenbrock tipinde metodları sayılabilir. Bunlar tek adımlı metodlardır. Bunun yanında stiff problemleri çözen çok adımlı metodlarda vardır. Bunlardan Adams metodu, Predictor-Corrector (tahmin edici-düzeltilici) metodu, Nyström metodları, Geriye doğru fark (BDF) formülleri en çok rastlanan metodlardan sayılabilir.

Bu alanda çok miktarda çalışma vardır. Bunlardan en temel olanlardan biri W.H.Enright, T.E.Hull, B.Lindberg'in 1975 yılında yaptığı ve 25 ayrı stiff adi diferansiyel denklem ve denklem sistemlerini ele alarak farklı nümerik teknikleri kullanarak bunların güvenilirlik ve hesaplama maliyeti açısından incelemiştir. Kassay stiff diferansiyel denklemlerin çözümü için singüler pertürbasyon metodlarını uygulamış ve bunu Reiss'in hızlı geçişkenlik ve değişim gösteren problemlerde kullandığı asimtotik metodlarla karşılaştırmıştır. Brugnano ve Trigiante sınır değer metodları adlı yöntemlerini runge-kutta metodları ve çoklu adım metodları arasındaki bir üçüncü çalışma yönü olarak ortaya koymuştur. Son dönemlerde Hsiao bu tür problemleri çözmek için wavelet yöntemini kullanmışlardır. Jannelli ve Fazio stiff özelliği taşıyan adi diferansiyel denklemleri çözmek için iki tane 2. mertebeden Rosenbrock metodu kullanmışlardır ve aynı mertebeden bir geriye doğru fark (BDF) metodunu kullanmışlardır.

3.2 Stiff Adi Diferansiyel Denklemler Nedir ?

Bir diferansiyel denklem sisteminde, stiff vektör çözümündeki bileşenlerin zaman skalasındaki büyük farklarını işaret eder. Genelde oldukça tatmin edici olan bazı sayısal yordamlar stiff denklemlerde oldukça zayıf performans gösterirler. Bu, nümerik

çözümdeki kararlılığın sadece çok küçük adım uzunluklarıyla gerçekleştirilebildiği durumlarda oluşur.

Stiff diferansiyel denklemler bir çok uygulamada ortaya çıkarlar. Örneğin, bir uzay aracının kontrolünde rotanın oldukça düzgün olması beklenir, fakat programlanmış uçuş rotasında herhangi bir sapma belirlendiğinde, rotada çok hızlı düzeltmeler yapılabilir. Bu tür problemlerin bir başka kaynağı, bir kimyasal süreci izleme sırasındadır; çünkü oluşan fiziksel ve kimyasal değişimler için zaman skalasında büyük farklılıklar var olabilir. Elektrik devre teorisinde, stiff problemler ortaya çıkar, çünkü mikrosaniye mertebeli zaman skalalı geçicilikler devrenin genellikle düzgün olan davranışlarına yüklenebilir.

Aşağıdaki gibi bir adi diferansiyel denklem ele alalım (Iserles, 2008)

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0, \quad \text{ki burada } A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{10} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Euler metodunu kullanarak aşağıdaki formülasyonu elde edebiliriz.

$$y_1 = y_0 + hAy_0 = (I + hA)y_0$$

$$y_2 = y_1 + hAy_1 = (I + hA)y_1 = (I + hA)^2 y_0$$

⋮

ki burada I birim matristir. İterasyonu genelleştirirsek;

$$y_n = (I + hA)^n y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Spektral çarpanlara ayırma metodunu kullanarak

$$A = VDV^{-1} \quad \text{ki burada } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{999}{10} \end{pmatrix} \quad \text{ve } D = \begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

(3.1) denkleminin tam çözümü;

$$y(t) = e^{tA} = Ve^{tD}V^{-1}y_0, \quad t \geq 0 \quad e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-100t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{10}} \end{pmatrix}$$

Diğer bir deyişle t ye bağlı olmayan y_0 'a bağlı olan iki tane çözüm vektörü vardır.

$$y(t) = e^{-100t}x_1 + e^{\frac{-t}{10}}x_2, \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

$g(t) = e^{-100t}$ fonksiyonu çok hızlı bir şekilde azalır. Örneğin; $g(0.1) \cong 4.54 \times 10^{-5}$ ve $g(1) \cong 3.72 \times 10^{-44}$ fakat diğer yandan $e^{\frac{-t}{10}}$ fonksiyonu ilk fonksiyona göre binlerce kez daha durgundur. Dolayısıyla, küçük bir zaman diliminde dahi x_1 in çözüme katkısı sıfır denecek kadar azdır ve kesin çözüm $y(t) \cong e^{\frac{-t}{10}}x_2$ tarafından belirlenir.

Bu problem için Euler çözümü $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ne olur ?

(3.2) denklemini tekrar ele alalım.

$$y_n = V(I + hD)^n V^{-1}y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(I + hD)^n = \begin{pmatrix} (1 - 100h)^n & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{1}{10}h\right)^n \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı y_n çözümü aşağıdaki şekilde alır.

$$y_n = (1 - 100h)^n x_1 + \left(1 - \frac{1}{10}h\right)^n x_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Diyelim ki ;

$h > \frac{1}{50}$ olsun. Bu durumda ;

$|1 - 100h| > 1$ ki buda (3.4) denkleminde gelen bir sonuçtur.

Büyük n ler için Euler iterasyonunun sonuçları büyüklük olarak geometrik anlamda büyür ki bu durum asıl gerçek çözümün asimtotik davranışıyla ters düşmektedir.

(3.1) numaralı eşitlikte verilen denklem örneği stiff diferansiyel denklemlere örnektir.

3.3 Rijitlik (Stiffness)

Rijitlik (stiffness) adi diferansiyel denklemlerin çözümünde ortaya çıkan bir problemdir. Rijit diferansiyel denklemin çözümünde, biri çok çabuk değişen diğeri ise çok yavaş değişen terim grubu veya grupları bulunur. Fiziksel olarak, bu terim gruplarından biri sistemin geçici (transient) çözüme diğeri ise kalıcı (steady state) çözümüne karşı gelmektedir. Geçici çözüm kısa zamanda sönmekte diğeri ise kalmaktadır. Rijit (stiff) diferansiyel denkleme örnek olarak aşağıdaki diferansiyel denklem verilebilir.

$$y' = -1000y + 3000 - 2000e^{-t}, y(0) = 0$$

$$y(t) = 3 - 0.998e^{-1000t} - 2.002e^{-t} \quad (3.5)$$

Rijit (stiff) denklemin yukarıda verilen çözümünde bulunan e^{-1000t} terimi çok kısa zamanda ($t < 0.005$) de sönmekte ve diğer terimler çözüme egemen olmaktadır. Yukarıda verilen çözüme benzer çözümler yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümünde de karşılaşılr (Bakioğlu, 2011)

Rijit (stiff) problemlerin çözümünde adım uzunluğuna çok dikkat etmek gerekir. Bu tip problemlerde çok küçük adım uzunluğu gerekebilir. Uygun olmayan adım seçimi çok yanlış sonuçlar ortaya çıkartır. Rijit (stiff) diferansiyel denklemlerin çözümü için genel bir yöntem vermek mümkün değildir. Buna karşın çok adımlı yöntemler genelde uygulanamaz. Daha önce uygulanan açık yöntemler rijit (stiff) problemlerde iyi sonuç vermez. Kapalı yöntemler iyi sonuç verir. Örneğin; geriye doğru Euler yöntemi ve trapez yöntemi gibi. Kapalı Euler yönteminin yakınsaması iyi olmamakla birlikte kararlılığı çok iyidir. Kapalı yöntemler ile Richardson ekstrapolasyonu, çözüm için iyi bir kombinasyondur. Kapalı yöntemler kullanıldığında rekürans bağıntısında y_{i+1} değerini bulmak için yapılan ardışık yaklaşımın yakınsamaması gibi bir sonuç da ortaya çıkabilir.

Rijit problemler için en uygun yöntemler geriye doğru diferansiyel bağıntıların kullanılması ile elde edilen yöntemlerdir. Bağıntılar (Bakioğlu, 2011)

$$y_{i+1} = \frac{18}{11}y_i - \frac{9}{11}y_{i-1} + \frac{2}{11}y_{i-2} + \frac{6h}{11}f_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{48}{25}y_i - \frac{36}{25}y_{i-1} + \frac{16}{25}y_{i-2} - \frac{3}{25}y_{i-3} + \frac{12h}{25}f_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{300}{137}y_i - \frac{300}{137}y_{i-1} + \frac{200}{137}y_{i-2} - \frac{75}{137}y_{i-3} + \frac{12}{137}y_{i-4} + \frac{60h}{137}f_{i+1}$$

$$y_{i+1} = \frac{360}{147}y_i - \frac{450}{147}y_{i-1} + \frac{400}{147}y_{i-2} - \frac{225}{147}y_{i-3} + \frac{72}{147}y_{i-4} - \frac{10}{147}y_{i-5} + \frac{60h}{147}f_{i+1}$$

Yukarıda verilen geriye doğru diferansiyel bağıntılardan elde edilen rekürans bağıntıları rijit problemler için uygun yöntemlerdir. Daha fazla terim uygun sonuç vermeyebilir.

(3.5) numaralı denklem rijit (stiff) bir adi diferansiyel denklemdir. Literatürde katılığın detaylı bir tanımı konusunda çok çeşitli açıklamalar vardır. Fakat beklide en çok bilgi verici anlaşılabilir tanım çok uygulama tabanlı olan açıklama yaklaşımıdır.

$$y' = f(t, y), t \geq t_0, y(t_0) = y_0 \quad (3.6)$$

Şeklinde verilmiş olan adi diferansiyel denklem ve diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir metodla yapılan nümerik çözümü kararsızlık durumundan kaçınmak için adım büyüklüğünde ciddi manada küçültmesine ihtiyaç duyuyorsa bu tip denklemlere rijit (stiff) diferansiyel denklem denir.

Bazen (3.6) numarada verilen lineer sistemin özdeğerlerinin normları bulunup en büyük normu en küçük norma bölerek elde edilen rijitlik oranı sabiti çoğunlukla (3.6) numaradaki sistemin rijitlik (stiff) durumunu yada seviyesini belirlemekte kullanılır.

Bu rijitlik (stiff) kavramı ve ilgili rijitlik (stiff) oranı değeri adi diferansiyel denklem veya denklem sisteminin olası davranışını tahmin etmede yardımcı olur. Dolayısıyla (3.6) numaradaki genel formu verilen denklem veya denklem sisteminin rijitlik (stiff) oranı büyükse denklem yada denklem sistemi rijittir (stiff). Burada dikkat edilmesi gereken nokta lineer olmayan adi diferansiyel denklemin davranışını tahmin etmede yada belirlemede bu rijitlik (stiff) oranı tam kullanışlı olmayabilir.

Pratikte karşılaşılan pek çok adi diferansiyel denklem rijittir (stiff). Ne zaman ki bir diferansiyel denklem modelinde çoklu süreçler bir birinden çok farklı değişim oranıyla çıkarsa rijitlik (stiff) karşılaşmak kaçınılmaz olmaktadır. Örneğin; kimyasal kinetiğin diferansiyel denklemleri, çok farklı zaman aralıklarında meydana gelen reaksiyon durumlarını temsil eder. Mesela; paslanma ve patlama olaylarının geliştiği zaman süreçlerini düşününüz. Bu iki farklı sürecin aynı anda ele alındığı diferansiyel denklem sistemlerinde örnek olarak 10^{17} gibi bir rijitlik (stiff) oranı normal sayılmaktadır. Rijit (Stiff) diferansiyel denklemin ortaya çıktığı diğer alanlar genellikle kontrol teorisi alanı, reaktör kinetiği alanı, hava durumu tahminin yapıldığı problemler, matematiksel biyoloji alanı sayılabilir. Ayrıca parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde de rijit (stiff) adi diferansiyel sistemlerinin yüksek rijitlik (stiff) halleriyle çalışılmaktadır.

BÖLÜM IV

VARYASYONEL İTERASYON METODU

4.1 VİM Literatürü

Varyasyonel iterasyon yöntemi, varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniği olup, He tarafından önerilmiştir (He, 2000; He, 2004a; He, 2004b; He, 2005). Bu yöntemle çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklem sistemleri çözülebilmektedir. Yöntemin çeşitli matematiksel uygulamaları He (2006b, 2008a, 2008b), Noor ve Mohyud-Din (2008), Mahmood vd. (2008) ve Islam vd. (2009) çalışmalarında yer almaktadır. Mühendislik problemleri de, çeşitli doğrusal ya da doğrusal olmayan, diferansiyel denklem veya denklem sistemleri ile ifade edilen, başlangıç-değer, sınır-değer veya özdeğer problemleridir. Coskun ve Atay (2007) , Atay ve Coskun (2008) varyasyonel iterasyon yöntemini doğrusal olmayan ısı transferi problemlerine uygulamışlardır. Daha sonra, Coskun ve Atay (2009) , Atay ve Coskun (2009) varyasyonel iterasyon yöntemini ilk defa elastik stabilite problemlerine uygulamışlardır. Yöntemin bu başarılı uygulamaları, mevcut çalışma için seçilmesinin başlıca nedenleridir.

4.2 Varyasyonel İterasyon Metodu

Varyasyonel iterasyon yöntemi He (2008a) tarafından geliştirilmiş olup çeşitli doğrusal olmayan problemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabilen ve hassas çözümlere hızlı bir şekilde yakınsayan iteratif bir yöntemdir. Yöntemin detayları He (2008a) kaynağında anlatılmaktadır.

Inokuti vd. (1978) doğrusal olmayan problemleri çözmek için (özellikle kuantum mekaniğindeki problemler) genel bir Lagrange çarpanı yöntemi önermişlerdir.

Lagrange çarpanı ve varyasyon hesabının detayları için Ramos (2008) kaynağı incelenebilir. Önerilen yöntemin ana özelliği şöyledir: Matematik problemi doğrusallaştırılmış halinin çözümü başlangıç tahmini olarak kullanılarak belirli bir noktada daha yüksek hassasiyetle bir tahmin elde edilebilir.

Aşağıdaki genel doğrusal olmayan bir sistemi ele alalım.

$$Lu + Nu = g(x) \quad (4.1)$$

Burada L doğrusal olan ve N doğrusal olmayan operatörlerdir.

$u_0(x)$ 'in $Lu = 0$ sistemin bir çözümü olduğu varsayılarak belirli bir nokta için bu değer aşağıdaki gibi düzeltilir.

$$u_{düzelttilmiş}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda(Lu_0 + Nu_0 - g) dx \quad (4.2)$$

Burada λ genel lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir. Denklemin sağındaki 2. terim ise düzeltme olarak adlandırılır. He bu yöntemi aşağıdaki şekilde bir iteratif yöntemle dönüştürmüştür (He, 1999; He, 2000; He, 2003a; He, 2003b; He, 2006a).

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lu_n + Nu_n - g\} dx \quad (4.3)$$

Burada $u_0(x)$ muhtemel değişkenlerle bir başlangıç tahmini ve $u_n, \delta u_n = 0$ koşulunu sağlayan sınırlı varyasyon olarak düşünülebilir. Herhangi bir x_0 için bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \{Lu_n(\zeta) + Nu_n(\zeta) - g(\zeta)\} d\zeta \quad (4.4)$$

Denklem (4.4) bir düzeltme fonksiyoneli. Varyasyonel iterasyon yönteminin çeşitli doğrusal olmayan problemlerin çözümünde nasıl etkin olarak kullanıldığı He (1997), He (1999), He (2003a), He (2003b) ve He (2006a) çalışmalarında etkin olarak gösterilmiştir. Doğrusal problemlerde ise Lagrange çarpanı tam olarak tanımlanabildiğinden gerçek çözüm tek bir iterasyonla elde edilebilir.

$$y'' + w^2 y = f(t) \quad (4.5)$$

$$f(t) = A \sin wt + B \cos wt \quad (4.6)$$

Bunun düzeltme fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau) - f(\tau)\} d\tau \quad (4.7)$$

$\delta y(0) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bu düzeltme fonksiyoneli stasyoner hale getirirsek

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau) - f(\tau)\} d\tau \quad (4.8)$$

$$= \delta y_n(t) + \lambda(t) \delta y_n'(\tau)|_{\tau=t} - \lambda'(\tau) \delta y_n(\tau)|_{\tau=t} + \int_0^t (y_n'' + w^2 \lambda) \delta y_n d\tau = 0$$

aşağıdaki stasyoner koşullar meydana gelir.

$$\delta y_n: \lambda''(\tau) + w^2 \lambda(\tau) = 0$$

$$\delta y_n': \lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0$$

$$\delta y_n: 1 - \lambda'(\tau)|_{\tau=t} = 0 \quad (4.9)$$

Burada Lagrange çarpanı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\lambda = \frac{1}{w} \sin w(\tau - 1) \quad (4.10)$$

sonuç olarak aşağıdaki iterasyon formülü elde edilir.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \frac{1}{w} \int_0^t \sin w(\tau - 1) \times \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau) - f(\tau)\} d\tau \quad (4.11)$$

Eğer denklem (4.5)'in homojen çözümünü başlangıç tahmini olarak kullanacak olursak

$$y_0 = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt \quad (4.12)$$

Denklem (4.11) deki iterasyon formülünden

$$y_1(t) = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt - \frac{A}{2w} t \cos wt + \frac{B}{w^2-1} (\sin t + \sin wt) \quad (4.13)$$

Bu sonuç denklem (4.5)' in genel çözümüdür.

Bununla birlikte eğer düzeltme fonksiyoneline sınırlı varyasyon uygulayacak olursak tam çözüm sadece ardışık iterasyonlarla elde edilebilir. Denklem (4.5)' in homojen olduğunu varsayarak düzeltme fonksiyoneline tekrar yazalım.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau)\} d\tau \quad (4.14)$$

Burada y_n sınırlı fonksiyon olarak düşünülebilir ve $\delta y_n = 0$ olacak şekilde yukarıdaki düzeltme fonksiyonelinin stasyoner koşulları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\lambda''(\tau) = 0 \quad (4.15)$$

$$\lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0 \quad (4.16)$$

$$1 - \lambda'(\tau)|_{\tau=t} = 0 \quad (4.17)$$

Dolayısıyla Lagrange çarpanı aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda = \tau - t \quad (4.18)$$

Lagrange çarpanının yerine konmasıyla iterasyon formülü şu formu alır.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t (\tau - t) \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau)\} d\tau \quad (4.19)$$

Örneğin $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ve $y_0 = y(0) = 1$ başlangıç tahmini ile başlarsak sırasıyla aşağıdaki yaklaşık çözümleri elde ederiz.

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{2!} w^2 t^2 \quad (4.20)$$

$$y_2(t) = 1 - \frac{1}{2!} w^2 t^2 + \frac{1}{4!} w^4 t^4 \quad (4.21)$$

⋮

$$y_n(t) = 1 - \frac{1}{2!} w^2 t^2 + \frac{1}{4!} w^4 t^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} w^{2n} t^{2n} \quad (4.22)$$

Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \cos wt$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm problemin gerçek çözümüdür .

Yukarıda da görüldüğü üzere tahmin çözümleri Lagrange çarpımını yaklaşık tanımlamasından ötürü görece olarak daha yavaş bir şekilde gerçek çözüme yakınsar. Gerçekte denklem (4.18)'in, denklem (4.11)'in 1. Mertebeden tahmini olduğunu aşağıdaki bağıntıdan görebiliriz.

$$\lambda = \frac{1}{w} \sin(\tau - t) \approx \tau - t - \frac{1}{3!} w^2 (\tau - t)^3 \quad (4.23)$$

Doğrusal olmayan problemler için Lagrange çarpımını basit bir şekilde elde edebilmek açısından doğrusal olmayan terimler sınırlı varyasyonlar olarak düşünülebilir.

BÖLÜM V

STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN VİM ÇÖZÜMÜ

5.1 VİM Formülasyonu

Varyasyonel iterasyon metoduna (VİM) göre lineer olmayan bir diferansiyel denklem aşağıda belirtildiği gibi düşünülebilir.

$$Lu + Nu = g(x) \quad (5.1)$$

Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ ise homojen olmayan bir terimdir. $u_0(x)$ ' in $Lu = 0$ sisteminin bir çözümü olduğu varsayılarak belirli bir nokta için bu değer aşağıdaki gibi düzeltilebilir.

$$u_{düzeltilmiş}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda \{Lu_0 + Nu_0 - g\} dx \quad (5.2)$$

Burada λ genel lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir. Denklemin sağındaki 2. terim ise düzeltme olarak adlandırılır. Bu yöntem aşağıdaki şekilde bir iteratif yöntemle dönüştürülebilir.

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lu_n + Nu_n - g\} dx \quad (5.3)$$

Burada $u_0(x)$ muhtemel değişkenlerle bir başlangıç tahmini ve $u_n, \delta u_n = 0$ koşulunu sağlayan sınırlı varyasyon olarak düşünülebilir. Herhangi bir x_0 için bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lu_n(\zeta) + Nu_n(\zeta) - g(\zeta)\} d\zeta \quad (5.4)$$

Bu denklem bir düzeltme fonksiyoneliidir.

Ayrıca sistemler içinde Modifiye edilmiş Varyasyonel İterasyon Metodu (MVİM) vardır. Herhangi bir x_0 için denklemini aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lu_n(\zeta) + Nv_n(\zeta) - g(\zeta)\} d\zeta \\ v_{n+1}(x) = v_n(x) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lv_n(\zeta) + Nu_{n+1}(\zeta) - h(\zeta)\} d\zeta \end{cases} \quad (5.5)$$

Bu denklemde bir düzeltme fonksiyoneliidir.

Eğer elimizde bulunan diferansiyel denklem (Darvishi vd., 2007).

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 95 \\ -1 & -97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

ise λ Lagrange çarpanını bulalım.

Bu diferansiyel denklemin düzeltme fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1 [u'_n(\zeta) + u_n(\zeta) - 95\widetilde{v}_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.7)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2 [v'_n(\zeta) + \widetilde{u}_n(\zeta) + 97v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.8)$$

λ_1 ve λ_2 Lagrange çarpanları, \widetilde{u}_n ve \widetilde{v}_n sınırlı varyasyonları ifade eder. $\delta\widetilde{u}_n = 0$ ve $\delta\widetilde{v}_n = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bu düzeltme fonksiyonlarını stasyonere hale getirirsek

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda_1 [u'_n(\zeta) + u_n(\zeta) - 95\widetilde{v}_n(\zeta)] d\zeta \\ &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda_1 [u'_n(\zeta) + u_n(\zeta)] d\zeta \\ &= \delta u_n(t) + \lambda_1 \delta u_n(\zeta)|_{\zeta=t} + \int_0^t (\lambda_1 - \lambda'_1) \delta u_n(\zeta) d\zeta = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \delta v_{n+1}(t) &= \delta v_n(t) + \delta \int_0^t \lambda_2 [v'_n(\zeta) + \widetilde{u}_n(\zeta) + 97v_n(\zeta)] d\zeta \\ &= \delta v_n(t) \\ &\quad + \delta \int_0^t \lambda_2 [v'_n(\zeta) + 97v_n(\zeta)] d\zeta \\ &= \delta v_n(t) + \lambda_2 \delta v_n(\zeta)|_{\zeta=t} + \int_0^t (97\lambda_2 - \lambda'_2) \delta v_n(\zeta) d\zeta = 0 \end{aligned}$$

Aşağıdaki stasyonere koşullar meydana gelir.

$$\delta u_n: \lambda'_1(\zeta) - \lambda_1(\zeta) = 0 \quad (5.9)$$

$$\delta u_n: 1 + \lambda_1(\zeta)|_{\zeta=t} = 0 \quad (5.10)$$

ve

$$\delta v_n: \lambda'_2(\zeta) - 97\lambda_2(\zeta) = 0 \quad (5.11)$$

$$\delta v_n: 1 + \lambda_2(\zeta)|_{\zeta=t} = 0 \quad (5.12)$$

Burada Lagrange çarpanları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\lambda_1 = -e^{\zeta-t}$$

$$\lambda_2 = -e^{97(\zeta-t)}$$

Dolayısıyla (5.7) ve (5.8) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u'_n(\zeta) + u_n(\zeta) - 95v_n(\zeta)] d\zeta$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [v'_n(\zeta) + u_n(\zeta) + 97v_n(\zeta)] d\zeta$$

5.2 VİM Çözümleri

5.2.1 Stiff sıradan diferansiyel denklem

Örnek 5.2.1

$y'(t) = -200[y(t) - F(t)] + F'(t)$, $F(t) = 10 - (10 + t)e^{-t}$ ve başlangıç şartı

$y(0) = 10$ olan ve gerçek çözümü $y_E(t) = F(t) + 10e^{-200t}$ olan stiff diferansiyel denklemi göz önüne alalım (Gamal ve Iman, 1999).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\zeta) [y'_n(\zeta) + 200(y_n(\zeta) - F(\zeta)) - F'(\zeta)] d\zeta \quad (5.13)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanı (5.6) denklemine uygulanan işlemler (5.13) denklemine uygulanmasıyla $\lambda(\zeta) = -e^{200(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Tek denklem olduğundan stiffness katsayısı yoktur.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$y_1(t) = y_0(t) - \int_0^t e^{200(\zeta-t)} [y'_0(\zeta) + 200(y_0(\zeta) - F(\zeta)) - F'(\zeta)] d\zeta \quad (5.14)$$

$n = 1$ için ;

$$y_2(t) = y_1(t) - \int_0^t e^{200(\zeta-t)} [y'_1(\zeta) + 200(y_1(\zeta) - F(\zeta)) - F'(\zeta)] d\zeta \quad (5.15)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$y_1(t) = 10 + 10e^{-200t} - 10e^{-t} - te^{-t} \quad (5.16)$$

$$y_2(t) = 10 + 10e^{-200t} - 10e^{-t} - te^{-t} \quad (5.17)$$

Çizelge 5.2.1 Örnek 5.2.1'deki $y(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi

t	$y_2(t)$	$y_E(t)$	$ y_E(t) - y_2(t) $
0	10	10	0
0.1	0.8611420984483455	0.8611420984483455	0
0.2	1.648946318604580	1.648946318604585	0
0.3	2.3695723269783064	2.3695723269783064	0
0.4	3.0286715212293505	3.0286715212293505	0
0.5	3.631428073017349	3.631428073017349	0
0.6	4.1825966574033195	4.1825966574033195	0
0.7	4.686537249431918	4.686537249431918	0
0.8	5.147247187534007	5.147247187534007	0
0.9	5.56839070882747	5.56839070882747	0
1	5.953326147114135	5.953326147114135	0

Örnek 5.2.2

$y'(t) = 5e^{5t}(y(t) - t)^2 + 1$ ve başlangıç şartı $y(0) = -1$ olan ve gerçek çözümü ;
 $y_E(t) = t - e^{-5t}$ olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Lee vd., 2002).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda(\zeta) [y_n'(\zeta) - 5e^{5\zeta}(y_n(\zeta) - \zeta)^2 - 1] d\zeta \quad (5.18)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanı (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.18) denkleminde uygulanmasıyla $\lambda(\zeta) = -1$ olarak elde edilir. Tek denklem olduğundan stiffness katsayısı yoktur.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$y_1(t) = y_0(t) - \int_0^t [y_0'(\zeta) - 5e^{5\zeta}(y_0(\zeta) - \zeta)^2 - 1] d\zeta \quad (5.19)$$

$n = 1$ için ;

$$y_2(t) = y_1(t) - \int_0^t [y_1'(\zeta) - 5e^{5\zeta}(y_1(\zeta) - \zeta)^2 - 1] d\zeta \quad (5.20)$$

$n = 2$ için ;

$$y_3(t) = y_2(t) - \int_0^t [y_2'(\zeta) - 5e^{5\zeta}(y_2(\zeta) - \zeta)^2 - 1] d\zeta \quad (5.21)$$

$n = 3$ için ;

$$y_4(t) = y_3(t) - \int_0^t [y_3'(\zeta) - 5e^{5\zeta}(y_3(\zeta) - \zeta)^2 - 1] d\zeta \quad (5.22)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$y_1(t) = -\frac{42}{25} + \frac{17e^{5t}}{25} + t + \frac{8t}{5}e^{5t} + e^{5t}t^2 \quad (5.23)$$

$$y_2(t) = -\frac{153437}{50625} + \frac{1764e^{5t}}{625} - \frac{567e^{10t}}{625} + \frac{1171e^{15t}}{10125} + t - \frac{294t}{125}e^{10t} + \frac{1948t}{3375}e^{15t} - \dots \quad (5.24)$$

$$y_3(t) = -\frac{314251742702827765303}{65664686390625000000} + \frac{23542912969e^{5t}}{2562890625} - \frac{30073652e^{10t}}{3515625} + \dots \quad (5.25)$$

$y_4(t) =$

$$-\frac{77287101204350195860004065709292610593527104342773343476170994234466630513}{1085178121146114092217883433942815686226708583334375000000000000000000} + \dots \quad (5.26)$$

Çizelge 5.2.2 Örnek 5.2.2'deki $y(t)$ 'nin dördüncü iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi

t	$y_4(t)$	$y_E(t)$	$ y_E(t) - y_4(t) $
0	-0.9999999999999994	-1	$7.339976471698332 \cdot 10^{-15}$
0.001	-0.9940124791931712	-0.9940124791926823	$4.927906523813651 \cdot 10^{-13}$
0.002	-0.9880498337651762	-0.9880498337491681	$1.6008528246149587 \cdot 10^{-11}$
0.003	-0.9821119397246764	-0.9821119396030626	$1.2161364041303285 \cdot 10^{-10}$
0.004	-0.9761986738193489	-0.9761986733067552	$5.125912412513385 \cdot 10^{-10}$
0.005	-0.9703099135930895	-0.9703099120283326	$1.5647582356268962 \cdot 10^{-9}$
0.006	-0.964445537443148	-0.9644455335485081	$3.89464052799234 \cdot 10^{-9}$
0.007	-0.9586054246776361	-0.9586054162575665	$8.420067726445267 \cdot 10^{-9}$
0.008	-0.9527894555727712	-0.9527894391523232	$1.642045066314947 \cdot 10^{-8}$
0.009	-0.9469975114305945	-0.9469974818330998	$2.9597494739514207 \cdot 10^{-8}$
0.01	-0.9412294746363914	-0.941229424500714	$5.0135674697056634 \cdot 10^{-8}$

5.2.2 Stiff sıradan diferansiyel denklem sistemleri

Örnek 5.2.3

$$u'(t) = -u(t) - 15v(t) + 15e^{-t}$$

$v'(t) = 15u(t) - v(t) - 15e^{-t}$ ve başlangıç şartı $u(0) = 1, v(0) = 1$ olan ve gerçek çözümü ;

$$u_E(t) = e^{-t}$$

$v_E(t) = e^{-t}$ olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Hojjati vd., 2004).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) + u_n(\zeta) + 15v_n(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.27)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) - 15u_n(\zeta) + v_n(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.28)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [mu'_n(\zeta) + mu_n(\zeta) + 15mv_n(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.29)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [mv'_n(\zeta) - 15mu_{n+1}(\zeta) + mv_n(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.30)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.27), (5.28), (5.29) ve (5.30) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{\zeta-t}$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{\zeta-t}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 1 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u'_0(\zeta) + u_0(\zeta) + 15v_0(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.31)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [v'_0(\zeta) - 15u_0(\zeta) + v_0(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.32)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u_1'(\zeta) + u_1(\zeta) + 15v_1(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.33)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [v_1'(\zeta) - 15u_1(\zeta) + v_1(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.34)$$

$n = 2$ için ;

$$u_3(t) = u_2(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u_2'(\zeta) + u_2(\zeta) + 15v_2(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.35)$$

$$v_3(t) = v_2(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [v_2'(\zeta) - 15u_2(\zeta) + v_2(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.36)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = -15 + 16e^{-t} + 15e^{-t}t \quad (5.37)$$

$$v_1(t) = 15 - 14e^{-t} - 15e^{-t}t \quad (5.38)$$

$$u_2(t) = -225 + 226e^{-t} + 225e^{-t}t + \frac{225t^2}{2}e^{-t} \quad (5.39)$$

$$v_2(t) = -225 + 226e^{-t} + 225e^{-t}t + \frac{225t^2}{2}e^{-t} \quad (5.40)$$

$$u_3(t) = 3375 - 3374e^{-t} - 3375e^{-t}t - \frac{3375t^2}{2}e^{-t} - \frac{1125t^3}{2}e^{-t} \quad (5.41)$$

$$v_3(t) = -3375 + 3376e^{-t} + 3375e^{-t}t + \frac{3375t^2}{2}e^{-t} + \frac{1125t^3}{2}e^{-t} \quad (5.42)$$

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu_0'(\zeta) + mu_0(\zeta) + 15mv_0(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.43)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mv_0'(\zeta) - 15mu_1(\zeta) + mv_0(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.44)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu_1'(\zeta) + mu_1(\zeta) + 15mv_1(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.45)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mv_1'(\zeta) - 15mu_2(\zeta) + mv_1(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.46)$$

$n = 2$ için ;

$$mu_3(t) = mu_2(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu_2'(\zeta) + mu_2(\zeta) + 15mv_2(\zeta) - 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.47)$$

$$mv_3(t) = mv_2(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mv_2'(\zeta) - 15mu_3(\zeta) + mv_2(\zeta) + 15e^{-\zeta}] d\zeta \quad (5.48)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = -15 + 16e^{-t} + 15e^{-t}t \quad (5.49)$$

$$mv_1(t) = -225 + 226e^{-t} + 225e^{-t}t + \frac{225t^2}{2}e^{-t} \quad (5.50)$$

$$mu_2(t) = 3375 - 3374e^{-t} - 3375e^{-t}t - \frac{3375t^2}{2}e^{-t} - \frac{1125t^3}{2}e^{-t} \quad (5.51)$$

$$mv_2(t) = 50625 - 50624e^{-t} - 50625e^{-t}t - \frac{50625t^2}{2}e^{-t} - \frac{16875t^3}{2}e^{-t} - \frac{16875t^4}{8}e^{-t} \quad (5.52)$$

$$mu_3(t) = -759375 + 759376e^{-t} + 759375e^{-t}t + \frac{759375t^2}{2}e^{-t} + \frac{253125t^3}{2}e^{-t} + \frac{253125t^4}{8}e^{-t} + \dots \quad (5.53)$$

$$mv_3(t) = -11390625 + 11390626e^{-t} + 11390625e^{-t}t + \frac{11390625t^2}{2}e^{-t} + \frac{3796875t^3}{2}e^{-t} + \dots \quad (5.54)$$

Çizelge 5.2.3 Örnek 5.2.3'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_3(t)$	$mu_3(t)$	$u_E(t)$
0	1	1	1
0.001	0.9990004999737394	0.9990004998935951	0.999000499833375
0.002	0.9980020009138766	0.9980019986698418	0.9980019986673331
0.003	0.9970045068664319	0.9970044955436256	0.997004495503373
0.004	0.9960080252290866	0.9960079893833161	0.9960079893439915
0.005	0.9950125667325684	0.9950124792377044	0.9950124791926823
0.006	0.9940181454311889	0.9940179640374512	0.9940179640539353
0.007	0.9930247786884213	0.9930244427667563	0.9930244429332351
0.008	0.992032487162924	0.9920319146383471	0.9920319148370607
0.009	0.991041294795581	0.9910403782024698	0.9910403787728836
0.01	0.9900512287956041	0.990049832687267	0.9900498337491681

Çizelge 5.2.4 Örnek 5.2.3'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_3(t)$	$mv_3(t)$	$v_E(t)$
0	1	1	1
0.001	0.9990004996928619	0.9990004992471849	0.999000499833375
0.002	0.9980019964209337	0.9980019996738057	0.9980019986673331
0.003	0.9970044841400352	0.9970044955640013	0.997004495503373
0.004	0.9960079534588728	0.9960079903519065	0.9960079893439915
0.005	0.9950123916531064	0.9950124800945209	0.9950124791926823
0.006	0.994017782676631	0.994017964763553	0.9940179640539353
0.007	0.993024107177818	0.9930244428529994	0.9930244429332351
0.008	0.9920313425112177	0.9920319152450463	0.9920319148370607
0.009	0.9910394627505194	0.9910403779326697	0.9910403787728836
0.01	0.9900484387024483	0.9900498351330844	0.9900498337491681

Çizelge 5.2.5 Örnek 5.2.3'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_3(t) $	$ u_E(t) - mu_3(t) $
0	0	0
0.001	$1.4021135142684715 \cdot 10^{-10}$	$5.370060239583488 \cdot 10^{-11}$
0.002	$2.246471434222408 \cdot 10^{-9}$	$3.017630719956421 \cdot 10^{-11}$
0.003	$1.1363425714283615 \cdot 10^{-8}$	$7.563492323767185 \cdot 10^{-11}$
0.004	$3.588510683744106 \cdot 10^{-8}$	$1.0231015687423017 \cdot 10^{-11}$
0.005	$8.753995842103457 \cdot 10^{-8}$	$1.4477568449633438 \cdot 10^{-11}$
0.006	$1.813772789946433 \cdot 10^{-7}$	$7.5121089904151 \cdot 10^{-11}$
0.007	$3.357555290045555 \cdot 10^{-7}$	$1.6022430604500926 \cdot 10^{-10}$
0.008	$5.723256257528231 \cdot 10^{-7}$	$2.421521871909249 \cdot 10^{-10}$
0.009	$9.160225308002534 \cdot 10^{-7}$	$6.065054292125893 \cdot 10^{-10}$
0.01	$1.3950463505496558 \cdot 10^{-6}$	$9.774036302534483 \cdot 10^{-10}$

Çizelge 5.2.6 Örnek 5.2.3'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_3(t) $	$ v_E(t) - mv_3(t) $
0	0	0
0.001	$1.4021135142684715 \cdot 10^{-10}$	$2.2219767605718976 \cdot 10^{-10}$
0.002	$2.246471434222408 \cdot 10^{-9}$	$4.792591046243189 \cdot 10^{-10}$
0.003	$1.1363425714283615 \cdot 10^{-8}$	$3.696506087336182 \cdot 10^{-10}$
0.004	$3.588510683744106 \cdot 10^{-8}$	$2.5986732210547814 \cdot 10^{-10}$
0.005	$8.753995842103457 \cdot 10^{-8}$	$6.710601796466875 \cdot 10^{-10}$
0.006	$1.813772789946433 \cdot 10^{-7}$	$5.345652809296553 \cdot 10^{-10}$
0.007	$3.357555290045555 \cdot 10^{-7}$	$5.080954545988448 \cdot 10^{-10}$
0.008	$5.723256257528231 \cdot 10^{-7}$	$1.3171641555231872 \cdot 10^{-10}$
0.009	$9.160225308002534 \cdot 10^{-7}$	$8.763054726301789 \cdot 10^{-10}$
0.01	$1.3950463505496558 \cdot 10^{-6}$	$1.6140067060632646 \cdot 10^{-10}$

Örnek 5.2.4

$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ ve başlangıç şartı $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ dir. Gerçek çözüm Laplace Transform yardımıyla ;

$$u_E(t) = e^{(-6-\sqrt{17})t} + e^{(-6+\sqrt{17})t}$$

$$v_E(t) = \frac{(-17 + 4\sqrt{17})e^{(-6-\sqrt{17})t} + (17 + 4\sqrt{17})e^{(-6+\sqrt{17})t}}{\sqrt{17}}$$

olarak elde edilir. Stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Atay ve Kılıç, 2013).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) + 10u_n(\zeta) - v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.55)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) - u_n(\zeta) + 2v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.56)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [mu'_n(\zeta) + 10mu_n(\zeta) - mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.57)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [mv'_n(\zeta) - mu_{n+1}(\zeta) + 2mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.58)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.55), (5.56), (5.57) ve (5.58) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{10(\zeta-t)}$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{2(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 5.393540395 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)} [u'_0(\zeta) + 10u_0(\zeta) - v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.59)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{2(\zeta-t)} [v'_0(\zeta) - u_0(\zeta) + 2v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.60)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)} [u_1'(\zeta) + 10u_1(\zeta) - v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.61)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{2(\zeta-t)} [v_1'(\zeta) - u_1(\zeta) + 2v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.62)$$

⋮

$n = 14$ için ;

$$u_{15}(t) = u_{14}(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)} [u_{14}'(\zeta) + 10u_{14}(\zeta) - v_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.63)$$

$$v_{15}(t) = v_{14}(t) - \int_0^t e^{2(\zeta-t)} [v_{14}'(\zeta) - u_{14}(\zeta) + 2v_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.64)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = \frac{4}{5} + \frac{6e^{-10t}}{5} \quad (5.65)$$

$$v_1(t) = 1 + 7e^{-2t} \quad (5.66)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{10} + \frac{41e^{-10t}}{40} + \frac{7e^{-2t}}{8} \quad (5.67)$$

$$v_2(t) = \frac{2}{5} - \frac{3e^{-10t}}{20} + \frac{31e^{-2t}}{4} \quad (5.68)$$

⋮

$$u_{15}(t) = \frac{1}{1600000000} + \frac{214748364745860397e^{-10t}}{214748364800000000} + \frac{549755813683e^{-2t}}{549755813888} - \frac{660918300195057t}{5368709120000000} e^{-10t} + \dots \quad (5.69)$$

$$v_{15}(t) = \frac{1}{1280000000} - \frac{10574692730936989e^{-10t}}{85899345920000000} + \frac{8931449088305e^{-2t}}{1099511627776} + \frac{2034068935799t}{134217728000000} e^{-10t} + \dots \quad (5.70)$$

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)} [mu'_0(\zeta) + 10mu_0(\zeta) - mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.71)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{2(\zeta-t)} [mv'_0(\zeta) - mu_1(\zeta) + 2mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.72)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)} [mu'_1(\zeta) + 10mu_1(\zeta) - mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.73)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{2(\zeta-t)} [mv'_1(\zeta) - mu_2(\zeta) + 2mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.74)$$

⋮

$n = 14$ için ;

$$mu_{15}(t) = mu_{14}(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)} [mu'_{14}(\zeta) + 10mu_{14}(\zeta) - mv_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.75)$$

$$mv_{15}(t) = mv_{14}(t) - \int_0^t e^{2(\zeta-t)} [mv'_{14}(\zeta) - mu_{15}(\zeta) + 2mv_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.76)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = \frac{4}{5} + \frac{6e^{-10t}}{5} \quad (5.77)$$

$$mv_1(t) = \frac{2}{5} - \frac{3e^{-10t}}{20} + \frac{31e^{-2t}}{4} \quad (5.78)$$

$$mu_2(t) = \frac{1}{25} + \frac{793e^{-10t}}{800} + \frac{31e^{-2t}}{32} - \frac{3t}{20}e^{-10t} \quad (5.79)$$

$$mv_2(t) = \frac{1}{50} - \frac{389e^{-10t}}{3200} + \frac{1037e^{-2t}}{128} + \frac{3t}{160}e^{-10t} + \frac{31t}{32}e^{-2t} \quad (5.80)$$

⋮

$$mu_{15}(t) = \frac{1}{2048000000000000000} + \frac{73786976294838206514212200295489157e^{-10t}}{7378697629483820646400000000000000} + \dots \quad (5.81)$$

$$mv_{15}(t) = \frac{1}{4096000000000000000} - \frac{36334367516846184162015998578943561e^{-10t}}{295147905179352825856000000000000000} + \dots \quad (5.82)$$

Çizelge 5.2.7 Örnek 5.2.4'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_{15}(t)$	$mu_{15}(t)$	$u_E(t)$
0	2	2	2
0.5	0.39757059214807683	0.39757059214807683	0.39757059214807683
1	0.15310487138764364	0.15310487138763976	0.15310487138763973
1.5	0.05988451540793949	0.0598845154076735	0.059884515407673505
2	0.02342881322120863	0.02342881321791905	0.02342881321791905
2.5	0.009166168288311191	0.009166168271459385	0.009166168271459389
3	0.0035861247768383723	0.0035861247256523954	0.003586124725652396
3.5	0.0014030171821282245	0.0014030170711399122	0.001403017071139912
4	0.0005489094046572347	0.0005489092132974475	0.0005489092132974475
4.5	0.00021475271017177636	0.0002147524293472131	0.00021475242934721324
5	0.00008401900780327056	0.00008401864059355628	0.00008401864059355636

Çizelge 5.2.8 Örnek 5.2.4'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_{15}(t)$	$mv_{15}(t)$	$v_E(t)$
0	8	7.999999999999999	8.0000000000000002
0.5	3.177262280117094	3.1772622801170938	3.177262280117094
1	1.2433560287025747	1.2433560287025707	1.243356028702570
1.5	0.4864461467897269	0.48644614678948217	0.4864461467894823
2	0.1903147111678612	0.19031471116472698	0.19031471116472704
2.5	0.07445775298370626	0.07445775296706533	0.07445775296706537
3	0.02913046998493388	0.029130469932580193	0.0291304699325802
3.5	0.011396855980781696	0.011396855863410856	0.011396855863410854
4	0.004458847727178969	0.004458847518489839	0.00445884751848984
4.5	0.0017444569817909575	0.0017444566669454057	0.001744456666945407
5	0.0006824927138448505	0.0006824922920622653	0.000682492292062266

Çizelge 5.2.9 Örnek 5.2.4'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_{15}(t) $	$ u_E(t) - mu_{15}(t) $
0	0	0
0.5	$2.2683542327470163 \cdot 10^{-17}$	$2.282928121164435 \cdot 10^{-18}$
1	$3.9361078957821094 \cdot 10^{-15}$	$4.8262061805908646 \cdot 10^{-17}$
1.5	$2.659813084300751 \cdot 10^{-13}$	$5.1772866444321416 \cdot 10^{-18}$
2	$3.289578231666611 \cdot 10^{-12}$	$7.555517345896108 \cdot 10^{-19}$
2.5	$1.685180354228698 \cdot 10^{-11}$	$3.154995896452806 \cdot 10^{-18}$
3	$5.1185976684536014 \cdot 10^{-11}$	$3.215333759054874 \cdot 10^{-19}$
3.5	$1.1098831253297879 \cdot 10^{-10}$	$4.796588761623493 \cdot 10^{-19}$
4	$1.9135978719018548 \cdot 10^{-10}$	$1.2307620334176499 \cdot 10^{-20}$
4.5	$2.808245631233036 \cdot 10^{-10}$	$1.2957536141459413 \cdot 10^{-19}$
5	$3.672097141931768 \cdot 10^{-10}$	$7.506581340857471 \cdot 10^{-20}$

Çizelge 5.2.10 Örnek 5.2.4'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_{15}(t) $	$ v_E(t) - mv_{15}(t) $
0	$1.7763568394002505*10^{-15}$	$2.6229018956769323*10^{-15}$
0.5	$4.481820730511954*10^{-17}$	$3.0451714605387023*10^{-16}$
1	$3.796171276632121*10^{-15}$	$6.699623261226515*10^{-17}$
1.5	$2.446699527008933*10^{-13}$	$1.194964630220657*10^{-16}$
2	$3.1341844809566755*10^{-12}$	$5.768933781415289*10^{-17}$
2.5	$1.6640882140143975*10^{-11}$	$4.5334084284402523*10^{-17}$
3	$5.235368044577589*10^{-11}$	$7.028651272175357*10^{-18}$
3.5	$1.1737084154789853*10^{-10}$	$1.735674733681243*10^{-18}$
4	$2.086891291014619*10^{-10}$	$1.3107024221759996*10^{-18}$
4.5	$3.14845550374249*10^{-10}$	$1.296806201475415*10^{-18}$
5	$4.2178258450234333*10^{-10}$	$6.661330967823222*10^{-19}$

Örnek 5.2.5

$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1000 & -10000 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve başlangıç şartı $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olan ve gerçek çözümü ;

$$u_E(t) = \frac{100}{9} e^{-100t} - \frac{91}{9} e^{-1000t}$$

$$v_E(t) = e^{-100t}$$

olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Eriksson, 2004).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) + 1000u_n(\zeta) - 10000v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.83)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) + 100v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.84)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.83) ve (5.84) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{1000(\zeta-t)}$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{100(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 10 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [u_0'(\zeta) + 1000u_0(\zeta) - 10000v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.85)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{100(\zeta-t)} [v_0'(\zeta) + 100v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.86)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [u_1'(\zeta) + 1000u_1(\zeta) - 10000v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.87)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{100(\zeta-t)} [v_1'(\zeta) + 100v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.88)$$

$n = 2$ için ;

$$u_3(t) = u_2(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [u_2'(\zeta) + 1000u_2(\zeta) - 10000v_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.89)$$

$$v_3(t) = v_2(t) - \int_0^t e^{100(\zeta-t)} [v_2'(\zeta) + 100v_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.90)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = 10 - 9e^{-1000t} \quad (5.91)$$

$$v_1(t) = e^{-100t} \quad (5.92)$$

$$u_2(t) = -\frac{91e^{-1000t}}{9} + \frac{100e^{-100t}}{9} \quad (5.93)$$

$$v_2(t) = e^{-100t} \quad (5.94)$$

$$u_3(t) = -\frac{91e^{-1000t}}{9} + \frac{100e^{-100t}}{9} \quad (5.95)$$

$$v_3(t) = e^{-100t} \quad (5.96)$$

Çizelge 5.2.11 Örnek 5.2.5'deki $u(t)$ ve $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_3(t)$	$v_3(t)$	$u_E(t)$	$v_E(t)$
0	1	1	1	1
1	$-\frac{91}{9e^{1000}} + \frac{100}{9e^{100}}$	$\frac{1}{e^{100}}$	$-\frac{91}{9e^{1000}} + \frac{100}{9e^{100}}$	$\frac{1}{e^{100}}$
2	$-\frac{91}{9e^{2000}} + \frac{100}{9e^{200}}$	$\frac{1}{e^{200}}$	$-\frac{91}{9e^{2000}} + \frac{100}{9e^{200}}$	$\frac{1}{e^{200}}$
3	$-\frac{91}{9e^{3000}} + \frac{100}{9e^{300}}$	$\frac{1}{e^{300}}$	$-\frac{91}{9e^{3000}} + \frac{100}{9e^{300}}$	$\frac{1}{e^{300}}$

4	$-\frac{91}{9e^{4000}} + \frac{100}{9e^{400}}$	$\frac{1}{e^{400}}$	$-\frac{91}{9e^{4000}} + \frac{100}{9e^{400}}$	$\frac{1}{e^{400}}$
5	$-\frac{91}{9e^{5000}} + \frac{100}{9e^{500}}$	$\frac{1}{e^{500}}$	$-\frac{91}{9e^{5000}} + \frac{100}{9e^{500}}$	$\frac{1}{e^{500}}$
6	$-\frac{91}{9e^{6000}} + \frac{100}{9e^{600}}$	$\frac{1}{e^{600}}$	$-\frac{91}{9e^{6000}} + \frac{100}{9e^{600}}$	$\frac{1}{e^{600}}$
7	$-\frac{91}{9e^{7000}} + \frac{100}{9e^{700}}$	$\frac{1}{e^{700}}$	$-\frac{91}{9e^{7000}} + \frac{100}{9e^{700}}$	$\frac{1}{e^{700}}$
8	$-\frac{91}{9e^{8000}} + \frac{100}{9e^{800}}$	$\frac{1}{e^{800}}$	$-\frac{91}{9e^{8000}} + \frac{100}{9e^{800}}$	$\frac{1}{e^{800}}$
9	$-\frac{91}{9e^{9000}} + \frac{100}{9e^{900}}$	$\frac{1}{e^{900}}$	$-\frac{91}{9e^{9000}} + \frac{100}{9e^{900}}$	$\frac{1}{e^{900}}$
10	$-\frac{91}{9e^{10000}} + \frac{100}{9e^{1000}}$	$\frac{1}{e^{1000}}$	$-\frac{91}{9e^{10000}} + \frac{100}{9e^{1000}}$	$\frac{1}{e^{1000}}$

Çizelge 5.2.12 Örnek 5.2.5'deki $u(t)$ ve $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_3(t) $	$ v_E(t) - v_3(t) $
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

Örnek 5.2.6

$u''(t) = -20u'(t) - 19u(t)$ ve başlangıç şartı $u(0) = 2$, $u'(0) = -20$ olan ve gerçek çözümü $u_E(t) = e^{-19t} + e^{-t}$ olan 2. mertebeden stiff diferansiyel denklemi göz önüne alalım (Atay ve Kılıç, 2013).

Bu diferansiyel denklemde $u' = v$ şeklinde mertebe düşürmesi uygulayalım.

$u' = v$ ise $u'' = v'$ olur. Böylece 2. mertebeden bir diferansiyel denklemden 1.mertebeden 2 tane diferansiyel denklem elde etmiş oluruz.

$$u' = v$$

$v' = -20v - 19u$ ve başlangıç şartı $u(0) = 2$ ve $v(0) = -20$ denklem sistemini elde edilir.

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta)[u'_n(\zeta) - v_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.97)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta)[v'_n(\zeta) + 19u_n(\zeta) + 20v_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.98)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta)[mu'_n(\zeta) - mv_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.99)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta)[mv'_n(\zeta) + 19mu_{n+1}(\zeta) + 20mv_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.100)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.97), (5.98), (5.99) ve (5.100) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -1$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{20(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 19 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t [u'_0(\zeta) - v_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.101)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{20(\zeta-t)} [v'_0(\zeta) + 19u_0(\zeta) + 20v_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.102)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t [u'_1(\zeta) - v_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.103)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{20(\zeta-t)} [v'_1(\zeta) + 19u_1(\zeta) + 20v_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.104)$$

⋮

$n = 14$ için ;

$$u_{15}(t) = u_{14}(t) - \int_0^t [u'_{14}(\zeta) - v_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.105)$$

$$v_{15}(t) = v_{14}(t) - \int_0^t e^{20(\zeta-t)} [v'_{14}(\zeta) + 19u_{14}(\zeta) + 20v_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.106)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = 2 - 20t \quad (5.107)$$

$$v_1(t) = -\frac{19}{10} - \frac{181e^{-20t}}{10} \quad (5.108)$$

$$u_2(t) = \frac{219}{200} + \frac{181e^{-20t}}{200} - \frac{19t}{10} \quad (5.109)$$

$$v_2(t) = -\frac{57}{20} - \frac{343e^{-20t}}{20} + 19t \quad (5.110)$$

⋮

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t [mu'_0(\zeta) - mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.111)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{20(\zeta-t)} [mv'_0(\zeta) + 19mu_1(\zeta) + 20mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.112)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t [mu'_1(\zeta) - mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.113)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{20(\zeta-t)} [mv'_1(\zeta) + 19mu_2(\zeta) + 20mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.114)$$

⋮

$n = 14$ için ;

$$mu_{15}(t) = mu_{14}(t) - \int_0^t [mu'_{14}(\zeta) - mv_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.115)$$

$$mv_{15}(t) = mv_{14}(t) - \int_0^t e^{20(\zeta-t)} [mv'_{14}(\zeta) + 19mu_{15}(\zeta) + 20mv_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.116)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = 2 - 20t \quad (5.117)$$

$$mv_1(t) = -\frac{57}{20} - \frac{343e^{-20t}}{20} + 19t \quad (5.118)$$

$$mu_2(t) = \frac{457}{400} + \frac{343e^{-20t}}{400} - \frac{57t}{20} + \frac{19t^2}{2} \quad (5.119)$$

$$mv_2(t) = -\frac{10127}{8000} - \frac{14987e^{-20t}}{8000} + \frac{361t}{100} - \frac{6517t}{400}e^{-20t} - \frac{361t^2}{40} \quad (5.120)$$

⋮

Çizelge 5.2.13 Örnek 5.2.6'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_{15}(t)$	$mu_{15}(t)$	$u_E(t)$
0	2	2	2
0.1	1.0544060372585944	1.0544060372585946	1.0544060372585946
0.2	0.8411015249341647	0.8411015249341475	0.8411015249341474
0.3	0.744164186144312	0.744164186139189	0.7441641861391891
0.4	0.6708204977097115	0.6708204974690799	0.6708204974690799
0.5	0.6066055157577269	0.6066055115425211	0.6066055115425211
0.6	0.5488228716973902	0.5488228315788688	0.548822831578869
0.7	0.49658723146673706	0.49658697828461873	0.4965869782846189
0.8	0.44933040627822074	0.4493292145688589	0.44932921456885877
0.9	0.40657420615772905	0.40656969720030467	0.40656969720030467
1	0.36789386847489264	0.36787944677423856	0.3678794467742388

Çizelge 5.2.14 Örnek 5.2.6'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_{15}(t) $	$ u_E(t) - mu_{15}(t) $
0	0	0
0.1	$2.2887169047990097 \cdot 10^{-16}$	$1.7412077124868676 \cdot 10^{-17}$
0.2	$1.7246525930471324 \cdot 10^{-14}$	$1.0492619227905604 \cdot 10^{-16}$
0.3	$5.12282328102992 \cdot 10^{-12}$	$1.1491517324386781 \cdot 10^{-17}$
0.4	$2.4063157065892793 \cdot 10^{-10}$	$7.613359770026226 \cdot 10^{-17}$
0.5	$4.215205883992268 \cdot 10^{-9}$	$5.942063179931005 \cdot 10^{-17}$
0.6	$4.0118521299307985 \cdot 10^{-8}$	$2.1285853261205842 \cdot 10^{-16}$
0.7	$2.531821182757271 \cdot 10^{-7}$	$9.624496566471713 \cdot 10^{-17}$
0.8	$1.1917093621013897 \cdot 10^{-6}$	$5.238729372178397 \cdot 10^{-17}$
0.9	$4.508957424324139 \cdot 10^{-6}$	$1.0421893383016911 \cdot 10^{-17}$
1	0.000014421700653924341	$2.388226335442445 \cdot 10^{-16}$

Örnek 5.2.7

$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 95 \\ -1 & -97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ ve başlangıç şartı $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olan ve gerçek çözümlü

$$u_E(t) = \frac{1}{47} (95e^{-2t} - 48e^{-96t})$$

$$v_E(t) = \frac{1}{47} (48e^{-96t} - e^{-2t})$$

olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Darvishi, 2007).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) + u_n(\zeta) - 95v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.121)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) + u_n(\zeta) + 97v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.122)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [mu'_n(\zeta) + mu_n(\zeta) - 95mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.123)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [mv'_n(\zeta) + mu_{n+1}(\zeta) + 97mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.124)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.121), (5.122), (5.123) ve (5.124) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{\zeta-t}$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{97(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 48 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u'_0(\zeta) + u_0(\zeta) - 95v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.125)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [v'_0(\zeta) + u_0(\zeta) + 97v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.126)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u_1'(\zeta) + u_1(\zeta) - 95v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.127)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [v_1'(\zeta) + u_1(\zeta) + 97v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.128)$$

⋮

$n = 23$ için ;

$$u_{24}(t) = u_{23}(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u_{23}'(\zeta) + u_{23}(\zeta) - 95v_{23}(\zeta)] d\zeta \quad (5.129)$$

$$v_{24}(t) = v_{23}(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [v_{23}'(\zeta) + u_{23}(\zeta) + 97v_{23}(\zeta)] d\zeta \quad (5.130)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = 95 - 94e^{-t} \quad (5.131)$$

$$v_1(t) = -\frac{1}{97} + \frac{98e^{-97t}}{97} \quad (5.132)$$

$$u_2(t) = -\frac{95}{97} - \frac{4655e^{-97t}}{4656} + \frac{143e^{-t}}{48} \quad (5.133)$$

$$v_2(t) = -\frac{95}{97} + \frac{4657e^{-97t}}{4656} + \frac{47e^{-t}}{48} \quad (5.134)$$

⋮

$$u_{24}(t) = \frac{540360087662636962890625}{693842360995438000295041} - \dots \quad (5.135)$$

$$v_{24}(t) = \frac{540360087662636962890625}{693842360995438000295041} + \dots \quad (5.136)$$

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu_0'(\zeta) + mu_0(\zeta) - 95mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.137)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [mv_0'(\zeta) + mu_1(\zeta) + 97mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.138)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu_1'(\zeta) + mu_1(\zeta) - 95mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.139)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [mv_1'(\zeta) + mu_2(\zeta) + 97mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.140)$$

⋮

$n = 23$ için ;

$$mu_{24}(t) = mu_{23}(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu_{23}'(\zeta) + mu_{23}(\zeta) - 95mv_{23}(\zeta)] d\zeta \quad (5.141)$$

$$mv_{24}(t) = mv_{23}(t) - \int_0^t e^{97(\zeta-t)} [mv_{23}'(\zeta) + mu_{24}(\zeta) + 97mv_{23}(\zeta)] d\zeta \quad (5.142)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = 95 - 94e^{-t} \quad (5.143)$$

$$mv_1(t) = -\frac{95}{97} + \frac{4657e^{-97t}}{4656} + \frac{47e^{-t}}{48} \quad (5.144)$$

$$mu_2(t) = -\frac{9025}{97} - \frac{442415e^{-97t}}{446976} + \frac{43903e^{-t}}{4608} + \frac{4465e^{-t}}{48} \quad (5.145)$$

$$mv_2(t) = \frac{9025}{9409} + \frac{2124043727e^{-97t}}{2081120256} - \frac{216719e^{-t}}{221184} + \frac{442415e^{-97t}}{446976} - \frac{4465e^{-t}}{4608} \quad (5.146)$$

⋮

$$mu_{24}(t) = -\frac{291989024338772703273075537557661533355712890625}{4963064143419831996986398968091856144361331873} - \dots \quad (5.147)$$

$$mv_{24}(t) = \frac{291989024338772703273075537557661533355712890625}{481417221911723703707680699904910046003049191681} + \dots \quad (5.148)$$

Çizelge 5.2.15 Örnek 5.2.7'deki $u(t)$ 'nin yirmidördüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_{24}(t)$	$mu_{24}(t)$	$u_E(t)$
0	1.000000000000000004	0.9999999999999929	1
0.1	1.6548121396395046	1.6548121396394884	1.6548121396395044
0.2	1.3549022160255537	1.3549022160255453	1.3549022160255533
0.3	1.1093001155088853	1.1093001155088829	1.1093001155088800
0.4	0.9082181189603414	0.9082181189603407	0.9082181189603414
0.5	0.7435861044954591	0.7435861044954625	0.7435861044954686
0.6	0.6087968113117704	0.6087968113118938	0.6087968113118977

0.7	0.49844067179581264	0.4984406717968528	0.4984406717968641
0.8	0.4080887065787929	0.40808870658493207	0.40808870658494173
0.9	0.3341147740370005	0.33411477406490464	0.33411477406490897
1	0.2735500404803822	0.2735500405846373	0.2735500405846427

Çizelge 5.2.16 Örnek 5.2.7’deki $v(t)$ ’nin yirmidördüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_{24}(t)$	$mv_{24}(t)$	$v_E(t)$
0	1	1	1
0.1	-0.017350633483540726	-0.017350633483540875	-0.017350633483540868
0.2	-0.014262123954274666	-0.014262123954274843	-0.014262123954274798
0.3	-0.011676843320832235	-0.011676843320832284	-0.011676843320832202
0.4	-0.009560190725897864	-0.00956019072589843	-0.00956019072589831
0.5	-0.007827222152572479	-0.007827222152583881	-0.00782722215258388
0.6	-0.006408387487337628	-0.006408387487493632	-0.00640838748749366
0.7	-0.005246743912324392	-0.0052467439136512205	-0.005246743913651201
0.8	-0.004295670587609091	-0.004295670595630983	-0.004295670595630965
0.9	-0.003516997584053239	-0.0035169976217359427	-0.0035169976217358837
1	-0.002879473965584997	-0.002879474111417305	-0.0028794741114172915

Çizelge 5.2.17 Örnek 5.2.7’deki $u(t)$ ’nin yirmidördüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_{24}(t) $	$ u_E(t) - mu_{24}(t) $
0	$3.3306690738754696 \cdot 10^{-16}$	$7.105427357601002 \cdot 10^{-15}$
0.1	$3.5906118386847896 \cdot 10^{-16}$	$1.4904401608872257 \cdot 10^{-14}$
0.2	$3.503531557751127 \cdot 10^{-16}$	$5.0195896359693295 \cdot 10^{-15}$
0.3	$3.983494306983304 \cdot 10^{-16}$	$4.1721090744209 \cdot 10^{-15}$
0.4	$8.07188517415458 \cdot 10^{-17}$	$1.1409169153098253 \cdot 10^{-15}$
0.5	$9.437329390182825 \cdot 10^{-15}$	$8.017322398213517 \cdot 10^{-15}$
0.6	$1.2739885101725745 \cdot 10^{-13}$	$3.730988775173827 \cdot 10^{-15}$
0.7	$1.0515312579006952 \cdot 10^{-12}$	$1.10924855590186 \cdot 10^{-14}$
0.8	$6.148765090835395 \cdot 10^{-12}$	$8.927380198927633 \cdot 10^{-15}$
0.9	$2.7908282455857414 \cdot 10^{-11}$	$3.1241119899349504 \cdot 10^{-15}$
1	$1.0426054290746389 \cdot 10^{-10}$	$7.880779718177433 \cdot 10^{-16}$

Çizelge 5.2.18 Örnek 5.2.7’deki $v(t)$ ’nin yirmidördüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_{24}(t) $	$ v_E(t) - mv_{24}(t) $
0	0	0
0.1	$9.72412947863699 \cdot 10^{-17}$	$4.745691353583747 \cdot 10^{-17}$
0.2	$1.502356927556535 \cdot 10^{-16}$	$7.084168151283467 \cdot 10^{-17}$
0.3	$1.3811719237928621 \cdot 10^{-17}$	$6.130767014649919 \cdot 10^{-17}$
0.4	$4.3654722848771033 \cdot 10^{-16}$	$1.120572659801567 \cdot 10^{-16}$

0.5	$1.1345471003648688*10^{-14}$	$3.2456634501614595*10^{-17}$
0.6	$1.5602482413695773*10^{-13}$	$3.708413031902664*10^{-17}$
0.7	$1.3268069368882474*10^{-12}$	$2.4461890119880886*10^{-17}$
0.8	$8.021833414542656*10^{-12}$	$1.8585703117964995*10^{-17}$
0.9	$3.768267100266731*10^{-11}$	$1.7826582202429794*10^{-17}$
1	$1.4583235877566048*10^{-10}$	$4.3613383174169715*10^{-17}$

Örnek 5.2.8

$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ ve başlangıç şartı $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olan ve gerçek çözümü

$$u_E(t) = 4e^{-t} - 3e^{-1000t}$$

$$v_E(t) = -2e^{-t} + 3e^{-1000t}$$

olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Atay ve Kılıç, 2013).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) - 998u_n(\zeta) - 1998v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.149)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) + 999u_n(\zeta) + 1999v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.150)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [mu'_n(\zeta) - 998mu_n(\zeta) - 1998mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.151)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [mv'_n(\zeta) + 999mu_{n+1}(\zeta) + 1999mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.152)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denklemine uygulanan işlemler (5.149), (5.150), (5.151) ve (5.152) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{-998(\zeta-t)}$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{1999(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 1000 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{-998(\zeta-t)} [u'_0(\zeta) - 998u_0(\zeta) - 1998v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.153)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{1999(\zeta-t)} [v'_0(\zeta) + 999u_0(\zeta) + 1999v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.154)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{-998(\zeta-t)} [u'_1(\zeta) - 998u_1(\zeta) - 1998v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.155)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{1999(\zeta-t)} [v'_1(\zeta) + 999u_1(\zeta) + 1999v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.156)$$

⋮

$n = 14$ için ;

$$u_{15}(t) = u_{14}(t) - \int_0^t e^{-998(\zeta-t)} [u'_{14}(\zeta) - 998u_{14}(\zeta) - 1998v_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.157)$$

$$v_{15}(t) = v_{14}(t) - \int_0^t e^{1999(\zeta-t)} [v'_{14}(\zeta) + 999u_{14}(\zeta) + 1999v_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.158)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = -\frac{999}{499} + \frac{1498e^{998t}}{499} \quad (5.159)$$

$$v_1(t) = -\frac{999}{1999} + \frac{2998e^{-1999t}}{1999} \quad (5.160)$$

$$u_2(t) = \frac{998001}{997501} - \frac{5996e^{-1999t}}{5997} + \frac{1496e^{998t}}{1497} \quad (5.161)$$

$$v_2(t) = \frac{998001}{997501} + \frac{5998e^{-1999t}}{5997} - \frac{1498e^{998t}}{1497} \quad (5.162)$$

⋮

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{-998(\zeta-t)} [mu'_0(\zeta) - 998mu_0(\zeta) - 1998mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.163)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{1999(\zeta-t)} [mv'_0(\zeta) + 999mu_1(\zeta) + 1999mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.164)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{-998(\zeta-t)} [mu_1'(\zeta) - 998mu_1(\zeta) - 1998mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.165)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{1999(\zeta-t)} [mv_1'(\zeta) + 999mu_2(\zeta) + 1999mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.166)$$

⋮

$n = 14$ için ;

$$mu_{15}(t) = mu_{14}(t) - \int_0^t e^{-998(\zeta-t)} [mu_{14}'(\zeta) - 998mu_{14}(\zeta) - 1998mv_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.167)$$

$$mv_{15}(t) = mv_{14}(t) - \int_0^t e^{1999(\zeta-t)} [mv_{14}'(\zeta) + 999mu_{15}(\zeta) + 1999mv_{14}(\zeta)] d\zeta \quad (5.168)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = -\frac{999}{499} + \frac{1498e^{998t}}{499} \quad (5.169)$$

$$mv_1(t) = \frac{998001}{997501} + \frac{5998e^{-1999t}}{5997} - \frac{1498e^{998t}}{1497} \quad (5.170)$$

$$mu_2(t) = -\frac{997002999}{497752999} - \frac{11996e^{-1999t}}{17991} + \frac{8224022e^{998t}}{2241009} - \frac{997668t}{499} e^{998t} \quad (5.171)$$

$$mv_2(t) = \frac{996005996001}{995008245001} + \frac{155864026e^{-1999t}}{107892027} - \frac{9719026e^{998t}}{6723027} + \frac{1331556t}{1999} e^{-1999t} + \frac{332556t}{499} e^{998t} \quad (5.172)$$

⋮

Çizelge 5.2.19 Örnek 5.2.8'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_{15}(t)$	$mu_{15}(t)$	$u_E(t)$
0	1.000000000000000009	0.99999999999999991	1
0.0001	1.2850877658914557	1.2850877658914535	1.2850877658914546
0.0002	1.5430078207607218	1.54300782076072	1.5430078207607214
0.0003	1.7763455179368497	1.7763455179368466	1.7763455179368477
0.0004	1.9874401818504213	1.9874401818504188	1.98744018185042
0.0005	2.178408520778776	2.178408520778775	2.1784085207787767

0.0006	2.3511658115739342	2.351165811573942	2.3511658115739427
0.0007	2.5074450683970526	2.5074450683971445	2.5074450683971445
0.0008	2.648814387306315	2.648814387307067	2.64881438730707
0.0009	2.776692640287484	2.7766926402923118	2.776692640292312
0.001	2.8923636757938955	2.8923636758191704	2.892363675819173

Çizelge 5.2.20 Örnek 5.2.8'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_{15}(t)$	$mv_{15}(t)$	$v_E(t)$
0	0.9999999999999998	1.0000000000000004	1
0.0001	0.7147122441082119	0.7147122441082117	0.7147122441082121
0.0002	0.4565922192366122	0.4565922192366125	0.4565922192366121
0.0003	0.2230545720541527	0.22305457205415302	0.22305457205415302
0.0004	0.011759978128248435	0.011759978128248725	0.011759978128248916
0.0005	-0.1794082708204386	-0.17940827082043712	-0.1794082708204383
0.0006	-0.35236545164593536	-0.35236545164593086	-0.3523654516459318
0.0007	-0.5088445785114996	-0.508844578511458	-0.5088445785114579
0.0008	-0.6504137474780325	-0.6504137474777034	-0.6504137474777028
0.0009	-0.7784918305373185	-0.7784918305352573	-0.7784918305352575
0.001	-0.894362676163021	-0.8943626761524226	-0.894362676152423

Çizelge 5.2.21 Örnek 5.2.8'deki $u(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_{15}(t) $	$ u_E(t) - mu_{15}(t) $
0	$8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$	$8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$
0.0001	$1.4107638668381384 \cdot 10^{-15}$	$1.63927337215093 \cdot 10^{-15}$
0.0002	$4.874572967494828 \cdot 10^{-16}$	$3.636731723871602 \cdot 10^{-16}$
0.0003	$1.762479051592436 \cdot 10^{-15}$	$1.6310915359790852 \cdot 10^{-15}$
0.0004	$1.7208456881689926 \cdot 10^{-15}$	$2.045543910037667 \cdot 10^{-15}$
0.0005	$5.412337245047638 \cdot 10^{-16}$	$2.501877828173238 \cdot 10^{-15}$
0.0006	$8.18789480661053 \cdot 10^{-15}$	$2.9766770645589524 \cdot 10^{-16}$
0.0007	$9.009459844833145 \cdot 10^{-14}$	$1.3595895242968226 \cdot 10^{-16}$
0.0008	$7.55506768257419 \cdot 10^{-13}$	$2.9303816317938214 \cdot 10^{-15}$
0.0009	$4.828359934094806 \cdot 10^{-12}$	$1.551710149261254 \cdot 10^{-15}$
0.001	$2.5278001913875414 \cdot 10^{-11}$	$2.39044894989604 \cdot 10^{-15}$

Çizelge 5.2.22 Örnek 5.2.8'deki $v(t)$ 'nin onbeşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_{15}(t) $	$ v_E(t) - mv_{15}(t) $
0	$2.220446049250313 \cdot 10^{-16}$	$4.440892098500626 \cdot 10^{-16}$
0.0001	$4.437097390896927 \cdot 10^{-16}$	$2.5681613855185254 \cdot 10^{-16}$
0.0002	$8.370040771588094 \cdot 10^{-17}$	$4.270630030588457610 \cdot 10^{-16}$
0.0003	$1.7607443281164592 \cdot 10^{-16}$	$2.1077031846439075 \cdot 10^{-16}$

0.0004	$4.891920202254596*10^{-16}$	$1.8985618825906542*10^{-16}$
0.0005	$5.412337245047638*10^{-16}$	$9.454598697911445*10^{-16}$
0.0006	$3.802513859341161*10^{-15}$	$7.902156712183764*10^{-16}$
0.0007	$4.1175396425785493*10^{-14}$	$1.22514845490862*10^{-17}$
0.0008	$3.295558270721699*10^{-13}$	$1.3088353100973449*10^{-15}$
0.0009	$2.0607682227336*10^{-12}$	$4.040821496853475*10^{-16}$
0.001	$1.0597828170588741*10^{-11}$	$1.2790333028811496*10^{-15}$

Örnek 5.2.9

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 & 0 \\ 0.909 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

ve başlangıç şartı $\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.999 \end{pmatrix}$ olan ve gerçek çözümü ;

$$u_E(t) = e^{-1000t}$$

$$v_E(t) = -\frac{0.909}{999}e^{-1000t} + \frac{998.91}{999}e^{-t}$$

olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Darvishi, 2007).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta)[u'_n(\zeta) + 1000u_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.173)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta)[u'_n(\zeta) - 0.909u_n(\zeta) + v_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.174)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta)[mu'_n(\zeta) + 1000mu_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.175)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta)[mu'_n(\zeta) - 0.909mu_{n+1}(\zeta) + mv_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.176)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.173), (5.174), (5.175) ve (5.176) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{1000(\zeta-t)}$ ve $\lambda_2(\zeta) = -e^{\zeta-t}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 1000 dir.

VİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [u'_0(\zeta) + 1000u_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.177)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u'_0(\zeta) - 0.909u_0(\zeta) + v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.178)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [u'_1(\zeta) + 1000u_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.179)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [u'_1(\zeta) - 0.909u_1(\zeta) + v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.180)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = e^{-1000t} \quad (5.181)$$

$$v_1(t) = 0.909 + 0.09e^{-t} \quad (5.182)$$

$$u_2(t) = e^{-1000t} \quad (5.183)$$

$$v_2(t) = -0.00090990990990991e^{-1000t} + 0.08999999999999997e^{-t} + 0.9099099099099099e^{-t} \quad (5.184)$$

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [mu'_0(\zeta) + 1000mu_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.185)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu'_0(\zeta) - 0.909mu_0(\zeta) + mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.186)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [mu'_1(\zeta) + 1001mu_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.187)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t} [mu'_1(\zeta) - 0.909mu_1(\zeta) + mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.188)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = e^{-1000t} \quad (5.189)$$

$$mv_1(t) = -0.00090990990990991e^{-1000t} + 0.9999099099099099e^{-t} \quad (5.190)$$

$$mu_2(t) = e^{-1000t} \quad (5.191)$$

$$mv_2(t) = 0. -0.00090990990990991e^{-1000t} + 0.9999099099099099e^{-t} \quad (5.192)$$

Çizelge 5.2.23 Örnek 5.2.9'deki $u(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_2(t)$	$mu_2(t)$	$u_E(t)$
0	1	1	1
1	$5.075958897549*10^{-435}$	$5.075958897549*10^{-435}$	$5.075958897549*10^{-435}$
2	$2.576535872961*10^{-869}$	$2.576535872961*10^{-869}$	$2.576535872961*10^{-869}$
10	$1.13548386531*10^{-4343}$	$1.13548386531*10^{-4343}$	$1.13548386531*10^{-4343}$
20	$1.28932360839*10^{-8686}$	$1.28932360839*10^{-8686}$	$1.28932360839*10^{-8686}$
30	$1.46400615449*10^{-13029}$	$1.46400615449*10^{-13029}$	$1.46400615449*10^{-13029}$

Çizelge 5.2.24 Örnek 5.2.9'deki $v(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_2(t)$	$mv_2(t)$	$v_E(t)$
0	0.999	0.999	0.999
1	0.3678462988794449	0.3678462988794449	0.3678462988794449
2	0.13532309086875355	0.13532309086875355	0.13532309086875355
10	0.00004539583967872247	0.00004539583967872247	0.00004539583967872247
20	$2.060967932923023*10^{-9}$	$2.060967932923023*10^{-9}$	$2.060967932923023*10^{-9}$
30	$9.356779939743882*10^{-14}$	$9.356779939743882*10^{-14}$	$9.356779939743882*10^{-14}$

Çizelge 5.2.25 Örnek 5.2.9'deki $u(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_2(t) $	$ u_E(t) - mu_2(t) $
0	0	0
1	0	0
2	0	0
10	0	0
20	0	0
30	0	0

Çizelge 5.2.26 Örnek 5.2.9'deki $v(t)$ 'nin ikinci iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_2(t) $	$ v_E(t) - mv_2(t) $
0	0	0
1	0	0
2	0	0
10	0	0
20	0	0
30	0	0

Örnek 5.2.10

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.05 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 30 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ ve başlangıç şartı } \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Gerçek çözüm Laplace transform yardımıyla

$$u_E(t) = -2e^{-3t} + 12e^{-0.5t}$$

$$v_E(t) = 100e^{-3t}$$

$$w_E(t) = -144e^{-3t} + 144e^{-0.5t} - 60te^{-3t}$$

olarak elde edilir. Stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (King ve Mody, 2010).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) + 0.5u_n(\zeta) - 0.05v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.193)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) + 3v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.194)$$

$$w_{n+1}(t) = w_n(t) + \int_0^t \lambda_3(\zeta) [w'_n(\zeta) - 30u_n(\zeta) + 3w_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.195)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [mu'_n(\zeta) + 0.5mu_n(\zeta) - 0.05mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.196)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [mv'_n(\zeta) + 3mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.197)$$

$$mw_{n+1}(t) = mw_n(t) + \int_0^t \lambda_3(\zeta)[mw'_n(\zeta) - 30mu_{n+1}(\zeta) + 3mw_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.198)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.193), (5.194), (5.195), (5.196), (5.197) ve (5.198) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{0.5(\zeta-t)}$, $\lambda_2(\zeta) = -e^{3(\zeta-t)}$ ve $\lambda_3(\zeta) = -e^{3(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 6 dir.

VİM iterasyonu;

$n = 0$ için;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{0.5(\zeta-t)}[u'_0(\zeta) + 0.5u_0(\zeta) - 0.05v_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.199)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)}[v'_0(\zeta) + 3v_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.200)$$

$$w_1(t) = w_0(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)}[w'_0(\zeta) - 30u_0(\zeta) + 3w_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.201)$$

$n = 1$ için;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{0.5(\zeta-t)}[u'_1(\zeta) + 0.5u_1(\zeta) - 0.05v_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.202)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)}[v'_1(\zeta) + 3v_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.203)$$

$$w_2(t) = w_1(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)}[w'_1(\zeta) - 30u_1(\zeta) + 3w_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.204)$$

$n = 2$ için;

$$u_3(t) = u_2(t) - \int_0^t e^{0.5(\zeta-t)}[u'_2(\zeta) + 0.5u_2(\zeta) - 0.05v_2(\zeta)]d\zeta \quad (5.205)$$

$$v_3(t) = v_2(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)}[v'_2(\zeta) + 3v_2(\zeta)]d\zeta \quad (5.206)$$

$$w_3(t) = w_2(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)}[w'_2(\zeta) - 30u_2(\zeta) + 3w_2(\zeta)]d\zeta \quad (5.207)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = 10 \quad (5.208)$$

$$v_1(t) = 100e^{-3t} \quad (5.209)$$

$$w_1(t) = 100 - 100e^{-3t} \quad (5.210)$$

$$u_2(t) = -2e^{-3t} + 12e^{-0.5t} \quad (5.211)$$

$$v_2(t) = 100e^{-3t} \quad (5.212)$$

$$w_2(t) = 100 - 100e^{-3t} \quad (5.213)$$

$$u_3(t) = -2e^{-3t} + 12e^{-0.5t} \quad (5.214)$$

$$v_3(t) = 100e^{-3t} \quad (5.215)$$

$$w_3(t) = -144e^{-3t} + 144e^{-0.5t} - 60te^{-3t} \quad (5.216)$$

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{0.5(\zeta-t)} [mu'_0(\zeta) + 0.5mu_0(\zeta) - 0.05mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.217)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)} [mv'_0(\zeta) + 3mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.218)$$

$$mw_1(t) = mw_0(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)} [mw'_0(\zeta) - 30mu_1(\zeta) + 3mw_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.219)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{0.5(\zeta-t)} [mu'_1(\zeta) + 0.5mu_1(\zeta) - 0.05mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.220)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)} [mv'_1(\zeta) + 3mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.221)$$

$$mw_2(t) = mw_1(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)} [mw'_1(\zeta) - 30mu_2(\zeta) + 3mw_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.222)$$

$n = 2$ için ;

$$mu_3(t) = mu_2(t) - \int_0^t e^{0.5(\zeta-t)} [mu'_2(\zeta) + 0.5mu_2(\zeta) - 0.05mv_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.223)$$

$$mv_3(t) = mv_2(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)} [mv'_2(\zeta) + 3mv_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.224)$$

$$mw_3(t) = mw_2(t) - \int_0^t e^{3(\zeta-t)} [mw'_2(\zeta) - 30mu_3(\zeta) + 3mw_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.225)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = 10 \quad (5.226)$$

$$mv_1(t) = 100e^{-3t} \quad (5.227)$$

$$mw_1(t) = 100 - 100e^{-3t} \quad (5.228)$$

$$mu_2(t) = -2e^{-3t} + 12e^{-0.5t} \quad (5.229)$$

$$mv_2(t) = 100e^{-3t} \quad (5.230)$$

$$mw_2(t) = -144e^{-3t} + 144e^{-0.5t} - 60te^{-3t} \quad (5.231)$$

$$mu_3(t) = -2e^{-3t} + 12e^{-0.5t} \quad (5.232)$$

$$mv_3(t) = 100e^{-3t} \quad (5.233)$$

$$mw_3(t) = -144e^{-3t} + 144e^{-0.5t} - 60te^{-3t} \quad (5.234)$$

Çizelge 5.2.27 Örnek 5.2.10'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_3(t)$	$mu_3(t)$	$u_E(t)$
0	10	10	10
1	7.178793779815873	7.178793779815873	7.178793779815873
2	4.4095957897039755	4.4095957897039755	4.4095957897039755
3	2.6773151021729844	2.6773151021729844	2.6773151021729844
4	1.6240111104146457	1.6240111104146457	1.6240111104146457
5	0.9850193716821447	0.9850193716821447	0.9850193716821447

Çizelge 5.2.28 Örnek 5.2.10'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_3(t)$	$mv_3(t)$	$v_E(t)$
0	100	100	100
1	4.978706836786395	4.978706836786395	4.978706836786395
2	0.24787521766663584	0.24787521766663584	0.24787521766663584
3	0.012340980408667957	0.012340980408667957	0.012340980408667957
4	0.000614421235332821	0.000614421235332821	0.000614421235332821
5	0.0000305902320501825	0.0000305902320501825	0.0000305902320501825
	8	8	8

Çizelge 5.2.29 Örnek 5.2.10'deki $w(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$w_3(t)$	$mw_3(t)$	$w_E(t)$
0	0	0	0
1	77.18385305157497	77.18385305157497	77.18385305157497
2	52.32024895404778	52.32024895404778	52.32024895404778
3	32.090758284849805	32.090758284849805	32.090758284849805
4	19.485921408528554	19.485921408528554	19.485921408528554
5	11.820103981211126	11.820103981211126	11.820103981211126

Çizelge 5.2.30 Örnek 5.2.10'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_3(t) $	$ u_E(t) - mu_3(t) $
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0

Çizelge 5.2.31 Örnek 5.2.10'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_3(t) $	$ v_E(t) - mv_3(t) $
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0

Çizelge 5.2.32 Örnek 5.2.10'deki $w(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun hata analizi

t	$ w_E(t) - w_3(t) $	$ w_E(t) - mw_3(t) $
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0

Örnek 5.2.11

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -49.9 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \\ 0 & 70 & -120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ ve başlangıç şartı } \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ olan}$$

ve gerçek çözümü

$$u_E(t) = e^{-0.1t} + e^{-50t}$$

$$v_E(t) = e^{-50t}$$

$$w_E(t) = e^{-50t} + e^{-120t}$$

olan stiff diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım (Wu, 1998).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [u'_n(\zeta) + 0.1u_n(\zeta) + 49.9v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.235)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [v'_n(\zeta) + 50v_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.236)$$

$$w_{n+1}(t) = w_n(t) + \int_0^t \lambda_3(\zeta) [w'_n(\zeta) - 70v_n(\zeta) + 120w_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.237)$$

iterasyon formülü elde edilir.

(5.5)'deki MVİM iterasyon formülünden ;

$$mu_{n+1}(t) = mu_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta) [mu'_n(\zeta) + 0.1mu_n(\zeta) + 49.9mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.238)$$

$$mv_{n+1}(t) = mv_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta) [mv'_n(\zeta) + 50mv_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.239)$$

$$mw_{n+1}(t) = mw_n(t) + \int_0^t \lambda_3(\zeta) [mw'_n(\zeta) - 70mv_{n+1}(\zeta) + 120mw_n(\zeta)] d\zeta \quad (5.240)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.235), (5.236), (5.237), (5.238), (5.239) ve (5.240) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{0.1(\zeta-t)}$, $\lambda_2(\zeta) = -e^{50(\zeta-t)}$ ve $\lambda_3(\zeta) = -e^{120(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 1200 dir.

VİM iterasyonu;

$n = 0$ için;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [u'_0(\zeta) + 0.1u_0(\zeta) + 49.9v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.241)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [v'_0(\zeta) + 50v_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.242)$$

$$w_1(t) = w_0(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [w'_0(\zeta) - 70v_0(\zeta) + 120w_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.243)$$

$n = 1$ için;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [u'_1(\zeta) + 0.1u_1(\zeta) + 49.9v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.244)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [v'_1(\zeta) + 50v_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.245)$$

$$w_2(t) = w_1(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [w'_1(\zeta) - 70v_1(\zeta) + 120w_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.246)$$

$n = 2$ için;

$$u_3(t) = u_2(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [u'_2(\zeta) + 0.1u_2(\zeta) + 49.9v_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.247)$$

$$v_3(t) = v_2(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [v'_2(\zeta) + 50v_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.248)$$

$$w_3(t) = w_2(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [w'_2(\zeta) - 70v_2(\zeta) + 120w_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.249)$$

$n = 3$ için;

$$u_4(t) = u_3(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [u'_3(\zeta) + 0.1u_3(\zeta) + 49.9v_3(\zeta)] d\zeta \quad (5.250)$$

$$v_4(t) = v_3(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [v'_3(\zeta) + 50v_3(\zeta)] d\zeta \quad (5.251)$$

$$w_4(t) = w_3(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [w'_3(\zeta) - 70v_3(\zeta) + 120w_3(\zeta)] d\zeta \quad (5.252)$$

$n = 4$ için;

$$u_5(t) = u_4(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [u'_4(\zeta) + 0.1u_4(\zeta) + 49.9v_4(\zeta)] d\zeta \quad (5.253)$$

$$v_5(t) = v_4(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [v'_4(\zeta) + 50v_4(\zeta)] d\zeta \quad (5.254)$$

$$w_5(t) = w_4(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [w'_4(\zeta) - 70v_4(\zeta) + 120w_4(\zeta)] d\zeta \quad (5.255)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = -499 + 501e^{-0.1t} \quad (5.256)$$

$$v_1(t) = e^{-50t} \quad (5.257)$$

$$w_1(t) = \frac{7}{12} + \frac{17}{12}e^{-120t} \quad (5.258)$$

$$u_2(t) = -7.048583938740194 \times 10^{-12} + 0.9999999999999999e^{-50t} - \dots \quad (5.259)$$

$$v_2(t) = e^{-50t} \quad (5.260)$$

$$w_2(t) = e^{-120t} + e^{-50t} \quad (5.261)$$

⋮

$$u_5(t) = 4.006656092053728 \times 10^{-25} + e^{-50t} - \dots \quad (5.262)$$

$$v_5(t) = e^{-50t} \quad (5.263)$$

$$w_5(t) = e^{-120t} + e^{-50t} \quad (5.264)$$

MVİM iterasyonu ;

$n = 0$ için ;

$$mu_1(t) = mu_0(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [mu'_0(\zeta) + 0.1mu_0(\zeta) + 49.9mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.265)$$

$$mv_1(t) = mv_0(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [mv'_0(\zeta) + 50mv_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.266)$$

$$mw_1(t) = mw_0(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [mw'_0(\zeta) - 70mv_1(\zeta) + 120mw_0(\zeta)] d\zeta \quad (5.267)$$

$n = 1$ için ;

$$mu_2(t) = mu_1(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [mu'_1(\zeta) + 0.1mu_1(\zeta) + 49.9mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.268)$$

$$mv_2(t) = mv_1(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [mv'_1(\zeta) + 50mv_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.269)$$

$$mw_2(t) = mw_1(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [mw'_1(\zeta) - 70mv_2(\zeta) + 120mw_1(\zeta)] d\zeta \quad (5.270)$$

$n = 2$ için ;

$$mu_3(t) = mu_2(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [mu_2'(\zeta) + 0.1mu_2(\zeta) + 49.9mv_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.271)$$

$$mv_3(t) = mv_2(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [mv_2'(\zeta) + 50mv_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.272)$$

$$mw_3(t) = mw_2(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [mw_2'(\zeta) - 70mv_3(\zeta) + 120mw_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.273)$$

$n = 3$ için ;

$$mu_4(t) = mu_3(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [mu_3'(\zeta) + 0.1mu_3(\zeta) + 49.9mv_3(\zeta)] d\zeta \quad (5.274)$$

$$mv_4(t) = mv_3(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [mv_3'(\zeta) + 50mv_3(\zeta)] d\zeta \quad (5.275)$$

$$mw_4(t) = mw_3(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [mw_3'(\zeta) - 70mv_4(\zeta) + 120mw_3(\zeta)] d\zeta \quad (5.276)$$

$n = 4$ için ;

$$mu_5(t) = mu_4(t) - \int_0^t e^{0.1(\zeta-t)} [mu_4'(\zeta) + 0.1mu_4(\zeta) + 49.9mv_4(\zeta)] d\zeta \quad (5.277)$$

$$mv_5(t) = mv_4(t) - \int_0^t e^{50(\zeta-t)} [mv_4'(\zeta) + 50mv_4(\zeta)] d\zeta \quad (5.278)$$

$$mw_5(t) = mw_4(t) - \int_0^t e^{120(\zeta-t)} [mw_4'(\zeta) - 70mv_5(\zeta) + 120mw_4(\zeta)] d\zeta \quad (5.279)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$mu_1(t) = -499 + 501e^{-0.1t} \quad (5.280)$$

$$mv_1(t) = e^{-50t} \quad (5.281)$$

$$mw_1(t) = \frac{7}{12} + \frac{17}{12}e^{-120t} \quad (5.282)$$

$$mu_2(t) = -7.048583938740194 \times 10^{-12} + 0.9999999999999999e^{-50t} - \dots \quad (5.283)$$

$$mv_2(t) = e^{-50t} \quad (5.284)$$

$$mw_2(t) = e^{-120t} + e^{-50t} \quad (5.285)$$

⋮

$$mu_5(t) = 4.006656092053728 \times 10^{-25} + e^{-50t} - \dots \quad (5.286)$$

$$mv_5(t) = e^{-50t} \quad (5.287)$$

$$mw_5(t) = e^{-120t} + e^{-50t} \quad (5.288)$$

Çizelge 5.2.33 Örnek 5.2.11'deki $u(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$u_5(t)$	$mu_5(t)$	$u_E(t)$
0	2	2	2
0.1	0.9967877807483255	0.9967877807483255	0.9967877807482536
0.2	0.980244073236482	0.980244073236482	0.9802440732365177
0.3	0.9704458394508546	0.9704458394508546	0.9704458394508286
0.4	0.9607894412134438	0.9607894412134438	0.9607894412134768
0.5	0.9512294245145866	0.9512294245145866	0.9512294245146019
0.6	0.9417645335843522	0.9417645335843522	0.9417645335843423
0.7	0.9323938199059884	0.9323938199059884	0.9323938199059489
0.8	0.9231163463866079	0.9231163463866079	0.9231163463866358
0.9	0.9139311852712648	0.9139311852712648	0.9139311852712282
1	0.904837418035907	0.904837418035907	0.9048374180359595

Çizelge 5.2.34 Örnek 5.2.11'deki $v(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$v_5(t)$	$mv_5(t)$	$v_E(t)$
0	1	1	1
0.1	0.006737946999085467	0.006737946999085467	0.006737946999085467
0.2	0.000045399929762484854	0.000045399929762484854	0.000045399929762484854
0.3	$3.0590232050182500 \cdot 10^{-7}$	$3.0590232050182500 \cdot 10^{-7}$	$3.0590232050182500 \cdot 10^{-7}$
0.4	$2.061153622438550 \cdot 10^{-9}$	$2.061153622438550 \cdot 10^{-9}$	$2.061153622438550 \cdot 10^{-9}$
0.5	$1.3887943864964000 \cdot 10^{-11}$	$1.3887943864964000 \cdot 10^{-11}$	$1.3887943864964000 \cdot 10^{-11}$
0.6	$9.357622968840140 \cdot 10^{-14}$	$9.357622968840140 \cdot 10^{-14}$	$9.357622968840140 \cdot 10^{-14}$
0.7	$6.305116760146980 \cdot 10^{-16}$	$6.305116760146980 \cdot 10^{-16}$	$6.305116760146980 \cdot 10^{-16}$
0.8	$4.248354255291580 \cdot 10^{-18}$	$4.248354255291580 \cdot 10^{-18}$	$4.248354255291580 \cdot 10^{-18}$
0.9	$2.8625185805493900 \cdot 10^{-20}$	$2.8625185805493900 \cdot 10^{-20}$	$2.8625185805493900 \cdot 10^{-20}$
1	$1.9287498479639100 \cdot 10^{-22}$	$1.9287498479639100 \cdot 10^{-22}$	$1.9287498479639100 \cdot 10^{-22}$

Çizelge 5.2.35 Örnek 5.2.11'deki $w(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun VİM ve MVİM değerleri ile gerçek değeri

t	$w_5(t)$	$mw_5(t)$	$w_E(t)$
0	2	2	2
0.1	0.006744091211438795	0.006744091211438795	0.006744091211438795
0.2	0.0000453999675138303	0.0000453999675138303	0.0000453999675138303
0.3	$3.0590232073377700 \cdot 10^{-7}$	$3.0590232073377700 \cdot 10^{-7}$	$3.0590232073377700 \cdot 10^{-7}$
0.4	$2.061153622439980 \cdot 10^{-9}$	$2.061153622439980 \cdot 10^{-9}$	$2.061153622439980 \cdot 10^{-9}$
0.5	$1.3887943864964029 \cdot 10^{-11}$	$1.3887943864964029 \cdot 10^{-11}$	$1.3887943864964029 \cdot 10^{-11}$
0.6	$9.357622968840141 \cdot 10^{-14}$	$9.357622968840141 \cdot 10^{-14}$	$9.357622968840141 \cdot 10^{-14}$
0.7	$6.305116760146989 \cdot 10^{-16}$	$6.305116760146989 \cdot 10^{-16}$	$6.305116760146989 \cdot 10^{-16}$
0.8	$4.248354255291589 \cdot 10^{-18}$	$4.248354255291589 \cdot 10^{-18}$	$4.248354255291589 \cdot 10^{-18}$
0.9	$2.8625185805493937 \cdot 10^{-20}$	$2.8625185805493937 \cdot 10^{-20}$	$2.8625185805493937 \cdot 10^{-20}$
1	$1.9287498479639178 \cdot 10^{-22}$	$1.9287498479639178 \cdot 10^{-22}$	$1.9287498479639178 \cdot 10^{-22}$

Çizelge 5.2.36 Örnek 5.2.11'deki $u(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ u_E(t) - u_5(t) $	$ u_E(t) - mu_5(t) $
0	0	0
0.1	$5.684341886080802 \cdot 10^{-14}$	$5.684341886080802 \cdot 10^{-14}$
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0	0
0.7	$5.684341886080802 \cdot 10^{-14}$	$5.684341886080802 \cdot 10^{-14}$
0.8	0	0
0.9	$5.684341886080802 \cdot 10^{-14}$	$5.684341886080802 \cdot 10^{-14}$
1	0	0

Çizelge 5.2.37 Örnek 5.2.11'deki $v(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ v_E(t) - v_5(t) $	$ v_E(t) - mv_5(t) $
0	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0	0
0.7	0	0
0.8	0	0
0.9	0	0
1	0	0

Çizelge 5.2.38 Örnek 5.2.11'deki $w(t)$ 'nin beşinci iterasyonunun hata analizi

t	$ w_E(t) - w_5(t) $	$ w_E(t) - mw_5(t) $
0	0	0
0.1	0	0
0.2	0	0
0.3	0	0
0.4	0	0
0.5	0	0
0.6	0	0
0.7	0	0
0.8	0	0
0.9	0	0
1	0	0

Örnek 5.2.12

$$u'(t) = -u(t)$$

$$v'(t) = -10v(t)$$

$$w'(t) = -100w(t)$$

$$r'(t) = -1000r(t)$$

ve başlangıç şartı $u(0) = 1, v(0) = 1, w(0) = 1, r(0) = 1$ olan ve gerçek çözümü

$$u_E(t) = e^{-t}$$

$$v_E(t) = e^{-10t}$$

$$w_E(t) = e^{-100t}$$

$$r_E(t) = e^{-1000t}$$

olan stiff diferansiyel denklemleri sistemini göz önüne alalım (Gamal ve Iman, 1999).

(5.4)'deki VİM iterasyon formülünden ;

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda_1(\zeta)[u'_n(\zeta) + u_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.289)$$

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda_2(\zeta)[v'_n(\zeta) + 10v_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.290)$$

$$w_{n+1}(t) = w_n(t) + \int_0^t \lambda_3(\zeta)[w'_n(\zeta) + 100w_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.291)$$

$$r_{n+1}(t) = r_n(t) + \int_0^t \lambda_4(\zeta)[r'_n(\zeta) + 1000r_n(\zeta)]d\zeta \quad (5.292)$$

iterasyon formülü elde edilir.

Buradaki Lagrange çarpanları (5.6) denkleminde uygulanan işlemler (5.289), (5.290), (5.291) ve (5.292) denklemlerine uygulanmasıyla $\lambda_1(\zeta) = -e^{\zeta-t}$, $\lambda_2(\zeta) = -e^{10(\zeta-t)}$, $\lambda_3(\zeta) = -e^{100(\zeta-t)}$ ve $\lambda_4(\zeta) = -e^{1000(\zeta-t)}$ olarak elde edilir. Ayrıca bu denklem sisteminin stiffness katsayısı 1000 dir.

VİM iterasyonu;

$n = 0$ için ;

$$u_1(t) = u_0(t) - \int_0^t e^{\zeta-t}[u'_0(\zeta) + u_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.293)$$

$$v_1(t) = v_0(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)}[v'_0(\zeta) + 10v_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.294)$$

$$w_1(t) = w_0(t) - \int_0^t e^{100(\zeta-t)}[w'_0(\zeta) + 100w_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.295)$$

$$r_1(t) = r_0(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)}[r'_0(\zeta) + 1000r_0(\zeta)]d\zeta \quad (5.296)$$

$n = 1$ için ;

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t e^{\zeta-t}[u'_1(\zeta) + u_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.297)$$

$$v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)}[v'_1(\zeta) + 10v_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.298)$$

$$w_2(t) = w_1(t) - \int_0^t e^{100(\zeta-t)}[w'_1(\zeta) + 100w_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.299)$$

$$r_2(t) = r_1(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)}[r'_1(\zeta) + 1000r_1(\zeta)]d\zeta \quad (5.300)$$

$n = 2$ için ;

$$u_3(t) = u_2(t) - \int_0^t e^{\zeta-t}[u'_2(\zeta) + u_2(\zeta)]d\zeta \quad (5.301)$$

$$v_3(t) = v_2(t) - \int_0^t e^{10(\zeta-t)}[v'_2(\zeta) + 10v_2(\zeta)]d\zeta \quad (5.302)$$

$$w_3(t) = w_2(t) - \int_0^t e^{100(\zeta-t)}[w'_2(\zeta) + 100w_2(\zeta)]d\zeta \quad (5.303)$$

$$r_3(t) = r_2(t) - \int_0^t e^{1000(\zeta-t)} [r_2'(\zeta) + 1000r_2(\zeta)] d\zeta \quad (5.304)$$

iterasyon denklemlerine ulaşılır.

$$u_1(t) = e^{-t} \quad (5.305)$$

$$v_1(t) = e^{-10t} \quad (5.306)$$

$$w_1(t) = e^{-100t} \quad (5.307)$$

$$r_1(t) = e^{-1000t} \quad (5.308)$$

$$u_2(t) = e^{-t} \quad (5.309)$$

$$v_2(t) = e^{-10t} \quad (5.310)$$

$$w_2(t) = e^{-100t} \quad (5.311)$$

$$r_2(t) = e^{-1000t} \quad (5.312)$$

$$u_3(t) = e^{-t} \quad (5.313)$$

$$v_3(t) = e^{-10t} \quad (5.314)$$

$$w_3(t) = e^{-100t} \quad (5.315)$$

$$r_3(t) = e^{-1000t} \quad (5.316)$$

Çizelge 5.2.39 Örnek 5.2.12'deki $u(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi

t	$u_3(t)$	$u_E(t)$	$ u_E(t) - u_3(t) $
0	1	1	0
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180359595	0
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530779818	0
0.3	0.7408182206817179	0.7408182206817179	0
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460356393	0
0.5	0.6065306597126334	0.6065306597126334	0
0.6	0.5488116360940264	0.5488116360940264	0
0.7	0.49658530379140947	0.49658530379140947	0
0.8	0.44932896411722156	0.44932896411722156	0
0.9	0.4065696597405991	0.4065696597405991	0
1	0.36787944117144233	0.36787944117144233	0

Çizelge 5.2.40 Örnek 5.2.12'deki $v(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi

t	$v_3(t)$	$v_E(t)$	$ v_E(t) - v_3(t) $
0	1	1	0
0.1	0.36787944117144233	0.36787944117144233	0
0.2	0.1353352832366127	0.1353352832366127	0
0.3	0.049787068367863924	0.049787068367863924	0
0.4	0.01831563888873418	0.01831563888873418	0
0.5	0.006737946999085467	0.006737946999085467	0
0.6	0.0024787521766663563	0.0024787521766663563	0
0.7	0.0009118819655545154	0.0009118819655545154	0
0.8	0.00033546262790251185	0.00033546262790251185	0
0.9	0.00012340980408667956	0.00012340980408667956	0
1	0.000045399929762484854	0.000045399929762484854	0

Çizelge 5.2.41 Örnek 5.2.12'deki $w(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi

t	$w_3(t)$	$w_E(t)$	$ w_E(t) - w_3(t) $
0	1	1	0
0.1	0.000045399929762484854	0.000045399929762484854	0
0.2	$2.061153622438550 \cdot 10^{-9}$	$2.061153622438550 \cdot 10^{-9}$	0
0.3	$9.357622968840140 \cdot 10^{-14}$	$9.357622968840140 \cdot 10^{-14}$	0
0.4	$4.248354255291580 \cdot 10^{-18}$	$4.248354255291580 \cdot 10^{-18}$	0
0.5	$1.9287498479639100 \cdot 10^{-22}$	$1.9287498479639100 \cdot 10^{-22}$	0
0.6	$8.756510762696450 \cdot 10^{-27}$	$8.756510762696450 \cdot 10^{-27}$	0
0.7	$3.975449735908640 \cdot 10^{-31}$	$3.975449735908640 \cdot 10^{-31}$	0
0.8	$1.8048513878454100 \cdot 10^{-35}$	$1.8048513878454100 \cdot 10^{-35}$	0
0.9	$8.194012623990510 \cdot 10^{-40}$	$8.194012623990510 \cdot 10^{-40}$	0
1	$3.720075976020830 \cdot 10^{-44}$	$3.720075976020830 \cdot 10^{-44}$	0

Çizelge 5.2.42 Örnek 5.2.12'deki $r(t)$ 'nin üçüncü iterasyonunun VİM değeri ile gerçek değeri ve hata analizi

t	$r_3(t)$	$r_E(t)$	$ r_E(t) - r_3(t) $
0	1	1	0
0.1	$3.720075976020830 \cdot 10^{-44}$	$3.720075976020830 \cdot 10^{-44}$	0
0.2	$1.3838965267367300 \cdot 10^{-87}$	$1.3838965267367300 \cdot 10^{-87}$	0
0.3	$5.148200222411720 \cdot 10^{-131}$	$5.148200222411720 \cdot 10^{-131}$	0
0.4	$1.9151695967140000 \cdot 10^{-174}$	$1.9151695967140000 \cdot 10^{-174}$	0
0.5	$7.124576406741280 \cdot 10^{-218}$	$7.124576406741280 \cdot 10^{-218}$	0
0.6	$2.6503965530040000 \cdot 10^{-261}$	$2.6503965530040000 \cdot 10^{-261}$	0
0.7	$9.85967654375865 \cdot 10^{-305}$	$9.85967654375865 \cdot 10^{-305}$	0

0.8	$3.66787458417768 \cdot 10^{-348}$	$3.66787458417768 \cdot 10^{-348}$	0
0.9	$1.36447721236568 \cdot 10^{-391}$	$1.36447721236568 \cdot 10^{-391}$	0
1	$5.07595889754945 \cdot 10^{-435}$	$5.07595889754945 \cdot 10^{-435}$	0

BÖLÜM VI

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu yüksek lisans çalışmasında lineer ve lineer olmayan stiff diferansiyel denklem ve stiff diferansiyel denklem sistemlerinin farklı Stifflik oranlarına bağlı olarak Varyasyonel İterasyon Metodu ve Modifiye Varyasyonel İterasyon Metodu kullanılarak nümerik çözümlerinin hesaplanması ve bazı problemler de var olan kapalı formdaki analitik çözümlerle karşılaştırılarak kullanılan metodların etkiliği araştırılmıştır. Varyasyonel İterasyon Metodu incelenerek bir diferansiyel denklemin yarı-analitik çözümlerini bulmak için nasıl kullanılacağı gösterilmiştir bunun yanında Modifiye Varyasyonel İterasyon Metodunun adi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri için kullanımına uygun formül de verilmiştir. Kullanılan metodların lineer ve lineer olmayan sıradan diferansiyel denklemlerin yarı-analitik çözümlerinde dikkate değer şekilde iyi sayısal sonuçlar verdiği ve çok düşük seviyelerde hata ile gerçek çözüme yakınsadığı görülmüştür. Lineer problemlerde stifflik oranının bağlı olarak ilk bir kaç iterasyondan sonra mutlak hata değerlerinin sıfır olarak çıkması, lineer stiff diferansiyel ve diferansiyel denklem çözümlerinde Varyasyonel İterasyon Metodunun etkililiğini göstermektedir. Ayrıca lineer olmayan stiff diferansiyel denklemler ve denklem sistemleri için ise iterasyon sayısına bağlı olarak, kabul edilebilir derecede düşük seviyelerde hata ile sonuç verdiği görülmüştür. Burada, denklem sistemlerinin stifflik katsayısının da sayısal sonuçlarda etkili olduğu ve artan stifflik değerinin, yine artan iterasyon sayısını gerektirdiği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

Atay M.T., Coşkun, S.B., Effects of nonlinearity on the variational iteration solutions of nonlinear two-point boundary value problems with comparison with respect to finite element analysis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008, Article ID: 857296, 2008.

Atay M.T, Coskun, S.B., Elastic stability of Euler columns with a continuous elastic Restraint using Variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications* (in press, doi: 10.1016/j.camwa.2009.03.051), 2009.

Atay M.T, Kilic O., The Semianalytical Solutions for Stiff Systems of Ordinary Differential Equation by Using Variational Iteration Method and Modified Variational Iteration Method with Comparison to Exact Solutions, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID 143915 <http://dx.doi.org/10.1155/2013/143915>

Bakioğlu, M., Sayısal Analiz, *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 2011.

Coskun, S.B., Atay, M.T., Analysis of convective straight and fins with temperature-dependent thermal conductivity using variational iteration method with comparison with respect to finite element analysis, *Mathematical Problems in Engineering*, 2007, Article ID:42072, 2007.

Coskun, S.B., Atay M.T., Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using Variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications* (in press, doi:10.1016/j.camwa.2009.03.072), 2009.

Gamal A.F Ismail, Iman H. Ibrahim, New efficient second derivative multistep methods for stiff system, *Applied Mathematical Modelling* 23 (1999) 279-288.

G.Hojjati, M.Y. Rahimi Ardabili, S.M. Hosseini, A-EBDF: an adaptive method for numerical solution of stiff systems of ODEs, *Mathematics and Computers in Simulation* 66 (2004) 33-41.

He, Ji-H., A new approach to nonlinear partial differential equations, *Common. Nonlinear Sci.Numer.Simul.* 2, 230-235, 1997.

- He, Ji-H., Variational iteration method- a kind of non-linear analytical technique: some examples, *Int. J. Non-Linear Mech.* **34**, 699-708, 1999.
- He, J.H., A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *Int. J. Nonlin. Mech.*, **35**, 37-43, 2000.
- He, Ji-H., Variational approach to the Lane Emdenequation, *Appl.Math.Comput* **143**, 539-541, 2003.
- He, Ji-H., Variational approach to the Sixth-order boundary value problems, *Appl.Math.Comput.* **143**, 537-538, 2003.
- He, J.H., The homotopy perturbation method for non-linear oscillators with , *Applied Mathematics and Computations, Appl. Math. Comput.*, **151**, 287-292, 2004.
- He, J.H., Asymptotology by homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.* **156**, 591-596, 2004.
- He, J.H., Application of homotopy perturbation method to non-linear wave equation, *Chaos Soliton. Fract.*, **26**, 695-700, 2005.
- He, Ji-H., Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Int. J. Modern Phys.* **20**, 1141-1199, 2006.
- He, J.H., The homotopy perturbation method for solving boundary problems, *Phys. Lett. A*, **350**, 87-88, 2006.
- He, J.H., An elementary introduction to recently developed asymptotic methods and nanomechanics in textile engineering, *Int. J. Mod. Phys. B*, **22**, 3487-3578, 2008.
- He, J.H., Recent development of the homotopy perturbation method, *Topol. Method. Nonl. An.*, **31**, 205-209, 2008.
- Hung-Chang Lee, Cha'o-Kuang Chen, Chen-I Hung, A modified group-preserving scheme for solving the initial value problems of stiff ordinary differential equations, *Applied Mathematics and Computation* **133** (2002) 445-459.

- Inokuti, M., Sekine, H., Mura, T., General use of the Lagrange multiplier in nonlinear Mathematical physics, S.Nemat-Nosser(Ed.). Variational Methods in the Mechanics of Solids, *Pergamon Press*, New York, pp.156-162, 1978.
- Iserles, A., A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations, Second Edition, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2008.
- Islam, S., Ali, I., Shah, A., Ran, X.j., Siddiqui, A.M., Effect of coupled stresses on flow of this grade fluid between two parallel plates using Homotopy Perturbation Method, *Int. J. Nonlin. Sci. Num.***10**, 99-112, 2009.
- Kenneth Eriksson, Claes Johnson and Anders Logg, Explicit Time-Stepping for Stiff ODEs, *SIAM J.Sci.Comput.*, 25(4), 1142-1157, 2004.
- Mahmood, M., Hossain, M.A., Asghar, S., Hayat, T., Application of Homotopy Perturbation Method to deformable channel with wall suction and injection in a 3D porous medium, *Int. J. Nonlin.Sci.Num.***9**, 195-206, 2008.
- M.T. Darvishi, F. Khani, A.A. Soliman, The numerical simulation for stiff systems of ordinary differential equations, *Computers and Mathematics with Applications* **54**, 1055-1063, 2007.
- Michael R. King and Nipa A. Mody, Numerical and Statistical Methods for Bioengineering Applications in MATLAB, *Published in the United States of America by Cambridge University Press*, New York, 2010.
- Noor, M.A., Mohyud-Din, S.T., Homotopy Perturbation Method for solving nonlinear higher order boundary value problems, *Int. J. Nonlin.Sci.Num.***9**, 395-408, 2008.
- Ramos, J.I., On the variational iteration method and other iterative techniques for Non-linear differential equations, *Appl.Math.Comput* **199**, 36-39, 2008.
- Xin-Yuan Wu, A Sixth-Order A-Stable Explicit One-Step Method for Stiff Systems, *PII: S0898-1221* (98) 00057-1, 1998.

ÖZ GEÇMİŞ

Okan KILIÇ, 12.07.1988 tarihinde Niğde’de doğdu. İlköğretim ve lise öğretimini Niğde’de tamamladı. 2006 yılında girdiği Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden Haziran 2010’da mezun oldu ve aynı yıl Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. Eylül 2013’te yüksek lisans öğrenimini başarı ile tamamladı. Bilim dalındaki ilgi alanı Stiff diferansiyel denklemlerdir.

Bu tez çalışmasından, 1 (bir) adet uluslararası makale ile 2 (iki) adet uluslararası bildiri üretilmiştir. Bu üretilen çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Atay, M.T., Kilic, O., The Semianalytical Solutions for Stiff Systems of Ordinary Differential Equation by Using Variational Iteration Method and Modified Variational Iteration Method with Comparison to Exact Solutions, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, Article ID 143915 <http://dx.doi.org/10.1155/2013/143915>

Atay, M.T., Kilic, O., “The semi-analytical solutions for stiff systems of ordinary differential equations by using variational iteration method and modified variational iteration method with comparison to exact and runga-kutta solutions”, *2nd International Conference on Computation for Science and Technology*, Nigde, Turkey, 09-11 July, 2012.

Atay, M.T., Kilic, O., “The semi-analytical solutions for HIV and Fatal disease models by using variational iteration method and modified variational iteration methods”, *2nd International Conference on Computation for Science and Technology*, Nigde, Turkey, 09-11 July, 2012.