R. K. ESEN, 2018

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BEŞ FARKLI TEKNİKLE TAM ÇÖZÜMLERİ

RASİME KÜBRA ESEN

Ocak 2018

T. C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BEŞ FARKLI TEKNİKLE TAM ÇÖZÜMLERİ

RASİME KÜBRA ESEN

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN

Ocak 2018

Rasime Kübra ESEN tarafından **Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN** danışmanlığında hazırlanan "**Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Beş Farklı Teknikle Tam Çözümleri**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ali GELİŞKEN (Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN (Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Güldem YILDIZ (Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve …........................... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT

MÜDÜR V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Rasime Kübra ESEN

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BEŞ FARKLI TEKNİKLE TAM ÇÖZÜMLERİ

ESEN R.Kubra
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN
Ocak 2018, 82 sayfa

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan kısmi türevli Drinfeld-Sokolov denklem sistemi, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony ve Boito-Leon-Manna-Pempinelli kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin tam çözümleri, direkt integrasyon, (G'/G)-açılım metodu, (G'/G)-açılım metodunun farklı formu, $(G'/G,1/G)$-açılım metodu ve $(1/G')$-açılım metodu gibi beş farklı teknik kullanılarak elde edilmiştir. Literatürde mevcut çözümlerin yanı sıra literatür açısından yeni çözümlere ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Drinfeld-Sokolov denklem sistemi, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony denklemi, Boito-Leon-Manna-Pempinelli denklemi, (G'/G)-açılım metodu, (G'/G)-açılım metodunun farklı formu, $(G'/G,1/G)$-açılım metodu, $(1/G')$-açılım metodu.

SUMMARY

THE EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERANTIAL EQUATIONS USING FIVE DIFFERENT TECNIQUES

ESEN R.Kubra

Niğde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Professor. Dr. Durmus DAGHAN

January 2018, 89 pages

In this thesis, Drinfeld-Sokolov system of equation, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony and Boito-Leon-Manna-Pempinelli nonlinear partial differential equations are studied analytically by using five different techniques which are direct integration, (G'/G)-expansion method, different form of (G'/G)-expansion method, two variable $(G'/G, 1/G)$-expansion method and $(1/G')$-expansion method. We obtain the same solutions in literature. Moreover, we have obtained, for the first time, the new exact solutions of the equation mentioned above.

Keywords: Drinfeld-Sokolov, Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony, Boito-Leon-Manna-Pempinelli, (G'/G)-expansion method, different form of (G'/G)-expansion method, $(G'/G, 1/G)$- expansion method, $(1/G')$- expansion method.

ÖN SÖZ

Gerek ders gerek tez çalışmalarımda emeğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN'a, tezin yazımı esnasında özverili yardımlarda bulunan Doç. Dr. Serkan KADER hocama, bu zamana kadar maddi manevi desteğini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan canım annem Müfide ESEN ve canım babam Aydın ESEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
c_i	İntegrasyon sabitleri
λ	Keyfi sabit
μ	Keyfi sabit
η	Geçiş değişkeni
$U^{'}$	$\dfrac{\partial U}{\partial \eta}$
$V^{'}$	$\dfrac{\partial V}{\partial \eta}$
$W^{'}$	$\dfrac{\partial W}{\partial \eta}$
V_p	Açısal hız
ϕ	(G'/ G)
φ	(1 / G)
ν	$c_1^2 - c_2^2 \ (\lambda < 0)$
ν	$c_1^2 + c_2^2 \ (\lambda > 0)$

Kısaltmalar	**Açıklama**
DS	Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi
KdV	Korteweg-de Vries Denklemi
BBM	Benjamin-Bona-Mahony Denklemi
MBBM	Modifiye- Benjamin-Bona-Mahony Denklemi
BLMP	Boito-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Fen ve mühendislik gibi farklı disiplinlerde bir çok problem lineer olmayan diferansiyel denklemler vasıtasıyla modellenmekte ve çözülmeye çalışılmaktadır. Bunlardan biri, dalga denklemlerinin çözümüdür ki bu çözümler özellikle plazma fiziğinde çok önemli bir yere sahiptir. Model denklemlerin lineer olmaması çözümü oldukça karmaşık ve zor hale getirmektedir. Lineer olmayan denklemlerin çözümlerinde bazen birden çok çözümle karşılaşılabilmektedir. Bu durum bilim insanlarını, denklemleri analitik olarak çözebilen yeni teknikler bulmaya ve kullanmaya yöneltmektedir. Nonlineer kısmi türevli denklemlerin analitik tam çözümleri için kullanılan bir çok yöntem ve yeni yaklaşımlar literatürde gün geçtikçe artmaktadır (Ablowitz ve Clarkson,1991 ;Yokuş, 2011).

Tez kapsamında bu yeni yaklaşımlardan; (G'/G)-açılım metodu (Wang vd., 2008), (G'/G)-açılım metodunun farklı formu (Li ve Wang, 2009), iki değişkenli $(G'/G, 1/G)$ -açılım metodu (Li vd., 2010) ve $(1/G')$- açılım metotları (Yokuş, 2011) kullanılmıştır. Bu yeni metotların uygulaması için lineer olmayan Dirinfeld-Sokolov (DS) denklem sistemi (Wang, 2002; Yıldız, 2011, 2015), Benjamin-Bona-Mahony (Benjamin vd., 1972) denkleminin modifeye edilmiş versiyonu olan Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony (MBBM) (Aslan, 2009; Yıldız, 2011) ve Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) (Gilson vd., 1993; Zamiri, 2013) denklemleri ele alınmıştır. Bu üç farklı denklemin analitik tam çözümleri için yukarıda bahsedilen dört farklı teknik kullanılmıştır. Ayrıca, yine bu üç denklemin tam çözümleri için direk integrasyon tekniği de uygulanmıştır. Farklı metotlar kullanılarak elde edilen çözümler hem kendi aralarında hem de literatürle karşılaştırılmıştır. DS ve MBBM denklemleri için literatürle uyumlu çözümlere ulaşılmıştır. BLMP denklemi için literatür açısından yeni çözümler elde edilmiştir. Bununla birlikte, elde edilen bazı yeni çözümlerin grafikleri iki boyutta çizdirilmiştir.

Lineer olmayan bu tip denklemlerle elde hesap yapmak son derece uzun, zaman alıcı ve karmaşık hesap gerektirmektedir. Bu sebepten dolayı da hesaplarımızı farklı sembolik paket programlar vasıtasıyla yapabilmekteyiz. Bu tez çalışmasında, hesaplamalar yapılırken denklemlerin çözümü için metotların kullanılmasında REDUCE paket programı, elde edilen tam çözümlerin denklemleri sağladığının gösterilmesinde MATHEMATICA paket programı kullanıldı. Ayrıca çözümlerin grafikleri için MATLAB programı kullanılmıştır.

Tez kapsamında yapılan çalışmalar beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuya genel anlamda giriş yapılmış olup, ikinci bölümde ise temel kavramlardan bahsedilerek çözülecek denklemler tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde tez kapsamında kullanılacak dört farklı metot tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde; DS denklem sistemi, MBBM ve BLMP denklemlerinin analitik tam çözümleri beş farklı teknikle elde edilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise yapılan çalışmanın sonuçları verilmiştir.

BÖLÜM II

GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: x bağımsız değişken, $y = U(x)$ bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevleri $y', y'', y''', ...,y^{(n)}$ olmak üzere adi türevli diferansiyel denklem kapalı formda

$$P(x, y, y', y'', y''', ...,y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

ile verilir.

Tanım 2.2: $x,t,...$ bağımsız değişkenler, $y = U(x,t,...)$ bağımlı değişken olmak üzere bağımlı değişkenin bağımız değişkenlere göre çeşitli mertebelerden kısmi türevlerini içeren diferansiyel denklem kapalı formda

$$P(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, ...) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.3: (Benjamin-Bona-Mahony Denklemi (BBM))

Benjamin, Bona ve Mahony tarafından yazılmış olan lineer olmayan Benjamin-Bona-Mahony denklemi Korteweg de Vries (KdV) denkleminin bir alternatif modelidir ve

$$U_t + U_x + UU_x - U_{xxt} = 0 \tag{2.3}$$

formunda ifade edilir (Benjamin vd., 1972). Burada $U = U(\mathrm{x},\mathrm{t}), x \in R, t \geq 0$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.4:(Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denklemi (MBBM))

Benjamin-Bona-Mahony denkleminin modifiye versiyonu olan Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denklemi, farklı fiziksel sistemlerin çözümünde kullanılır ve

$$U_t + \alpha U_x + \beta U^2 U_x - \gamma U_{xxt} = 0,\ U = U(\mathrm{x},\mathrm{t}),\ x \in R, t \geq 0 \tag{2.4}$$

şeklinde verilir (Aslan, 2009).

Tanım 2.5: (Dirinfeld-Sokolov Denklem Sistemi (DS))

Lineer olmayan Dirinfeld-Sokolov denklem sistemi, x, t bağımsız değişkenler, U ve V bağımlı değişkenler olmak üzere;

$$\begin{aligned} &U_t + \left(V^2\right)_x = 0 \\ &V_t - aV_{xxx} + 3bU_xV + 3kUV_x = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

formunda verilir (Dağhan vd., 2015).

Tanım 2.6: (Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi (BLMP))

Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olup, U bağımlı değişken ve x, y, t bağımsız değişkenler olmak üzere;

$$U_{yt} + U_{xxxy} - 3U_{xx}U_y - 3U_xU_{xy} = 0 \tag{2.6}$$

şeklindedir (Arbabi ve Najafi, 2016).

BÖLÜM III

KULLANILAN METOTLAR

3.1 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu

Bu metot, ilk defa Wang, Li ve Zhang (Wang vd., 2008) tarafından ortaya atılmış, nonlineer denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasında kullanılmıştır. (2.2) denklemi ile kapalı formda verilen denklemde

$$U(\eta) = U(x,t), \eta = x - wt \tag{3.1}$$

değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki adi türevli denkleme ulaşılır.

$$P\left(U, -wU', U', w^2U'' - wU'''....\right) = 0 \tag{3.2}$$

λ, μ keyfi sabitler olmak üzere ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen

$$G''(\eta) + \lambda G'(\eta) + \mu G(\eta) = 0 \tag{3.3}$$

diferansiyel denklemin çözümünden faydalanarak çözüm;

$$U(\eta) = \alpha_m \left(\frac{G'}{G}\right)^m + \alpha_{m-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{m-1} + ... + \alpha_0 = 0 \tag{3.4}$$

formunda aranır. (3.2) denkleminde derecesi en yüksek, lineer olan ve lineer olmayan terimler arasında balans yapılarak m sabiti bulunur. Bu m sabiti belirlendikten sonra elde edilen cebirsel denklem takımında katsayılar sıfıra eşitlenerek bilinmeyen α_m, α_{m-1}, ..., α_0 katsayıları ve varsa ekstra şartlar hesaplanır. Burada, (3.3) ile verilen denklemin çözümü, $\lambda^2 - 4\mu$'ye göre hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonlar türünden yazılır (Wang vd., 2008).

Birinci tip: $\lambda^2 - 4\mu > 0$

(3.3) ile verilen denklemin çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$G(\eta) = e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta} + c_2 e^{\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta}\right)$$

şeklinde olur ve burada hiperbolik fonksiyonlar

$$e^{\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta} = \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)$$

$$e^{\frac{-\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta} = \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)$$

kullanılırsa çözüm

$$\begin{aligned} G(\eta) &= e^{\frac{-\lambda\eta}{2}} \mathrm{c}_1\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right) \\ &\quad + e^{\frac{-\lambda\eta}{2}} \mathrm{c}_2\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right) \\ &= e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left[(\mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2)\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right) + (\mathrm{c}_1-\mathrm{c}_2)\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $(c_1 + c_2) = c_1$, $(c_1 - c_2) = c_2$ şeklinde seçilirse çözüm

$$G(\eta) = e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left[\mathrm{c}_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right) + \mathrm{c}_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right]$$

formunda olur. $G'(\eta)$ ifadesi hesaplanırsa,

$$G'(\eta)=e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left(\frac{-\lambda}{2}\right)\left[\mathrm{c}_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)+\mathrm{c}_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right]$$
$$+e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right)\left[\mathrm{c}_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)+\mathrm{c}_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right]$$

olarak bulunur. $G(\eta)$ ve $G'(\eta)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa;

$$\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta)=\frac{-\lambda}{2}+\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right)\frac{\left[\mathrm{c}_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)+\mathrm{c}_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right]}{\left[\mathrm{c}_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)+\mathrm{c}_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)\right]} \tag{3.5}$$

sonucuna varılır.

İkinci tip: $\lambda^2-4\mu<0$

c_1 ve c_2 keyfi sabitleri olmak üzere (3.3) ile verilen denklemin çözümü

$$G(\eta)=c_1 e^{\frac{-\lambda+i\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta}+c_2 e^{\frac{-\lambda-i\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta}$$

şeklinde olur. Burada $\beta=\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}$ olmak üzere

$$G(\eta)=e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left(c_1 e^{i\beta\eta}+c_2 e^{-i\beta\eta}\right)$$

şeklinde yazılır. Bu ifade tekrar düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
G(\eta) &= e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left[c_1\left(\cos\beta\eta + \mathrm{i}\sin\beta\eta\right) + c_2\left(\cos\beta\eta - \mathrm{i}\sin\beta\eta\right)\right] \\
&= e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left[\left(\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2\right)\cos\beta\eta + i\left(\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_2\right)\sin\beta\eta\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde $\left(c_1 + c_2\right) = c_1$, $i\left(c_1 - c_2\right) = c_2$ seçilirse

$$
G(\eta) = e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}\left[\mathrm{c}_1\cos\beta\eta + c_2\sin\beta\eta\right]
$$

olup, $\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta)$ ifadesinde β değeri açık olarak yazılırsa (3.3) ile verilen denklemin genel çözümü

$$
\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta) = \frac{-\lambda}{2} + \left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\right)\frac{\left[-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right)\right]}{\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right)\right]} \tag{3.6}
$$

şeklinde elde edilir.

Üçüncü tip: $\lambda^2 - 4\mu = 0$

c_1 ve c_2 keyfi integrasyon sabitleri olmak üzere (3.3) denkleminin genel çözümü

$$
G(\eta) = c_1 e^{\frac{-\lambda\eta}{2}} + c_2\eta e^{\frac{-\lambda\eta}{2}}
$$

şeklinde olur ve böylece $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi aşağıdaki formda yazılır.

$$
\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta) = \frac{-\lambda}{2} + \left(\frac{c_2}{c_1 + c_2\eta}\right) \tag{3.7}
$$

3.2 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodunun Farklı Formu

$\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodunun farklı formu Li ve Wang tarafından geliştirilmiştir (Li ve Wang, 2009). (2.2) ile verilen denkleme (3.1) ile verilen dönüşüm uygulanırsa (3.2) denklemi elde edilir ve çözümü

$$U(\eta)=\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^m+....+\alpha_{-m}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-m}+... \tag{3.8}$$

formunda olur. (3.2) denkleminde en yüksek mertebeli lineer ve lineer olmayan terimler arasında ayar yapılarak m sabiti hesaplanır. (3.8) denklemi (3.2) ile verilen denklemde yerine yazılarsa cebirsel bir denklem takımı elde edilir. Bu cebirsel denklem takımı çözülürse $U(\eta)$ çözümüne ulaşılır. Burada yardımcı denklem

$$G''(\eta)+\mu G(\eta)=0 \tag{3.9}$$

olarak alınırsa (3.9) denkleminden $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi μ'nün durumuna göre hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel formda aşağıdaki şekilde verilir (Li ve Wang, 2009):

Birinci tip: $-\mu>0$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta)=\sqrt{-\mu}\,\frac{\left[c_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)+c_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)\right]}{\left[c_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)+c_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)\right]}. \tag{3.9a}$$

İkinci tip: $-\mu<0$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta)=\sqrt{\mu}\,\frac{\left[-\mathrm{c}_1\sin\left(\sqrt{\mu}\eta\right)+\mathrm{c}_2\cos\left(\sqrt{\mu}\eta\right)\right]}{\left[\mathrm{c}_1\cos\left(\sqrt{\mu}\eta\right)+\mathrm{c}_2\sin\left(\sqrt{\mu}\eta\right)\right]}. \tag{3.9b}$$

Üçüncü tip: $-\mu = 0$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)(\eta) = \frac{c_2}{c_1 + c_2\eta} \quad . \tag{3.9c}$$

3.3 $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$-Açılım Metodu

Bu bölümde, lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin hareketli dalga çözümlerinde kullanılan $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ açılım metodu tanıtılacaktır (Li vd., 2010). λ ve μ keyfi sabitler olmak üzere, ikinci mertebeden, sabit katsayılı, homojen olmayan, aşağıda verilen adi türevli lineer denklem göz önüne alınsın.

$$G''(\eta) + \lambda G(\eta) = \mu \tag{3.10}$$

Burada

$$\phi = \left(\frac{G'}{G}\right), \ \varphi = \left(\frac{1}{G}\right)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\phi' = -\phi^2 + \mu\varphi - \lambda, \ \varphi' = -\phi\varphi \tag{3.11}$$

ifadeleri elde edilir. (3.10) ile verilen adi türevli denklemin çözümleri λ parametresine göre aşağıdaki üç durumda incelenebilir (Li vd., 2010).

Birinci tip: $\lambda < 0$

(3.10) ile verilen denkleminin $\lambda < 0$ durumunda genel çözümü

$$G(\eta) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\eta} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\eta} + \frac{\mu}{\lambda} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Burada $e^{\sqrt{-\lambda}\eta}$ ve $e^{-\sqrt{-\lambda}\eta}$ ifadeleri

$$e^{\sqrt{-\lambda}\eta} = \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)$$
$$e^{-\sqrt{-\lambda}\eta} = \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) - \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)$$

olarak yazılır. Böylece (3.10) ile verilen denklemin genel çözümü,

$$G(\eta) = (c_1 + c_2)\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + (c_1 - c_2)\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda}$$

olur. Burada $(c_1 - c_2) = c_1$, $(c_1 + c_2) = c_2$ şeklinde seçilirse (3.10) ile verilen denkleminin çözümü hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olup

$$G(\eta) = c_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılır. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\nu = c_1^{\,2} - c_2^{\,2}$ için gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\varphi^2 = -\frac{\lambda}{\lambda^2 \nu + \mu^2}\left(\phi^2 - 2\mu\varphi + \lambda\right) \tag{3.14}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\phi = \left(\frac{G'}{G}\right)(\eta) = \sqrt{-\lambda}\,\frac{c_1 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)}{c_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda}}$$

$$\varphi = \left(\frac{1}{G}\right)(\eta) = \frac{1}{c_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda}}$$

İkinci tip: $\lambda > 0$

(3.10) ile verilen denkleminin $\lambda > 0$ durumda genel çözümü

$$G(\eta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} i\eta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} i\eta} + \frac{\mu}{\lambda} \tag{3.15}$$

şeklindedir. Burada $e^{\sqrt{\lambda} i\eta}$ ve $e^{-\sqrt{\lambda} i\eta}$ ifadeleri

$$e^{\sqrt{\lambda} i\eta} = \cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + i\sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right)$$
$$e^{-\sqrt{\lambda} i\eta} = \cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) - i\sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right)$$

olarak yazılır. Böylece (3.15) ile verilen denklem

$$G(\eta) = (c_1 + c_2)\cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + (c_1 - c_2)i\sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $i(c_1 - c_2) = c_1$, $(c_1 + c_2) = c_2$ şeklinde seçilirse (3.10) ile verilen denkleminin çözümü trigonometrik fonksiyonlar cinsinden olup

$$G(\eta) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda} \tag{3.16}$$

şeklinde yazılır. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\nu = c_1^2 + c_2^2$ için,

$$\varphi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2 \nu - \mu^2}\left(\phi^2 - 2\mu\varphi + \lambda\right) \tag{3.17}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\phi = \left(\frac{G'}{G}\right)(\eta) = \sqrt{\lambda}\,\frac{c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) - c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right)}{c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda}}$$

$$\varphi = \left(\frac{1}{G}\right)(\eta) = \frac{1}{c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right) + \frac{\mu}{\lambda}}$$

olarak yazılır.

Üçüncü tip: $\lambda = 0$

(3.10) ile verilen denkleminin $\lambda = 0$ durumu için genel çözüm rasyonel fonksiyonlar cinsinden olup,

$$G(\eta) = \frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2 \tag{3.18}$$

şeklinde yazılır. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\varphi^2 = \frac{1}{c_1^{\,2} - 2\mu c_2}\left(\phi^2 - 2\mu\varphi\right) \tag{3.19}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ϕ ve φ ifadeleri

$$\phi = \left(\frac{G'}{G}\right)(\eta) = \frac{\mu\eta + c_1}{\frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2}$$

$$\varphi = \left(\frac{1}{G}\right)(\eta) = \frac{1}{\frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2}$$

olarak bulunur.

$\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$-açılım metodunun temel adımları aşağıdaki şekilde özetlenebilir. (3.2) ile verilen adi türevli denklemin çözümü metot gereği

$$U(\eta)=\sum_{i=0}^{N}a_i\phi^i+\sum_{i=0}^{N}b_i\phi^{i-1}\varphi \tag{3.20}$$

şeklinde aranır (Li vd., 2010). (3.2) denkleminde en yüksek mertebeli lineer olan ve lineer olmayan terimler arasında balans yapılarak N sayısı belirlenir. (3.20) denklemi (3.2) denkleminde yerine yazılırsa (3.3) denklemiyle birlikte (3.4) , (3.7) ve (3.9) denklemleri kullanılırsa $i=1,2,...,N$ için a_i, b_i, λ, μ ve c'ye bağlı ϕ ve φ değişkenlerine göre iki değişkenli bir cebirsel denklem elde edilir. Bu cebirsel denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek a_i , b_i bilinmeyen katsayılar hesaplanır ve eğer varsa ekstra şartlar elde edilir. Bulunan bu katsayılar (3.20) denkleminde yerine yazılırsa (3. 2) ile verilen adi türevli denklemin denkleminin çözümleri elde edilir. Son olarak (3.1) ile verilen dönüşüm uygulanarak (2.2) ile verilen kısmi türevli denklemin tam çözümlerine ulaşılır.

3.4 $\left(\frac{1}{G'}\right)$-Açılım Metodu

Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin hareketli dalga çözümlerinde kullanılan bir diğer metot $\left(\frac{1}{G'}\right)$-açılım metodudur (Yokuş, 2011). Çözüm önerisi metot gereği

$$U(\eta)=\sum_{i=0}^{N}\alpha_i\left(\frac{1}{G'}\right)^i \tag{3.21}$$

şeklinde olup, en yüksek mertebeli lineer olan ve lineer olmayan terimler arasında balans yapılarak N sayısı bulunur. (3.21) denklemi (3.2) denkleminde yerine yazılarak α_i , λ, μ ve w ye bağlı $\left(\frac{1}{G'}\right)$ değişkenine göre cebirsel bir denklem elde edilir. Bu cebirsel denklemin katsayıları sıfıra eşitlenerek $\alpha_i\left(i=1,2,3,...,N\right)$ katsayıları hesaplanır. Bu metotta kullanılan yardımcı denklem

$$G''(\eta)+\lambda G'(\eta)+\mu=0 \tag{3.22}$$

şeklinde olup, çözüm yalnızca hiperbolik fonksiyon cinsinde aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. (3.22) denkleminin genel çözümü

$$G(\eta)=c_1 e^{-\lambda\eta}+c_2-\frac{\mu\eta}{\lambda} \tag{3.23}$$

şeklinde olup, bu çözüm hiperbolik fonksiyonlar cinsinden

$$G(\eta)=c_1(\cosh\lambda\eta-\sinh\lambda\eta)+c_2-\frac{\mu\eta}{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $\frac{1}{G'(\eta)}$ ifadesi

$$\frac{1}{G'(\eta)}=\frac{\lambda}{-\mu+\lambda c_1\left(\cosh(\lambda\eta)-\sinh(\lambda\eta)\right)} \tag{3.24}$$

şeklinde elde edilir (Yokuş, 2011).

BÖLÜM IV

UYGULANAN ÖRNEKLER VE TAM ÇÖZÜMLERİ

4.1 Drinfeld-Sokolov Denklem Sisteminin Tam Çözümleri

(2.5) ile verilen DS denklem sistemi direkt integrasyon, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ve $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodunun farklı formu kullanılarak elde edilmiştir (Dağhan vd., 2015). Bu bölümde, elde edilen bu çözümler tekrarlanmış, ilave olarak farklı yeni iki teknikle DS denklem sisteminin analitik tam çözümleri elde edilmiştir. (2.5) ile verilen DS denklem sistemine $\eta = x - \beta t$ dönüşümü uygulanırsa

$$-\beta U' + \left(V^2\right)' = 0 \qquad (4.1a)$$

$$\beta V' + aV''' - 3bU'V - 3kUV' = 0 \qquad (4.1b)$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir (Yıldız, 2011; Dağhan vd., 2015). Burada

$$U = U(\eta)\ ,\ V = V(\eta),\ U' = \frac{dU}{d\eta} \ \text{ ve } \ V' = \frac{dV}{d\eta}$$

dir. (4.1b) ile verilen denklem integrallenebilir olup, bir kez integre edilirse c keyfi integrasyon sabiti olmak üzere

$$U = \frac{1}{\beta}\left(V^2 + c\right) \qquad (4.2)$$

şeklinde elde edilir. (4.2) denklemi (4.1b) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a\beta V''' + (\beta^2 - 3ck)V' - (2b + k)(V^3)' = 0$$

sonucuna ulaşılır ve tekrardan integrali alınırsa e yeni bir keyfi integrasyon sabiti olmak üzere

$$V''+\frac{(\beta^2-3ck)}{a\beta}V-\frac{(2b+k)}{a\beta}V^3+\frac{e}{a\beta}=0 \tag{4.3}$$

formuna dönüşür (Yıldız, 2011; Dağhan vd., 201)].

4.1.1 Direkt integrasyon ile tam çözüm

(4.3) denkleminin her iki tarafı $\alpha\beta V'$ ile çarpılırsa denklem

$$a\,\beta V'V''+(\beta^2-3ck)VV'-(2b+k)V^3V'+eV'=0 \tag{4.4}$$

şeklinde integrallenebilen bir denkleme dönüşür. (4.4) denklemi bir kez integre edilir ve düzenlenirse, f keyfi bir integral sabiti olmak üzere

$$V'=\mp\sqrt{\frac{2b+k}{2a\beta}V^4-\frac{\beta^2-3ck}{a\beta}V^2-\frac{2e}{a\beta}V+\frac{2f}{a\beta}} \tag{4.5}$$

olur. (4.5) denkleminde yeniden integral alınırsa

$$\mp\sqrt{a\beta}\int\frac{dV}{\sqrt{\frac{2b+k}{2}V^4-\left(\beta^2-3ck\right)V^2-2eV+2f}}=\int d\eta$$

$$\mp\sqrt{a\beta}\int\frac{dV}{\sqrt{\frac{2b+k}{2}V^4-\left(\beta^2-3ck\right)V^2-2eV+2f}}=\eta+g \tag{4.6}$$

olarak yazılabilir (Dağhan vd., 2015). Burada g yeni integral sabitidir.

$e=f=g=0$ ve $\beta^2-3ck=0$ durumunda (4.6) denklemi

$$\mp\sqrt{a\beta}\int\frac{dV}{\sqrt{\frac{2b+k}{2}V^4}}=\eta$$

formuna dönüşür. $\beta=\pm\sqrt{3ck}$ olmak üzere

$$V(\eta)=\mp\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}},\ U=\frac{1}{\beta}(V^2+\mathrm{c})$$

şeklinde yazılabilir (Dağhan vd., 2015).

Benzer şekilde $e=f=g=0$, $\beta^2-3ck\neq 0$ ve $V>0$ alınırsa (4.6) denklemi

$$\mp\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\int\frac{dV}{V\sqrt{V^2-\frac{2\left(\beta^2-3ck\right)}{2b+k}}}=\eta$$

olur. $V=\frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa

$$\mp\sqrt{-\frac{a\beta}{\beta^2-3ck}}\int\frac{ds}{\sqrt{s^2-\frac{2b+k}{2\left(\beta^2-3ck\right)}}}=\eta \tag{4.7}$$

olarak yazılabilir. (4.7) denklemi bir kez integre edilirse

$$\mp\sqrt{-\frac{a\beta}{\beta^2-3ck}}\ln\left(s+\sqrt{s^2-\frac{2b+k}{2\left(\beta^2-3ck\right)}}\right)=\eta \tag{4.8}$$

formunda yazılır. (4.8) denkleminde $V=\frac{1}{s}$ dönüşümü tekrar kullanılır ve çözülürse $\gamma=\frac{2b+k}{2\left(\beta^2-3ck\right)}$ olmak üzere

$$V(\eta)=\frac{2}{e^{\mp\sqrt{-\frac{\beta^2-3ck}{\alpha\beta}}\eta}+\gamma e^{\mp\sqrt{-\frac{\beta^2-3ck}{\alpha\beta}}\eta}} \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir (Dağhan vd., 2015). (4.9) çözümünde iki durum söz konusudur. Eğer, $-\frac{\beta^2-3ck}{\alpha\beta}>0$ ise (4.9) denkleminin çözümü

$$V_1(\eta)=\frac{2}{(1+\gamma)\cosh\sqrt{-\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta\mp(1-\gamma)\sinh\sqrt{-\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta} \tag{4.10}$$

şeklinde olup, bu çözüm daha açık olarak

$$V_1(\eta)=\frac{4\left(\beta^2-3ck\right)}{A\cosh\sqrt{-\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta\mp B\sinh\sqrt{-\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta}$$

formunda yazılabilir. Burada $A=2\left(\beta^2-3ck\right)+2b+k$, $B=2\left(\beta^2-3ck\right)+2b+k$ şeklindedir. Eğer, $-\frac{\beta^2-3ck}{\alpha\beta}<0$ ise (4.9) denkleminin çözümü

$$V_2(\eta)=\frac{2}{(1+\gamma)\cos\sqrt{\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta\mp i(1-\gamma)\sin\sqrt{\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta} \tag{4.11}$$

şeklinde olup, bu çözüm daha açık olarak

$$V_2(\eta)=\frac{4\left(\beta^2-3ck\right)}{A\cos\sqrt{-\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta\mp B\sin\sqrt{-\frac{\left(\beta^2-3ck\right)}{\alpha\beta}}\eta}$$

formunda yazılır (Dağhan vd., 2015).

Burada $A = 2\left(\beta^2 - 3ck\right) + 2b + k$, $B = i\left[2\left(\beta^2 - 3ck\right) + 2b + k\right]$ ve $\eta = x - \beta t$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $U_{1,2}(\eta) = \dfrac{1}{\beta}\left[V_{1,2}^{\,2}(\eta) + \mathrm{c}\right]$ olarak elde edilir.

4.1.2 $\left(\dfrac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

(4.3) denkleminde balans yapılırsa $m = 1$ olup,

$$V(\eta) = \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0 \tag{4.12}$$

şeklinde çözüm önerisi yapılır. (4.12) denklemi (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : \alpha_1\left(-2\alpha_1^{\,2}b - \alpha_1^{\,2}k + 2a\beta\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : \alpha_1\left(-2\alpha_1\alpha_0 b - \alpha_1\alpha_0 k + a\beta\lambda\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : \alpha_1\left(-6\alpha_0^{\,2}b - 3\alpha_0^{\,2}k + \lambda^2 a\beta + 2a\beta\mu + \beta^2 - 3ck\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : \alpha_1 a\beta\mu\lambda - 2a^3 b - \alpha_0^{\,3}k + \alpha_0\beta^2 - 3\alpha_0 ck + e$$

denklem takımına ulaşılır (Dağhan vd., 2015). Elde edilen bu denklem takımı sıfıra eşitlenip çözülürse

$$\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}},\ \ \alpha_0 = \pm\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}},\ \ \lambda^2 - 4\mu = \frac{2\left(\beta^2 - 3ck\right)}{a\beta},\ \ e = 0 \tag{4.13}$$

katsayıları bulunur. (4.13) katsayıları (4.12) denklemindeki çözüm önerisinde yerine yazılırsa (4.3) denklemi ile verilen DS denklem sisteminin çözümü

$$V(\eta)=\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\left(\frac{G'}{G}\right)+\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$U(\eta)=\frac{1}{\beta}(V(\eta)^2+c),$$

şeklinde olur. (4.3) çözümü (3.3) ile verilen denklemdeki gibi hiperbolik, trigonometrik, rasyonel şekillerde yazılabilir (Dağhan vd., 2015).

Birinci tip: $\lambda^2-4\mu>0$

Bu durum için çözüm hiperbolik fonksiyonlar cinsinden olup, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$V_1(\eta)=\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\right)\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)}{c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\eta\right)}\right) \quad (4.14)$$

(4.14) çözümünde $\lambda=0$ alınırsa $\mu=-\frac{\beta^2-3ck}{2\alpha\beta}$ olmak üzere

$$V_2(\eta)=\pm\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{2b+k}}\left(\frac{c_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)+c_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)}{c_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)+c_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)}\right) \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak $c_2=0$ ve $c_1\neq 0$ veya $c_1=0$ ve $c_2\neq 0$ alınırsa (4.15) denklemi $\eta=x-\beta t$ için aşağıdaki şekilde gösterilir (Dağhan vd., 2015).

$$V_3(\eta)=\pm\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{2b+k}}\tanh\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)$$

$$V_4(\eta)=\pm\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{2b+k}}\coth\left(\sqrt{-\mu}\eta\right)$$

İkinci tip: $\lambda^2 - 4\mu < 0$

Bu durum için de çözüm trigonometrik fonksiyonlar cinsinden olup, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$V_5(\eta) = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2\mu}}{2}\right)\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right)}{c_1\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\eta\right)}\right) \qquad (4.16)$$

(4.16) çözümünde $\lambda = 0$ alınırsa $\mu = -\dfrac{\beta^2 - 3ck}{2\alpha\beta}$ olmak üzere

$$V_6(\eta) = \pm\sqrt{-\frac{\beta^2-3ck}{2b+k}}\left(\frac{-c_1\sin\left(\sqrt{\mu}\eta\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\mu}\eta\right)}{c_1\cos\left(\sqrt{\mu}\eta\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\mu}\eta\right)}\right) \qquad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak $c_2 = 0$ ve $c_1 \neq 0$ veya $c_1 = 0$ ve $c_2 \neq 0$ alınırsa (4.17) denklemi

$$V_7(\eta) = \pm\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{2b+k}}\tan\left(\sqrt{\mu}\eta\right)$$

$$V_8(\eta) = \pm\sqrt{-\frac{\beta^2-3ck}{2b+k}}\cot\left(\sqrt{\mu}\eta\right)$$

olarak yazılır (Dağhan vd., 2015). Burada $\eta = x - \beta t$ şeklindedir.

Üçüncü tip: $\lambda^2 - 4\mu = 0$

Son olarak burada çözüm rasyonel fonksiyonlar cinsinden olup, $\beta = \pm\sqrt{3ck}$ olmak üzere

$$V_9(\eta) = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{c_1}{c_1 + c_2\eta}\right) \tag{4.18}$$

şeklinde yazılabilir. (4.18) çözümünde özel olarak $c_1 = 0$ ve $c_2 \neq 0$ alınırsa

$$V_{10}(\eta) = \pm\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}} \tag{4.19}$$

çözümüne ulaşılır (Dağhan vd., 2015). Burada $\eta = x - \beta t$ olmak üzere $U_{1,2\ldots,10}(\eta) = \frac{1}{\beta}(V_{1,2,\ldots,10}{}^2(\eta) + \mathrm{c})$ şeklindedir.

4.1.3 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodunun farklı formu ile tam çözüm

(4.3) denkleminde balans yapılırsa $m = 1$ olup,

$$V(\eta) = \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} \tag{4.20}$$

şeklinde çözüm önerisi yapılır. (4.20) denklemi (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : \alpha_1\left(-2\alpha_1{}^2 b - \alpha_1{}^2 k + 2a\beta\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : \alpha_1\left(-6\alpha_1\alpha_{-1}b - 3\alpha_1\alpha_{-1}k + 2a\beta\mu + \beta^2 - 3ck\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : e$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} : \alpha_{-1}\left(-6\alpha_1\alpha_{-1}b - 3\alpha_1\alpha_{-1}k + 2a\beta\mu + \beta^2 - 3ck\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-3} : \alpha_{-1}\left(-2\alpha_{-1}{}^{2}b - \alpha_{-1}{}^{2}k + 2a\beta\mu^{2}\right)$$

denklem takımına ulaşılır. Elde edilen denklem takımı sıfıra eşitlenip çözülürse, μ 'nün durumuna göre üç farklı grup çözüm aşağıdaki şekilde verilir (Dağhan vd., 2015).

Durum I: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\dfrac{2a\beta}{2b+k}},\ \alpha_{-1} = 0,\ \mu = -\dfrac{\beta^2 - 3ck}{2a\beta},\ e = 0$ (4.21a)

Durum II: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\dfrac{2a\beta}{2b+k}},\ \alpha_{-1} = \pm\sqrt{\dfrac{2a\beta}{2b+k}},\ \mu = \dfrac{\beta^2 - 3ck}{4a\beta},\ e = 0$ (4.21b)

Durum III: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\dfrac{2a\beta}{2b+k}},\ \alpha_{-1} = \mp\sqrt{\dfrac{2a\beta}{2b+k}},\ \mu = -\dfrac{\beta^2 - 3ck}{8a\beta},\ e = 0$ (4.21c)

Birinci tip: $-\mu > 0$

(4.21a), (4.21b) ve (4.21c) katsayıları (4.20) denkleminde yerine yazılırsa (4.3) ile verilen DS denklem sisteminin çözümü

$$V_1(\eta) = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{G'}{G}\right),\ \mu = -\frac{\beta^2 - 3ck}{2a\beta}$$

$$V_2(\eta) = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{G'}{G}\right) \pm \sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1},\ \mu = \frac{\beta^2 - 3ck}{4a\beta}$$

$$V_3(\eta) = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{G'}{G}\right) \mp \sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1},\ \mu = -\frac{\beta^2 - 3ck}{8a\beta}$$

olarak elde edilir. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi (3.9a)'daki gibidir. Yukarıda verilen $V_1(\eta)$ ve $V_3(\eta)$ çözümlerinin aynı tip çözümler olduğu aşağıdaki uyarıda verilmiştir (Dağhan vd., 2015).

Uyarı 4.1: $V_1(\eta)$ ve $V_3(\eta)$ çözümlerinin aynı tip çözümler olduğu (Dağhan vd., 2015)'te Lemma 3.1 ile ispatlanmıştır.

İkinci tip: $-\mu<0$

(4.18a), (4.18b) ve (4.18c) katsayıları (4.17) denkleminde yerine yazılırsa (4.3) ile verilen DS denklem sisteminin çözümü

$$V_4(\eta)=\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{G'}{G}\right),\ \mu=-\frac{\beta^2-3ck}{2a\beta}$$

$$V_5(\eta)=\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{G'}{G}\right)\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1},\ \mu=\frac{\beta^2-3ck}{4a\beta}$$

$$V_6(\eta)=\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{G'}{G}\right)\mp\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1},\ \mu=-\frac{\beta^2-3ck}{8a\beta}$$

şeklinde yazılır. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi (3.9b)'daki gibidir. Yukarıda verilen $V_4(\eta)$ ve $V_6(\eta)$ çözümlerinin aynı tip çözümler olduğu aşağıdaki uyarıda verilmiştir (Dağhan vd., 2015).

Uyarı 4.2: $V_4(\eta)$ ve $V_6(\eta)$ çözümlerinin aynı tip çözümler olduğu (Dağhan vd., 2015)'de Lemma 3.2 ile ispatlanmıştır.

Üçüncü tip: $-\mu=0$

(4.21a), (4.21b) ve (4.21c) katsayıları (4.20) denkleminde yerine yazılırsa (4.3) ile verilen DS denklem sisteminin çözümü

$$V_7(\eta)=\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\left(\frac{c_2}{c_1+c_2\eta}\right),\ \beta=\pm\sqrt{3ck}$$

olur. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi (3.9c) daki gibi olup $U_{1,2,...7}(\eta)=\frac{1}{\beta}(V_{1,2,...,7}{}^2(\eta)+\mathrm{c})$ dir.

4.1.4 $\left(\frac{G'}{G},\frac{1}{G}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

(4.3) denkleminde V^3 ile V" terimleri arasında balans yapılırsa çözüm formu

$$V(\eta) = a_1\phi + a_0 + b_1\varphi \tag{4.22}$$

şeklinde olur. λ'nın durumuna göre çözümler hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel formda aşağıdaki şekillerde verilir.

Birinci Tip : $\lambda < 0$

(4.22) denklemi (4.3) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.4) denklemi kullanırsa $\lambda < 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}\phi^3 :\ & -2a_1{}^3b\lambda\nu^2 - 4a_1{}^3b\lambda^2\mu^2\nu - 2a_1{}^3b\mu^4 - a_1{}^3k\lambda^4\nu^2 - 2a_1{}^3k\lambda\mu^2\nu - a_1{}^3k\mu^4 \\ & +3b_1{}^2a_1k\lambda^3\nu + 3b_1{}^2a_1k\lambda\mu^2 + 2a_1a\beta\lambda^4\nu^2 + 4a_1a\beta\lambda^2\mu^2\nu + 2a_1a\beta\mu^4 \\ & -6b_1{}^2a_1b\lambda^3\nu + 6b_1{}^2a_1b\lambda^3\nu + 6b_1{}^2a_1b\lambda\mu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :\ & -6a_1^2a_0b\lambda^4\nu^2 - 12a_1{}^2a_0b\lambda^2\mu^2\nu - 6a_1{}^2a_0b\mu^4 - 3a_1{}^2a_0k\lambda^4\nu^2 - 6a_1{}^2a_0k\lambda^2\mu^2\nu \\ & +6a_0b_1{}^2b\lambda^3\nu + 6b_1{}^2a_0b\lambda\mu^2 + 3b_1{}^2a_0k\lambda^3\nu + 3a_0b_1{}^2k\lambda\mu^2 + 4b_1{}^3b\lambda^2\mu \\ & +2b_1{}^3k\lambda^2\mu + b_1a\beta\lambda\mu^3 - 3a_1{}^2a_0k\mu^4 + b_1a\beta\mu\nu\lambda^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2\varphi :\ & -6a_1^2b_1b\lambda^4\nu^2 - 12a_1{}^2b_1b\lambda^2\mu^2\nu - 6a_1{}^2b_1b\mu^4 - 3a_1{}^2b_1k\lambda^4\nu^2 - 6a_1{}^2b_1k\lambda^2\mu^2\nu \\ & +2b_1a\beta\mu^4 - 3a_1{}^2b_1k\mu^4 + 2b_1{}^3b\lambda^3\nu + 2b_1{}^3b\lambda\mu^2 + b_1{}^3k\lambda^3\nu + b_1{}^3k\lambda\mu^2 \\ & +2b_1a\beta\lambda^4\nu^2 + 4b_1a\beta\lambda^2\mu^2\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi :\ & -6a_1a_0{}^2b\lambda^4\nu^2 - 12a_1a_0{}^2b\lambda^2\mu^2\nu - 6a_1a_0{}^2b\mu^4 - 3a_1a_0{}^2k\lambda^4\nu^2 - 6a_1a_0{}^2k\lambda^2\mu^2\nu \\ & +6b_1{}^2a_1b\lambda^2\mu^2 + 3b_1{}^2a_1k\lambda^4\nu + 3a_1b_1{}^2k\lambda^2\mu^2 + 2a_1a\beta\lambda^5\lambda^2 + 4a_1a\beta\lambda^3\mu^2\nu \\ & +2a_1\beta^2\lambda^2\mu^2\nu + a_1\beta^2\mu^4 - 3a_1ck\lambda^4\nu^2 - 6a_1ck\lambda^2\mu^2\nu - 3a_1ck\mu^4 + 6a_1b_1{}^2b\lambda^3\nu \\ & -3a_1a_0{}^2k\mu^4 + 2a_1a\beta\mu^4\lambda + a_1\beta^2\lambda^4\nu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\varphi :\ & -12a_1a_0b_1b\lambda^4\nu^2 + 24a_1a_0b_1b\lambda^2\mu^2\nu + 12a_1a_0b_1b\mu^4 + 6a_1b_1a_0k\lambda^4\nu^2 \\ & +12a_1b_1{}^2b\lambda^3\nu\,\mu + 12b_1{}^2a_1b\lambda\mu^3 - 6b_1{}^2a_1k\lambda^3\mu\nu + 12a_1a_0b_1k\lambda^2\mu^2\nu \\ & +6a_1b_1a_0k\mu^4 + 6a_1a\beta\lambda^2\mu^3\nu + 3a_1a\beta\mu^5 + 3a_1a\beta\lambda^4\nu^2\mu + 6a_1b_1{}^2k\lambda\mu^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0 :& -2a_0{}^3b\lambda^4\nu^2 - 4a_0{}^3b\lambda^2\mu^2\nu - 2a_0{}^3b\mu^4 - a_0{}^3k\lambda^4\nu^2 - 2a_0{}^3k\lambda^2\mu^2\nu - a_0{}^3k\mu^4\\ &+ 6a_1b_1{}^2b\lambda^4\nu + 6a_0b_1b\lambda^2\mu^2 + 3b_1{}^2a_0k\lambda^4\nu + 3a_0b_1{}^2k\lambda^2\mu^2 + a_0\beta^2\lambda^4\nu^2\mu\\ &- 3a_0ck\lambda^4\nu^2 - 6a_0ck\lambda^2\mu^2\nu - 3a_0ck\mu^4 + 4b_1{}^3b\lambda^3\mu + 2b_1{}^3k\lambda^3\mu + b_1a\mu\lambda^4\nu\\ &+ a_0\beta^2\mu^4 + 2a_0\beta^2\lambda^2\mu^2\nu + e\mu^4 + e\lambda^4\nu^2 + 2e\mu^2\lambda^2\nu + b_1a\beta\lambda^2\mu^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0\varphi :& -6\mathrm{b}_1a_0{}^2b\lambda^4\nu^2 + 12b_1a_0{}^2b\mu^2\lambda^2\nu - 6b_1a_0{}^2b\mu^4 - 3a_0{}^2b_1k + 6b_1a_0{}^2k\mu^2\lambda^2\nu\\ &- 12\mathrm{b}_1a_0b\lambda\mu^3 + 6b_1a_0k\mu\lambda^3\nu - 6b_1a_0k\lambda\mu^3 - 2a_0b_1{}^2b\lambda^4\nu - 6b_1{}^2a_0b\mu^2\lambda^2\\ &+ b_1a\beta\lambda^5\nu^2 - b_1a\beta\lambda\mu^4 + b_1\beta^2\lambda^4\nu^2 - 2b_1\beta^2\lambda^2\mu^2\nu + b_1\beta^2\mu^4 - 3b_1ck\lambda^4\nu^2\\ &- 3b_1{}^3k\mu^2\lambda^2 + 12b_1a_0{}^2b\mu\lambda^3\nu - b_1{}^3k\nu\lambda^4 - 3a_0{}^2b_1k\mu^4 + 6b_1ck\nu\mu^2\lambda^2 - 3b_1ck\mu^4\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}},\ b_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2 + 4\nu\beta^4 - 24\beta^2ck\nu + 36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2 - 3ck\right)\left(2b+k\right)}},\ a_0 = 0\ ,$$

$$\lambda = \frac{-2\left(\beta^2 - 3ck\right)}{a\beta}, e = 0 \tag{4.23}$$

çözümlerine ulaşılır. (4.23) ile verilen çözüm (4.22) denkleminde yerine yazılırsa (4.3) ile verilen denkleminin çözümü

$$V(\eta) = \pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\phi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2 + 4\nu\beta^4 - 24\beta^2ck\nu + 36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2 - 3ck\right)\left(2b+k\right)}}\varphi \tag{4.24}$$

olarak bulunur. (4.24) ile verilen çözüm (4.2) de yerine yazılırsa

$$U(\eta) = \frac{1}{\beta}\left\{\left(\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\phi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2 + 4\nu\beta^4 - 24\beta^2ck\nu + 36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2 - 3ck\right)\left(2b+k\right)}}\varphi\right)^2 + c\right\} \tag{4.25}$$

çözümün ulaşılır. $\eta = x - \beta t$ dönüşümü (4.24) ve (4.25) çözümlerinde yerine yazılırsa (2.5) denklemi ile verilen DS denklem sisteminin tam çözümü hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur. (4.21) denkleminde ϕ ve φ ifadeleri yerlerine yazılırsa:

$$V(\eta)=\pm A\left(\frac{c_1\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\mathrm{c}_2\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)}{c_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\mathrm{c}_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\dfrac{\mu}{\lambda}}\right)\pm B\left(\frac{1}{c_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\mathrm{c}_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\dfrac{\mu}{\lambda}}\right)$$

$$U(\eta)=\frac{1}{\beta}\left\{V^2+c\right\}$$

çözümüne varılır. Burada

$$A=\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\sqrt{-\lambda}\,,B=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2+4\nu\beta^4-24\beta^2ck\nu+36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2-3ck\right)\left(2b+k\right)}},\quad \lambda=\frac{-2\left(\beta^2-3ck\right)}{a\beta}$$

ve $\eta=x-\beta t$ şeklinde tanımlanır.

İkinci Tip : $\lambda>0$

Benzer şekilde, (4.22) denklemi (4.3) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklimi ile birlikte (3.7) denklemi kullanırsa $\lambda>0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}\phi^3\ :\ & -2a_1^3b\lambda\nu^2-4a_1^3b\lambda^2\mu^2\nu-2a_1^3b\mu^4-a_1^3k\lambda^4\nu^2-2a_1^3k\lambda\mu^2\nu+6b_1^2a_1b\lambda^3\nu\\ & +3b_1^2a_1k\lambda^3\nu+3b_1^2a_1k\lambda\mu^2+2a_1a\beta\lambda^4\nu^2+4a_1a\beta\lambda^2\mu^2\nu+6b_1^2a_1b\lambda\mu^2\\ & -6b_1^2a_1b\lambda^3\nu-a_1^3k\mu^4+2a_1a\beta\mu^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :& -6a_1^2a_0b\lambda^4\nu^2+12a_1^2a_0b\lambda^2\mu^2\nu-6a_1^2a_0b\mu^4-3a_1^2a_0k\lambda^4\nu^2+6a_1^2a_0k\lambda^2\mu^2\nu\\ & +6b_1^2a_0b\lambda\mu^2-3b_1^2a_0k\lambda^3\nu+2b_1^3k\lambda^2\mu-b_1a\beta\mu\nu\lambda^3+4b_1^3k\lambda^2\mu\\ & -6a_0b_1^2b\lambda^3\nu-3a_1^2a_0k\mu^4+3a_0b_1^2k\lambda\mu^2+b_1a\beta\lambda\mu^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2\varphi :& -6a_1^2b_1b\lambda^4\nu^2+12a_1^2b_1b\lambda^2\mu^2\nu-6a_1^2b_1b\mu^4-3a_1^2b_1k\lambda^4\nu^2-3a_1^2b_1k\mu^4\\ & +2b_1^3b\lambda\mu^2-b_1^3k\lambda^3\nu+b_1^3k\lambda\mu^2+2b_1a\beta\lambda^4\nu^2-4b_1a\beta\lambda^2\mu^2\nu+2b_1a\beta\mu^4\\ & -2b_1^3b\lambda^3\nu+6a_1^2b_1k\lambda^2\mu^2\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi :& -6a_1a_0^2b\lambda^4\nu^2+12a_1a_0^2b\lambda^2\mu^2\nu-6a_1a_0^2b\mu^4-3a_1a_0^2k\lambda^4\nu^2-3a_1a_0^2k\mu^4\\ & +6b_1^2a_1b\lambda^2\mu^2-3b_1^2a_1k\lambda^4\nu+2a_1a\beta\lambda^5\lambda^2-4a_1a\beta\lambda^3\mu^2\nu+2a_1a\beta\mu^4\lambda\\ & -2a_1\beta^2\lambda^2\mu^2\nu+a_1\beta^2\mu^4-3a_1ck\lambda^4\nu^2-3a_1ck\mu^4-6a_1b_1^2b\lambda^3\nu\\ & +6a_1a_0^2k\lambda^2\mu^2\nu+6a_1ck\lambda^2\mu^2\nu+3a_1b_1^2k\lambda^2\mu^2+a_1\beta^2\lambda^4\nu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\varphi: &-12a_1a_0b_1b\lambda^4\nu^2+24a_1a_0b_1b\lambda^2\mu^2\nu+12a_1a_0b_1b\mu^4-6a_1b_1a_0k\lambda^4\nu^2\\&+12a_1b_1^2b\lambda^3\nu\mu-12b_1^2a_1b\lambda\mu^3+6b_1^2a_1k\lambda^3\mu\nu+6a_1b_1^2k\lambda\mu^3\\&-6a_1b_1a_0k\mu^4+6a_1a\beta\lambda^2\mu^3\nu-3a_1a\beta\mu^5+12a_1a_0b_1k\lambda^2\mu^2\nu\\&-3a_1a\beta\lambda^4\nu^2\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0: &-2a_0^3b\lambda^4\nu^2+4a_0^3b\lambda^2\mu^2\nu-2a_0^3b\mu^4-a_0^3k\lambda^4\nu^2+2a_0^3k\lambda^2\mu^2\nu-a_0^3k\mu^4\\&+e\mu^4-2e\mu^2\lambda^2\nu-6a_1b_1^2b\lambda^4\nu+6a_0b_1b\lambda^2\mu^2-3b_1^2a_0k\lambda^4\nu+3a_0b_1^2k\lambda^2\mu^2\\&+a_0\beta^2\lambda^4\nu^2\mu-2a_0\beta^2\lambda^2\mu^2\nu+a_0\beta^2\mu^4-3a_0ck\lambda^4\nu^2+6a_0ck\lambda^2\mu^2\nu\\&-3a_0ck\mu^4+4b_1^3b\lambda^3\mu+2b_1^3k\lambda^3\mu-b_1a\mu\lambda^4\nu+b_1a\beta\lambda^2\mu^3+e\lambda^4\nu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0\varphi: &-6\mathrm{b}_1a_0^2b\lambda^4\nu^2+12b_1a_0^2b\mu^2\lambda^2\nu-6b_1a_0^2b\mu^4-3a_0^2b_1k+6b_1a_0^2k\mu^2\lambda^2\nu\\&-12\mathrm{b}_1a_0b\lambda\mu^3+6b_1a_0k\mu\lambda^3\nu-6b_1a_0k\lambda\mu^3-2a_0b_1^2b\lambda^4\nu-6b_1^2a_0b\mu^2\lambda^2\\&+b_1a\beta\lambda^5\nu^2-b_1a\beta\lambda\mu^4+b_1\beta^2\lambda^4\nu^2-2b_1\beta^2\lambda^2\mu^2\nu+b_1\beta^2\mu^4-3b_1ck\lambda^4\nu^2\\&+12b_1a_0^2b\mu\lambda^3\nu-3b_1^3k\mu^2\lambda^2-3b_1ck\mu^4+6b_1ck\nu\mu^2\lambda^2-b_1^3k\nu\lambda^4-3a_0^2b_1k\mu^4\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklem takımı sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_1=\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}},\ b_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2-4\nu\beta^4+24\beta^2ck\nu-36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2-3ck\right)\left(2b+k\right)}},\quad a_0=0$$

$$\lambda=\frac{-2\left(\beta^2-3ck\right)}{a\beta},e=0 \tag{4.26}$$

olur. (4.26) eşitlikleri (4.22) denkleminde yerine yazılırsa (4.3) denkleminin genel çözümü

$$V(\eta)=\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\phi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2-4\nu\beta^4+24\beta^2ck\nu-36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2-3ck\right)\left(2b+k\right)}}\varphi \tag{4.27}$$

olarak bulunur. (4.27) ile verilen çözüm (4.2) de yerine yazılırsa

$$V(\eta)=\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\phi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2-4\nu\beta^4+24\beta^2ck\nu-36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2-3ck\right)\left(2b+k\right)}}\varphi \tag{4.28a}$$

$$U(\eta)=\frac{1}{\beta}\left\{V^2(\eta)+c\right\} \tag{4.28b}$$

çözümün ulaşılır. $\eta = x - \beta t$ dönüşümü (4.27) ve (4.28) çözümlerinde yerine yazılırsa (2.5) denklemi ile verilen DS denklem sistemini tam çözümü trigonometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur. (4.28a) denkleminde ϕ ve φ yerlerine yazılırsa:

$$V(\eta) = \pm A\left(\frac{c_1\cos(\sqrt{\lambda}\eta) - \mathrm{c}_2\sin(\sqrt{\lambda}\eta)}{c_1\sin(\sqrt{\lambda}\eta) + \mathrm{c}_2\cos(\sqrt{\lambda}\eta) + \dfrac{\mu}{\lambda}}\right) \pm B\left(\frac{1}{c_1\sin(\sqrt{\lambda}\eta) + \mathrm{c}_2\cos(\sqrt{\lambda}\eta) + \dfrac{\mu}{\lambda}}\right)$$

$$U(\eta) = \frac{1}{\beta}\left\{V^2(\eta) + c\right\}$$

çözümüne varılır. Burada

$$A = \sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\sqrt{\lambda}\ , B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2\beta^2\mu^2 - 4\nu\beta^4 + 24\beta^2 ck\nu - 36c^2k^2\nu}{\left(\beta^2 - 3ck\right)\left(2b+k\right)}}\ , \lambda = \frac{-2\left(\beta^2 - 3ck\right)}{a\beta} \text{ ve}$$

$\eta = x - \beta t$ olarak tanımlanır.

Üçüncü Tip : $\lambda = 0$

Son olarak, (4.22) denklemi (4.3) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.9) denklemi kullanırsa $\lambda = 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}\phi^3 :& -8a_1^3c_2^2b\mu^2 - 4a_1^3c_2^2k\mu^2 + 8a_1^3c_2c_1^2b\mu + 4a_1^3c_2c_1^2b\mu + 4a_1^3c_2c_1^2k\mu \\ &+ 12b_1^3c_2b\mu + 6b_1^2a_1c_2k\mu - 6b_1^2a_1c_1^2b - 3b_1^2a_1c_1^2k + 8a_1c_2a\beta\mu^2 \\ &- 2a_1^3c_1^4b - a_1^3c_1^4k + 2a_1c_1^4a\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :& -24a_1^2a_0c_2^2b\mu^2 - 12a_1^2a_0^2c_2^2k\mu^2 + 12a_1^2a_0c_2c_1^2k\mu - 6a_1^2a_0c_1^4b \\ &+ 12a_0b_1^2c_2b\mu + 6b_1^2a_0c_2k\mu + 4b_1^3b\mu + 2b_1^3k\mu + 2b_1c_2a\beta\mu^2 \\ &- 3a_1^2a_0kc_1^4 - b_1c_1^2a\beta\mu + 24a_1^2a_0c_2c_1^2b\mu - 6b_1^2a_0c_1^2b - 3a_0b_1^2c_1^2k\end{aligned}$$

$$\phi:-24a_0^2c_2^2a_1\mu-12a_1a_0^2c_2^2k\mu^2+12a_1a_0^2c_2c_1^2k\mu-6a_1a_0^2c_1^4b-3a_1a_0^2c_1^4k+2a_1a\beta\mu^4\lambda$$
$$+8c_2^2a_1\lambda^2\mu^2+3b_1^2a_1k\lambda^4\nu+3a_1b_1^2k\lambda^2\mu^2+2a_1a\beta\lambda^5\lambda^2+a_1\beta^2\lambda^4\nu^2+4a_1a\beta\lambda^3\mu^2\nu$$
$$+24a_1a_0^2c_2c_1^2b\mu+2a_1\beta^2\lambda^2\mu^2\nu+a_1\beta^2\mu^4$$

$$\phi\varphi:-48a_1a_0b_1c_2^2b\mu^2-24a_1a_0b_1c_2^2k\mu^2+48a_1a_0b_1c_2c_1^2b\mu+24a_1b_1a_0c_2c_1^2k\mu$$
$$-24c_2a_1b_1^2b\mu^2-12b_1^2c_2a_1k\mu^2+12b_1^2a_1c_1^2b\mu+6a_1b_1^2c_1^2ak\mu-12c_2^2a_1a\beta\mu^3$$
$$-3c_1^4a_1a\beta\mu-6a_1b_1a_0kc_1^4+12a_1ac_2c_1^2\beta\mu^2-12c_1^4a_1a_0b_1b$$

$$\phi^0:-8a_0^3c_2^2b\mu^2-4a_0^3c_2^2k\mu^2+8a_0^3c_2c_1^2b\mu+4a_0^3c_2c_1^2k\mu-2a_0^3c_1^4a_0^3b$$
$$+4a_0c_2^2\beta^2\mu^2-12a_0c_2^2c_1k\mu^2-4c_1^2c_2a_0\beta^2\mu+12a_0c_1^2c_2k\mu+a_0\beta^2c_1^4$$
$$-3a_0c_1^4ck+4ec_2c_1^2\mu-a_0^3kc_1^4+ec_1^4+4c_2^2e\mu$$

$$\phi^0\varphi:-24b_1a_0^2c_2b\mu^2-12b_1a_0^2c_2^2k\mu^2+24b_1a_0^2c_2c_1^2b\mu+12a_0^2b_1c_2c_1^2k\mu-3a_0^2b_1c_1^4k$$
$$-12b_1^2a_0c_2k\mu^2+12b_1^2c_1^2a_0b\mu+6b_1^2c_1^2a_0k\mu-8b_1^3b\mu^2-4b_1^3k\mu^2-6b_1a_0^2c_1^4b$$
$$-4c_2c_1^2b_1\beta^2\mu+12c_2c_1^2b_1ck\mu-4b_1c_2a\beta\mu^3-c_1^4b_1\beta^2-3c_1^4b_1ck-24b_1a_0c_2b\mu^2$$
$$-12b_1c_2^2ck\mu^2+2b_1c_1^2a\beta\mu^2$$

olarak bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_1=\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\;,b_1=\pm\sqrt{-\frac{a\beta\left(2c_2\mu-c_1^2\right)}{\left(4b+2k\right)}}\,,\;a_0=0\,,\lambda=0\,,\;e=0\,,\;\beta=\pm\sqrt{3ck} \qquad (4.29)$$

olur. (4.29) eşitlikleri (4.22) de yerine yazılırsa (4.3) denkleminin genel çözümü

$$V(\eta)=\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\phi\pm\sqrt{\frac{a\beta\left(2c_2\mu-c_1^2\right)}{\left(4b+2k\right)}}\varphi \qquad (4.30)$$

olarak bulunur. (4.30) ile verilen çözüm (4.2)'de yerine yazılırsa

$$U(\eta)=\frac{1}{\beta}\left\{\left(\pm\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\phi\pm\sqrt{\frac{a\beta\left(2c_2\mu-c_1^2\right)}{\left(4b+2k\right)}}\varphi\right)^2+c\right\} \qquad (4.31)$$

çözümün ulaşılır. $\eta = x - \beta t$ dönüşümü (4.30) ve (4.31) çözümlerinde yerine yazılırsa (2.5) denklemi ile verilen DS denklem sisteminin tam çözümü rasyonel fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur. (4.30) denkleminde ϕ ve φ yerlerine yazılırsa:

$$V(\eta) = \pm\left(\sqrt{\frac{a\beta}{4b+2k}}\right)\left(\frac{\mu\eta + c_1}{\frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2}\right) \pm \left(\sqrt{\frac{a\beta\left(2c_2\mu - c_1^2\right)}{(4b+k)}}\right)\left(\frac{1}{\frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2}\right) \quad (4.32a)$$

$$U(\eta) = \frac{1}{\beta}\left\{V^2(\eta) + c\right\} \quad (4.32b)$$

çözümü bulunur.

4.1.5 $\left(\frac{1}{G'}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

Diğer metotta olduğu gibi bu metotta da (4.3) ile verilen denklemde V^3 ile V'' terimleri arasında balans yapılarak $N = 1$ bulunur ve burada çözüm metot gereği

$$V(\eta) = a_0 + a_1\left(\frac{1}{G'}\right) \quad (4.33)$$

formunda olur. (4.33) denklemi (4.3) ile verilen denkleminde yerine yazılırsa katsayılar:

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^3 : a_1\left(-2a_1^2 b - a_1^2 k + 2a\beta\mu^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^2 : 3a_1\left(-2a_0 a_1 b - a_1 a_0 k + a\beta\lambda\mu\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^1 : a_1\left(-6a_0^2 b - 3a_0^2 k + a\beta\lambda^2 + \beta^2 - 3ck\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^0 : -2a_0^3 b - a_0^3 k + a_0\beta^2 - 3a_0 ck + e$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki katsayılar sıfıra eşitlenir ve denklem sistemi çözülürse:

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu \ , \ a_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a\beta}{(2b+k)}}\lambda \ , \ \lambda = \pm\sqrt{\frac{2(\beta^2-3ck)}{a\beta}} \ ,. \ e=0 \tag{4.34}$$

olur. (4.34) ile verilen sonuçlar (4.33) denkleminde yerine yazılırsa çözüm

$$V(\eta) = \pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\left(\frac{1}{G'}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{(2b+k)}} \tag{4.35}$$

şeklinde olur. (4.35) ile verilen bu çözüm (4.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$U(\eta) = \frac{1}{\beta}\left\{\left(\pm\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\left(\frac{1}{G'}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{(2b+k)}}\right)^2 + c\right\} \tag{4.36}$$

çözümüne varılır. Son olarak, $\eta = x - \beta t$ dönüşümü (4.35) ve (4.36) çözümlerinde kullanılırsa (2.5) denklemi ile verilen DS denklem sisteminin çözümü tek tip olarak ifade edilmiş olur.

(4.36) denkleminde $\left(\frac{1}{G'}\right)$ ifadesi yerine yazılırsa:

$$V(\eta) = \pm\left(\sqrt{\frac{2a\beta}{2b+k}}\mu\right)\left(\frac{\lambda}{-\mu+\lambda c_1\left(\cosh(\lambda\eta)-\sinh(\lambda\eta)\right)}\right) \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2-3ck}{(2b+k)}}\right)$$

$$U(\eta) = \frac{1}{\beta}\left\{V^2 + c\right\}$$

çözümüne ulaşılır.

4.2 Modifiye-Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Tam Çözümleri

(2.4) ile verilen MBBM denklemi (Yıldız, 2011)'de direkt integrasyon, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ve $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodunun farklı formu kullanılarak elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen bu çözümler tekrarlanmış, ilave olarak iki farklı yeni teknikle MBBM denkleminin analitik tam çözümleri elde edilmiştir. (2.4)'deki kısmi türevli diferansiyel denkleme $\eta = kx + \omega t$, $U = U(\eta)$ dönüşümü uygulanırsa

$$-\gamma k^2 \omega U''' + \beta k U^2 U' + (\omega + \alpha k) U' = 0 \tag{4.37}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.37) denklemi integre edilebilir bir denklem olup, bir kez integre edilirse c integral sabiti olmak üzere

$$U'' - \frac{\omega + \alpha k}{\gamma k^2 \omega} U + \frac{\beta}{3\gamma k \omega} U^3 - \frac{c}{\gamma k^2 \omega} = 0 \tag{4.38}$$

denklemine ulaşılır (Doğan, 2014; Yıldız, 2011).

4.2.1 Direkt integrasyon ile tam çözüm

(4.38) denkleminin her iki tarafı U' ile çarpılırsa (4.38) denklemi

$$-\gamma k^2 \omega U'' U' + \frac{1}{3} \beta k U^3 U' + (\omega + \alpha k) U' U + c U' = 0 \tag{4.39}$$

şeklindeki integrallenebilir denkleme dönüşür. (4.39) denklemi bir kez integre edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa d keyfi bir integral sabiti olmak üzere

$$U' = \mp \sqrt{\frac{k\beta}{6\gamma k^2 \omega} U^4 + \frac{\omega + \alpha k}{\gamma k^2 \omega} U^2 - \frac{2c}{\gamma k^2 \omega} U + \frac{2e}{\gamma k^2 \omega}} \tag{4.40}$$

olur (Dağhan vd.). (4.40) denkleminde yeniden integral alınırsa

$$\mp k\sqrt{\gamma\omega}\int \frac{dV}{\sqrt{\frac{k\beta}{6}U^4 + (\omega+\alpha k)U^2 + 2cU + 2d}} = \int d\eta$$

$$\mp k\sqrt{\gamma\omega}\int \frac{dV}{\sqrt{\frac{k\beta}{6}U^4 + (\omega+\alpha k)U^2 + 2cU + 2d}} = \eta + e \tag{4.41}$$

olarak yazılabilir (Yıldız, 2011). Burada e yeni integral sabitidir.

$c = d = e = 0$ ve $\omega + \alpha k = 0$ durumunda (4.41) denklemi

$$\mp k\sqrt{-\frac{6\gamma\alpha}{\beta}}\int \frac{dU}{\sqrt{U^4}} = \eta$$

formuna dönüşür. Böylece

$$U(\eta) = \mp k\sqrt{-\frac{6\alpha\gamma}{\beta}}\frac{1}{\eta}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $c = d = e = 0$ ve $\omega + \alpha k \neq 0$ durumunda (4.41) denklemi

$$\mp k\sqrt{\frac{6\gamma\omega}{k\beta}}\int \frac{dU}{U\sqrt{U^2 + \frac{6(\omega+\alpha k)}{k\beta}}} = \eta$$

olur. $U = \frac{1}{s}$ dönüşümü yapılırsa

$$\mp k\sqrt{\frac{\gamma\omega}{\omega+\alpha k}}\int \frac{ds}{\sqrt{s^2 + \frac{k\beta}{6(\omega+\alpha k)}}} = \eta \tag{4.42}$$

olarak yazılabilir (Yıldız, 2011). (4.42) denklemi bir kez integre edilirse

$$\mp k\sqrt{\frac{\gamma\omega}{\omega+\alpha k}}\ln\left(s+\sqrt{s^2+\frac{k\beta}{6(\omega+\alpha k)}}\right)=\eta \tag{4.43}$$

formunda yazılır. (4.43) denkleminde $U=\frac{1}{s}$ dönüşümü tekrar kullanılırsa $\delta=-\frac{k\beta}{6(\omega+\alpha k)}$ olmak üzere,

$$U(\eta)=\frac{2}{e^{\mp\sqrt{\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\eta}+\delta e^{\mp\sqrt{\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\eta}} \tag{4.44}$$

şeklinde yazılabilir. (4.44) çözümünde iki durum söz konusudur. Eğer, $\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}>0$ ise denklemin çözümü

$$U_1(\eta)=\frac{2}{(1+\delta)\cosh\sqrt{\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}\mp(1-\delta)\sinh\sqrt{\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}} \tag{4.45}$$

şeklinde olup, bu çözüm daha açık olarak

$$U_1(\eta)=\frac{12(\omega+\alpha k)}{\big(6(\omega+\alpha k)-k\beta\big)\cosh\sqrt{\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}\mp\big(6(\omega+\alpha k)-k\beta\big)\sinh\sqrt{\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}}$$

yazılır. Eğer, $\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}<0$ ise (4.44) denkleminin çözümü

$$U_2(\eta)=\frac{2}{(1+\delta)\cos\sqrt{-\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}\mp(1-\delta)\sin\sqrt{-\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}} \tag{4.46}$$

olup, bu çözüm daha açık olarak

$$U_2(\eta)=\frac{12(\omega+\alpha k)}{\left(6(\omega+\alpha k)-k\beta\right)\cos\sqrt{-\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}\mp\left(6(\omega+\alpha k)-k\beta\right)\sin\sqrt{-\frac{\omega+\alpha k}{\gamma\omega}}\frac{\eta}{k}}$$

formunda yazılır (Yıldız, 2011).

4.2.2 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

(4.35) ile verilen denklemin çözümünde üç durum söz konusudur (Aslan, 2009):

Birinci tip: $a=k^2\left(\lambda^2-4\mu\right)>0$

Burada çözüm hiperbolik fonksiyonlar cinsinden olup,

$$U_{1,2}(x,t)=\mp\sqrt{\frac{3\alpha\gamma}{-\beta(2+\gamma a)}}\frac{c_1\cosh\frac{\sqrt{a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)+c_2\sinh\frac{\sqrt{a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)}{c_1\sinh\frac{\sqrt{a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)+c_2\cosh\frac{\sqrt{a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)}$$

şeklindedir (Aslan, 2009). Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir.

İkinci tip: $a=k^2\left(\lambda^2-4\mu\right)<0$

Bu durumda çözüm trigonometrik fonksiyonlar cinsinden olup, c_1 ve c_2 integral sabitleri olmak üzere

$$U_{3,4}(x,t)=\mp\sqrt{\frac{3\alpha\gamma}{-\beta(2+\gamma a)}}\frac{-c_1\cos\frac{\sqrt{-a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)+c_2\sin\frac{\sqrt{-a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)}{c_1\sin\frac{\sqrt{-a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)+c_2\cos\frac{\sqrt{-a}}{2}\left(x-\frac{2\alpha t}{2+\gamma a}\right)}$$

formundadır (Aslan, 2009).

Üçüncü tip: $a = k^2\left(\lambda^2 - 4\mu\right) = 0$

Son olarak, çözüm rasyonel fonksiyonlar cinsinden c_1, c_2 ve c_3 keyfi integral sabitleri olmak üzere aşağıdaki şeklinde yazılır (Aslan, 2009).

$$U_{5,6}(x,t) = \mp\frac{\sqrt{6\alpha\gamma}c_3}{\sqrt{-\beta}\left(c_3\left(x-\alpha t\right)+c_2\right)}$$

4.2.3 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodunun farklı formu ile tam çözüm

(4.35) denkleminde U'' ile U^3 arasında balans yapılırsa metot gereği çözüm önerisi

$$U(\eta) = \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} \qquad (4.47)$$

formundadır. (4.47) denklemi (4.38) denkleminde yerine yazılırsa katsayılar,

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : \alpha_1 k\left(\alpha_1^2 - 6k\gamma\omega\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : 3\alpha_1\left(\alpha_1\alpha_{-1}\beta k + \alpha k - 2\gamma k^2\mu\omega + \omega\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : 3c$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} : 3\alpha_{-1}\left(\alpha_1\alpha_{-1}\beta k + \alpha k - 2\gamma k^2\mu\omega + \omega\right)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-3} : \alpha_{-1}k\left(\alpha_{-1}^2\beta - 6k\gamma\omega\mu^2\right)$$

şeklinde olur. Elde edilen bu denklem takımı sıfıra eşitlenip çözülürse μ'nün durumuna göre üç farklı grup çözümünden bahsedilir.

Durum I: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}},\ \alpha_{-1} = 0,\ \omega = \frac{\alpha k}{-1+2\gamma k^2\mu},\ c = 0$ (4.48a)

Durum II: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}},\ \alpha_{-1} = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\mu,\ \omega = -\frac{\alpha k}{1+4\gamma k^2\mu},\ c = 0$ (4.48b)

Durum III: $\alpha_1 = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}},\ \alpha_{-1} = \mp\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\mu,\ \omega = \frac{\alpha k}{-1+8\gamma k^2\mu},\ c = 0$ (4.48c)

Birinci tip: $-\mu > 0$

(4.48a), (4.48b) ve (4.48c) katsayıları (4.47) denkleminde yerine yazılırsa (4.39) ile verilen MBBM denkleminin çözümü

$$U_1(\eta) = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right),\ \omega = \frac{\alpha k}{-1+2\gamma k^2\mu}$$

$$U_2(\eta) = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right) \pm \sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}\mu,\ \omega = -\frac{\alpha k}{1+4\gamma k^2\mu}$$

$$U_3(\eta) = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right) \mp \sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}\mu,\ \omega = \frac{\alpha k}{-1+8\gamma k^2\mu}$$

formunda elde edilir. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi (3.9a)'daki gibidir. Yukarıda verilen $U_1(\eta)$ ve $U_3(\eta)$ çözümleri aynı çözüm olduğu aşağıdaki uyarıda ispatlanmıştır (Yıldız, 2011).

Uyarı 4.3: $U_1(\eta)$ ve $U_3(\eta)$ çözümlerinin aynı tip çözümler olduğu (Yıldız, 2011)'de Lemma 3.1 ile ispatlanmıştır.

İkinci tip: $-\mu < 0$

Benzer şekilde (4.48a), (4.48b) ve (4.48c) katsayıları (4.47) denkleminde yerine yazılırsa (4.39) ile verilen MBBM denkleminin çözümü

$$U_4(\eta) = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right), \; \omega = \frac{\alpha k}{-1+2\gamma k^2\mu}$$

$$U_5(\eta) = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right) \pm \sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right)\mu, \; \omega = -\frac{\alpha k}{1+4\gamma k^2\mu}$$

$$U_6(\eta) = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right) \mp \sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}\mu, \; \omega = \frac{\alpha k}{-1+8\gamma k^2\mu}$$

şeklinde yazılır. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi (3.9b)'deki gibidir. Yukarıda verilen $U_4(\eta)$ ve $U_6(\eta)$ çözümleri aynı tip çözümler olduğu aşağıdaki uyarıda verilmiştir (Yıldız, 2011).

Uyarı 4.3: $U_4(\eta)$ ve $U_6(\eta)$ çözümlerinin aynı tip çözümler olduğu (Yıldız, 2011)'de Lemma 3.2 ile ispatlanmıştır.

Üçüncü tip: $-\mu = 0$

Son olarak burada da (4.48a), (4.48b) ve (4.48c) katsayıları (4.47) denkleminde yerine yazılırsa, (4.39) ile verilen MBBM denkleminin çözümü

$$U_7(\eta) = \pm\sqrt{-\frac{6\alpha\gamma}{\beta}k}\left(\frac{c_2}{c_1+c_2\eta}\right)$$

olur. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesi (3.9c)'deki gibidir (Yıldız, 2011).

4.2.4 $\left(\frac{G'}{G},\frac{1}{G}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

Burada U^3 ve U'' li terimler arasında balans yapılırsa MBBM denklemine

$$U(\eta)=a_1\phi+a_0+b_1\varphi \tag{4.49}$$

şeklinde çözüm önerisi yapılır. (4.49) denkleminin gerekli türevleri alınıp (4.39) denkleminde yerine yazılırsa, λ 'nın durumuna göre trigonometrik, rasyonel ve hiperbolik olmak üzere 3 tip çözüm bulunur.

Birinci Tip: $\lambda<0$

(4.49) denklemi (4.39) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.4) denklemi kullanırsa $\lambda<0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}\phi^3 :\ & a_1^{\,3}\lambda^4\beta k\nu^2-2a_1^{\,3}\beta k\lambda^2\mu^2\nu+a_1^{\,3}b\beta\mu^4+3a_1b_1^{\,2}k\beta\lambda^3\nu-3b_1^{\,2}a_1k\mu^2\lambda\\ & +12\gamma a_1k^2\mu^2\nu\omega-6\gamma a_1k\mu^4\omega-6\gamma a_1k\lambda^4\nu^2\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :\ & 3a_1^2a_0k\beta\lambda^4\nu^2-6a_1^{\,2}a_0k\beta\lambda^2\mu^2\nu+3a_1^{\,2}a_0k\beta\mu^4+3b_1^{\,2}a_0k\beta\lambda^3\nu-3b_1^{\,2}a_0\beta k\lambda\mu^2\\ & +3b_1\gamma k\lambda^3\mu\omega\nu-3b_1\gamma k\omega\lambda\mu^3-2b_1^{\,3}k\beta\mu\nu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi :\ & 3a_1a_0^{\,2}k\beta\lambda^4\nu^2-6a_1a_0^{\,2}k\beta\lambda^2\mu^2\nu+3a_1a_0^{\,2}k\beta\mu^4+3a_1b_1^{\,2}k\beta\lambda^4\nu-3a_1b_1^{\,2}k\beta\lambda^2\mu^2\\ & -6a_1\alpha k\lambda^2\mu^2\nu+3a_1\alpha k\mu^4-6a_1\gamma k^2\lambda^5\nu^2\omega+12a_1\gamma k^2\lambda^3\mu^2\nu\omega-6a_1\gamma k^2\lambda\mu^4\omega\\ & +3a_1\mu^4\omega-6a_1\lambda^2\nu\mu^2\omega+3a_1\alpha k\lambda^4\nu^2+3a_1\lambda^4\nu^2\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\varphi :\ & 6a_1a_0b_1k\beta\lambda^4\nu^2-12a_1a_0b_1k\beta\lambda^2\mu^2\nu+6a_1a_0b_1k\beta\mu^4-6a_1b_1^{\,2}k\beta\lambda^3\nu\mu\\ & +9\gamma a_1k^2\mu^5\omega-9a_1k^2\lambda^4\nu^2\mu\omega+18\gamma a_1k^2\lambda^2\mu^3\nu\omega+6a_1b_1^{\,2}k\beta\lambda\mu^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0 :\ & a_0^{\,3}\beta k\lambda^4\nu^2-2a_0^{\,3}\beta k\lambda^2\mu^2\nu+a_0^{\,3}\beta k\mu^4+3a_0b_1^{\,2}\beta k\lambda^4\nu+3a_0b_1^{\,2}\beta k\lambda^2\mu^2+3a_0\alpha k\lambda^4\nu^2\\ & +3a_0\lambda^4\nu^2\omega-6a_0\alpha k\lambda^2\mu^2\nu\omega+3a_0\mu^4\omega-2b_1^{\,3}\beta k\lambda^3\mu+3b_1\gamma k^2\mu\nu\omega-3b_1\gamma k^2\lambda^2\mu^3\omega\\ & -6c\mu^2\lambda^2\nu+3a_0\alpha k\mu^4-6a_0\alpha k\lambda^2\mu^2\nu+3c\lambda^4\nu^2+3c\mu^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0\varphi :\ & 3b_1a_0^{\,2}k\beta\lambda^4\nu^2-6b_1a_0^{\,2}k\beta\mu^2\lambda^2\nu+3b_1a_0^{\,2}k\beta\mu^4-6a_0b_1k\beta\lambda^3\mu\nu+6b_1^{\,2}a_0k\beta\mu^3\lambda\\ & +3\alpha \mathrm{b}_1k\lambda^4\nu^2-6\alpha b_1k\mu^2\lambda^2\nu+3\alpha b_1k\mu^4-3\gamma b_1k^2\lambda^5\nu^2\omega+3\gamma b_1k^2\mu^4\lambda\omega+3b_1\omega\nu^2\lambda^4\\ & +3b_1^{\,2}k\beta\mu^2\lambda^2+3b_1\mu^4\omega+b_1^{\,2}k\beta\lambda^4\nu-6b_1\mu^2\lambda^2\nu\omega\end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_1=\pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\quad, b_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-12\alpha^2k^2\nu-24\alpha k\omega\nu-3\gamma^2k^4\mu^2\omega^2-12\nu\omega^2}{\alpha\beta k^2+\beta k\omega}}\quad, a_0=0$$

$$\lambda=\frac{2(\omega+\alpha k)}{\gamma k^2\omega},\ c=0 \tag{4.50}$$

olarak bulunur. (4.50) denkleminde elde edilenler (4.49) denkleminde yerine yazılırsa (4.39) ile verilen MBBM denkleminin çözümü

$$U(\eta)=\pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\phi\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-12\alpha^2k^2\nu-24\alpha k\omega\nu-3\gamma^2k^4\mu^2\omega^2-12\nu\omega^2}{\alpha\beta k^2+\beta k\omega}}\varphi \tag{4.51}$$

şeklinde olur. $\eta=kx+\omega t$ dönüşümü (4.51) çözümü yerine yazılırsa (2.4) denklemi ile verilen MBBM denkleminin tam çözümü hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur.

(4.21) denkleminde ϕ ve φ yerlerine yazılırsa:

$$U(\eta)=\pm A\left(\frac{1}{c_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\mathrm{c}_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\frac{\mu}{\lambda}}\right)$$
$$\pm B\left(\frac{c_1\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\mathrm{c}_2\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)}{c_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\mathrm{c}_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\eta)+\frac{\mu}{\lambda}}\right)$$

ifadesine ulaşılır. Bu çözümde $\eta=kx+\omega t$ olmak üzere

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12\alpha^2k^2\nu+24\alpha k\omega\nu-3\gamma k^4\mu^2\omega^2+12\nu\omega^2}{\alpha\beta k^2+\beta k\omega}},\ B=\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\sqrt{-\lambda},\ \lambda=\frac{2(\omega+\alpha k)}{\gamma k^2\omega}$$

şeklindedir.

İkinci Tip: $\lambda > 0$

Benzer şekilde, (4.49) denklemi (4.39) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.7) denklemi kullanırsa $\lambda > 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}
\phi^3 &: a_1^3\lambda^4\beta k\nu^2 + 2a_1^3\beta k\lambda^2\mu^2\nu + a_1^3 b\beta\mu^4 - 3a_1b_1^2k\beta\lambda^3\nu - 3b_1^2a_1k\mu^2\lambda \\
&\quad - 12\gamma a_1k^2\mu^2\nu\omega - 6\gamma a_1k\mu^4\omega - 6\gamma a_1k\lambda^4\nu^2\omega \\
\phi^2 &: 3a_1^2a_0k\beta\lambda^4\nu^2 + 6a_1^2a_0k\beta\lambda^2\mu^2\nu + 3a_1^2a_0k\beta\mu^4 - 3b_1^2a_0k\beta\lambda^3\nu - 3b_1^2a_0\beta k\lambda\mu^2 \\
&\quad - 3b_1\gamma k\lambda^3\mu\omega\nu - 3b_1\gamma k\omega\lambda\mu^3 - 2b_1^3k\beta\mu\nu^2 \\
\phi^2\varphi &: 3a_1^2b_1k\beta\lambda^4\nu^2 + 6a_1^2b_1k\beta\lambda^2\mu^2\nu + 3a_1^2b_1k\beta\mu^4 - b_1^3k\beta\lambda^3\nu - b_1^3k\beta\lambda\mu^2 \\
&\quad - 12\gamma b_1\omega k^2\lambda^2\nu\mu^2 - 6\gamma b_1\omega k^2\mu^4 - 6\gamma b_1\omega k^2\lambda^4\nu^2 \\
\phi &: 3a_1a_0^2k\beta\lambda^4\nu^2 + 6a_1a_0^2k\beta\lambda^2\mu^2\nu + 3a_1a_0^2k\beta\mu^4 - 3a_1b_1^2k\beta\lambda^4\nu - 3a_1b_1^2k\beta\lambda^2\mu^2 \\
&\quad + 6a_1\alpha k\lambda^2\mu^2\nu + 3a_1\alpha k\mu^4 - 6a_1\gamma k^2\lambda^5\nu^2\omega - 12a_1\gamma k^2\lambda^3\mu^2\nu\omega - 6a_1\gamma k^2\lambda\mu^4\omega \\
&\quad + 3a_1\mu^4\omega + 6a_1\lambda^2\nu\mu^2\omega + 3a_1\alpha k\lambda^4\nu^2 + 3a_1\lambda^4\nu^2\omega \\
\phi\varphi &: 6a_1a_0b_1k\beta\lambda^4\nu^2 + 12a_1a_0b_1k\beta\lambda^2\mu^2\nu + 6a_1a_0b_1k\beta\mu^4 + 6a_1b_1^2k\beta\lambda^3\nu\mu + 6a_1b_1^2k\beta\lambda\mu^3 \\
&\quad + 9\gamma a_1k^2\mu^5\omega + 9a_1k^2\lambda^4\nu^2\mu\omega + 18\gamma a_1k^2\lambda^2\mu^3\nu\omega \\
\phi^0 &: a_0^3\beta k\lambda^4\nu^2 + 2a_0^3\beta k\lambda^2\mu^2\nu + a_0^3\beta k\mu^4 - 3a_0b_1^2\beta k\lambda^4\nu - 3a_0b_1^2\beta k\lambda^2\mu^2 \\
&\quad + 3a_0\lambda^4\nu^2\omega + 6a_0\lambda^2\mu^2\nu\omega + 3a_0\mu^4\omega - 2b_1^3\beta k\lambda^3\mu - 3b_1\gamma k^2\mu\nu\omega + 3c\lambda^4\nu^2 \\
&\quad + 6a_0\alpha k\lambda^2\mu^2\nu + 6c\mu^2\lambda^2\nu + 3c\mu^4 + 3a_0\alpha k\mu^4 + 3a_0\alpha k\lambda^4\nu^2 - 3b_1\gamma k^2\lambda^2\mu^3\omega \\
\phi^0\varphi &: 3b_1a_0^2k\beta\lambda^4\nu^2 + 6b_1a_0^2k\beta\mu^2\lambda^2\nu + 3b_1a_0^2k\beta\mu^4 + 6a_0b_1k\beta\lambda^3\mu\nu - b_1^2k\beta\lambda^4\nu \\
&\quad + 3\alpha b_1k\lambda^4\nu^2 + 6\alpha b_1k\mu^2\lambda^2\nu + 3\alpha b_1k\mu^4 - 3\gamma b_1k^2\lambda^5\nu^2\omega + 6b_1\mu^2\lambda^2\nu\omega \\
&\quad + 3b_1^2k\beta\mu^2\lambda^2 + 3b_1\mu^4\omega + 6b_1^2a_0k\beta\mu^3\lambda + 3\gamma b_1k^2\mu^4\lambda\omega + 3b_1\omega\nu^2\lambda^4
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\ ,\quad b_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12\alpha^2k^2\nu + 24\alpha k\omega\nu - 3\gamma^2k^4\mu^2\omega^2 + 12\nu\omega^2}{\alpha\beta k^2 + \beta k\omega}},\ a_0 = 0$$

$$\lambda = \frac{2(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2\omega},\ c = 0 \tag{4.52}$$

olur. (4.52) denklemi (4.49) denkleminde yerine yazılırsa (4.39) MBBM denkleminin çözümü

$$U(\eta) = \pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\phi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12\alpha^2k^2\nu + 24\alpha k\omega\nu - 3\gamma^2k^4\mu^2\omega^2 + 12\nu\omega^2}{\alpha\beta k^2 + \beta k\omega}}\varphi \tag{4.53}$$

olur. $\eta = kx + \omega t$ dönüşümü (4.53) çözümünde yerine yazılırsa (2.4) denklemi ile verilen denklemin tam çözümü trigonometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur. (4.47) çözümünde ϕ ve φ yerlerine yazılırsa:

$$U(\eta) = \pm A\left(\frac{1}{c_1\sin(\sqrt{\lambda}\eta) + \mathrm{c}_2\cos(\sqrt{\lambda}\eta) + \dfrac{\mu}{\lambda}}\right) \pm B\left(\frac{\left[c_1\cos(\sqrt{\lambda}\eta) - \mathrm{c}_2\sin(\sqrt{\lambda}\eta)\right]}{c_1\sin(\sqrt{\lambda}\eta) + \mathrm{c}_2\cos(\sqrt{\lambda}\eta) + \dfrac{\mu}{\lambda}}\right)$$

çözümüne ulaşılır. Burada $\eta = kx + \omega t$ olmak üzere

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12\alpha^2k^2\nu + 24\alpha k\omega\nu - 3\gamma k^4\mu^2\omega^2 + 12\nu\omega^2}{\alpha\beta k^2 + \beta k\omega}},\ B = \sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\sqrt{\lambda},\ \lambda = \frac{2(\omega + \alpha k)}{\gamma k^2\omega}$$

olarak tanımlanır.

Üçüncü Tip: $\lambda = 0$

Son olarak, (4.43) denklemi (4.35) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.9) denklemi kullanırsa $\lambda < 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}\phi^3 :\ & 4a_1^3c_2^2k\beta\mu^2 - 4a_1^3c_1^2c_2k\beta\mu + a_1^3c_1^4k\beta - 6a_1b_1^2c_2k\beta\mu + 3b_1^2a_1c_1^2k\beta \\ & + 24a_1c_2c_1^2\gamma k^2\mu\omega - 6a_1c_1^4\gamma k^2\omega - 24a_1c_2^2\gamma k^2\mu^2\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :\ & 12a_1^2a_0c_2^2k\beta\mu^2 - 12a_1^2a_0c_1^2c_2k\beta\mu + 3a_1^2a_0c_1^4k\beta - 6b_1^2a_0c_2k\beta\mu - 2b_1^3k\beta\mu \\ & - 6b_1c_2\gamma k^2\mu^2\omega + 3b_1c_1^2\gamma k^2\mu\omega + 3b_1^2a_0c_1^2k\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2\varphi :\ & 12a_1^2c_2^2b_1k\beta\mu^2 - 12a_1^2b_1c_2c_1^2k\beta\mu^2 + 3b_1a_1^2c_1^4k\beta\mu - 2b_1^3c_2k\beta\mu + c_1^2b_1^3k\beta \\ & + 24b_1c_2c_1^2k^2\gamma\mu\omega - 6c_1^4b_1\omega k^2\gamma - 24b_1c_2^2k^2\gamma\mu^2\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi :\ & 12a_0^2c_2^2a_1\beta k\mu^2 - 12a_1a_0^2c_2c_1^2\beta k\mu + 3a_1a_0^2c_1^4\beta k + 12a_1c_2^2\alpha k\mu^2 + 12a_1c_2^2\mu^2\omega \\ & - 12a_1c_2c_1^2\mu\omega + 3c_1^2a_1\alpha k + c_1^4\omega - 12a_1c_2c_1^2\alpha k\mu\end{aligned}$$

$$\phi\varphi : 24a_1a_0b_1c_2{}^2k\beta\mu^2 - 24a_1a_0b_1c_2c_1{}^2k\beta\mu + 6a_1a_0b_1c_1{}^4k\beta - 6c_1{}^2a_1b_1{}^2k\beta\mu$$
$$+36c_2{}^2a_1\gamma k^2\mu^3\omega - 36c_1{}^2a_1c_2\gamma k^2\mu^2\omega + 9a_1c_1{}^4\gamma k\mu\omega + 12a_1b_1{}^2c_2k\beta\mu^2$$

$$\phi^0 : 4a_0{}^3c_2{}^2k\beta\mu^2 - 4a_0{}^3c_2c_1{}^2k\beta\mu + a_0{}^3c_1{}^4k\beta + 12a_0c_2{}^2\alpha k\mu^2 + 12a_0c_2{}^2\mu^2\omega - 12a_0c_2c_1{}^2\mu\omega$$
$$+3a_0c_1{}^4\omega + 12c_2{}^2c\mu^2 - 12c_1{}^2c_2c\mu + 3c_1{}^4c + 3c_1{}^4a_0\alpha k - 12a_0c_2c_1{}^2k\alpha\mu$$

$$\phi^0\varphi : 12b_1a_0{}^2c_2k\beta\mu^2 - 12b_1a_0{}^2c_2c_1{}^2k\beta\mu + 3b_1a_0{}^2c_1{}^4k\beta + 12a_0b_1c_2k\beta\mu^2 + 4b_1{}^3k\beta\mu^2$$
$$+12\,\mathrm{b}_1c_2{}^2\alpha k\mu^2 + 12b_1c_2{}^2a_0\mu^2\omega - 12b_1c_1{}^2c_2\alpha k\mu - 12c_1{}^2c_2b_1\mu\omega + 3b_1c_2{}^4\alpha k$$
$$+3b_1c_1{}^4\omega - 6c_1{}^2b_1\gamma k^2\mu^2\omega - 6b_1{}^2a_0c_1{}^2\alpha k\beta + 12c_2b_1\gamma k^2\mu^3\omega$$

olarak bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}, b_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-6c_2\gamma\omega\mu k + 3c_1{}^2\gamma\omega k}{2\beta}}, a_0 = c = \lambda = 0,\ \omega = -\alpha k \qquad (4.54)$$

olur. (4.54) denklemi (4.49) denkleminde yerine yazılırsa (4.39) ile verilen MBBM denkleminin çözümü

$$U(\eta) = \pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\phi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-6c_2\gamma\omega\mu k + 3c_1{}^2\gamma\omega k}{2\beta}}\varphi \qquad (4.55)$$

olarak bulunur. $\eta = kx + \omega t$ dönüşümü (4.55) çözümünde yerine yazılırsa (2.4) denklemi ile tanımlanan MBBM denkleminin tam çözümü rasyonel fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur.

Benzer biçimde (4.55) denklemi ile verilen çözümde ϕ ve φ ifadeleri yerlerine yazılırsa:

$$U(\eta) = \pm\left(\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\right)\left(\frac{\mu\eta + c_1}{\frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2}\right) \pm \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-6c_2\gamma\omega\mu k + 3c_1{}^2\gamma\omega k}{2\beta}}\right)\left(\frac{1}{\frac{\mu}{2}\eta^2 + c_1\eta + c_2}\right)$$

çözümü elde edilir.

4.2.5 $\left(\frac{1}{G'}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

MBBM denkleminde metot gereği çözüm formu

$$U(\eta) = a_0 + a_1\left(\frac{1}{G'}\right) \tag{4.56}$$

şeklindedir. (4.56) denklemi MBBM denkleminde yerine yazılırsa aşağıda verilen denklem takımına ulaşılır.

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^0 : a_0^{\,3} + \beta k + 3a_0\alpha k + 3a_0\omega + 3c$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^1 : 3a_1\left(a_0^{\,2}\beta k + \alpha k - \gamma k^2\lambda^2\omega + \omega\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^2 : 3a_1k\left(a_0a_1\beta - 3\gamma k\lambda\mu\omega\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^3 : a_1k\left(a_1^{\,2}\beta - 6\gamma k\mu^2\omega\right)$$

Yukarıdaki denklem sistemi sıfıra eşitlenip çözülürse;

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\mu \ , \ \ a_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\gamma k\omega}{\beta}}\lambda \ , \ \ \lambda = \pm\frac{1}{k}\sqrt{-\frac{2(\omega+\alpha k)}{\gamma\omega}} \ , \ c = 0 \tag{4.57}$$

ifadeleri elde edilir. (4.57) ile verilen çözümler (4.56) denkleminde yerine yazılırsa c_1 integral sabiti olmak üzere (4.39) denkleminin çözümü

$$U(\eta) = \pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\mu\left(\frac{1}{G'}\right) \pm \sqrt{-\frac{3\left(\omega+\alpha k\right)}{\beta k}} \tag{4.58}$$

olarak bulunur. Son olarak, $\eta = kx + \omega t$ dönüşümü (4.58) çözümünde kullanılırsa (2.4) denklemi ile verilen MBBM denkleminin çözümü yalnızca hiperbolik fonksiyonlar türünden ifade edilmiş olur.

(4.58) denkleminde $\left(\dfrac{1}{G'}\right)$ ifadesi yerine yazılırsa:

$$U(\eta) = \pm\sqrt{\frac{3\gamma k\omega}{2\beta}}\mu\left(\frac{\lambda}{-\mu + \lambda c_1\left(\cosh(\lambda\eta) - \sinh(\lambda\eta)\right)}\right) \pm \sqrt{-\frac{3(\omega + \alpha k)}{\beta k}}$$

çözümüne ulaşılır.

4.3 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denkleminin Tam Çözümleri

(2+1)-boyutta BLMP denklemi Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin farklı bir formu olup (Gilson vd., 1993), $x = y$ durumunda KdV denklemine indirgenir (Boiti a, 1986, Boiti b, 1987). BLMP denkleminin tam çözümleri bir çok bilim insanı tarafından farklı teknikler kullanılarak çalışılmıştır (Arbabi ve Najafi, 2016; Zamiri, 2015). Bu tez kapsamında (2.6) ile verilen BLMP denklemi beş farklı teknik kullanılarak analitik tam çözümleri elde edilecek ve literatür karşılaştırması yapılacaktır.

(2.6)'daki kısmi türevli diferansiyel denkleme $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ dönüşümü uygulanırsa

$$V_p U'' + k_1^3 U^{(4)} - 6k_1^2 U' U'' = 0 \tag{4.59}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.59) denklemi bir kez integre edilirse c keyfi integral sabiti olmak üzere

$$V_p U' + k_1^3 U''' - 3k_1^2 U'^2 + c = 0$$

formunda yazılır. $U' = W$ dönüşümü altında BLMP denklemi yeniden,

$$\mathrm{k}_1^{\,3} W'' + V_p W - 3\mathrm{k}_1^{\,2} W^2 + c = 0 \tag{4.60}$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denklem olarak yazılır.

4.3.1 Direkt integrasyon ile tam çözüm

(4.60) denkleminin her iki tarafı W' ile çarpılırsa

$$V_p W W' + \mathrm{k}_1^{\,3} W'' W' - 3k_1^{\,2} W^2 W' + cW' = 0 \tag{4.61}$$

olur. (4.61) denklemi integre edilirse d integral sabiti olmak üzere

$$W'^2 = \frac{2}{k_1} W^3 - \frac{V_p}{k_1^{\,3}} W^2 - \frac{2c}{k_1^{\,3}} W - \frac{2d}{k_1^{\,3}} \tag{4.62}$$

olarak yazılır. Böylece

$$W' = \mp \sqrt{\frac{2}{k_1} W^3 - \frac{V_p}{k_1^{\,3}} W^2 - \frac{2c}{k_1^{\,3}} W - \frac{2d}{k_1^{\,3}}} \tag{4.63}$$

yazılabilir. (4.63) denklemi

$$\int \frac{dW}{\sqrt{\frac{2}{k_1} W^3 - \frac{V_p}{k_1^{\,3}} W^2 - \frac{2c}{k_1^{\,3}} W - \frac{2d}{k_1^{\,3}}}} = \int d\eta$$

şeklinde yazılır. e integrasyon sabiti olmak üzere çözüm

$$\int \frac{dW}{\sqrt{\frac{2}{k_1} W^3 - \frac{V_p}{k_1^{\,3}} W^2 - \frac{2c}{k_1^{\,3}} W - \frac{2d}{k_1^{\,3}}}} = \eta + e$$

olarak yazılır. Özel olarak $c = d = e = 0$ seçilirse denklem

$$\int \frac{dW}{\sqrt{\frac{2}{k_1}W^3 - \frac{V_p}{k_1^3}W^2}} = \eta$$

formunu alır ve

$$k_1\sqrt{k_1}\int \frac{dW}{W\sqrt{2k_1^2W - V_p}} = \eta \tag{4.64}$$

olarak yazılabilir.

Durum I:

$2k_1^2W - V_p = X^2$ dönüşümü altında (4.64) denkleminin çözümü

$$W(\eta) = \frac{V_p\left(1 + \tan^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right]\right)}{2k_1^2}$$

olur. Bu durumda BLMP denkleminin çözümü $\eta = k_1x + k_2y + V_pt$ olmak üzere

$$U(\eta) = \sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right] \tag{4.65}$$

şeklinde yazılır. $\eta = k_1x + k_2y + V_pt$ dönüşümü (4.65) çözümünde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü

$$U(x,y,t) = \sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\left(k_1x + k_2y + V_pt\right)\right]$$

şeklinde yazılır. Elde edilen bu çözüm (Arbabi ve Najafi, 2016)'daki (33) numaralı çözümle aynıdır.

Durum II:

$W=\sin x$ dönüşümü altında (4.64) denkleminin çözümü

$$W(\eta)=\frac{V_p\left(\operatorname{cosec}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right]\right)}{2k_1^{\,2}}$$

olur. Sonuç olarak BLMP denkleminin çözümü

$$U(\eta)=-\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\cot\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right] \tag{4.66}$$

şeklinde yazılır. $\eta=k_1x+k_2y+V_pt$ dönüşümü (4.66) çözümünde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü

$$U(x,y,t)=-\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\cot\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)\right]$$

şeklinde elde edilmiş olur. Elde edilen bu çözüm (Arbabi ve Najafi, 2016)'daki (34) numaralı çözüm ile aynıdır.

4.3.2 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

BLMP denkleminin tam çözümü $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu kullanılarak elde edilmiş (Zamiri, 2015), ancak bu çözümde integrasyon sabiti $c=0$ alınarak işlem yapılmıştır. Bizim çözümlerimiz ise farklı olarak diğer metotlar da dahil olmak üzere c keyfi integrasyon sabiti içermektedir. Dolayısıyla denklem burada keyfi integrasyon sabiti içerecek şekilde yeniden çözülecektir.

$\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ile çözüm için (4.60)denkleminde balans yapılırsa metot gereği

$$W(\eta)=\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)+\alpha_0 \tag{4.67}$$

şeklinde çözüm önerisi yapılır. (4.67) denklemi (4.60) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : \ \alpha_2(-\alpha_2+2k_1)$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : -3\alpha_2\alpha_1+5\alpha_2k_1\lambda+\alpha_1k_1$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : -6\alpha_2\alpha_0k_1^2+4\alpha_2k_1^3\lambda^2+8\alpha_2k_1^3\mu+\alpha_2V_p-3\alpha_1^2k_1^2+3\alpha_1k_1^3\lambda$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : 6\alpha_2k_1^3\lambda\mu-6\alpha_1\alpha_0k_1^2+\alpha_1k_1^3\lambda^2+2\alpha_1k_1^3\mu+\alpha_1V_p$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : 2\alpha_2k_1^3\mu^2+\alpha_1k_1^3\lambda\mu-3\alpha_0^2k_1^2+\alpha_0V_p+c$$

denklem takımına ulaşılır. Elde edilen bu denklem takımı sıfıra eşitlenip çözülürse

$$\alpha_2=2k_1,\ \alpha_1=2k_1\lambda,\ \alpha_0=\frac{k_1^3\lambda^2+8k_1^3\mu+V_p}{6k_1^2},\ \lambda^2-4\mu=\pm\frac{\sqrt{12ck_1^2+V_p^2}}{k_1^3} \tag{4.68}$$

katsayıları bulunur.(4.68) katsayıları (4.67) denklemindeki çözüm önerisinde yerine yazılırsa (4.60) denklemi ile verilen BLMP denkleminin çözümü $\eta=k_1x+k_2y+V_pt$ olmak üzere,

$$W(\eta)=2k_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2+2k_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)+\frac{k_1^3\lambda^2+8k_1^3\mu+V_p}{6k_1^2} \tag{4.69}$$

şeklinde olur. (4.69) çözümü (3.3) denklemine bağlı olarak hiperbolik, trigonometrik, rasyonel formda aşağıdaki şekillerde yazılabilir:

Birinci tip: $\lambda^2 - 4\mu > 0$

Bu durum için çözüm hiperbolik fonksiyonlar cinsinden olup, $A = k_1\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$, $B = \frac{1}{6k_1^2}\left(V_p \pm \sqrt{12ck_1^2 + V_p^2}\right)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$U(\eta) = \frac{A\left(-c_1^2 + c_2^2\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right)}{c_1^2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right) + c_1 c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right)} + B\eta \tag{4.70}$$

Özel olarak, $c_2 = 0$ ve $c_1 \neq 0$ alınırsa (4.70) denklemi

$$U(\eta) = -A\tanh\left[\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right] + B\eta \tag{4.71}$$

olarak yazılır. Burada,

$$A = k_1\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\ ,\ B = \frac{1}{6k_1^2}\left[V_p \pm \sqrt{12ck_1^2 + V_p^2}\right],\ \lambda^2 - 4\mu = \pm\frac{\sqrt{12ck_1^2 + V_p^2}}{k_1^3},$$

$$\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$$

şeklindedir. $c = 0$ alınırsa (4.71) çözümü $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ ve $\pm\frac{V_p}{k_1} > 0$ olmak üzere,

$$U_1(\eta) = \mp\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right] \tag{4.72a}$$

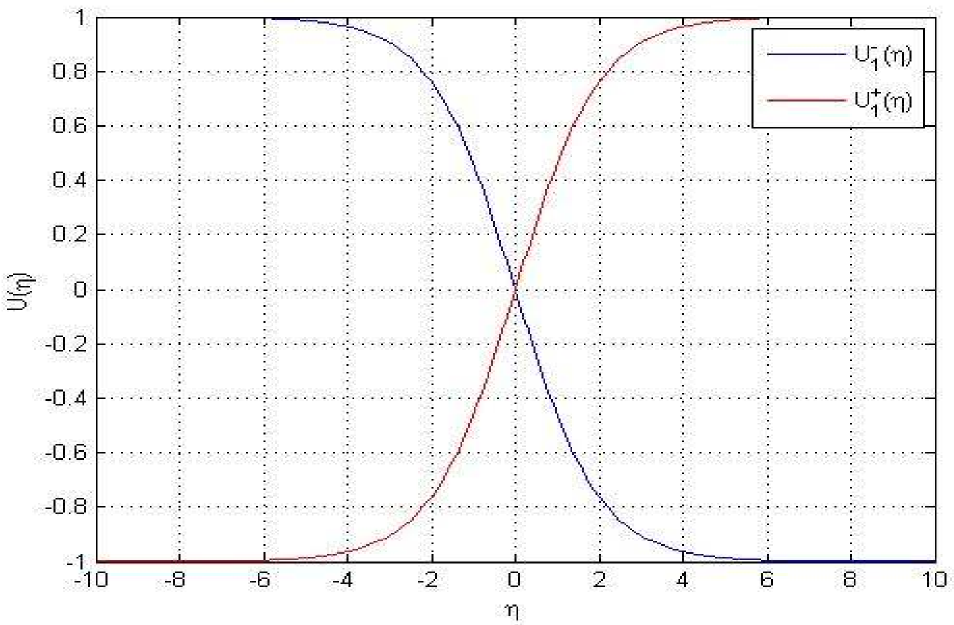
$$U_2(\eta)=\mp\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right]+\frac{V_p}{3k_1^{\,2}}\eta \qquad (4.72b)$$

formunda olur. Son olarak $\eta=k_1x+k_2y+V_pt$ dönüşümü (4.72a) ve (4.72b) çözümlerinde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur ve aşağıdaki şekilde yazılır.

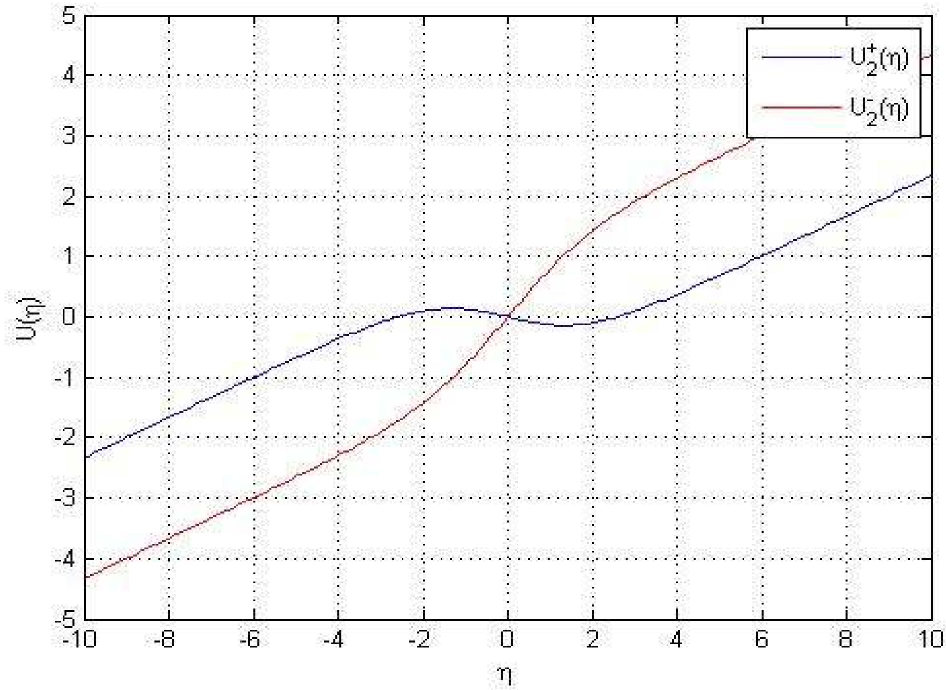
$$U_1(x,y,t)=\mp\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)\right]$$

$$U_2(x,y,t)=\mp\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)\right]+\frac{V_p}{3k_1^{\,2}}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)$$

(4.72a) çözümü (Arbabi ve Najafi, 2016)'daki (21) numaralı çözümle aynı çözüm olup (4.72b) çözümü yeni bir çözümdür. (4.72a) ve (4.72b) çözümleri hiperbolik çözümler olup, çözümlerinin davranışı Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de verilmiştir. Şekil 4.1. ile verilen grafik çizilirken (4.72a) denkleminde $V_p=-1,\ k_1=1$ olarak alınmış olup Şekil 4.2. ile verilen grafik çizilirken ise (4.72b) denkleminde $V_p=1,\ k_1=1$ olarak alınmıştır.



Şekil. 4.1. BLMP denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$- açılım metodunda birinci tip 1. çözümü



Şekil. 4.2. BLMP denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$- açılım metodunda birinci tip 2. Çözümü

İkinci tip: $\lambda^2 - 4\mu < 0$

Bu durum için de çözüm trigonometrik fonksiyonlar cinsinden olup $A = k_1\sqrt{4\mu - \lambda^2}$, $B = \frac{1}{6k_1^{\,2}}\left(V_p \pm \sqrt{12c\,k_1^{\,2} + V_p^{\,2}}\right)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$U(\eta) = \frac{A\left(c_1^{\,2} + c_2^{\,2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)}{c_1^{\,2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_1 c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)} + B\eta \qquad (4.73)$$

Özel olarak $c_2 = 0$ ve $c_1 \neq 0$ alınırsa (4.73) denklemi

$$U(\eta) = A\tan\left[\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right] + B\eta \qquad (4.74)$$

olarak yazılır. Burada,

$$A=k_1\sqrt{4\mu-\lambda^2}\ ,\ B=\frac{1}{6k_1^2}\left[V_p\pm\sqrt{12ck_1^2+V_p^2}\right],\ 4\mu-\lambda^2=\mp\frac{\sqrt{12ck_1^2+V_p^2}}{k_1^3}\ ,$$

$$\eta=k_1x+k_2y+V_pt$$

şeklindedir. $c=0$ alınırsa (4.74) çözümü $\mp\frac{V_p}{k_1}>0$ olmak üzere,

$$U_1(\eta)=\mp\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right] \tag{4.75a}$$

$$U_2(\eta)=\mp\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right]+\frac{V_p}{3k_1^2}\eta \tag{4.75b}$$

formunda olur. $\eta=k_1x+k_2y+V_pt$ dönüşümü (4.75a) ve (4.75b) çözümlerinde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü trigonometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilir ve

$$U_1(x,y,t)=\mp\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)\right]$$

$$U_2(x,y,t)=\mp\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^3}}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)\right]+\frac{V_p}{3k_1^2}\left(k_1x+k_2y+V_pt\right)$$

şeklinde yazılır. (4.75a) çözümü (Arbabi ve Najafi, 2016)'daki (33) numaralı çözümle aynı çözüm olup (4.75b) çözümü yeni çözümdür.

Üçüncü tip: $\lambda^2-4\mu=0$

Son olarak burada çözüm rasyonel fonksiyonlar cinsinden olup $V_p=\pm2k_1\sqrt{-3c}$ ve c_1, c_2 keyfi integrasyon sabitleri olmak üzere

$$U(\eta) = \frac{V_p}{6k_1^2}\left(\frac{c_1}{c_2} + \eta\right) - 2k_1\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2\eta}\right) \tag{4.76}$$

şeklinde yazılabilir. (4.76) çözümünde özel olarak $c_1 = 0$ ve $c_2 \neq 0$ alınırsa

$$U(\eta) = \frac{V_p}{6k_1^2}\eta - 2k_1\left(\frac{1}{\eta}\right) \tag{4.77}$$

çözümüne ulaşılır. $c = 0$ alınırsa (4.77) çözümü

$$U(\eta) = -2k_1\left(\frac{1}{\eta}\right) \tag{4.78}$$

formunda olur. $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ dönüşümü (4.78) çözümünde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü rasyonel fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur ve

$$U(x, y, t) = -2k_1\left(\frac{1}{k_1 x + k_2 y + V_p t}\right)$$

şeklinde yazılır ve (4.77) çözümü yeni bir çözümdür.

4.3.3 $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodunun farklı formu ile tam çözüm

(4.60) ile verilen BLMP denkleminde metot gereği çözüm formu

$$W(\eta) = \alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + \alpha_{-2}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} \tag{4.79}$$

şeklindedir. (4.79) denklemi (4.60) denkleminde yerine yazılırsa aşağıda verilen denklem takımına ulaşılır.

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^4 : -3\alpha_2^{\,2}k_1^{\,2} + 6\alpha_2 k_1^{\,3}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^3 : -6\alpha_2\alpha_1 k_1^{\,2} + 2\alpha_1 k_1^{\,3}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^2 : \alpha_2 V_p + 8\alpha_2 k_1^{\,3}\mu - 3\alpha_1^{\,2}k_1^{\,2}$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^1 : -6\alpha_2\alpha_{-1}k_1^{\,2} + \alpha_1 V_p + 2\alpha_1 k_1^{\,3}\mu$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^0 : -6\alpha_2\alpha_{-2}k_1^{\,2} + 2\alpha_2 k_1^{\,3}\mu^2 - 6\alpha_1\alpha_{-1}k_1^{\,2} + 2\alpha_{-2}k_1^{\,3} + c$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} : -6\alpha_1\alpha_{-2}k_1^{\,2} + \alpha_{-1}V_p + 2\alpha_{-1}k_1^{\,3}\mu$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} : -3\alpha_{-1}^{\,2}k_1^{\,2} + \alpha_{-2}V_p + 8\alpha_{-2}k_1^{\,3}\mu$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-3} : -6\alpha_{-1}\alpha_{-2}k_1^{\,2} + 2\alpha_{-1}k_1^{\,3}\mu$$

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{-4} : -3\alpha_{-2}^{\,2}k_1^{\,2} + 6\alpha_{-2}k_1^{\,3}\mu^2$$

Elde edilen bu denklem takımı çözülürse μ'nün durumuna göre iki farklı durum aşağıda verilmiştir.

I. Durum: $\alpha_2 = 2k,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_{-1} = 0,\ \alpha_{-2} = \dfrac{V_p^{\,2}}{32k_1^{\,5}},\ \mu = -\dfrac{V_p}{8k_1^{\,3}},\ \ c = \dfrac{V_p^{\,2}}{4k_1^{\,2}}$ (4.80a)

II. Durum: $\alpha_2 = 2k,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_{-1} = 0\ \ ,\alpha_{-2} = 0,\ \ \mu = -\dfrac{V_p}{8k_1^{\,3}},\mathrm{c} = -\dfrac{V_p^{\,2}}{16k_1^{\,2}}$ (4.80b)

Birinci tip: $-\mu > 0$

(4.80a) ve (4.80b) katsayıları (4.79) denkleminde yerine yazılırsa (4.60) ile verilen BLMP denkleminin çözümü

$$W_1(\eta)=2k_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\frac{c}{32k_1^5}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2},\quad \mu=-\frac{V_p}{8k_1^3},\ c=\frac{V_p^{\ 2}}{4k_1^2} \tag{4.81a}$$

$$W_2(\eta)=2k_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2,\ \mu=-\frac{V_p}{8k_1^3}\ ,\ c=-\frac{V_p^{\ 2}}{16k_1^2} \tag{4.81b}$$

olarak yazılabilir. $U'=W$ olduğundan (4.81a) ve (4.81b) çözümleri integre edilirse (4.59) ile verilen diferansiyel denkleminin çözümü

$$U_1(\eta)=\frac{\mathrm{A}\sinh\left[\sqrt{\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]+B\cosh\left[\sqrt{\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]}{\mathrm{C}\cosh\left[\sqrt{\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]+D\sinh\left[\sqrt{\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]} \tag{4.82a}$$

$$U_2(\eta)=\sqrt{\frac{V_p}{2k_1}}\left(\frac{\left(-c_1^2+c_2^2\right)\sinh\left[\sqrt{\frac{V_p}{8k_1^3}}\eta\right]}{\left(c_1^2\cosh\left[\sqrt{\frac{V_p}{8k_1^3}}\eta\right]+c_1c_2\sinh\left[\sqrt{\frac{V_p}{8k_1^3}}\eta\right]\right)}\right)+\frac{V_p}{4k_1^2}\eta \tag{4.82b}$$

olarak elde edilir ve burada

$$A=\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}k_1^2\left(\sqrt{2}c_1^4-2\sqrt{2}c_1^2c_2^2+\sqrt{2}c_2^4+c_1^3c_2\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\eta+c_1c_2^3\sqrt{\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right),B=2c_1^2c_2^2V_p\eta\,,$$

$$C=4c_1^2c_2^2k_1^2\,,\ D=2c_1c_2k_1^2\left(c_1^2+c_2^2\right)$$

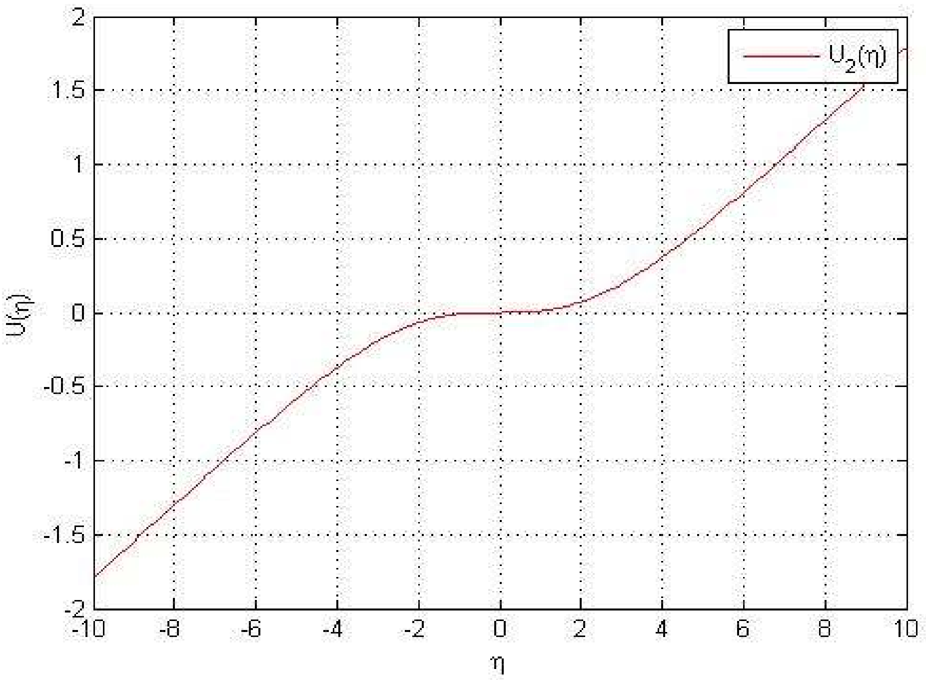
şeklindedir. (4.82a) çözümünde $c_1=c_2\neq 0$ alınırsa $U_1(\eta)$ ile verilen (4.82a) çözümü

$$U_1(\eta)=\frac{V_p}{2k_1^2}\eta \tag{4.83}$$

olur ve (4.82b) çözümünde $c_1\neq 0,\ c_2=0$ alınırsa $U_2(\eta)$ ile verilen (4.82b) çözümü

$$U_2(\eta) = -\sqrt{\frac{V_p}{2k_1}}\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right] + \frac{V_p}{4k_1^2}\eta \tag{4.84}$$

şekline gelir. Son olarak $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ dönüşümü (4.82a) ve (4.82b) çözümlerinde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü hiperbolik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur. Burada (4.83) ve (4.84) ile verilen çözümler yeni çözümlerdir. (4.84) ile verilen yeni çözüm ise bir önceki bölümde elde edilen (4.72b) ile verilen $U_2^+(\eta)$ çözümüdür. (4.84) denkleminin $V_p = 1,\ k_1 = 1$ için grafiği çizilmiş olup Şekil 4.3. ile aşağıda verilmiştir.



Şekil. 4.3. BLMP denkleminin $\left(\frac{G'}{G}\right)$- açılım metodunun farklı formuyla birinci tip çözümü

İkinci tip: $-\mu < 0$

$U' = W$ olduğundan (4.81a) ve (4.81b) çözümü birer kez integre edilirse (4.59) ile verilen diferansiyel denkleminin çözümü

$$U_3(\eta)=\frac{\mathrm{A}\sin\left[\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]+B\cos\left[\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]}{\mathrm{C}\cos\left[\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]+D\sin\left[\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]} \tag{4.85a}$$

$$U_4(\eta)=\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1}}\left(-\frac{\left(c_1^2+c_2^2\right)\sin\left[\sqrt{-\frac{V_p}{8k_1^3}}\eta\right]}{\left(c_1^2\cos\left[\sqrt{-\frac{V_p}{8k_1^3}}\eta\right]+c_1c_2\sin\left[\sqrt{-\frac{V_p}{8k_1^3}}\eta\right]\right)}\right)+\frac{V_p}{4k_1^2}\eta \tag{4.85b}$$

olarak elde edilir ve burada

$$A=\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}k_1^2\left(\sqrt{2}c_1^4+2\sqrt{2}c_1^2c_2^2+\sqrt{2}c_2^4+c_1^3c_2\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^3}}\eta-c_1c_2^3\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^3}}\eta\right),$$

$$B=-2c_1^2c_2^2V_p\eta\,,\ C=-4c_1^2c_2^2k_1^2\,,\ D=2c_1c_2k_1^2\left(c_1^2-c_2^2\right)$$

şeklindedir. (4.85a) ile verilen denklemde $c_1=c_2\neq 0$ olarak alınırsa çözüm

$$U_3(\eta)=-\sqrt{-\frac{2V_p}{k_1}}\tan\left[\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]+\frac{V_p}{2k_1^2}\eta \tag{4.86}$$

şekline gelir. (4.85b) çözümünde $c_1\neq 0$, $c_2=0$ alınırsa $U_4(\eta)$ ile verilen (4.85b) çözümü

$$U_4(\eta)=-\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1}}\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{V_p}{2k_1^3}}\eta\right]+\frac{V_p}{4k_1^2}\eta \tag{4.87}$$

şekline gelir. Son olarak $\eta=k_1x+k_2y+V_pt$ dönüşümü (4.85a) ve (4.85b) çözümünde yerine yazılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü trigonometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur. Burada (4.86) ve (4.87) ile verilen çözümler yeni çözümlerdir.

Üçüncü tip: $-\mu = 0$

a ve b integrasyon sabitleri olmak üzere özel olarak $c=0$ seçilirse çözüm

$$W_5(\eta) = \frac{2k_1 c_2}{c_1 + c_2\eta} \tag{4.88}$$

şeklindedir. (4.88) denklemi integre edilirse (4.60) denkleminin çözümü

$$U_5(\eta) = -\frac{2k_1 c_2}{c_1 + c_2\eta} \tag{4.89}$$

olarak bulunur. $c_2 \neq 0, c_1 = 0$ olarak seçilirse (4.89) denklemi

$$U_5(\eta) = -2k_1\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

şeklinde olur. Son olarak $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ dönüşümü uygulanırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü rasyonel fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur ve

$$U_5(\eta) = -\frac{2k_1}{k_1 x + k_2 y + V_p t}$$

formunda yazılır.

4.3.4 $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

(4.60) denkleminde balans yapılırsa BLMP denklemine

$$W(\eta) = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2 + b_1\varphi + b_2\varphi\phi \tag{4.90}$$

şeklinde çözüm önerisi yapılır. (4.90) denklemi, (4.60) denkleminde türevleri alınıp yerine yazılır. Burada λ'nın durumuna göre trigonometrik, rasyonel ve hiperbolik olmak üzere 3 tip çözüm bulunur.

Birinci Tip: $\lambda < 0$

(4.90) denklemi (4.60) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.4) denklemi kullanırsa $\lambda < 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\phi^4 : 3k_1^2(-a_2^2\lambda^2\nu - a_2^2\mu^2 + 2a_2k_1\lambda^2\nu + 2a_2k_1\mu^2 + b_2^2\lambda)$$

$$\phi^3 : 2k_1^2(-3a_2a_1\lambda^2\nu - 3a_2a_1\mu^2 + a_1k_1\lambda^2\nu + a_1k_1\mu^2 + 3b_2b_1\lambda + 3b_2k_1\lambda\nu)$$

$$\phi^3\varphi : 6b_2k_1^2(-a_2 + k_1)$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :& -6a_2a_0k_1^2\lambda^2\nu - 6a_2a_0k_1^2\mu^2 + a_2V_p\lambda^2\nu + a_2V_p\mu^2 + 8a_2k_1^3\lambda^3\nu \\ &+ 6a_2k_1^3\lambda\mu^2 - 3a_1^2k_1^2\lambda^2\nu - 3a_1^2k_1^2\mu^2 + 3b_2^2k_1^2\lambda^2 + 3b_1^2k_1^2\lambda + b_1k_1^3\lambda\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2\varphi :& 2k_1^2(-3a_2^2b_1\lambda^2\nu - 3a_2b_1\mu^2 - 5a_2k_1\lambda^2\mu\nu - 5a_2k_1\mu^3 - 3a_1b_2\lambda^2\nu - 3b_2^2\lambda\mu \\ &+ b_1k_1\lambda^2\nu + b_1k_1\mu^2 - 3a_1b_2\mu^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi :& -6a_1a_0k_1^2\lambda^2\nu - 6a_1a_0k_1^2\mu^2 + a_1V_p\lambda^2\nu + a_1V_p\mu^2 + 2a_1k_1^3\lambda^3\nu + 6b_2b_1k_1^2\lambda^2 \\ &+ 6b_2k_1^3\lambda^2\mu + 2a_1k_1^3\lambda\mu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\varphi :& -6a_1b_1k_1^2\lambda^2\nu - 6a_1b_1k_1^2\mu^2 - 3a_1k_{1_1}^3\lambda^2\mu\nu - 3a_1k_1^3\mu^3 - 6a_0b_2k_1^2\mu^2 - 6a_0b_2k_1^2\lambda^2\nu \\ &- 12b_2b_1k_1^2\lambda\mu + b_2V_p\lambda^2\nu + b_2V_p\mu^2 + 5b_2k_1^3\lambda^3\nu - 7b_2k_1^3\mu^2\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0 :& 2a_2k_1^3\lambda^4\nu - 3a_0^2k_1^2\lambda^2\nu - 3a_0^2k_1^2\mu^2 + a_0V_p\lambda^2\nu + a_0V_p\mu^2 + b_1k_1^3\lambda^2\mu + c\mu^2 \\ &+ c\lambda^2\nu + 3b_1^2k_1^2\lambda^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0\varphi :& -4a_2k_1^3\lambda^3\mu\nu - 6a_0b_1k_1^2\lambda^2\nu - 6a_0b_1k_1^2\mu^2 - 6b_1^2k_1^2\lambda\mu + b_1V_p\lambda^2\nu + b_1V_p\mu^2 \\ &+ b_1k_1^3\lambda^3\nu - b_1k_1^3\lambda\mu^2\end{aligned}$$

olur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_2 = k_1,\ b_2 = \mp\sqrt{\frac{-\lambda^2\nu - \mu^2}{\lambda}}k_1,\ a_1 = 0,\ b_1 = -k_1\mu\ ,\ a_0 = \frac{5k_1^2\lambda \mp \sqrt{-12c + k_1^4\lambda^2}}{6k_1}$$

$$V_P = \mp\sqrt{-12c + k_1^4\lambda^2}k_1 \tag{4.91}$$

olarak bulunur. (4.91) denkleminde elde edilenler (4.90) denkleminde yerine yazılırsa (4.60) ile verilen BLMP denkleminin çözümü

$$W(\eta)=\frac{5k_1^{2}\lambda\mp\sqrt{-12c+k_1^{4}\lambda^{2}}}{6k_1}+k_1\phi^2-k_1\mu\varphi\mp\sqrt{\frac{-\lambda^2\nu-\mu^2}{\lambda}}k_1\phi\varphi \tag{4.92}$$

şeklinde olur. $U'=\mathrm{W}$ olduğundan (4.92) denklemi integre edilirse (4.59) denkleminin çözümü

$$U(\eta)=\frac{A\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)+B}{\mu c_2+\lambda c_2^{2}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)+\lambda c_1c_2\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)}+C\eta \tag{4.93}$$

olarak elde edilir. (4.93) denkleminde

$$A=k_1\lambda\sqrt{-\lambda}\left(c_2^{2}-c_1^{2}\right),\quad B=\mp k_1\sqrt{-\lambda}\left[c_2\sqrt{\mu^2+\lambda^2\left(c_1^{2}-c_2^{2}\right)}+\mu c_1\right] \text{ ve}$$

$$C=\frac{\left(-k_1^{2}\lambda\mp\sqrt{-12c+k_1^{4}\lambda^{2}}\right)}{6k_1}$$

şeklindedir. (4.93) denkleminde $c=0$ olarak seçilirse $C=0$ veya $C=\frac{-k_1\lambda}{3}$ olur.

$C=0$ için $U(\eta)$ çözümü

$$U(\eta)=\frac{A\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)+B}{\mu c_2+\lambda c_2^{2}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)+\lambda c_1c_2\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)}$$

elde edilir. $C=\frac{-k_1\lambda}{3}$ durumunda ise $U(\eta)$ çözümü

$$U(\eta)=\frac{A\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)+B}{\mu c_2+\lambda c_2^{2}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)+\lambda c_1c_2\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\eta\right)}-\frac{k_1\lambda}{3}\eta$$

olarak bulunur. Burada

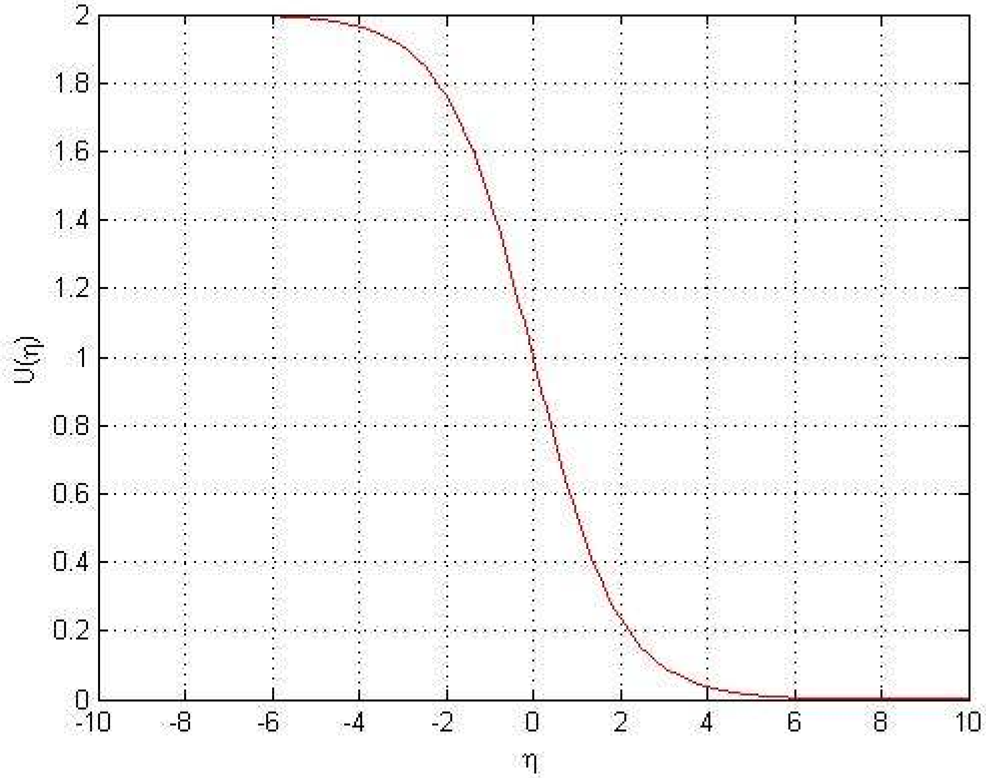
$$A = k_1\lambda\sqrt{-\lambda}\left(c_2^{\,2} - c_1^{\,2}\right) \text{ ve } B = \mp k_1\sqrt{-\lambda}\left[c_2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2\left(c_1^{\,2} - c_2^{\,2}\right)} + \mu c_1\right]$$

şeklinde olur. $c_1 = c_2$ için $U(\eta)$ çözümü

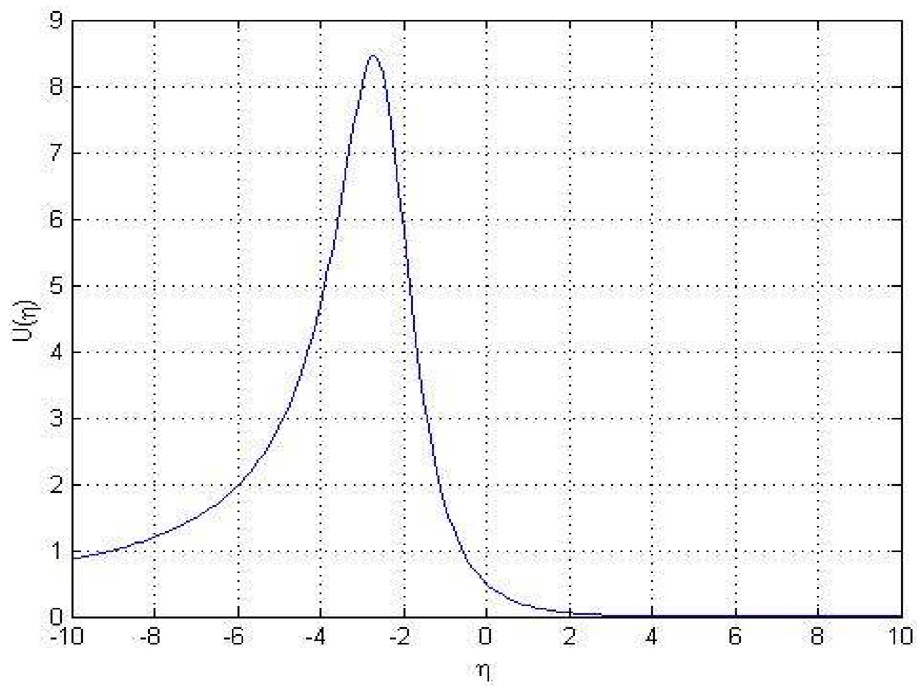
$$U_1(\eta) = \frac{2\mu c_1\sqrt{-\dfrac{V_p}{k_1}}}{\mu c_1 \mp c_1^{\,2}\dfrac{V_p}{k_1^{\,3}}\left[\cosh\left(\sqrt{-\dfrac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right) + \sinh\left(\sqrt{-\dfrac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right)\right]} \tag{4.94}$$

$$U_2(\eta) = \frac{-2\mu c_1\sqrt{\dfrac{V_p}{k_1}}}{\mu c_1 \mp c_1^{\,2}\dfrac{V_p}{k_1^{\,3}}\left[\cosh\left(\sqrt{\dfrac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right) + \sinh\left(\sqrt{\dfrac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right)\right]} + \frac{V_p}{3k_1}\eta \tag{4.95}$$

formunda yazılır. Burada $\eta = k_1x + k_2y + V_pt$ olup tam çözüm hiperbolik fonksiyonlar cinsiden elde edilmiş olup, (4.94) ile verilen çözüm grafiğinden de görüldüğü üzere (4.72a) çözümü ile aynı çözüm olup, (4.95) ile verilen çözüm ise yenidir. (4.94) denkleminin $V_p = -1$, $k_1 = 1$, $\mu = -1$, $c_1 = \mp 1$ için grafiği çizilmiş olup Şekil 4.4. ile; (4.95) denkleminin $V_p = -1$, $k_1 = -1$, $\mu = -1$, $c_1 = \mp 5$ için grafiği çizilmiş olup Şekil 4.5. ile aşağıda verilmiştir.



Şekil. 4.4. BLMP denkleminin $\left(\frac{G'}{G},\frac{1}{G}\right)$- açılım metoduyla 1.çözümü



Şekil. 4.5. BLMP denkleminin $\left(\frac{G'}{G},\frac{1}{G}\right)$- açılım metoduyla 2. çözümü

İkinci Tip: $\lambda > 0$

Benzer şekilde, (4.90) denklemi (4.60) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.7) denklemi kullanırsa $\lambda > 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\phi^4 : 3k_1^2\left(-a_2^2\lambda^2\nu + a_2^2\mu^2 + 2a_2k_1\lambda^2\nu - 2a_2k_1\mu^2 - b_2^2\lambda\right)$$

$$\phi^3 : 2k_1^2\left(-3a_2a_1\lambda^2\nu + 3a_2a_1\mu^2 + a_1k_1\lambda^2\nu - a_1k_1\mu^2 - 3b_2b_1\lambda - 3b_2k_1\lambda\nu\right)$$

$$\phi^3\varphi : 6b_2k_1^2\left(-a_2 + k_1\right)$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :& -6a_2a_0k_1^2\lambda^2\nu + 6a_2a_0k_1^2\mu^2 + a_2V_p\lambda^2\nu - a_2V_p\mu^2 + 8a_2k_1^3\lambda^3\nu \\ & -6a_2k_1^3\lambda\mu^2 - 3a_1^2k_1^2\lambda^2\nu + 3a_1^2k_1^2\mu^2 - 3b_2^2k_1^2\lambda^2 - 3b_1^2k_1^2\lambda - b_1k_1^3\lambda\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2\varphi :& 2k_1^2(-3a_2^2b_1\lambda^2\nu + 3a_2b_1\mu^2 - 5a_2k_1\lambda^2\mu\nu + 5a_2k_1\mu^3 - 3a_1b_2\lambda^2\nu + 3a_1b_2\mu^2 + 3b_2^2\lambda\mu \\ & + b_1k_1\lambda^2\nu - b_1k_1\mu^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi :& -6a_1a_0k_1^2\lambda^2\nu + 6a_1a_0k_1^2\mu^2 + a_1V_p\lambda^2\nu - a_1V_p\mu^2 + 2a_1k_1^3\lambda^3\nu - 2a_1k_1^3\lambda\mu^2 \\ & -6b_2b_1k_1^2\lambda^2 - 6b_2k_1^3\lambda^2\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\varphi :& -6a_1b_1k_1^2\lambda^2\nu + 6a_1b_1k_1^2\mu^2 - 3a_1k_1^3\lambda^2\mu\nu + 3a_1k_1^3\mu^3 - 6a_0b_2k_1^2\lambda^2\nu - b_2V_p\mu^2 \\ & + b_2V_p\lambda^2\nu + 5b_2k_1^3\lambda^3\nu + 7b_2k_1^3\mu^2\lambda + 12b_2b_1k_1^2\lambda\mu + 6a_0b_2k_1^2\mu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0 :& 2a_2k_1^3\lambda^4\nu - 3a_0^2k_1^2\lambda^2\nu + 3a_0^2k_1^2\mu^2 + a_0V_p\lambda^2\nu - a_0V_p\mu^2 - b_1k_1^3\lambda^2\mu - c\mu^2 \\ & + c\lambda^2\nu - 3b_1^2k_1^2\lambda^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^0\varphi :& -4a_2k_1^3\lambda^3\mu\nu - 6a_0b_1k_1^2\lambda^2\nu + 6b_1^2k_1^2\lambda\mu + b_1V_p\lambda^2\nu - b_1V_p\mu^2 + b_1k_1^3\lambda^3\nu \\ & + b_1k_1^3\lambda\mu^2 + 6a_0b_1k_1^2\mu^2\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_2 = k_1 \;,\quad b_2 = \mp\sqrt{\frac{\lambda^2\nu - \mu^2}{\lambda}}k_1 \;,\quad a_1 = 0 \;,\quad b_1 = -k_1\mu \;,\quad a_0 = \frac{5k_1^2\lambda \mp \sqrt{-12c + k_1^4\lambda^2}}{6k_1}$$

$$V_p = \mp\sqrt{-12c + k_1^4\lambda^2}\,k_1 \tag{4.96}$$

olur. (4.96) denklemi (4.90) denkleminde yerine yazılırsa (4.60) BLMP denkleminin çözümü

$$W(\eta)=\frac{5k_1^{\,2}\lambda\mp\sqrt{-12c+k_1^{\,4}\lambda^2}}{6k_1}+k_1\phi^2-k_1\mu\varphi\mp\sqrt{\frac{\lambda^2\nu-\mu^2}{\lambda}}k_1\phi\varphi \tag{4.97}$$

olur. $U'=W$ olduğundan (4.97) denklemi integre edilirse (4.59) denkleminin çözümü

$$U(\eta)=\frac{A\sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right)+B}{c_2\,\mu+\lambda c_2^{\,2}\cos\left(\sqrt{\lambda}\eta\right)+\lambda c_1c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\eta\right)}+C\eta \tag{4.98}$$

formunda yazılır ve burada

$A=k_1\lambda\sqrt{\lambda}\left(c_2^{\,2}+c_1^{\,2}\right)$, $B=\pm k_1\sqrt{\lambda}\left[c_2\sqrt{-\mu^2+\lambda^2\left(c_1^{\,2}+c_2^{\,2}\right)}+\mu c_1\right]$ ve

$$C=\frac{\left(-k_1^{\,2}\lambda\mp\sqrt{-12c+k_1^{\,4}\lambda^2}\right)}{6k_1}$$

şeklindedir. Burada $c=0$, $c_1=0$, $c_2\neq 0$ ve $\mu=\lambda c_2$ olarak seçilirse $\eta=k_1x+k_2y+V_pt$ olmak üzere $U(\eta)$ çözümü

$$U_1(\eta)=-\frac{\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right)}{1+\cos\left(\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\,3}}}\eta\right)} \tag{4.99}$$

$$U_2(\eta)=\frac{\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\sin\left(\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\eta\right)}{1+\cos\left(\sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\eta\right)}+\frac{V_p}{3k_1^{\,2}}\eta \tag{4.100}$$

formunda olur. (4.99) ve (4.100) denklemleri ile verilen çözümler literatür için yeni çözümlerdir.

Üçüncü Tip: $\lambda = 0$

Son olarak, (4.90) denklemi (4.60) denkleminde yerine yazılır (3.2) denklemi ile birlikte (3.9) denklemi kullanırsa $\lambda < 0$ için katsayılar aşağıdaki şekilde olur:

$$\phi^4 : 3k_1^2\left(-2a_2^2c_2\mu + a_2^2c_1^2 + 4a_2c_2k_1\mu - 2a_2c_1^2k_1 + b_2^2\right)$$

$$\phi^3 : 2k_1^2\left(-6a_2a_1c_2\mu + 3a_2a_1c_1^2 + 2a_1c_2k_1\mu - a_1k_1c_1^2 + 3b_2b_1 + 3b_2k_1\mu\right)$$

$$\phi^3\varphi : 6b_2k_1^2\left(-a_2 + k_1\right)$$

$$\begin{aligned}\phi^2 :& -12a_2a_0c_2k_1^2\mu + 6a_2a_0k_1^2c_1^2 + 2a_2c_2V_p\mu - a_2V_pc_1^2 - 2a_2k_1^3\mu^2 - 6a_1^2c_2k_1^2\mu \\ & + 3a_1^2k_1^2c_1^2 + 3b_1^2k_1^2 + b_1k_1^3\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^2\varphi :& 2k_1^2(-6a_2b_1c_2\mu + 3a_2b_1c_1^2 - 10a_2c_2k_1\mu^2 + 5a_2k_1\mu c_1^2 + 3a_1b_2c_1^2 - 3b_2^2\mu \\ & + 2b_1c_2k_1\mu - b_1k_1c_1^2 - 6a_1b_2c_2\mu)\end{aligned}$$

$$\phi : a_1\left(-6a_0k_1^2 + V_p\right)$$

$$\phi^3\varphi : 6b_2k_1^2\left(-a_2 + k_1\right)$$

$$\begin{aligned}\phi\varphi :& -12a_1b_1c_2k_1^2\mu + 6a_1b_1c_1^2k_1^2 - 6a_1c_2k_1^3\mu^2 + 3a_1c_1^2k_1^3\mu - 12a_0b_2c_2k_1^2\mu + 6a_0b_2c_1^2k_1^2 \\ & -12b_2b_1k_1^2\mu + 2b_2c_2V_p\mu - b_2V_pc_1^2 - 12b_2k_1^3\mu^2\end{aligned}$$

$$\phi^0 : -3a_0^2k_1^2 + a_0V_p + c$$

$$\begin{aligned}\phi^0\varphi :& 4a_2k_1^3\mu^3 - 12a_0b_1c_2k_1^2\mu + 6a_0b_1k_1^2c_1^2 - 6b_1^2k_1^2\mu + 2b_1c_2V_p\mu - b_1c_1^2V_p \\ & - 2b_1k_1^3\mu^2\end{aligned}$$

olarak bulunur. Elde edilen bu cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülürse:

$$a_2 = k_1, b_2 = \mp\sqrt{-2c_2\mu + c_1^2}k_1, a_1 = 0, b_1 = -k_1\mu, a_0 = \mp\frac{\sqrt{-3c}}{3k_1}, V_p = \mp 2k_1\sqrt{-3c} \tag{4.101}$$

olur. (4.101) katsayıları (4.90) denkleminde yerine yazılırsa (4.60) ile verilen BLMP denkleminin çözümü

$$W(\eta) = \mp\frac{\sqrt{-3c}}{3k_1} + k_1\phi^2 - k_1\mu\varphi \mp \sqrt{-2c_2\mu + c_1^2}k_1\phi\varphi \tag{4.102}$$

olarak bulunur. (4.102) denkleminin integrali alınırsa (4.59) ile verilen BLMP denkleminin çözümü

$$U(\eta) = \mp\sqrt{-\frac{c}{3}}\frac{1}{k_1}\eta \mp \frac{2k_1\left(\mu\eta + c_1 \mp \sqrt{c_1^2 - 2\mu c_2}\right)}{\mu\eta^2 + 2(c_1\eta + c_2)} \tag{4.103}$$

olarak elde edilir. Burada $c = c_1 = c_2 = 0$ olarak seçilirse $U(\eta)$ çözümü

$$U(\eta) = -2k_1\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

şeklini alır. (4.103) ile verilen çözüm yeni bir çözüm olup, $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ dönüşümü yapılırsa (2.6) denklemi ile verilen BLMP denkleminin tam çözümü aşağıdaki şekilde rasyonel fonksiyonlar cinsinden elde edilmiş olur.

$$U(x,y,t) = \sqrt{-\frac{c}{3}}\frac{1}{k_1}\left(k_1 x + k_2 y + V_p t\right) - \frac{2k_1\left[\mu\left(k_1 x + k_2 y + V_p t\right) + c_1 + \sqrt{c_1^2 - 2\mu c_2}\right]}{\mu\left(k_1 x + k_2 y + V_p t\right)^2 + 2\left[c_1\left(k_1 x + k_2 y + V_p t\right) + c_2\right]}$$

4.3.5 $\left(\frac{1}{G'}\right)$-açılım metodu ile tam çözüm

(4.60) denkleminde metot gereği çözüm formu

$$W(\eta) = a_0 + a_1\left(\frac{1}{G'}\right) + a_2\left(\frac{1}{G'}\right)^2 \tag{4.104}$$

şeklindedir. (4.104) denklemi BLMP denkleminde yerine yazılırsa aşağıda verilen denklem takımına ulaşılır:

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^0 : -3a_0^2 k_1^2 + a_0 V_p + c$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^1 : a_1\left(-6a_0k_1^{\,2}+V_p+k_1^{\,3}\lambda^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^2 : -6a_0a_2k_1^{\,2}+a_2V_p+4\,a_2\,k_1^{\,3}\lambda^2-3a_1^{\,2}k_1^{\,2}+3\,a_1\,k_1^{\,3}\lambda\mu$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^3 : 2k_1^{\,2}\left(-3\,a_2\,a_1+5\,a_2\,k_1\lambda\mu+a_1\,k_1\,\mu^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{G'}\right)^4 : 3a_2\,k_1^{\,2}\left(-a_2+2k_1\mu^2\right)$$

Bu denklem sistemi sıfıra eşitlenip çözülürse;

$$a_2=2\,k_1\,\mu^2, a_1=2\,k_1\,\mu\,\lambda, a_0=\frac{V_p+k_1^{\,3}\lambda^2}{6k_1^{\,2}}, c=\frac{-V_p^{\,2}+k_1^{\,6}\,\lambda^4}{12k_1^{\,2}},$$
$$\lambda=\pm\left(\pm\frac{12ck_1^{\,2}+V_p^{\,2}}{k_1^{\,6}}\right)^{1/4} \tag{4.105}$$

ifadeleri elde edilir. (4.105) ile verilen çözümler (4.104) denkleminde yerine yazılırsa c integral sabiti olmak üzere (4.60) denkleminin çözümü

$$W(\eta)=\frac{V_p+k_1^{\,3}\lambda^2}{6k_1^{\,2}}+2\,k_1\,\mu\,\lambda\left(\frac{1}{G'}\right)+2\,k_1\,\mu^2\left(\frac{1}{G'}\right)^2 \tag{4.106}$$

olur.(4.106) denkleminin bir kez integrali alınırsa (4.59) denkleminin çözümü

$$U(\eta)=\frac{A\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\eta\right)}{B\cosh\left(\frac{\lambda}{2}\eta\right)+C\sinh\left(\frac{\lambda}{2}\eta\right)}+D\eta \tag{4.107}$$

şeklinde elde edilir ve burada

$$A = 4k_1\lambda^2\mu c_1,\ B = \left(\mu - \lambda c_1\right)^2,\ C = \left(\mu^2 - \lambda^2 c_1^{\ 2}\right),\ D = \frac{\left(k_1^{\ 3}\lambda^2 + V_p\right)}{6k_1^{\ 2}}\eta \text{ ve}$$

$$\lambda = \pm\left(\pm\frac{12ck_1^{\ 2} + V_p^{\ 2}}{k_1^{\ 6}}\right)^{1/4}$$

şeklindedir. İntegrasyon sabiti $c = 0$ alınırsa $\lambda = \pm\sqrt{\pm\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}$ eşitliği elde edilir ve (4.107) çözümünde yerine yazılırsa $U(\eta)$ çözümü

$$U(\eta) = \frac{A\sinh\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}\eta\right)}{B\cosh\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}\eta\right) + C\sinh\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}\eta\right)} + D\eta \tag{4.108}$$

halini alır. (4.108) denkleminde $\mu = -\lambda c_1$ alınırsa çözüm

$$U(\eta) = \mp\sqrt{\pm\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}\eta\right) + \frac{\left(\pm V_p + V_p\right)}{6k_1^{\ 2}}\eta$$

olarak yazılır. Her iki işaret için çözüm

$$U_1(\eta) = -\sqrt{\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}\eta\right) + \frac{V_p}{3k_1^{\ 2}}\eta \tag{4.109}$$

$$U_2(\eta) = \sqrt{-\frac{V_p}{k_1}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{V_p}{k_1^{\ 3}}}\eta\right) \tag{4.110}$$

şeklinde yazılır. Burada $\eta = k_1x + k_2y + V_pt$ dir. (4.110) ile verilen çözüm (Arbabi ve Najafi, 2016)’da verilen (21) numaralı denklemle aynı çözüm olup, (4.109) çözümü ise yeni bir çözümdür. Aynı zamanda (4.110) ile verilen çözüm $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ile elde ettiğimiz (4.72a) ile, (4.109) ile verilen çözüm ise (4.72b) ile aynı çözümdür.

BÖLÜM V

SONUÇLAR

Bu tezde, lineer olmayan kısmi türevli DS denklem sistemi, MBBM denklemi ve BLMP denklemlerinin analitik tam çözümleri; direkt intgerasyon, $\left(G'/G\right)$-açılım metodu, $\left(G'/G\right)$-açılım metodunun farklı formu, iki değişkenli $\left(G'/G,1/G\right)$-açılım metodu ve $\left(1/G'\right)$-açılım metotları kullanılarak elde edilmiştir. Çözümler; hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiştir.

DS denklem sistemi ve MBBM denkleminin tam analitik çözümleri, literatürde daha önce direkt integrasyon, $\left(G'/G\right)$-açılım metodu ve $\left(G'/G\right)$-açılım metodunun farklı formu kullanılarak çözülmüş olup, bu çözümler tez kapsamında tekrarlanmıştır. Ayrıca, burada sözü edilen iki denklemin tam çözümleri için iki değişkenli $\left(G'/G,1/G\right)$-açılım metodu ve $\left(1/G'\right)$-açılım metotları ilk kez tez kapsamında yapılmış ve literatürle uyumlu sonuçlara ulaşılmıştır.

BLMP denkleminin analitik tam çözümleri ise yukarıda bahsedilen beş farklı teknik kullanılarak ilk defa bu tez kapsamında elde edilmiştir. Literatürde mevcut olan çözümlerin yanı sıra literatür açısından yeni çözümlere ulaşılmıştır. $\left(G'/G\right)$–açılım metodu kullanılarak elde edilen (4.72b) ile verilen hiperbolik tip, (4.75b) ile verilen trigonometrik tip ve (4.78) ile verilen rasyonel tip çözümler yeni çözümlerdir. $\left(G'/G\right)$–açılım metodunun farklı formu kullanılarak elde edilen (4.83) ile verilen rasyonel tip, (4.84) ile verilen hiperbolik tip, (4.86) ve (4.87) ile verilen trigonometrik tip çözümler yeni çözümlerdir. $\left(G'/G,1/G\right)$–açılım metodu kullanılarak elde edilen (4.95) ile verilen hiperbolik tip, (4.100) ile verilen trigonometrik tip ve (4.103) ile verilen rasyonel tip çözümler yeni çözümlerdir. $\left(1/G'\right)$–açılım metodu ve direkt integrasyon ile elde edilen çözümler literatürde mevcut olan çözümlerle birlikte diğer üç metodun sonuçları ile aynı sonuçları vermiştir. Farklı teknikler kullanılarak elde edilen bazı hiperbolik tip çözümlerin, özellikle de literatür açısından yeni olanların aynı parametreler kullanılarak ayrıntılı incelemeleri ve karşılaştırmaları için iki boyutlu grafikleri çizilmiştir.

KAYNAKLAR

Abdusalam, H.A., “On a Improverd Complex Tanh-function Method”, ***Int J, Nonlinear Sci Numer Simul*** 6, 99, 2005.

Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., “Soluton, nonlinear evolution equations and inverse scattering” ***Newyork : Cambridge University Pres*** 1991.

Arbabi, S. and Najafi, M., “Soliton solutions of nonlinear evolution equations in Math.”, ***Phsics Optik*** 127, 4270-4274, 2016.

Asadi, N. and Nadjafikhah, M., “Geometry of Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation”, ***Journal of Science and Technology*** 8(33), 1-7, 2015.

Aslan, I., “Exact and explicit solutions to some nonlinear evolution equations by utilizing the (G'/G)-expansion method”, ***Appl. Math. Comput.*** 215(2), 857-563, 2009.

Boiti, M., Leon, J., Manna, M. and Pempinelli, F., “On a spectral transform of a Korteweg de Vries equation in two spatial dimensions”, ***Inverse Problems*** 2, 271-279, 1986.

Bekir, A., “Applications of the extended tanh method for coupled nonlinear evolution equations”, ***Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*** 13, 1748-1757, 2008.

Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., “Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems”, ***Philos Trans. R. Soc. London, Ser. A***. 272, 47-48, 1972.

Boiti, M., Leon, J., Manna, M. and Pempinelli, F., “On a spectral transform of a Kdv-like equation related to the Schrödinger operator in the plane”, ***Inverse Problems*** 3, 25-36, 1987.

Daghan, D., Dogan, G. and Toros, S., “Different approaches solving the Modified-Benjamin- Bona-Mahony equation”, (İncelemede).

Dağhan, D., Yıldız, O. and Toros, S., “Somparison of (G'/G)-methods for finding exact solutions of the drinfeld-Sokolov system”, ***Mathematica Slovaca*** 65, 1-26, 2015.

Delisle, L. and Mosaddeghi, M., “Classical and SUSY solutions of the Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation”, ***Journal of Physics A.***, ***Mathematical and Theoretical*** 46, 115203, 2013.

Darvishi, M.T., Najafi, M., Kavitha, L. and Venkatesh, M., “Stair and Step Soliton solutions of the integrable (2+1)- Dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation”, ***Commun.Theor. Phys.*** 58, 785-794, 2012.

Doğan, G., Yüksek lisans tezi, ***Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Niğde, 2014.

Dong, H., Zhang, Y. and Zhang, Yin, B.,”Generalized Bilinear Differential Operators, Binary bell Polynomials and Exact Periodic Wave Solution of Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation”, ***Abstract and Applied Analysis*** 739609, 2014.

El-Shahed, M., “Application of He’s Homotopy Perturbation Method to Volterra’s Integro- Differantial Equation”, ***Int J Nonlinear Sci Numer Simul*** 6 (2), 163, 2005.

Gilson, C.R., Nimmo, J.J.C. and Willow, R., “(2+1)-Dimensional Generalized of the AKNS shallow water wave equation”, ***Physics Letter A.*** 180, 337-345, 1993.

Gurses, M. and Karasu, A., Integrable KdV systems, Recursion operators of degree four”, ***Physics Letter A*** 251, 247-249, 1999.

Goktas, U. and Hereman, E., “Symbolic Compuation of Conserved Densities for Systems of Nonlinear Evolution Equations”, ***J Symb Comput*** 24(5), 591, 1997.

He, J.H., “Variational iteration method a kind of nonlinear analiytical tecnique: some example”, ***Int J Nonlinear Mech*** 34, 699, 1999.

He, J.H., “Variational iteration method for autonomous ordinary differantial system”, ***Apply Math Comput*** 114, 115, 2000.

He, J.H., “Variational principles for same nonlinear partial differantial equations with variable coefficients”, ***Chaos Solitons and Fractals*** 19, 847, 2004.

He, J.H.,” Homotopy Perturbation Method for Biturcation of Nonlinear Problems”, ***Int J Nonlinear Sci Numer Simul*** 6 (2), 207, 2005a.

He, J.H., “Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave Equations”, ***Chaos Solitions and Fractals*** 26, 695, 2005b.

He, J.H., “Variational approach to (2+1)-dimensional dispersive long water equations”, ***Phys Lett A*** 335, 182, 2005c.

He, J.H., “Some Asymtotic Methods for Strongly Nonlinear Equations”, ***Int J ModernPhys B*** 20(10), 1141, 2006a.

He, J.H., “Non-perturbative methods for strongly nonlinear problems”, Dissertationde-Verlag im Internet GmbH , ***Berlin*** 2006b.

Hu, J., “A new method of exact travelling wave solution for coupled nonlinear diferantia equations”, ***Physics Letter A*** 322 , 211-216, 2004.

Hu, J.Q., “An algebraic method exactly solving two high-dimensional nonlinear evolution equations”, ***Chaos Solitons and Fractals*** 23, 391, 2005.

Layeni, O.P., “Akinola, A.P., A new hyperbolic auxilary function method and exact solutions of the MBBM equation”, ***Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul***. 15(2), 2734, 2010.

Li, X.Y., Yang, S., "Wamg, M.L. The periodic wave solutions fort he (3+1)-dimensional Klein-Gordon-Schrödinger equations", ***Chaos Solitions and Fractals*** 25, 629, 2005.

Li, L.X. and Wang, M.L., "The (G'/G)–expansion method and travelling wave solutions for a higer-order nonlinear schrödinger equation", ***Applied Mathematics.and Computation*** 208, 440, 2009.

Li, L.X., Li, E.Q., Wang, M.L, "The $(G'/G, 1/G)$-expansion method and its.application to travelling wave saloutions of the Zakharovequations", ***Appl. Math. A J. Chin. Univ.*** 25, 454-462, 2010.

Li, Y., Li, D., "New Exact Solutions for the (2+1)-Dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation", ***Applied Methematical Sciences*** 6, 576-587, 2012.

Lin, L., "Quasi-Periodic Waves and Asymptotic Property for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation", ***Commun. Theor. Phys.(Beijing China)*** 54, 208-214, 2010.

Luo, L., "New Exact Solutions and Böcklund transformation for Boiti-Leon- Manna-Pempinelli equation", ***Physics Letter A.*** 375, 1059-1063, 2011.

Malflict , W., "Solitary wave solutions of nonlinear wave equations", ***Am J Phys*** 60, 650, 1992.

Najafi, M., Arbabi, S. and Najafi, M., "Wronskian Determinant Solutions of the (2+1)-Dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation", ***International journal of Advanced Mathematical Sciences*** 1, 8-11, 2013.

Nichel, J., "Elliptic solutions to a generalized BBM equation", ***Physics Letter A.***364(34),221-226, 2007.

Olver, P.J.," Applications of Lie Groups to Differential .equations", Springer, ***New York*** 1993.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., “Analitical solutions to a generalized Drinfeld-Sokolov equation related to DSSH and KdV”, ***Appl. Math. Comput.*** 216, 2783-2791, 2010a.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., “Exponential type solutions to a generalized Drinfeld-Sokolov equation”, ***Physica Scripta*** 2, 035006, 2010b.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., “Trigonometric and hyperbolic type solutions to a generalized Drinfeld-Sokolov equation”, ***Appl. Math. Comput.*** 217, 4147-4166, 2010c.

Sweet, E. and Van Gorder, R.A., “Traveling wave solutions (u,v) to a generalized Drinfeld- Sokolov system which solisfy $u = a_1 v^m + a_0$”, ***Appl. Math. Comput.*** 218, 9911- 9921, 2012.

Saut, J.C. and Tzetkov, N., “Global well-posednes for the KP-BBM equations”, ***Appl. Math.Res. Express*** 1, 1-6, 2004.

Song-Hua, M. and Jian-Ping, F., “Multi Dromin-solitoff and FractalExcitations for (2+1)-Dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli System”, ***Commun. Theor. Phys.(Beijing China)*** 52, 641-645, 2009.

Tso, T., “Exiatence of solution of the Modified-Benjamin-Bona-Mahony equation”, ***Chin. J. Math***. 24(4), 327-336, 1996.

Ugurlu, Y. and Kaya, D., “Exact and numerical solutions of generalized Drinfeld-Sokolov equations”, ***Physics Letter A*** 322, 211-216, 2004.

Varlamow, V., Liu, Y., “Cauchy problem fort he Ostrovsky equation”, ***Discrete Dynam. Syst.*** 10, 731-753, 2004.

Wang, M.L., “Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation”, ***Phsy Lett A*** 213,279, 1996.

Wang, J.P., "A list of (1+1)-dimensional integrable equations and their properties",.***J.Nonlinear Mathematical Physics*** 9, 213-233, 2002

Wang, M. L., Li, X. J. and Zhang J., "The (G'/G) –expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical pysics", ***Physics Letters A*** 372, 417, 2008.

Wazwaz, A.M. and Helal, M.A., "Nonlinear variant of the BBM equation with compact and noncompact physical structures", ***Chaos Solit. And Fractals*** 26, 767-776,2005.

Yan, C., "A simple transformation for nonlinear waves, ***Phsy Lett A*** 224, 77, 1996.

Yıldız, O., Yüksek lisans tezi, ***Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Niğde, 2011.

Yusufoglu, E. and Bekir, A., "The tanh and the sinecosine methods for exact solutions of the MBBM and the Vakhnenko equations", ***Chaos Solit. And Fractals*** 38, 112-1133, 2008.

Yokuş, A., Doktora tezi, ***Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Elazığ, 2011.

Yomba, E., "The Modified extended Fan sub-equation method and its application to the (2+1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt equation", ***Chaos Solitons and Fractals*** 27(1), 187, 2006.

Zamiri, A., "The $\left(G'/G\right)$-Expansion Method for the (2+1)-Dimensional Boiti- Leon-Manna-Pempinelli Equation", ***J. Basic. Appl. Sci. Res.*** 3(2s), 522-527, 2013.

Zayed, E.M.E. and Zedan, H.A., "Gepreel, K.A.,Group Analysis and Modified Extended Tant-function to Find the Invariant Solutions and SolitonSolutions for Nonlinear Euler Equations", ***Int J Nonlinear Sci Numer Simul*** 5(3), 221, 2004.

Zhang, S., “The periodic wave solutions for the (2+1)-dimensional Konolpelchenko-Dubrovsky equations”, ***Chaos Solitions and Fractals*** 30, 1213, 2006a.

Zhang, S., “New exact solutişons of the KdV-Burger-Kuramoto equation”, ***Phys Let A*** 358, 414, 2006b.

Zhang, S., Xia, T.C., “A further extended Fan sub-equation method and its application to the (3+1)-dimensional Kadomstev-Petviashvili equation”, ***Phys Lett A*** 356, 119, 2006c.

Zhang, S., “Symbolic computation and new families of exact non-travelling wave solutions of (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation”, ***Chaos Solitons and Fractals*** 31, 951, 2007.

Zhang, H., Chaos, “A direct algebraic method applied to obtain complex solutions of some nonlinear partial differantial equations”, ***Chaos Solit And Fractalsc*** 39, 1020, 2009.

Zhou, Y.B., Wamg, M.L, Wamg, Y.M., “Periodic wave solutioın to a coupled KdV equation with variable coefficients”, ***Phys Lett*** 308, 951,2007.

ÖZ GEÇMİŞ

Rasime Kübra ESEN 1993 yılında Hatay'ın Erzin ilçesinde doğdu. İlk ve ortaokulu Mehmet Akif Ersoy İlköğretim okulunda okudu. Lise eğitimini 2007-2011 yılları arasında Erzin Bahri Çelen Anadolu Lisesinde okuduktan sonra 2011 yılında Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2015 yılında lisans eğitimini bölüm ikincisi olarak tamamladı.

TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından ulusal ve uluslararası sempozyumlarda aşağıda detayları verilmiş iki adet sözel bildiri sunulmuştur. Ayrıca, iki adet makale çalışması yayın için hazırlanmaktadır.

Daghan D. and Esen. R. K., "The Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equation Using Four Different Techniques", ***International Conference on Mathematics and Mathematics Education(ICMME-2017)***, Şanlıurfa, s.626-627, 11-13 May, (2017).

Daghan D. ve Esen. R. K., "Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerde Analitik Tam Çözümler", **29.** ***Ulusal Matematik Sempozyumu***, Mersin, s.32, 28-31 Ağustos, 2016.

Daghan D. and Esen. R. K., "New Exact Solutions for the Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation", ***(Yayın İçin Hazırlanmakta)***.

Daghan D. and Esen. R. K., "Exact Solutions for two Different Nonlinear Partial Differential Equations", ***(Yayın İçin Hazırlanmakta)***.