



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

HİPERBOLİK VE DE SITTER UZAYDA ÜÇ VE DÖRTYÜZLÜLER

EFRUZ ÖZLEM MERSİN

Haziran 2014

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

HİPERBOLİK VE DE SITTER UZAYDA ÜÇ VE DÖRTYÜZLÜLER

EFRUZ ÖZLEM MERSİN

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Haziran 2014

Efruz Özlem MERSİN tarafından **Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT** danışmanlığında hazırlanan “**Hiperbolik ve De Sitter Uzayda Üç ve Dört yüzlüler**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Serkan KADER Niğde Üniversitesi



Üye : Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT Niğde Üniversitesi



Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM Aksaray Üniversitesi



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Efruz Özlem MERSİN

ÖZET

HİPERBOLİK VE DE SITTER UZAYDA ÜÇ VE DÖRTYÜZLÜLER

MERSİN, Efruz Özlem
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Haziran 2014, 144 sayfa

Bu çalışmada S_1^2 deki üçyüzlüler ve S_1^3 deki dörtyüzlülerin varlığı araştırılmıştır. Bu üç ve dörtyüzlülerin özellikleri ve sınıflandırılması üzerine çalışılmıştır.

İkinci bölümde temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, de Sitter üçgenler üzerinde durulmuştur. Lorentzian hiperdüzlemlerin S_1^2 ile arakesitlerinden space-like, time-like veya light-like kenarlara sahip 10 farklı tipte üçgen elde edilmiştir. Bu üçgenlerin özellikleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde ise S_1^3 de Sitter uzay ile \mathbb{R}_1^4 Minkowski uzaydaki hiperdüzlemlerin arakesitleri alınarak 15 farklı tip dörtyüzlü (3-simpleks) elde edilmiş ve bunların kenar tiplerine göre sınıflandırmaları yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Üçgen, dörtyüzlü, hiperbolik uzay, de Sitter uzay

SUMMARY

TRIANGLES AND TETRAHEDRONS ON HYPERBOLIC AND DE SITTER SPACE

MERSİN, Efruz Özlem

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Associate Professor Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

June 2014, 144 pages

In this study, the existence or non-existence of triangles on S_1^2 and tetrahedrons on S_1^3 are researched. The quantities and classifications of these triangles and tetrahedrons are studied.

Second part of the study the basic concepts are exported.

In the third part, insisted on de Sitter triangles. 10 different types of triangles which have space-like, time-like or light-like edges are obtained by taking the intersections of Lorentzian hyperplanes with S_1^2 . These triangles quantities are researched.

In the fourth part, 15 different types of tetrahedrons (3-simplexes) are obtained by taking the intersections of Lorentzian hyperplanes with de Sitter surface and classified them according to their edges type.

Keywords: Triangle, tetrahedron, hyperbolic space, de Sitter space

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans çalışmasında, S_1^2 deki üçgenler ve S_1^3 deki dörtyüzlülerin varlığı araştırılmıştır. Lorentzian hiperdüzlemlerin S_1^2 ile arakesitlerinden 10 farklı tipte üçgen (2-simpleks) elde edilmiştir. Bu üçgenlerin space-like, time-like veya light-like kenarlara sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca büzülebilir veya büzülebilir olmayan özellikte üçgenlerin varlığı ortaya konmuştur. Bunun yanında de Sitter üçgenlerin açıları ve uzunlukları üzerine çalışılmıştır. Bu üçgenlerin üçgen eşitsizliğini sağlayıp sağlamadıkları araştırılmıştır. S_1^3 de Sitter uzay ile \mathbb{R}_1^4 Minkovski uzaydaki hiperdüzlemlerin arakesitlerinden 15 farklı tip dörtyüzlü (3-simpleks) elde edilerek bunların karakterizasyonları yapılmıştır.

Yüksek lisans tez çalışmamın yürütülmesi esnasında, çalışmalarına yön veren, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bana her türlü desteği sağlayan danışman hocam, Sayın. Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans çalışmam süresince tecrübelerine başvurduğum başta Doç. Dr. Serkan KADER olmak üzere Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine minnet ve şükran duygularımı belirtmek isterim.

Bu tezi, tüm hayatım boyunca beni destekleyen annem Zeynep UYGUN ve babam İbrahim UYGUN'a ayrıca sevgili eşim Mehmet Ali MERSİN ve biricik oğlum Çınar Dora MERSİN'e ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGE VE KISALTMALAR	xi
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Lorentz (Minkowski) Uzay	3
2.1.1 Light-like, space-like ve time-like vektörler	3
2.1.2 Lorentz ortogonal vektörler	4
2.1.3 Time-like, space-like ve light-like alt vektör uzayları	4
2.1.4 Time-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı	4
2.1.5 Space-like vektörler arasındaki Lorentzian space-like açı	4
2.1.6 Space-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı	5
2.1.7 Space-like ve time-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı	5
2.1.8 Lorentz uzayda space-like, time-like ve light-like düzlemler	5
2.1.9 Lorentz uzayda hiperdüzlemler	6
2.2 Hiperbolik ve De Sitter Uzay	6
2.2.1 Hiperbolik uzunluk	6
2.2.2 Hiperbolik n-uzay	7
2.2.3 Hiperbolik uzayda hiperdüzlemler	7
2.2.4 De Sitter uzayda hiperdüzlemler	8
2.2.5 Hiperbolik uzayda jeodezikler	9
2.2.6 De Sitter uzayda jeodezikler	10
2.2.7 De Sitter uzayda çok yüzlüler	11
BÖLÜM III. DE SİTTER UZAYDA ÜÇGENLER	15
3.1 Hiperbolik Uzayda Üçgenler	15
3.2 De Sitter Yüzey Üzerinde Çizilebilen Üçgenler	18
3.3 Lorentzian hiperdüzlemlerin de Sitter uzayla kesişimi	21

3.3.1 İki time-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi	21
3.3.2. Bir time-like ve bir space-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi	23
3.3.3 İki space-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi	24
3.3.4 İki light-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi	25
3.3.5 Bir time-like ve bir light-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi.....	26
3.3.6 Bir space-like ve bir light-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi	27
3.4 Lorentzian hiperdüzlemlerin de Sitter uzayla kesişimiyle elde edilen üçgenler	28
3.4.1 TTS Üçgen.....	28
3.4.2 TTT Üçgen.....	36
3.4.3 SST Üçgen	44
3.4.4 STL Üçgen.....	52
3.4.5 SSL Üçgen	59
3.4.6 LLS Üçgen.....	68
3.4.7 SSS Üçgen	76
3.4.8 LLL Üçgen.....	86
3.4.9 TTL Üçgen.....	93
3.4.10 LLT Üçgen.....	102
3.5 De Sitter Üçgenlerde Üçgen Eşitsizliği	109
3.6 Hiperbolik ve De Sitter Uzayda Açık Bağlantıları.....	124
3.7 Light-like (Null) Vektörlerin İç-Dış Çarpımları.....	132
3.7.1 Light-like (null) vektörler arasındaki açı.....	134
3.8 De Sitter Uzayda Bazı Üçgenlerin Ayrıt ve Gram Matrisleri.....	135
3.8.1 SSS üçgenin ayrıt ve gram matrisleri	135
3.8.2 TTT üçgenin ayrıt ve gram matrisleri	136
3.8.3 SST üçgenin ayrıt ve gram matrisleri	137
3.8.4 STT üçgenin ayrıt ve gram matrisleri	137
BÖLÜM IV DE SİTTER UZAYDA DÖRTYÜZLÜLER.....	139
4.1 De Sitter Yüzey Üzerinde Dörtüzlüler.....	139
BÖLÜM V SONUÇ VE TARTIŞMA.....	141
KAYNAKLAR	142
ÖZGEÇMİŞ.....	144

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. H^n de bir hiperbolik hiperdüzlem	7
Şekil 2.2. De Sitter uzayda hiperdüzlemler	8
Şekil 2.3. De Sitter uzayda alt uzaylar ve hiperdüzlemler	8
Şekil 2.4. De Sitter uzayda jeodezikler	10
Şekil 2.5. Küresel üçgenin iç açıları	14
Şekil 3.1. Hiperbolik uzayda üçgen	15
Şekil 3.2. Hiperbolik üçgenin iç açıları	16
Şekil 3.3. De Sitter uzayda üçgenler	19
Şekil 3.4. Tuhaf (strange) üçgen	20
Şekil 3.5. De Sitter uzayda TTS üçgen	36
Şekil 3.6. De Sitter uzayda TTT üçgen	44
Şekil 3.7. De Sitter uzayda SST üçgen	51
Şekil 3.8. De Sitter uzayda STL üçgen	59
Şekil 3.9. De Sitter uzayda SSL üçgen	67
Şekil 3.10. De Sitter uzayda LLS üçgen	75
Şekil 3.11. De Sitter uzayda SSS büzülebilen üçgen	85
Şekil 3.12. De Sitter uzayda SSS büzülemeyen üçgen	85
Şekil 3.13. De Sitter uzayda LLL dejenere üçgen	93
Şekil 3.14. De Sitter uzayda TTL üçgen	101
Şekil 3.15. De Sitter uzayda LLT üçgen	108
Şekil 3.16. TTS Üçgende üçgen eşitsizliği	111
Şekil 3.17. TTT Üçgende üçgen eşitsizliği	112
Şekil 3.18. SST Üçgende üçgen eşitsizliği	113
Şekil 3.19. STL Üçgende üçgen eşitsizliği	115
Şekil 3.20. SSL Üçgende üçgen eşitsizliği	116
Şekil 3.21. LLS Üçgende üçgen eşitsizliği	117
Şekil 3.22. SSS Büzülebilen üçgende üçgen eşitsizliği	119
Şekil 3.23. SSS Büzülemeyen üçgende üçgen eşitsizliği	120

Şekil 3.24. LLL Üçgende üçgen eşitsizliği.....	122
Şekil 3.25. TTL Üçgende üçgen eşitsizliği.....	123
Şekil 3.26. LLT Üçgende üçgen eşitsizliği.....	124
Şekil 3.27. $E^{1,n}$ Lorentzian uzay	125
Şekil 3.28. Hiperdüzlemin horoküreye uzaklığı	126
Şekil 3.29. Poincare modelinde horoküre	130
Şekil 3.30. Üç kenarı space-like olan üçgen	136
Şekil 3.31. Üç kenarı time-like olan üçgen	136
Şekil 3.32. İki kenarı space-like bir kenarı time-like olan üçgen	137
Şekil 3.33. İki kenarı time-like bir kenarı space-like olan üçgen	138
Şekil 4.1. De Sitter uzayda dörtyüzlüler	140

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
R_1^n	n -boyutlu Lorentz uzayı
R^{n+1}	$(n + 1)$ -boyutlu vektör uzayı
S_1^n	n -boyutlu de Sitter uzay
S^n	n -boyutlu küresel uzay
d_E	Öklidyen uzaklık fonksiyonu
d_S	Küresel uzaklık fonksiyonu
d_L	Lorentz uzaklık fonksiyonu
d_H	Hiperbolik uzaklık fonksiyonu
\langle, \rangle_E	Öklid iç çarpım fonksiyonu
\langle, \rangle_L	Lorentz iç çarpım fonksiyonu
\times	Öklid dış (vektörel) çarpım fonksiyonu
\otimes	Lorentz dış (vektörel) çarpım fonksiyonu
$\ \cdot \ _E$	Öklid norm fonksiyonu
$\ \cdot \ _L$	Lorentz norm fonksiyonu
\perp	Öklid uzayında diklik (ortogonallik) sembolü
\perp_L	Lorentz uzayında diklik (ortogonallik) sembolü

BÖLÜM I

GİRİŞ

Hiperbolik ve küresel uzaylarda çok yüzlülerin hacminin hesaplanması problemi 150 yılı aşkın bir süredir matematikçiler arasında oldukça karmaşık ve önemli bir çalışma alanı oluşturmuştur. Literatürde bilinen Schlafli diferensiyel formülü ve Lobachevsky formülü herhangi boyuttaki hiperbolik ve küresel çok yüzlülerin hacminin hesaplanması bakımından temel bir rol oynamaktadır. Son zamanlarda yapılan çalışmalarla bu uzaylardaki çok yüzlülerin varlığı ve bunların hacimlerinin hesaplamaları konusunda oldukça yol alınmıştır. Fakat S_1^n de Sitter uzayında çok yüzlülerin varlığı ve bunların geometrik özellikleri konusunda literatürde çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Bununla ilgili ilk çalışma Jose Maria Montesinos'un doktora öğrencisi Eva Suarez Peiro'nun çalışmalarıdır. Jose Maria Montesinos, Santalo'nun formülü üzerinden S_1^3 deki dört yüzlüler için bir Schlafli diferensiyel eşitliğini elde etmiş ve daha sonra Schlafli eşitliğini hiperbolik dört yüzlülere uygulamıştır. Öğrencisi Eva Suarez Peiro'ya doktora tezi için Kneser'in ispatını izleyerek S_1^n deki simpleksler için bir Schlafli formülü elde etmeyi ve bunu genelleştirerek Santalo'nun eşitliğini yüksek boyutlar için elde etmeyi önermiş olup bu, Eva Suarez Peiro'nun tezinin bir kısmını oluşturmuştur (Peiro, 2000). Peiro tezinde bütün ayrıtları space-like olan simpleksleri incelemiştir.

Sabit eğrilikli tam Semi-Riemann manifoldlarda çok yüzlülerin hacim hesaplamaları konusunda J. M. Schlenker tarafından da bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda sabit eğriliği 1 olan tam Lorentz manifoldu olarak S_1^n de Sitter küresi kullanılmıştır.

S_1^n de Sitter küresi ile H^n Hiperbolik uzayı, \mathbb{R}_1^{n+1} Minkowski uzayının alt manifoldları olarak alındığında, bunlar arasında bir dualitenin varlığı söz konusudur. Buradan yola çıkarak S_1^n de Sitter küresindeki her bir v noktası, H^n Hiperbolik uzayının bir hiperdüzleminin birim normalisi olarak düşünülür.

Böylece S_1^n de Sitter küresindeki bir çok yüzlünün hacmi Schlafli formülü yardımıyla, H^n Hiperbolik uzayındaki hiperdüzlemlerin S_1^n de Sitter küresi ile arakesitinin oluşturduğu çok yüzlünün hacminin duali olur.

Böyle bir dualite söz konusu olduğunda S_1^n de çokyüzlülerden bahsedilmektedir. $n = 3$ için bunun gibi bir ilişki, integral geometri kullanılarak L. Santalo (1976) tarafından

bulunmuştur. Kendisi ile kesişen düzlemler kümesinin ölçümü ile bir küresel dörtyüzlünün hacmi arasındaki ilişki Milnor (1994) tarafından küresel Schlafli formülü kullanılarak ispatlanmıştır. Fakat bu dört-yüzlülerin karakterizasyonu hakkında herhangi bir çalışma yapılmamıştır. Daha sonra Immanuel Asmus “Duality between Hyperbolic and de Sitter Geometry” isimli çalışmasıyla de Sitter uzayda üçgenlerin varlığından bahsetmiş ve bazı trigonometrik özdeşlikleri yeniden yorumlamıştır. Asmus, çalışmalarında bu üçgenlerin birtakım özelliklerini vermiştir.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Lorentz (Minkowski) Uzay

$n > 1$ olmak üzere, $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin Lorentzian iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \quad (2.1)$$

reel sayıdır. Lorentzian iç çarpımı ile birlikte \mathbb{R}^n vektör uzayına Lorentzian n -uzay denir ve \mathbb{R}_1^n ile gösterilir.

\mathbb{R}_1^n uzayında bir x vektörünün Lorentz normu

$$\|x\|_L = |\langle x, x \rangle_L|^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

x ve y vektörleri arasındaki Lorentzian uzaklık da

$$d_L(x, y) = \|x - y\|_L \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Ratchliffe, 1994).

2.1.1. Light-like, space-like ve time-like vektörler

\mathbb{R}_1^n Lorentz uzayında $\|x\|_L = 0$ olacak şekildeki bütün x lerin kümesine, yani

$$C^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_1^n \mid x_n^2 = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2\}$$

kümesine light koni (ışık konisi) denir.

$\|x\|_L = 0$ ise x vektörüne light-like (ışık benzeri) veya null vektör denir.

$\|x\|_L > 0$ ise x vektörüne space-like (uzay benzeri) vektör denir. C^{n-1} konisinin dışı, \mathbb{R}_1^n nin space-like vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir.

$\|x\|_L < 0$ ise x vektörüne time-like (zaman benzeri) vektör denir. C^{n-1} konisinin içi, \mathbb{R}_1^n nin time-like vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir (Ratchliffe, 1994, O'Neil, 1983).

2.1.2 Lorentz ortogonal vektörler

$x, y \in \mathbb{R}_1^n$ için $\langle x, y \rangle_L = 0$ ise x ve y vektörlerine Lorentz ortogonaldir denir (Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.1.1 $x, y \in \mathbb{R}_1^n$ sıfırdan farklı Lorentz ortogonal vektörler olsun. Bu durumda eğer x vektörü time-like ise y vektörü space-like vektördür (Ratchliffe, 1994).

2.1.3 Time-like, space-like ve light-like alt vektör uzayları

V, \mathbb{R}_1^n nin bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda,

- (1) V time-like vektör uzayıdır $\Leftrightarrow V$ time-like bir vektöre sahiptir.
- (2) V space-like vektör uzayıdır $\Leftrightarrow V$ nin sıfırdan farklı her vektörü space-like vektördür.
- (3) V light-like vektör uzayıdır $\Leftrightarrow V$ nin sıfırdan farklı her vektörü light-like vektördür (Ratchliffe, 1994).

2.1.4 Time-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı

$x, y \in \mathbb{R}_1^n$ pozitif (negatif) time-like vektörler olsun. Bu takdirde

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\|_L \|y\|_L \cosh \eta(x, y) \quad (2.4)$$

olacak şekilde, negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y vektörleri arasındaki Lorentzian time-like açı denir (Ratchliffe, 1994, O'Neil, 1983).

2.1.5 Space-like vektörler arasındaki Lorentzian space-like açı

$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ bir space-like alt vektör uzayını geren space-like vektörler olsun. Bu takdirde

$$\langle x, y \rangle_L = \|x\|_L \|y\|_L \cos \eta(x, y) \quad (2.5)$$

eşitliğini sağlayan

$$0 < \eta(x, y) < \pi$$

olacak şekilde bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır.

Bu sayıya x ve y arasındaki Lorentzian space-like açı denir. Burada

$$\eta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y, \lambda > 0$$

$$\eta(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \perp_L y$$

$$\eta(x, y) = \pi \Leftrightarrow x = \lambda y, \lambda < 0$$

dir (Ratchliffe, 1994).

2.1.6 Space-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı

$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ bir time-like alt vektör uzayını geren space-like vektörler olsun. Bu durumda

$$|\langle x, y \rangle_L| = \|x\|_L \|y\|_L \cosh \eta(x, y) \quad (2.6)$$

eşitliğini sağlayan bir tek $\eta(x, y)$ pozitif reel sayısı vardır. Bu sayıya x ve y vektörleri arasındaki Lorentzian time-like açı denir (Ratchliffe, 1994).

2.1.7 Space-like ve time-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı

\mathbb{R}^{n+1} de x space-like ve y time-like vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle x, y \rangle_L = \|x\|_L \|y\|_L \sinh \eta(x, y) \quad (2.7)$$

eşitliğini sağlayan ve negatif olmayan bir tek $\eta(x, y)$ reel sayısı vardır ve bu sayıya x ve y vektörleri arasındaki Lorentzian time-like açı denir (Ratchliffe, 1994).

2.1.8 Lorentz uzayda space-like, time-like ve light-like düzlemler

Normali $N = (a, b, c)$ olan $ax + by + cz = 0$ düzlemi,

$\langle N, N \rangle_L < 0$ ise \mathbb{R}_1^3 de space-like düzlem olarak adlandırılır ve H_S ile gösterilir.

$\langle N, N \rangle_L > 0$ ise \mathbb{R}_1^3 de time-like düzlem olarak adlandırılır ve H_T ile gösterilir.

$\langle N, N \rangle_L = 0$ ise \mathbb{R}_1^3 de light-like veya null düzlem olarak adlandırılır ve H_L ile gösterilir (O'Neil, 1983).

2.1.9 Lorentz uzayda hiperdüzlemler

Sıfırdan farklı bir $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ vektörü ve bir $N \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ için, N pseudo-normali ile orijinden geçen hiperdüzlem

$$H_N = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, N \rangle_L = 0\} \quad (2.8)$$

ile tanımlanır (Ratchliffe, 1994).

2.2 Hiperbolik ve De Sitter Uzay

$x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ve $n > 1$ için

$$S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_L = 1\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1} \quad (2.9)$$

kümesine n -boyutlu birim pseudo-küresel uzay (de Sitter uzay),

$$H_o^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_L = -1\} \quad (2.10)$$

kümesine de n -boyutlu birim pseudo-hiperbolik uzay denir.

H_o^n nin $H_{o,+}^n$ ve $H_{o,-}^n$ olmak üzere iki bağlantılı bileşeni vardır. Bu bileşenlerden her biri n -boyutlu hiperbolik uzayın bir modeli olarak alınabilir (Ratchliffe, 1994).

2.2.1 Hiperbolik uzunluk

$x, y \in H^n \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ olmak üzere x ve y vektörleri arasındaki Lorentzian time-like açı $\eta(x, y)$ olsun. x ve y vektörleri arasındaki hiperbolik uzunluk

$$d_H(x, y) = \eta(x, y) \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlı bir reel sayıdır.

$\langle x, y \rangle_L = -\|x\|_L \|y\|_L \cosh \eta(x, y)$ olduğundan

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle_L$$

dir (Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.2.1 d_H hiperbolik uzunluk fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir (Ratchliffe, 1994).

2.2.2 Hiperbolik n-uzay

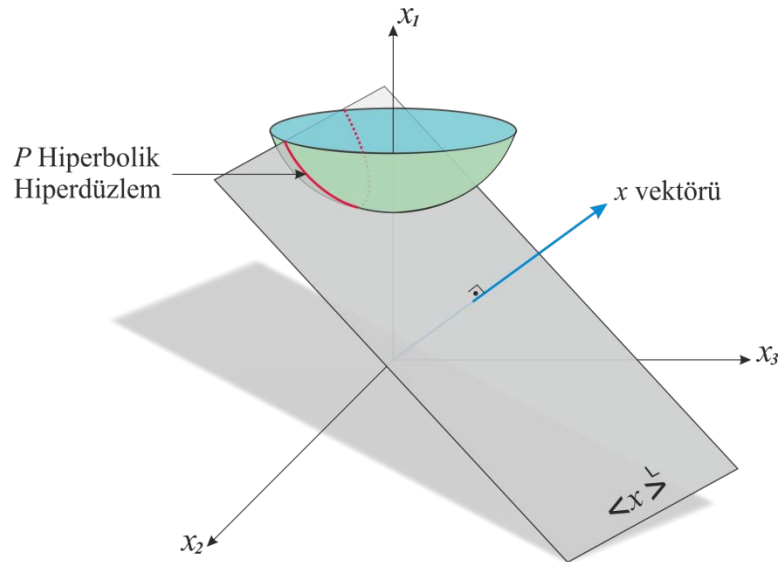
d_H metriği ile birlikte H^n uzayı, hiperbolik n -uzay olarak adlandırılır (Ratchliffe, 1994).

2.2.3 Hiperbolik uzayda hiperdüzlemler

H^n in bir hiperbolik m -düzlemi, H^n ile \mathbb{R}^{n+1} in $(m + 1)$ -boyutlu time-like alt vektör uzayının kesişimidir.

H^n in bir hiperbolik 1-düzlemi, H^n in bir hiperbolik 1-doğrusuyla aynıdır. H^n in hiperbolik $(n - 1)$ -düzlemine H^n in bir hiperbolik hiperdüzlemi denir.

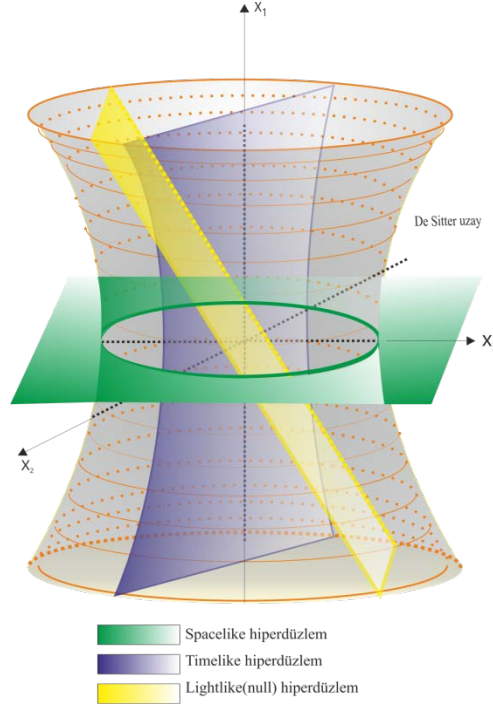
x , \mathbb{R}^{n+1} de bir space-like vektör olsun. x vektörü tarafından gerilen $\langle x \rangle^L$ alt vektör uzayının Lorentzian tümleyeni \mathbb{R}^{n+1} in n -boyutlu time-like alt vektör uzayıdır. Böylece $P = \langle x \rangle^L \cap H^n$, H^n de bir hiperbolik hiperdüzlemdir (Ratchliffe, 1994).



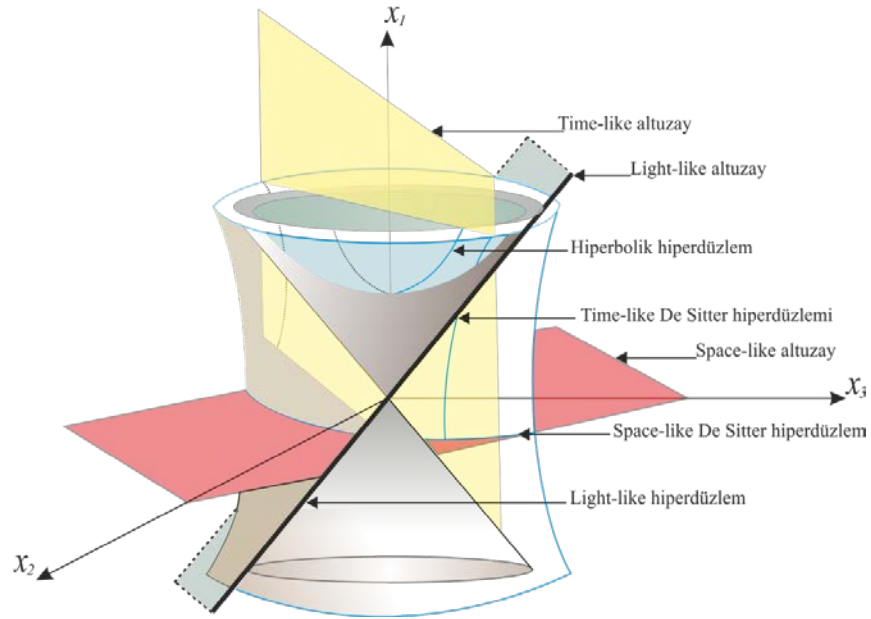
Şekil 2.1 H^n de bir hiperbolik hiperdüzlem

2.2.4 De Sitter uzayda hiperdüzlemler

S_1^n nin bir m -düzlemi, \mathbb{R}_1^{n+1} in $(m + 1)$ -boyutlu, time-like, space-like ve light-like alt vektör uzayları ile S_1^n nin arakesitidir. S_1^n nin bir 1-düzlemi, time-like, space-like veya light-like doğruları, hiperbolik $(n - 1)$ -düzlemi S_1^n nin hiperdüzlemi olarak adlandırılır (Ratchliffe, 1994).



Şekil 2.2 De Sitter uzayda hiperdüzlemler



Şekil 2.3 De Sitter uzayda alt uzaylar ve hiperdüzlemler

2.2.5 Hiperbolik uzayda jeodezikler

H^n de bir doğru, \mathbb{R}_1^{n+1} in iki boyutlu time-like alt vektör uzayı ile H^n in arakesitidir. $x, y \in H^n$ vektörleri \mathbb{R}^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen iki boyutlu bir time-like alt uzayını gerer. Böylece $L(x, y) = H^n \cap V(x, y)$ olup x ve y den geçen H^n in bir doğrusudur. Buna göre H^n in jeodezikleri onun doğrularıdır (Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.2.2 $x, y \in \mathbb{R}^n$ pozitif (negatif) time-like vektörler olsun. Bu takdirde

$$\langle x, y \rangle_L \leq \|x\|_L \|y\|_L \quad (2.12)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu ancak ve ancak x ve y lineer bağımlı vektörler olduğunda mümkündür (Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.2.3 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ lineer bağımsız space-like vektörler olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (1) x ve y vektörleri $|\langle x, y \rangle_L| < \|x\|_L \|y\|_L$ eşitsizliğini sağlar.
- (2) x ve y vektörlerinin gerdiği V alt vektör uzayı space-like dır.
- (3) H^n in sırasıyla x ve y ye Lorentz ortogonal olan P ve Q hiperdüzlemleri kesişir.

(Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.2.4 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ lineer bağımsız space-like vektörler olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (1) x ve y vektörleri $|\langle x, y \rangle_L| > \|x\|_L \|y\|_L$ eşitsizliğini sağlar.
- (2) x ve y vektörlerinin gerdiği V alt vektör uzayı time-like dır.
- (3) H^n in sırasıyla x ve y ye Lorentz ortogonal olan P ve Q hiperdüzlemleri kesişmezler ve genel bir Lorentz ortogonal hiperbolik doğruya sahiptirler

(Ratchliffe, 1994).

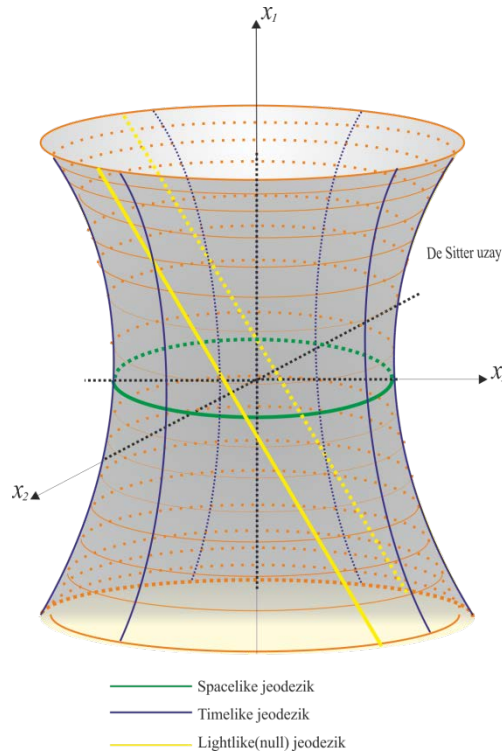
Teorem 2.2.5 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ lineer bağımsız space-like vektörler olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (1) x ve y vektörleri $|\langle x, y \rangle_L| = \|x\|_L \|y\|_L$ eşitsizliğini sağlar.
- (2) x ve y vektörlerinin gerdiği V alt vektör uzayı light-like dır.
- (3) H^n in sırasıyla x ve y ye Lorentz ortogonal olan P ve Q hiperdüzlemleri sonsuzda kesişir (Ratchliffe, 1994).

2.2.6 De Sitter uzayda jeodezikler

S_1^n de bir doğru, \mathbb{R}_1^{n+1} in sırasıyla, iki boyutlu time-like, space-like ve light-like alt vektör uzayı ile S_1^n in arakesitidir. $x, y \in S_1^n$ vektörleri, \mathbb{R}^{n+1} in $V(x, y)$ ile gösterilen, sırasıyla iki boyutlu time-like, space-like ve light-like alt uzaylarını gerer. Böylece $L(x, y) = S_1^n \cap V(x, y)$, x ve y den geçen S_1^n in bir doğrusudur. Buna göre S_1^n in jeodezikleri onun doğrularıdır (Ratchliffe, 1994).

$H_S \cap S_1^2$ kümesine, de Sitter düzleminde space-like jeodezik, $H_T \cap S_1^2$ kümesine time-like jeodezik ve $H_L \cap S_1^2$ kümesine de light-like (null) jeodezik denir (O'Neil, 1983, Vinberg, 1993).



Şekil 2.4 De Sitter uzayda jeodezikler

2.2.7 De Sitter uzayda çok yüzlüler

$1 \leq i \leq 3$ için H_i ler, \mathbb{R}_1^3 de düzlemler olmak üzere $\Delta = H_i \cap S_1^2$ kümesine de Sitter uzayında bir çok yüzlü denir (Vinberg, 1993).

Önerme 2.2.6 $P_1, P_2, P_3 \in S_1^2$ olmak üzere $\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} \neq 0$ ise P_1, P_2, P_3 noktaları S_1^2 de Sitter yüzeyde bir üçgenin köşe noktalarıdır (Hodgson ve Rivin, 1993).

Önerme 2.2.7 P ve Q , S_1^2 nin birbirinden farklı antipodal olmayan noktaları olsun. Bu takdirde

- (1) Eğer $\langle P, Q \rangle_L > 1$ ise P ve Q dan geçen, birebir ve time-like olan bir tek jeodezik vardır.
- (2) Eğer $\langle P, Q \rangle_L = 1$ ise P ve Q dan geçen, \mathbb{R}_1^3 ün de bir light-like jeodeziği olan bir tek jeodezik vardır.
- (3) Eğer $-1 < \langle P, Q \rangle_L < 1$ ise bu durumda P ve Q dan geçen, space-like ve periyodik olan bir tek jeodezik vardır.
- (4) Eğer $\langle P, Q \rangle_L \leq -1$ ise bu durumda P ve Q dan geçen hiç bir jeodezik yoktur (O'Neil, 1983).

Teorem 2.2.8 $P_1, P_2, P_3 \in S_1^2$ de Sitter kürede birbirlerinden farklı ve antipodal olmayan noktalar olsun. $i = 1, 2, 3$ ve N de Lorentz düzlemin normali olmak üzere, eğer

$\langle P_i, N_i \rangle_L \neq 0$ ise P_1, P_2, P_3 noktaları S_1^2 de Sitter yüzey üzerindeki bir üçgenin köşeleridir (Hodgson ve Rivin, 1993).

Teorem 2.2.9 $P_1, P_2 \in S_1^2$ olsun. Bu takdirde

- (1) $P_1^\perp \cap P_2^\perp \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $|\langle P_1, P_2 \rangle_L| < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda $H_{P_1} \cap H_{P_2}$ deki eşboyutu iki olan yüzdeki dihedral açı $\cos^{-1}(-\langle P_1, P_2 \rangle_L)$ ile veya bunun eşdeğeri olan $\pi - \cos^{-1}(\langle P_1, P_2 \rangle_L)$ ile belirlidir.
- (2) P_1^\perp ve P_2^\perp hiperdüzlemlerinin sonsuzda kesişmesi için gerek ve yeter şart $|\langle P_1, P_2 \rangle_L| = 1$ olmasıdır.

(3) P_1^\perp ve P_2^\perp hiperdüzlemlerinin arasında pozitif bir uzaklık bulunması için gerek ve yeter şart $|\langle P_1, P_2 \rangle_L| > 1$ olmasıdır. Bu durumda P_1^\perp ve P_2^\perp hiperdüzlemleri arasındaki hiperbolik uzaklık $\cosh^{-1}(|\langle P_1, P_2 \rangle_L|)$ ile belirlidir (Luo, 1997).

Teorem 2.2.10 \mathbb{R}_1^n , n-boyutlu Minkowski uzay olsun. \mathbb{R}_1^n deki hiperdüzlemlerin S_1^{n-1} de Sitter uzay ile kesişimi $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ farklı tipte $(n - 1)$ -simpleks verir.

İspat Üçgensel sayılar mantığı kullanılarak tümevarım yöntemi ile yapılır.

Önerme 2.2.11 α, β, γ bir $T(x, y, z)$ küresel üçgenin iç açıları olmak üzere,

$$(1) \theta(z \times x, x \times y) = \pi - \alpha$$

$$(2) \theta(x \times y, y \times z) = \pi - \beta$$

$$(3) \theta(y \times z, z \times x) = \pi - \gamma$$

dir (Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.2.12 $x, y, z, w \in \mathbb{R}^3$ de vektörler olsun. O halde

$$(1) x \otimes y = -y \otimes x$$

$$(2) \langle x \otimes y, z \rangle_L = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(3) x \otimes (y \otimes z) = \langle x, y \rangle_L z - \langle z, x \rangle_L y$$

$$(4) \langle x \otimes y, z \otimes w \rangle_L = \begin{vmatrix} \langle x, w \rangle_L & \langle x, z \rangle_L \\ \langle y, w \rangle_L & \langle y, z \rangle_L \end{vmatrix}$$

dir (Ratchliffe, 1994).

Teorem 2.2.13 $u, v, w \in E_1^3$ vektörlerinin üçlü vektörel çarpımı

$$(u \otimes v) \otimes w = \begin{vmatrix} u & v \\ \langle u, w \rangle_L & \langle v, w \rangle_L \end{vmatrix} = \langle v, w \rangle_L u - \langle u, w \rangle_L v$$

ile verilir. Buna göre u, v, w vektörlerinin üçlü vektörel çarpımı u ve v vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur.

Benzer şekilde u, v, w, x ve $y \in E_1^4$ vektörlerinin beşli vektörel çarpımı

$$(u \otimes v \otimes w) \otimes x \otimes y = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \langle u, x \rangle_L & \langle v, x \rangle_L & \langle w, x \rangle_L \\ \langle u, y \rangle_L & \langle v, y \rangle_L & \langle w, y \rangle_L \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tanıma göre u, v, w, x ve y vektörlerinin beşli vektörel çarpımı u, v ve w vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur.

Ayrıca

$$\langle u \otimes v \otimes w, x \otimes y \otimes z \rangle_L = - \begin{vmatrix} \langle u, x \rangle_L & \langle v, x \rangle_L & \langle w, x \rangle_L \\ \langle u, y \rangle_L & \langle v, y \rangle_L & \langle w, y \rangle_L \\ \langle u, z \rangle_L & \langle v, z \rangle_L & \langle w, z \rangle_L \end{vmatrix}$$

dır.

E_1^4 de bir hiperyüzey üzerinde tanımlı metrik Lorentz (pozitif tanımlı Riemannian) metrik ise bir time-like (space-like) hiperyüzey olarak adlandırılır. Time-like (space-like) hiperyüzey üzerindeki normal vektörü bir space-like (time-like) vektördür.

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dört boyutlu Minkowski uzay E_1^4 ün standart bazı olmak üzere

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \quad \text{ve} \quad w = \sum_{i=1}^n w_i e_i,$$

vektörlerinin üçlü çarpımı

$$u \otimes v \otimes w = - \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. e_1, e_2, e_3, e_4 vektörleri için

$$e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 = e_4$$

$$e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 = e_1$$

$$e_3 \otimes e_4 \otimes e_1 = e_2$$

$$e_4 \otimes e_1 \otimes e_2 = e_3$$

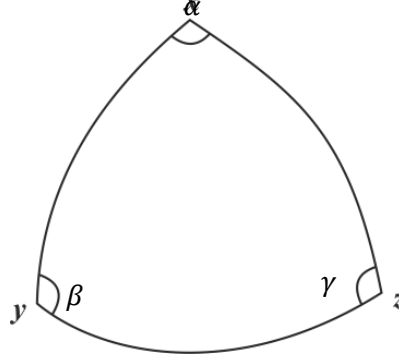
geçerlidir. Üçlü vektörel çarpımın tanımından

$$\langle u, u \otimes v \otimes w \rangle_L = \langle v, u \otimes v \otimes w \rangle_L = \langle w, u \otimes v \otimes w \rangle_L = 0$$

dır. Dolayısıyla $u \otimes v \otimes w$ vektörü u, v ve w vektörlerine diktir (Düldül ve Çalışkan, 2013).

Teorem 2.2.14 α, β, γ bir küresel üçgenin iç açıları ise bu durumda $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ dir (Ratchliffe, 1994).

İspat



Şekil 2.5 Küresel üçgenin iç açıları

α, β, γ bir $T(x, y, z)$ küresel üçgenin iç açıları olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \langle (x \times y) \times (z \times y), (z \times x) \rangle \\ &= \langle [\langle x, (z \times y) \rangle - \langle y, (z \times y) \rangle x], (z \times x) \rangle \\ &= \langle x, (z \times y) \rangle \langle y, (z \times x) \rangle \\ &= -\langle y, (z \times x) \rangle^2 < 0. \end{aligned}$$

Teorem 2.2.12 (2) den $x \times y, z \times y, z \times x$ lineer bağımsızdır. Ayrıca bu vektörlerin birleştirilmiş vektörleri küresel olarak doğrudan değildir. Önerme 2.2.11 den,

$$\theta((x \times y), (z \times x)) < \theta((x \times y), (z \times y)) + \theta(z \times y, z \times x)$$

$$\pi - \alpha < \beta + \gamma$$

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma$$

elde edilir (Ratchliffe, 1994).

Önerme 2.2.15 $x, y \in \mathbb{R}^3$ de space-like vektörler olsun. Eğer $x \otimes y$ time-like ise bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$||x \otimes y||_L = ||x||_L ||y||_L \sin \eta(x, y) \quad (2.13)$$

BÖLÜM III

HİPERBOLİK VE DE SITTER UZAYDA ÜÇGENLER

3.1 Hiperbolik Uzayda Üçgenler

Lorentz uzaydaki time-like hiperdüzlemlerle H_0^2 nin arakesitleri alınarak H_0^2 deki jeodezikler elde edilir.

Tanım 3.1.1 H_i, H_j, H_k ($i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$) Minkowski uzayda time-like hiperdüzlemler olsun. Bu hiperdüzlemlerine ait normaller N_i, N_j, N_k olmak üzere $\langle N_i, N_i \rangle_L = \langle N_j, N_j \rangle_L = \langle N_k, N_k \rangle_L = 1$ dir. Bunun yanında

$$\begin{vmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{vmatrix} \neq 0$$

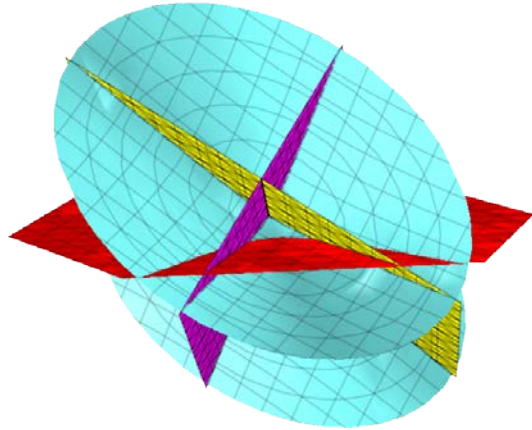
koşulu sağlansın. Bu hiperdüzlemlerle hiperbolik uzayın arakesitleri

$$P_i = H_j \cap H_k \cap H_0^2$$

$$P_j = H_i \cap H_k \cap H_0^2$$

$$P_k = H_i \cap H_j \cap H_0^2$$

şeklindedir. Bu noktalar hiperbolik uzay üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur.



Şekil 3.1 Hiperbolik uzayda üçgen

Önerme 3.1.2 α, β, γ bir hiperbolik $T(x, y, x)$ üçgeninin iç açıları olsun. Bu durumda

$$(1) \eta(z \otimes x, x \otimes y) = \pi - \alpha$$

$$(2) \eta(x \otimes y, y \otimes z) = \pi - \beta$$

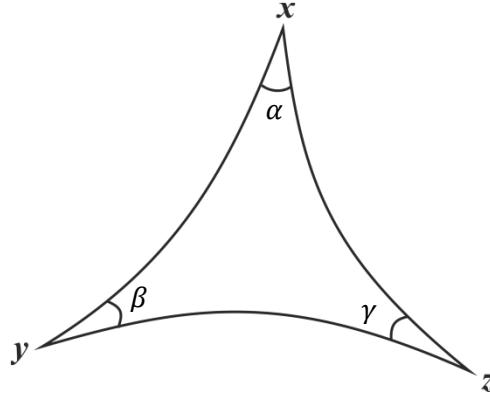
$$(3) \eta(y \otimes z, z \otimes x) = \pi - \gamma$$

dir (Ratchliffe, 1994).

Teorem 3.1.3 α, β, γ bir hiperbolik üçgenin iç açıları olsun. Bu durumda

$\alpha + \beta + \gamma < \pi$ dir (Ratchliffe, 1994).

İspat



Şekil 3.2 Hiperbolik üçgenin iç açıları

α, β, γ bir $T(x, y, x)$ hiperbolik üçgenin iç açıları olsun. Teorem 2.2.14 den $x \otimes y$, $z \otimes y$ ve $z \otimes x$ lineer bağımsızdır.

$$u = \frac{x \otimes y}{\|x \otimes y\|}, v = \frac{z \otimes y}{\|z \otimes y\|}, w = \frac{z \otimes x}{\|z \otimes x\|}$$

olsun. u, v, w space like vektörlerdir.

$$(x \otimes y) \otimes (z \otimes y) = \langle (x \otimes y), z \rangle_L y,$$

$$(z \otimes y) \otimes (z \otimes x) = \langle (x \otimes y), z \rangle_L z$$

olduğundan $u \otimes v$ ve $v \otimes w$ vektörleri time-like vektörlerdir. Önerme 2.2.15, Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.12 (4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \cos(\eta(u, v) + \eta(v, w)) \\
&= \cos \eta(u, v) \cos \eta(v, w) - \sin \eta(u, v) \sin \eta(v, w) \\
&= \langle u, v \rangle_L \langle v, w \rangle_L + \|u \otimes v\| \|v \otimes w\| \\
&> \langle u, v \rangle_L \langle v, w \rangle_L + \langle (u \otimes v), (v \otimes w) \rangle_L \\
&= \langle u, v \rangle_L \langle v, w \rangle_L + (\langle u, w \rangle_L \langle v, v \rangle_L - \langle v, w \rangle_L \langle u, v \rangle_L) \\
&= \langle u, w \rangle_L \\
&= \|u\|_L \|w\|_L \cos \eta(u, w) \\
&= \cos \eta(u, w)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\eta(u, w) > \eta(u, v) + \eta(v, w) \text{ veya } 2\pi - \eta(u, w) < \eta(u, v) + \eta(v, w)$$

olmalıdır. Önerme 3.1.2 den,

$$\eta(u, w) = \pi - \alpha, \quad \eta(u, v) = \beta \text{ ve } \eta(v, w) = \gamma$$

dır. Böylece

$$\pi - \alpha > \beta + \gamma \text{ veya } 2\pi - (\pi - \alpha) < \beta + \gamma,$$

yani

$$\pi > \alpha + \beta + \gamma \text{ veya } \pi + \alpha < \beta + \gamma$$

elde edilir. Genellikle uzaklaşmamak adına α en büyük açı kabul edilebilir.

Bu durumda $\alpha > \beta$ ve $\alpha > \gamma$ dır. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\alpha + \alpha > \beta + \gamma$$

bulunur. α açısı en fazla π değerini alabileceğinden, bu değer yerine yazılırsa,

$$\pi + \alpha > \beta + \gamma$$

olur. Bu

$$\pi + \alpha < \beta + \gamma$$

ile çeliştiğinden

$$2\pi - (\pi - \alpha) < \beta + \gamma$$

eşitsizliği doğru olamaz. Bu durumda

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

elde edilmiş olur (Ratchliffe, 1994).

Teorem 3.1.4 $x, y \in \mathbb{R}^3$ ve $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. x ve y nin Lorentz vektörel

çarpımı $x \otimes y = J(x \times y)$ ile tanımlıdır. Buna göre

$$\langle x, (x \otimes y) \rangle_L = \langle x, J(x \times y) \rangle_L = \langle x, (x \times y) \rangle_E = 0$$

$$\langle y, (x \otimes y) \rangle_L = \langle y, J(x \times y) \rangle_L = \langle y, (x \times y) \rangle_E = 0$$

dir. Dolayısıyla $x \otimes y$ vektörü hem x hem de y vektörlerine ortogondur. Ayrıca

$x \otimes y = J(y) \times J(x)$ dir (Ratchliffe, 1994).

Sonuç 1 $x, y \in \mathbb{R}^3$ pozitif (negatif) time-like vektörler ise bu takdirde $x \otimes y$ vektörü space-like vektördür ve

$$\|x \otimes y\|_L = -\|x\|_L \|y\|_L \sinh(x, y).$$

Sonuç 2 $x, y \in \mathbb{R}^3$ space-like vektörler olsun. Bu takdirde

- (1) $|\langle x, y \rangle_L| < \|x\|_L \|y\|_L \Leftrightarrow x \otimes y$ time-like
- (2) $|\langle x, y \rangle_L| = \|x\|_L \|y\|_L \Leftrightarrow x \otimes y$ light-like
- (3) $|\langle x, y \rangle_L| > \|x\|_L \|y\|_L \Leftrightarrow x \otimes y$ space-like

dır (Ratchliffe, 1994).

3.2 De Sitter Yüzey Üzerinde Üçgenler

Lorentz uzaydaki hiperdüzlemlerle (time-like, space-like, light-like) S_1^2 nin arakesitleri alınarak S_1^2 deki jeodezikler elde edilir. Bu jeodezikler farklı şekilde kesiştiklerinde S_1^2 üzerinde üçgensel bölgeler meydana gelir. Teorem 2.2.10 dan $n = 3$ için de Sitter yüzey üzerinde 10 farklı tip üçgen elde edilmiştir. Bu üçgenler içerdikleri kenarların sınıflarına göre isimlendirilmiş olup aşağıdaki şekildedir:

SSS Üçgenler: Üç kenarı space-like olan,

SST Üçgenler: İki kenarı space-like, bir kenarı time-like olan,

STT Üçgenler: Bir kenarı space-like, iki kenarı time-like olan,

TTT Üçgenler: Üç kenarı time-like olan,

STL Üçgenler: Bir kenarı space-like, bir kenarı time-like ve bir diğer kenarı light-like olan,











SLL Üçgenler: Bir kenarı space-like, iki kenarı light-like olan,

LLL Üçgenler: Üç kenarı light-like olan,

LLT Üçgenler: İki kenarı light-like, bir kenarı time-like olan,

SSL Üçgenler: İki kenarı space-like, bir kenarı light-like olan,

TTL Üçgenler: İki kenarı time-like, bir kenarı light-like olan üçgenlerdir (İmer, 2010).

		
SSS üçgen	SST üçgen	STT üçgen
		
TTT üçgen	STL üçgen	SLL üçgen
		
LLL üçgen	LLT üçgen	SSL üçgen
		
	TTL üçgen	

Şekil 3.3 De Sitter uzayda üçgenler

Tanım 3.2.1 Genelleştirilmiş bir de Sitter üçgen; $\Delta \subset H_{0,+}^2$ ise hiperbolik, $\Delta \subset (H_{0,-}^2)$ ise antipodal hiperbolik, $\Delta \subset S_1^2$ ise has (proper), diğer durumlarda ise tuhaf (strange) üçgen olarak adlandırılır.

Tepe noktalarının bazıları H_0^2 de, bazıları da S_1^2 üzerinde bulunuyorsa bu üçgenlere tuhaf (strange) üçgenler denir.

Has olmayan de Sitter üçgenlerine has olmayan üçgenler denir.

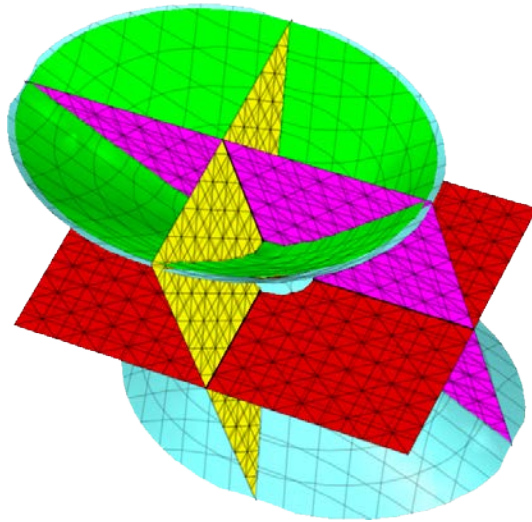
Şekil 3.1 de çizilmiş olan tüm üçgenler has de Sitter üçgenlerdir.

Üçgenin en az bir kenarı sonsuz ise bu üçgen imkansız üçgen olarak adlandırılır.

$i, j, k = 1, 2, 3$ için $i \neq j \neq k$ ve $P_i, P_j, P_k \in S_1^2$ olmak üzere $P_i \in \overline{P_j P_k}$ oluyorsa yani P_i, P_j, P_k noktaları aynı jeodezik üzerinde bulunuyorsa bu noktaların oluşturduğu üçgene dejenere üçgen denir.

SSS Üçgenler arasında büzülebilir üçgenler ve büzülebilir olmayan üçgenler olmak üzere yeniden bir sınıflandırma yapılabilir; $e_2 - e_3$ düzleminde alındığında büzülebilir üçgenlerin köşe noktaları orijinden geçen bir doğrunun aynı tarafında iken, büzülebilir olmayan üçgenler için bu mümkün değildir.

Bu sınıflandırmayı yapmanın bir başka yolu da üçgenin kenarlarının uzunluğunu hesaplamaktır. Eğer kenarlarının uzunlukları toplamı 2π den az ise üçgen büzülebilirdir, diğer durumlarda değildir (Asmus, 2009).



Şekil 3.4 Tuhaf (strange) üçgen

3.3 Lorentzian Hiperdüzlemlerin De Sitter Uzayla Kesişimi

$i, j, k = 1, 2, 3$. $i \neq j \neq k$ için H_i, H_j ve H_k Minkowski uzayda hiperdüzlemler olsun. Bu hiperdüzlemlerine ait normaller sırasıyla N_i, N_j ve N_k olmak üzere

$$\begin{vmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.1)$$

olsun. Bu hiperdüzlemlerle de Sitter uzayın arakesitleri

$$P_i = H_j \cap H_k \cap S_1^2$$

$$P_j = H_i \cap H_k \cap S_1^2$$

$$P_k = H_i \cap H_j \cap S_1^2$$

şeklinindedir. Bu noktalar Önerme 2.2.6 göz önünde bulundurularak, S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluştururlar. Oluşan üçgenlerin ayrıtları ise Önerme 2.2.7 ye göre belirlenir.

Özellik 3.3.1 P_i^*, P_j^*, P_k^* sırasıyla P_i, P_j, P_k noktalarının antipodalleri olmak üzere, $A = \{P_i^*, P_j^*, P_k^*, P_i, P_j, P_k\}$ kümesinin elemanları göz önüne alındığında bu noktalardan geçen jeodeziklerin üçgen oluşturabilmesi için $\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{3!} = 2^3$ tane durum incelenmelidir. İncelenen durumlar ileride verilmiştir.

3.3.1 İki time-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi

$$\begin{cases} H_1: a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ H_2: a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ S_1^2: -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

ve H_1 ile H_2 time-like hiperdüzlemler olsun. Bu durumda

$$N_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1}$$

$$N_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 + c_2^2 - 1}$$

dir. (3.2) denklemlerinin birincisinden z değişkeni çekilirse

$$z = -\frac{a_1x+b_1y}{c_1} \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) değeri, (3.2) denklemlerinin ikincisinde yerine yazılırsa

$$a_2x + b_2y - \left(-\frac{a_1x+b_1y}{c_1}\right)c_2 = 0$$

$$a_2c_1x - a_1c_2x + b_2c_1y - b_1c_2y = 0$$

$$(a_2c_1 - a_1c_2)x + (b_2c_1 - b_1c_2)y = 0$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2} y \quad (3.4)$$

bulunur. (3.3) değeri, (3.2) denklemlerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa

$$-x^2 + y^2 + \left(-\frac{a_1x+b_1y}{c_1}\right)^2 = 1$$

$$-c_1^2x^2 + c_1^2y^2 + a_1^2x^2 + 2a_1b_1xy + b_1^2y^2 = c_1^2$$

$$(a_1^2 - c_1^2)x^2 + (b_1^2 + c_1^2)y^2 + 2a_1b_1xy - c_1^2 = 0 \quad (3.5)$$

bulunur. (3.4) değeri, (3.5) denkleminde yazılırsa

$$(a_1^2 - c_1^2) \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}\right)^2 y^2 + (b_1^2 + c_1^2)y^2 + 2a_1b_1 \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}\right) y^2 - c_1^2 = 0$$

$$y^2 \left[(a_1^2 - c_1^2) \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}\right)^2 + (b_1^2 + c_1^2) + 2a_1b_1 \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2}\right) \right] - c_1^2 = 0$$

olur. Gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılarak

$$y^2[(a_1^2 - c_1^2)(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (b_1^2 + c_1^2)(a_2c_1 - a_1c_2)^2 + 2a_1b_1(b_1c_2 - b_2c_1)(a_2c_1 - a_1c_2)] - c_1^2 = 0$$

$$y = \pm \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}} \quad (3.6)$$

elde edilir. Bulunan bu değer (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$x = \pm \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}} \quad (3.7)$$

bulunur. Buna göre (3.3) denkleminde

$$\begin{aligned}
z &= -\frac{a_1(\pm \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}}) + b_1(\pm \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}})}{c_1} \\
z &= -\frac{(\pm \frac{a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}}) + (\pm \frac{a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}})}{c_1} \\
z &= \mp \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{\sqrt{-(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2}} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$H_1: \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1} x + b_1y + c_1z = 0$$

$$H_2: \sqrt{b_2^2 + c_2^2 - 1} x + b_2y + c_2z = 0$$

time-like hiperdüzlemlerinin de Sitter uzayla kesişiminden elde edilen nokta P_{TT} ile gösterilirse ve

$$A_{TT} = \pm(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_{TT} = \pm(c_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2 - 1} - c_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1})$$

$$C_{TT} = \pm(b_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2 - 1} - b_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1})$$

alınırsa

$$P_{TT} = \frac{1}{\sqrt{-(A_{TT})^2 + (B_{TT})^2 + (C_{TT})^2}} (A_{TT}, B_{TT}, C_{TT}) \quad (3.9)$$

olur.

3.3.2 Bir time-like ve bir space-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi

$$N_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1}$$

$$N_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = -1, \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1}$$

olmak üzere

$$H_1: \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1} x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$H_2: \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1} x + b_2 y + c_2 z = 0$$

H_1 time-like ve H_2 space-like hiperdüzlemleri için yukarıdaki benzer işlemler uygulanarak (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri bulunur.

H_1 ve H_2 hiperdüzlemlerinin de Sitter uzayla kesişiminden elde edilen nokta P_{TS} ile gösterilirse ve

$$A_{TS} = \pm(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$B_{TS} = \pm(c_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1} - c_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1})$$

$$C_{TS} = \pm(b_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1} - b_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1})$$

alınırsa

$$P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{-(A_{TS})^2 + (B_{TS})^2 + (C_{TS})^2}} (A_{TS}, B_{TS}, C_{TS}) \quad (3.10)$$

elde edilir.

3.3.3 İki space-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi

$$N_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = -1, \quad a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1}$$

$$N_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = -1, \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1}$$

olmak üzere

$$H_1: \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1} x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$H_2: \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1} x + b_2 y + c_2 z = 0$$

H_1 ve H_2 space-like hiperdüzlemleri için yukarıdaki benzer işlemler uygulanarak (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri bulunur.

H_1 ve H_2 hiperdüzlemlerinin de Sitter uzayla kesişiminden elde edilen nokta P_{SS} ile gösterilirse ve

$$A_{SS} = \pm(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$B_{SS} = \pm(c_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1} - c_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1})$$

$$C_{SS} = \pm(b_1 \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + 1} - b_2 \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1})$$

alınırsa

$$P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{-(A_{SS})^2 + (B_{SS})^2 + (C_{SS})^2}} (A_{SS}, B_{SS}, C_{SS}) \quad (3.11)$$

olur.

3.3.4 İki light-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi

$$N_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0, \quad a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2}$$

$$N_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0, \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 + c_2^2}$$

olmak üzere

$$H_1: \sqrt{b_1^2 + c_1^2} x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$H_2: \sqrt{b_2^2 + c_2^2} x + b_2 y + c_2 z = 0$$

H_1 ve H_2 light-like hiperdüzlemlerine yukarıdaki benzer işlemler uygulanarak (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri bulunur.

H_1 ve H_2 hiperdüzlemlerinin de Sitter uzayla kesişiminden elde edilen nokta P_{LL} ile gösterilirse ve

$$A_{LL} = \pm(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_{LL} = \pm(c_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} - c_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2})$$

$$C_{LL} = \pm(b_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} - b_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2})$$

alınırsa

$$P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{-(A_{LL})^2 + (B_{LL})^2 + (C_{LL})^2}} (A_{LL}, B_{LL}, C_{LL}) \quad (3.12)$$

bulunur.

3.3.5 Bir time-like ve bir light-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi

$$N_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1}$$

$$N_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0, \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 + c_2^2}$$

olmak üzere

$$H_1: \sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1} x + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$H_2: \sqrt{b_2^2 + c_2^2} x + b_2 y + c_2 z = 0$$

H_1 time-like ve H_2 light-like hiperdüzlemlerine yukarıdaki benzer işlemler uygulanarak (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri bulunur.

H_1 ve H_2 hiperdüzlemlerinin de Sitter uzayla kesişiminden elde edilen nokta P_{TL} ile gösterilirse ve

$$A_{TL} = \pm(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_{TL} = \pm(c_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} - c_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1})$$

$$C_{TL} = \pm(b_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} - b_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2 - 1})$$

alınırsa

$$P_{TL} = \frac{1}{\sqrt{-(A_{TL})^2 + (B_{TL})^2 + (C_{TL})^2}} ((A_{TL}, B_{TL}, C_{TL})) \quad (3.13)$$

elde edilir.

3.3.6 Bir space-like ve bir light-like hiperdüzlemin de Sitter uzayla kesişimi

$$N_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \langle N_1, N_1 \rangle_L = -a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = -1, \quad a_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1}$$

$$N_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \langle N_2, N_2 \rangle_L = -a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 0, \quad a_2 = \sqrt{b_2^2 + c_2^2}$$

olmak üzere

$$H_1: \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1}x + b_1y + c_1z = 0$$

$$H_2: \sqrt{b_2^2 + c_2^2}x + b_2y + c_2z = 0$$

H_1 space-like ve H_2 light-like hiperdüzlemlerine yukarıdaki benzer işlemler uygulanarak (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadeleri bulunur.

H_1 ve H_2 hiperdüzlemlerinin de Sitter uzayla kesişiminden elde edilen nokta P_{SL} ile gösterilirse ve

$$A_{SL} = \pm(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_{SL} = \pm(c_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} - c_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1})$$

$$C_{SL} = \pm(b_1\sqrt{b_2^2 + c_2^2} - b_2\sqrt{b_1^2 + c_1^2 + 1})$$

alınırsa

$$P_{SL} = \frac{1}{\sqrt{-(A_{SL})^2 + (B_{SL})^2 + (C_{SL})^2}} (A_{SL}, B_{SL}, C_{SL}). \quad (3.14)$$

bulunur.

Yukarıda verilen ifadelerin benzerleri (İmer, 2010) da da görülebilir.

3.4 Lorentzian Hiperdüzlemlerin De Sitter Uzay ile Kesişimiyle Elde Edilen Üçgenler

3.4.1 TTS Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L > 0$, $\langle N_j, N_j \rangle_L > 0$, $\langle N_k, N_k \rangle_L < 0$ olmak üzere $\langle N_i, N_j \rangle_L < 0$, $\langle N_i, N_k \rangle_L > 0$, $\langle N_j, N_k \rangle_L > 0$ ise H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarından iki tanesi time-like, bir tanesi space-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{3}x + 2z = 0$$

$$H_2: \sqrt{3}x - 2z = 0$$

$$H_3: -\sqrt{2}x + y = 0$$

hiperdüzlemleri alınırsa

$$N_1 = (\sqrt{3}, 0, 2), \langle N_1, N_1 \rangle = 1$$

$$N_2 = (\sqrt{3}, 0, -2), \langle N_2, N_2 \rangle = 1$$

$$N_3 = (-\sqrt{2}, 1, 0), \langle N_3, N_3 \rangle = -1$$

olduğundan H_1 ve H_2 time-like hiperdüzlemler, H_3 space-like hiperdüzlemdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_2: \sqrt{3}x - 2z = 0$$

$$H_3: -\sqrt{2}x + y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.10) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{TS}$ noktası

$${}_1P_{TS} = (x, y, z) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{7}}, \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)$$

şeklinde olur.

$$H_1: \sqrt{3} + 2z = 0$$

$$H_3: -\sqrt{2}x + y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.10) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{TS}$ noktası

$${}_2P_{TS} = (x, y, z) = \left(\mp \frac{2}{\sqrt{7}}, \mp \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: \sqrt{3} + 2z = 0$$

$$H_2: \sqrt{3}x - 2z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.9) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{TT}$ noktası

$${}_3P_{TT} = (x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$$

olur.

Bu noktalar

$${}_1P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, -\sqrt{3}), \quad {}_1P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3}), \quad {}_2P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 1, 0), \quad {}_3P_{TT}^* = (0, -1, 0)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{TS}$, ${}_2P_{TS}$, ${}_3P_{TT}$, ${}_1P_{TS}^*$, ${}_2P_{TS}^*$, ${}_3P_{TT}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 1, 0)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_2P_{TS} \rangle_L = -\frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre,

- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_2P_{TS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 2

$${}_1P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 1, 0)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_2P_{TS}^* \rangle_L = \frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre,

- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_2P_{TS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dir.

Bu durumda istenilen üçgensel bölge elde edilmiş olur.

Durum 3

$${}_1P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 1, 0)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS} \rangle_L = \frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 den

- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_2P_{TS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 4

$${}_1P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, -1, 0)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_2P_{TS} \rangle_L = -\frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre,

- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_2P_{TS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Durum 5

$${}_1P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 1, 0)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS}^* \rangle_L = -\frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre,

- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_2P_{TS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Durum 6

$${}_1P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, -1, 0)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS} \rangle_L = \frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 den

- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_2P_{TS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Bu durumda istenilen üçgensel bölge elde edilmiş olur.

Durum 7

$${}_1P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, -1, 0)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_2P_{TS}^* \rangle_L = \frac{1}{7}$$

$$\langle {}_1P_{TS}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_2P_{TS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_1P_{TS}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 8

$${}_1P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, -1, 0)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS}^* \rangle_L = -\frac{1}{7}$$

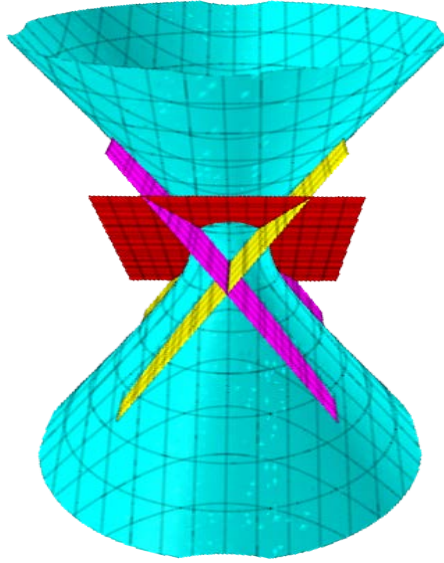
$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\langle {}_2P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

dir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_2P_{TS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_1P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_2P_{TS}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.



Şekil 3.5 De Sitter uzayda TTS üçgen

Sonuç Durum 2 ve Durum 6 da elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.2 TTT Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L > 0, \langle N_j, N_j \rangle_L > 0, \langle N_k, N_k \rangle_L > 0$ olmak üzere $\langle N_i, N_j \rangle_L < 0, \langle N_i, N_k \rangle_L < 0, \langle N_j, N_k \rangle_L > 0$ ise H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarının her üçü de time-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{3}x + 2y = 0$$

$$H_2: \sqrt{3}x - 2y = 0$$

$$H_3: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

hiperdüzlemleri alınır

$$N_1 = (\sqrt{3}, 2, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = 1$$

$$N_2 = (\sqrt{3}, -2, 0), \langle N_2, N_2 \rangle = 1$$

$$N_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \langle N_3, N_3 \rangle = 1$$

olduğundan H_1, H_2, H_3 hiperdüzlemleri time-like hiperdüzlemlerdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında

$$H_2: \sqrt{3}x - 2y = 0$$

$$H_3: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.9) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{TT}$ noktası

$${}_1P_{TT} = (x, y, z) = (\mp\sqrt{2}, \mp\frac{\sqrt{6}}{2}, \mp\frac{\sqrt{6}}{2})$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: \sqrt{3} + 2y = 0$$

$$H_3: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.9) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{TT}$ noktası

$${}_2P_{TT} = (x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, \mp\frac{\sqrt{6}}{2}, \mp\frac{\sqrt{6}}{2})$$

bulunur.

$$H_1: \sqrt{3} + 2y = 0$$

$$H_2: \sqrt{3}x - 2y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.9) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{TT}$ noktası

$${}_3P_{TT} = (x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$$

şeklinde bulunur.

Bu noktalar

$${}_1P_{TT} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}),$$

$${}_1P_{TT}^* = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT} = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}),$$

$${}_2P_{TT}^* = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 0, 1),$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, 0, -1)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}, {}_3P_{TT}, {}_1P_{TT}^*, {}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{TT} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT} = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_2P_{TT} \rangle_L = 5$$

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_2P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 2

$${}_1P_{TT} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT}^* = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT} = (0,0,1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^* \rangle_L = -5$$

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_2P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Durum 3

$${}_1P_{TT}^* = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT} = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT} = (0,0,1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_2P_{TT} \rangle_L = -5$$

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_2P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dir.
- ${}_2P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 4

$${}_1P_{TT} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT} = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0,0,-1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_2P_{TT} \rangle_L = 5$$

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

dir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_2P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 5

$${}_1P_{TT}^* = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$${}_2P_{TT}^* = \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$$

$${}_3P_{TT} = (0,0,1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_2P_{TT}^* \rangle_L = 5$$

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_2P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

- ${}_2P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 6

$${}_1P_{TT}^* = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT} = (\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0,0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_2P_{TT} \rangle_L = -5$$

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_2P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Durum 7

$${}_1P_{TT} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT}^* = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0,0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^* \rangle_L = -5$$

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_2P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TT}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dir.
- ${}_2P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 8

$${}_1P_{TT}^* = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$${}_2P_{TT}^* = \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_2P_{TT}^* \rangle_L = 5$$

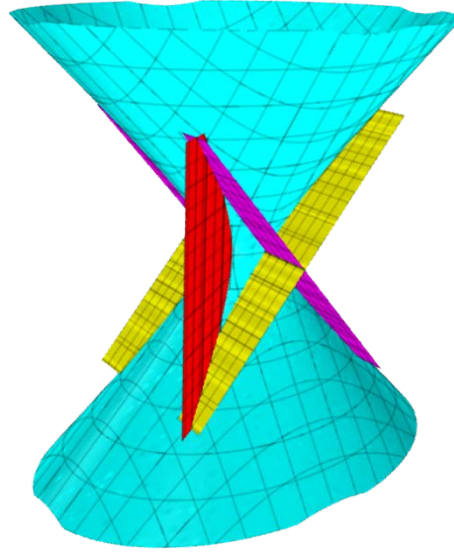
$$\langle {}_1P_{TT}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\langle {}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_2P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TT}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.



Şekil 3.6 De Sitter uzayda TTT üçgen

Sonuç Durum 4 ve Durum 5 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.3 SST Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L > 0$, $\langle N_j, N_j \rangle_L < 0$ ve $\langle N_k, N_k \rangle_L < 0$ olmak üzere H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarından iki tanesi space-like, bir tanesi de time-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_3: z = 0$$

hiperdüzlemleri alınır

$$N_1 = (\sqrt{2}, 1, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = -1$$

$$N_2 = (\sqrt{2}, -1, 0), \langle N_2, N_2 \rangle = -1$$

$$N_3 = (0, 0, 1), \langle N_3, N_3 \rangle = 1$$

olduğundan H_1, H_2 space-like hiperdüzlemler, H_3 time-like hiperdüzlemdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_2: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_3: z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.10) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{ST}$ noktası

$${}_1P_{ST} = (x, y, z) = (\mp 1, \mp \sqrt{2}, 0)$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_3: z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.10) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{ST}$ noktası

$${}_2P_{ST} = (x, y, z) = (\pm 1, \mp \sqrt{2}, 0)$$

olur.

$$H_1: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x - y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.11) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{SS}$ noktası

$${}_3P_{SS} = (x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$$

elde edilir.

Bu noktalar

$${}_1P_{ST} = (-1, -\sqrt{2}, 0),$$

$${}_1P_{ST}^* = (1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST} = (1, -\sqrt{2}, 0),$$

$${}_2P_{ST}^* = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1),$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{ST}$, ${}_2P_{ST}$, ${}_3P_{SS}$, ${}_1P_{ST}^*$, ${}_2P_{ST}^*$, ${}_3P_{SS}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{ST} = (-1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST} = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_2P_{ST} \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_2P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,

- ${}_2P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 2

$${}_1P_{ST} = (-1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST}^* = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_2P_{ST}^* \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_2P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 3

$${}_1P_{ST}^* = (1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST} = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_2P_{ST} \rangle_L = -3$$

$$\langle P_1^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_2P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 4

$${}_1P_{ST} = (-1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST} = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_2P_{ST} \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_2P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 5

$${}_1P_{ST}^* = (1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST}^* = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_2P_{ST}^* \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = 0$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_2P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dir.
- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.
- ${}_2P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 6

$${}_1P_{ST}^* = (1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST}^* = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_2P_{ST}^* \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_2P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 7

$${}_1P_{ST} = (-1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST}^* = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_2P_{ST}^* \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

$$\langle {}_2P_{ST}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_2P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{ST}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 8

$${}_1P_{ST}^* = (1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST}^* = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_2P_{ST}^* \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{ST}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

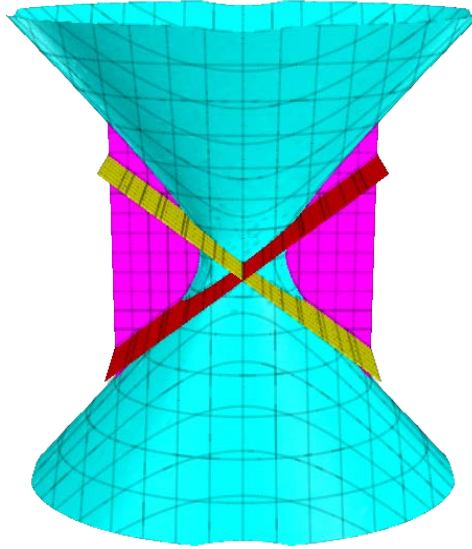
$$\langle {}_2P_{ST}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = 0$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_2P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{ST}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.



Şekil 3.7 De Sitter uzayda SST üçgen

Sonuç Durum 1 ve Durum 4 de elde edilen üçgenler ile sırasıyla Durum 8 ve Durum 5 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.4 STL Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L > 0$, $\langle N_j, N_j \rangle_L = 0$, $\langle N_k, N_k \rangle_L < 0$ olmak üzere H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarından bir tanesi space-like, bir tanesi time-like, bir tanesi de light-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_2: x + \sqrt{2}y = 0$$

$$H_3: x + z = 0$$

hiperdüzlemleri alınırsa

$$N_1 = (\sqrt{2}, -1, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = -1$$

$$N_2 = (1, \sqrt{2}, 0), \langle N_2, N_2 \rangle = 1$$

$$N_3 = (1, 0, 1), \langle N_3, N_3 \rangle = 0$$

olduğundan H_1 time-like, H_2 space-like ve H_3 light-like hiperdüzlemlerdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_2: x + \sqrt{2}y = 0$$

$$H_3: x + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.14) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{TL}$ noktası

$${}_1P_{TL} = (x, y, z) = (\pm\sqrt{2}, \mp 1, \pm\sqrt{2})$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_3: x + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.13) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{SL}$ noktası

$${}_2P_{SL} = (x, y, z) = (\mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp 1, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$$

olur.

$$H_1: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_2: x + \sqrt{2}y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.10) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{ST}$ noktası

$${}_3P_{ST} = (x, y, z) = (0, 0, \mp 1)$$

şeklinde elde edilir.

Bu noktalar,

$${}_1P_{TL} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}), \quad {}_1P_{TL}^* = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad {}_2P_{SL}^* = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$${}_3P_{ST} = (0, 0, -1), \quad {}_3P_{ST}^* = (0, 0, 1)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{TL}, {}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}, {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{ST}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{TL} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{SL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{ST} \rangle_L = -\sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{ST} \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

2. Durum

$${}_1P_{TL} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST} = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{ST} \rangle_L = -\sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{ST} \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 3

$${}_1P_{TL}^* = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{SL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{ST} \rangle_L = \sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{ST} \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 4

$${}_1P_{TL} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{SL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = \sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 5

$${}_1P_{TL}^* = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{ST} \rangle_L = \sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{ST} \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{ST}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 6

$${}_1P_{TL}^* = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{SL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = -\sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 7

$${}_1P_{TL} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = \sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 8

$${}_1P_{TL}^* = (-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = 1$$

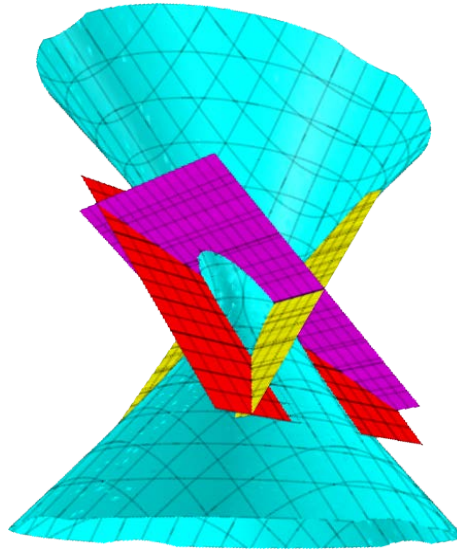
$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = -\sqrt{2}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{ST}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.



Şekil 3.8 De Sitter uzayda STL üçgen

Sonuç Durum 4 ve Durum 5 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.5 SSL Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L < 0, \langle N_j, N_j \rangle_L < 0, \langle N_k, N_k \rangle_L = 0$ olmak üzere H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarından iki tanesi space-like, bir tanesi de light-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{5}x - 2y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_3: 3x + 3z = 0$$

hiperdüzlemleri alınırsa

$$N_1 = (\sqrt{5}, -2, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = -1$$

$$N_2 = (\sqrt{2}, 1, 0), \langle N_2, N_2 \rangle = -1$$

$$N_3 = (3, 0, 3), \langle N_3, N_3 \rangle = 0$$

olduğundan H_1, H_2 space-like hiperdüzlemler, H_3 light-like hiperdüzlemdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_2: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_3: 3x + 3z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.14) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{SL}$ noktası

$${}_1P_{SL} = (x, y, z) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklindedir.

$$H_1: \sqrt{5}x - 2y = 0$$

$$H_3: 3x + 3z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.14) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{SL}$ noktası

$${}_2P_{SL} = (x, y, z) = \left(\mp \frac{2}{\sqrt{5}}, \mp 1, \mp \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

bulunur.

$$H_1: \sqrt{5}x - 2y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x + y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.11) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{SS}$ noktası

$${}_3P_{SS} = (x, y, z) = (0, 0, \mp 1)$$

olur.

Bu noktalar

$${}_1P_{SL} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad {}_1P_{SL}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad {}_2P_{SL}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, -1), \quad {}_3P_{SS}^* = (0, 0, 1)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{SL}, {}_2P_{SL}, {}_3P_{SS}, {}_1P_{SL}^*, {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{SS}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{SL} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_2P_{SL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 2

$${}_1P_{SL} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 3

$${}_1P_{SL}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_2P_{SL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 4

$${}_1P_{SL} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_2P_{SL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_2P_{SL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 5

$${}_1P_{SL}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 6

$${}_1P_{SL}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0,0,1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 7

$${}_1P_{SL} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{SL}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Durum 8

$${}_1P_{SL}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_2P_{SL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{SL}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

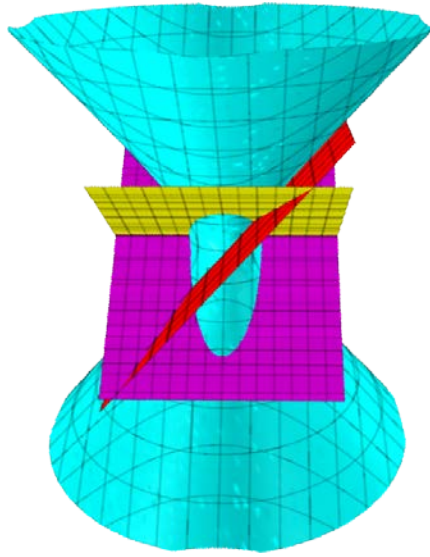
$$\langle {}_2P_{SL}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_2P_{SL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.
- ${}_2P_{SL}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.



Şekil 3.9 De Sitter uzayda SSL Üçgen

Sonuç Durum 1 ve Durum 4 de elde edilen üçgenler ile sırasıyla Durum 8 ve Durum 5 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.6 LLS Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L = 0$, $\langle N_j, N_j \rangle_L = 0$ ve $\langle N_k, N_k \rangle_L < 0$ olmak üzere H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarından iki tanesi light-like, bir tanesi de space-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: x + y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x + y - z = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + z = 0$$

hiperdüzlemleri alınırsa

$$N_1 = (1, 1, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = 0$$

$$N_2 = (\sqrt{2}, 1, -1), \langle N_2, N_2 \rangle = 0$$

$$N_3 = (\sqrt{2}, 0, 1), \langle N_3, N_3 \rangle = -1$$

olduğundan H_1, H_2 light-like hiperdüzlemler, H_3 space-like hiperdüzlemdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_2: \sqrt{2}x + y - z = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.14) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{LS}$ noktası

$${}_1P_{LS} = (x, y, z) = \left(\pm \frac{1}{3}, \mp \frac{2\sqrt{2}}{3}, \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: x + y = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.14) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{LS}$ noktası

$${}_2P_{LS} = (x, y, z) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm 1 \right)$$

şeklinde olur.

$$H_1: x + y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x + y - z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.12) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{LL}$ noktası

$${}_3P_{LL} = (x, y, z) = \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \pm 1 \right)$$

şeklindedir.

Bu noktalar

$${}_1P_{LS} = \frac{1}{3}(1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2}),$$

$${}_1P_{LS}^* = \frac{1}{3}(-1, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, \sqrt{2}),$$

$${}_2P_{LS}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(-1, 1, \sqrt{2}-1),$$

$${}_3P_{LL}^* = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(1, -1, -(\sqrt{2}-1))$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{LS}$, ${}_2P_{LS}$, ${}_3P_{LL}$, ${}_1P_{LS}^*$, ${}_2P_{LS}^*$, ${}_3P_{LL}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{LS} = \frac{1}{3}(1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(-1, 1, \sqrt{2}-1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_2P_{LS} \rangle_L = \frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LS}, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_2P_{LS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.
- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.

Durum 2

$${}_1P_{LS} = \frac{1}{3}(1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(-1, 1, \sqrt{2}-1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_2P_{LS}^* \rangle_L = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LS}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_2P_{LS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.
- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 3

$${}_1P_{LS}^* = \frac{1}{3}(-1, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(-1, 1, \sqrt{2}-1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS} \rangle_L = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LS}, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_2P_{LS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,

- ${}_2P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.

Bu noktalar istenilen üçgenel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 4

$${}_1P_{LS} = \frac{1}{3}(1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL}^* = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(1, -1, -\sqrt{2}+1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_2P_{LS} \rangle_L = \frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LS}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_2P_{LS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.
- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.
- ${}_2P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 5

$${}_1P_{LS}^* = \frac{1}{3}(-1, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(-1, 1, \sqrt{2}-1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS}^* \rangle_L = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_2P_{LS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.
- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.
- ${}_2P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 6

$${}_1P_{LS}^* = \frac{1}{3}(-1, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL}^* = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}(1, -1, -\sqrt{2} + 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS}^* \rangle_L = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_2P_{LS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.

- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 7

$${}_1P_{LS} = \frac{1}{3}(1, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL}^* = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(1, -1, -\sqrt{2}+1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_2P_{LS}^* \rangle_L = \frac{-1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle {}_1P_{LS}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_2P_{LS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{LS}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_2P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 8

$${}_1P_{LS}^* = \frac{1}{3}(-1, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL}^* = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(1, -1, -\sqrt{2}+1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS}^* \rangle_L = \frac{1+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

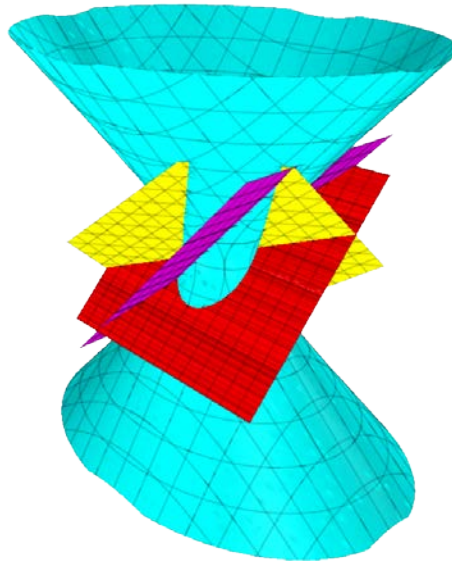
$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LS}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_2P_{LS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dir.
- ${}_1P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LS}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.



Şekil 3.10 De Sitter uzayda LLS Üçgen

Sonuç Durum 3 ve Durum 7 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.7 SSS Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için $\langle N_i, N_i \rangle_L < 0$, $\langle N_j, N_j \rangle_L < 0$ ve $\langle N_k, N_k \rangle_L < 0$ olmak üzere H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarının her üçü de space-like jeodeziktir. Bu üçgenler büzülebilen ve büzülemeyen olmak üzere iki çeşittir.

Herhangi bir $\{P_i, P_j, P_k\}$ köşe noktalarına sahip space-like bir de Sitter üçgenin büzülemeyen üçgen olabilmesi için gerek ve yeter şart

- i. $-1 << P_i, P_j \rangle_L < 0, -1 << P_i, P_k \rangle_L < 0, -1 << P_j, P_k \rangle_L < 0$
- ii. $\langle P_i, P_j \rangle_L = 0$ iken $-1 << P_i, P_k \rangle_L < 0$ ve $-1 << P_j, P_k \rangle_L < 0$

koşullarından birinin sağlanmasıdır.

Yukarıdaki iki şartın haricinde

$$-1 << P_i, P_j \rangle_L < 1, -1 << P_i, P_k \rangle_L < 1, -1 << P_j, P_k \rangle_L < 1$$

eşitsizliklerini sağlayan $\{P_i, P_j, P_k\}$ köşe noktalarına sahip her space-like üçgen büzülebilir üçgendir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + z = 0$$

hiperdüzlemleri alınırsa

$$N_1 = (\sqrt{2}, 1, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = -1$$

$$N_2 = (\sqrt{2}, -1, 0), \langle N_2, N_2 \rangle = -1$$

$$N_3 = (\sqrt{2}, 0, 1), \langle N_3, N_3 \rangle = -1$$

olduğundan H_1, H_2 ve H_3 space-like hiperdüzlemlerdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_2: \sqrt{2}x - y = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.11) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{SS}$ noktası

$${}_1P_{SS} = (x, y, z) = \left(\mp \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.11) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{SS}$ noktası

$${}_2P_{SS} = (x, y, z) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

olur.

$$H_1: \sqrt{2}x + y = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x - y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.11) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{SS}$ noktası

$${}_3P_{SS} = (x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$$

şeklindedir.

Bu noktalar

$${}_1P_{SS} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \quad {}_1P_{SS}^* = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$${}_2P_{SS} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), \quad {}_2P_{SS}^* = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

$${}_3P_{SS} = (0,0,1), \quad {}_3P_{SS}^* = (0,0,-1)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{SS}$, ${}_2P_{SS}$, ${}_3P_{SS}$, ${}_1P_{SS}^*$, ${}_2P_{SS}^*$, ${}_3P_{SS}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS} = (0,0,1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_2P_{SS} \rangle_L = \frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_2P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,

- ${}_2P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülebilir bir üçgendir.

Durum 2

$${}_1P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS} = (0,0,1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_2P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Yukarıdaki koşulu sağladığından bu üçgen büzülemeyen bir üçgendir.

Durum 3

$${}_1P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS} = (0,0,1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_2P_{SS} \rangle_L = -\frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_2P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülebilir bir üçgendir.

Durum 4

$${}_1P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS}^* = (0,0,-1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_2P_{SS} \rangle_L = \frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_2P_{SS}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülebilir bir üçgendir.

Durum 5

$${}_1P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_2P_{SS}^* \rangle_L = \frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_2P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülebilir bir üçgendir.

Durum 6

$${}_1P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_2P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_2P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülemeyen bir üçgendir.

Durum 7

$${}_1P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\langle {}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_2P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülebilir bir üçgendir.

Durum 8

$${}_1P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_2P_{SS}^* \rangle_L = \frac{1}{3}$$

$$\langle {}_1P_{SS}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

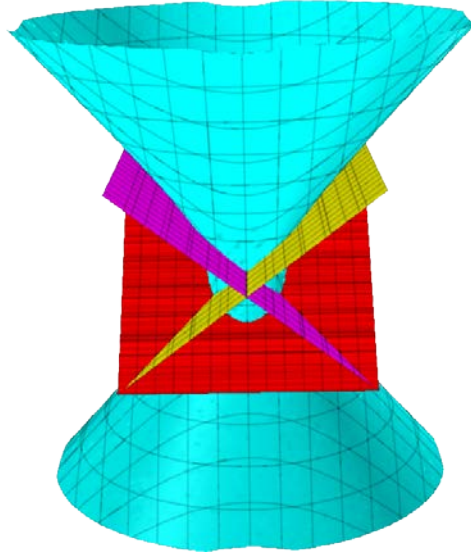
$$\langle {}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS}^* \rangle_L = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

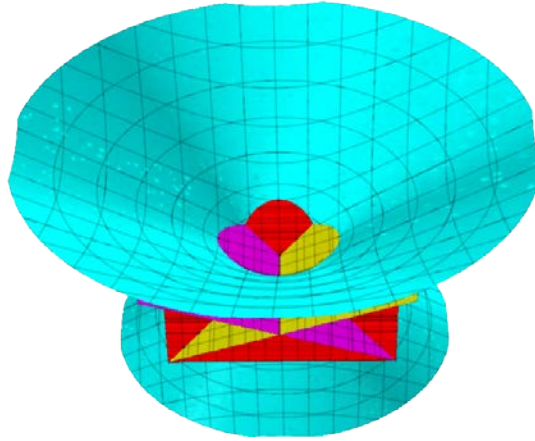
- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_2P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_1P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like,
- ${}_2P_{SS}^*$ ile ${}_3P_{SS}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası space-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır. Bu üçgen büzülebilir bir üçgendir.



Şekil 3.11 De Sitter uzayda SSS büzülebilir üçgen

Sonuç Durum 1, 3 ve 4. de elde edilen üçgenler ile sırasıyla Durum 8, 7 ve 5. de elde edilen üçgenler büzülebilir simetrik üçgenlerdir.



Şekil 3.12 De Sitter uzayda SSS büzülemez üçgen

Sonuç Durum 2 ve Durum 6 da elde edilen üçgenler büzülemez simetrik üçgenlerdir.

3.4.8 LLL Üçgen

$i, j, k = 1, 2, 3$ ve $i \neq j \neq k$ için

$$\langle N_i, N_i \rangle_L = 0, \langle N_j, N_j \rangle_L = 0, \langle N_k, N_k \rangle_L = 0, \langle N_l, N_l \rangle_L = 0$$

olmak üzere H_i, H_j, H_k, H_l hiperdüzlemleri için $\begin{vmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} N_j \\ N_k \\ N_l \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} N_i \\ N_k \\ N_l \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} N_i \\ N_j \\ N_l \end{vmatrix} \neq 0$

sağlanıyorsa $H_i, H_j ; H_i, H_k ; H_i, H_l$ hiperdüzlemlerinin S_1^2 nin arakesitinden elde edilen P_k, P_l, P_j noktaları S_1^2 üzerinde her üç ayrıtı light-like jeodezik olan bir üçgensel bölge oluşturur. Ayrıca bu üçgenler dejenere üçgenlerdir.

Örnek

$$H_1: \sqrt{2}x + y + z = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x - y - z = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + y - z = 0$$

$$H_4: \sqrt{2}x - y + z = 0$$

hiperdüzlemleri alınır

$$N_1 = (\sqrt{2}, 1, 1), \langle N_1, N_1 \rangle = 0$$

$$N_2 = (\sqrt{2}, -1, -1), \langle N_2, N_2 \rangle = 0$$

$$N_3 = (\sqrt{2}, 1, -1), \langle N_3, N_3 \rangle = 0$$

$$N_4 = (\sqrt{2}, -1, 1), \langle N_4, N_4 \rangle = 0$$

olduğundan H_1, H_2, H_3 ve H_4 light-like (null) hiperdüzlemlerdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0, \det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, \det \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dir. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında,

$$H_1: \sqrt{2}x + y + z = 0$$

$$H_2: \sqrt{2}x - y - z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.12) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{LL}$ noktası

$${}_3P_{LL} = (x, y, z) = \left(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

şeklindedir.

$$H_1: \sqrt{2}x + y + z = 0$$

$$H_3: \sqrt{2}x + y - z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.12) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{LL}$ noktası

$${}_2P_{LL} = (x, y, z) = (\mp 1, \pm \sqrt{2}, 0)$$

olur.

$$H_1: \sqrt{2}x + y + z = 0$$

$$H_4: \sqrt{2}x - y + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.12) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{LL}$ noktası

$${}_1P_{LL} = (x, y, z) = (\pm 1, 0, \pm \sqrt{2})$$

şeklinde bulunur.

Bu noktalar

$${}_1P_{LL} = (1, 0, \sqrt{2}), \quad {}_1P_{LL}^* = (-1, 0, -\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
{}_2P_{LL} &= (-1, \sqrt{2}, 0), & {}_2P_{LL}^* &= (1, -\sqrt{2}, 0) \\
{}_3P_{LL} &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & {}_3P_{LL}^* &= \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{LL}, {}_2P_{LL}, {}_3P_{LL}, {}_1P_{LL}^*, {}_2P_{LL}^*, {}_3P_{LL}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$$\begin{aligned}
{}_1P_{LL} &= (1, 0, \sqrt{2}) \\
{}_2P_{LL} &= (-1, \sqrt{2}, 0) \\
{}_3P_{LL} &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\langle {}_1P_{LL}, {}_2P_{LL} \rangle_L &= 1 \\
\langle {}_1P_{LL}, {}_3P_{LL} \rangle_L &= 1 \\
\langle {}_2P_{LL}, {}_3P_{LL} \rangle_L &= 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_2P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_2P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 2

$${}_1P_{LL} = (1, 0, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL}^* = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_2P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LL}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7ye göre

- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_2P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.
- ${}_2P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 3

$${}_1P_{LL}^* = (-1, 0, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL} = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_2P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LL}, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_2P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.

Durum 4

$${}_1P_{LL} = (1, 0, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL} = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_2P_{LL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LL}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_2P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.
- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 5

$${}_1P_{LL}^* = (-1, 0, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL}^* = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_2P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LL}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_2P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 6

$${}_1P_{LL}^* = (-1, 0, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL} = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_2P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LL}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_2P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_2P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 7

$${}_1P_{LL} = (1, 0, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL}^* = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_2P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LL}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_2P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LL}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.

Durum 8

$${}_1P_{LL}^* = (-1, 0, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL}^* = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_2P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{LL}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

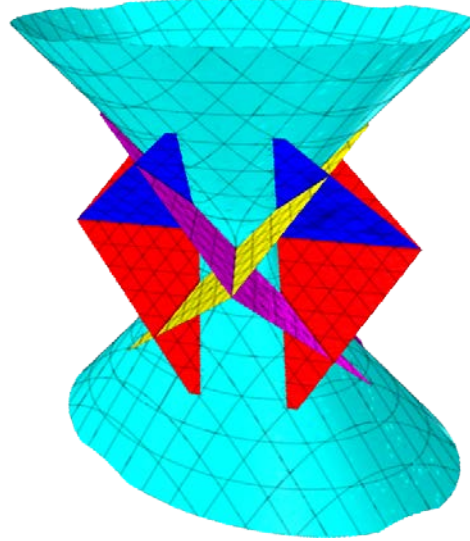
$$\langle {}_2P_{LL}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_2P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_2P_{LL}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.



Şekil 3.13 De Sitter uzayda LLL dejenere üçgen

Sonuç Durum 1 ve Durum 8 de elde edilen üçgenler simetrik dejenere üçgenlerdir.

3.4.9 TTL Üçgen

$\langle N_i, N_i \rangle_L > 0, \langle N_j, N_j \rangle_L > 0, \langle N_k, N_k \rangle_L = 0$ olmak üzere $\langle N_i, N_j \rangle_L < 0,$
 $\langle N_i, N_k \rangle_L < 0, \langle N_j, N_k \rangle_L > 0$ ($i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$) ise H_i, H_j, H_k
hiperdüzlemleri ile S_1^2 nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarının iki tanesi time-like, bir tanesi light-like jeodeziktir.

Yukarıdaki koşula denk olarak aşağıdaki şartlardan herhangi birisi sağlanırsa yine aynı özellikte bir üçgen elde edilir.

- i. Light-like (null) düzlem time-like düzlemlerin normallerinin gerdiği düzlem olmamalıdır.
- ii. İki time-like düzlem hiperbolik uzayda kesişmemelidirler çünkü böyle bir durumda de Sitter uzayda kesişmezler.
- iii. Hiperdüzlemlerin normaleri lineer bağımsız olmalıdır.

Örnek

$$H_1: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

$$H_2: x + y + z = 0$$

$$H_3: x - y = 0$$

hiperdüzlemleri alınır

$$N_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \langle N_1, N_1 \rangle = 1$$

$$N_2 = (1, 1, 1), \langle N_2, N_2 \rangle = 1$$

$$N_3 = (1, -1, 0), \langle N_3, N_3 \rangle = 0$$

olduğundan H_1, H_2 time-like hiperdüzlemler, H_3 light-like (null) hiperdüzlemdir.

Ayrıca

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında

$$H_2: x + y + z = 0$$

$$H_3: x - y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.13) formülleri uygulanırsa ${}_1P_{TL}$ noktası

$${}_1P_{TL} = (x, y, z) = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1 \right)$$

şeklinde bulunur.

$$H_1: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

$$H_3: x - y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.13) formülleri uygulanırsa ${}_2P_{TL}$ noktası

$${}_2P_{TL} = (x, y, z) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

elde edilir.

$$H_1: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

$$H_2: x + y + z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.9) formülleri uygulanırsa ${}_3P_{TT}$ noktası,

$${}_3P_{TT} = (x, y, z) = \left(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

bulunur.

Bu noktalar

$${}_1P_{TL} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right),$$

$${}_1P_{TL}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right)$$

$${}_2P_{TL} = (1, 1, 1),$$

$${}_2P_{TL}^* = (-1, -1, -1)$$

$${}_3P_{TT} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$${}_3P_{TT}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{TL}$, ${}_2P_{TL}$, ${}_3P_{TT}$, ${}_1P_{TL}^*$, ${}_2P_{TL}^*$, ${}_3P_{TT}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{TL} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$${}_2P_{TL} = (1, 1, 1)$$

$${}_3P_{TT} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{TL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \sqrt{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{TL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 2

$${}_1P_{TL} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$${}_2P_{TL}^* = (-1, -1, -1)$$

$${}_3P_{TT} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{TL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\sqrt{2}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{TL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_2P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 3

$${}_1P_{TL}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$${}_2P_{TL} = (1, 1, 1)$$

$${}_3P_{TT} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{TL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \sqrt{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{TL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Durum 4

$${}_1P_{TL} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$${}_2P_{TL} = (1, 1, 1)$$

$${}_3P_{TT}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{TL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\sqrt{2}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{TL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 5

$${}_1P_{TL}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right)$$

$${}_2P_{TL}^* = (-1, -1, -1)$$

$${}_3P_{TT} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{TL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\sqrt{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{TL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 6

$${}_1P_{TL}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$${}_2P_{TL}^* = (1, 1, 1)$$

$${}_3P_{TT}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{TL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\sqrt{2}$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{TL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

- ${}_2P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 7

$${}_1P_{TL} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$${}_2P_{TL}^* = (-1, -1, -1)$$

$${}_3P_{TT}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{TL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\langle {}_2P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \sqrt{2}$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_2P_{TL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{TL}$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Durum 8

$${}_1P_{TL}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right)$$

$${}_2P_{TL}^* = (-1, -1, -1)$$

$${}_3P_{TT}^* = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_2P_{TL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_1P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

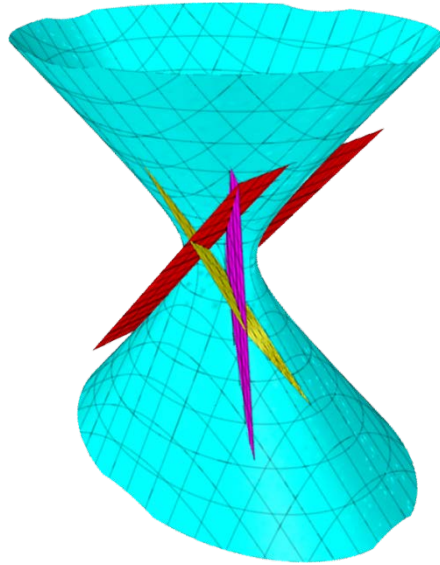
$$\langle {}_2P_{TL}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \sqrt{2}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_2P_{TL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_1P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_2P_{TL}^*$ ile ${}_3P_{TT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.



Şekil 3.14 De Sitter uzayda TTL üçgen

Sonuç Durum 1 ve Durum 8 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.4.10 LLT Üçgen

$\langle N_i, N_i \rangle_L = 0, \langle N_j, N_j \rangle_L = 0, \langle N_k, N_k \rangle_L > 0$ ($i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$) olmak üzere $\langle N_i, N_j \rangle_L < 0, \langle N_i, N_k \rangle_L < 0, \langle N_j, N_k \rangle_L > 0$ ise H_i, H_j, H_k hiperdüzlemleri ile S_1^2 'nin arakesiti S_1^2 üzerinde bir üçgensel bölge oluşturur. Bu üçgenin ayrıtlarının iki tanesi light-like, bir tanesi time-like jeodeziktir.

Örnek

$$H_1: x + y = 0$$

$$H_2: x - y = 0$$

$$H_3: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

hiperdüzlemleri alınır

$$N_1 = (1, 1, 0), \langle N_1, N_1 \rangle = 0$$

$$N_2 = (1, -1, 0), \langle N_2, N_2 \rangle = 0$$

$$N_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \langle N_3, N_3 \rangle = 1$$

olduğundan H_1, H_2 light-like (null) hiperdüzlemler, H_3 time-like hiperdüzlemdir.

Ayrıca,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Dolayısıyla bu hiperdüzlemlerin de Sitter uzay ile arakesitlerine bakıldığında

$$H_2: x - y = 0$$

$$H_3: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.13) formülleri uygulanarak ${}_1P_{LT}$ noktası

${}_1P_{LT} = (x, y, z) = (\mp 1, \mp 1, \mp 1)$ şeklinde bulunur.

$$H_1: x + y = 0$$

$$H_3: \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.13) formülleri uygulanarak ${}_2P_{LT}$ noktası

${}_2P_{LT} = (x, y, z) = (\pm 1, \mp 1, \mp 1)$ şeklinde bulunur.

$$H_1: x + y = 0$$

$$H_2: x - y = 0$$

hiperdüzlemlerine (3.12) formülleri uygulanarak ${}_3P_{LL}$ noktası

${}_3P_{LL} = (x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$ şeklinde bulunur.

Bu noktalar

$${}_1P_{LT} = (-1, -1, -1),$$

$${}_1P_{LT}^* = (1, 1, 1)$$

$${}_2P_{LT} = (1, -1, -1),$$

$${}_2P_{LT}^* = (-1, 1, 1)$$

$${}_3P_{LL} = (0, 0, 1),$$

$${}_3P_{LL}^* = (0, 0, -1)$$

şeklinde alınsın.

Özellik 3.3.1 göz önünde bulundurulursa ${}_1P_{LT}, {}_2P_{LT}, {}_3P_{LL}, {}_1P_{LT}^*, {}_2P_{LT}^*, {}_3P_{LL}^*$ noktaları arasından seçilebilecek 8 farklı nokta üçlüsü vardır.

Durum 1

$${}_1P_{LT} = (-1, -1, -1)$$

$${}_2P_{LT} = (1, -1, -1)$$

$${}_3P_{LL} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_2P_{LT} \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LT}, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_2P_{LT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 2

$${}_1P_{LT} = (-1, -1, -1)$$

$${}_2P_{LT}^* = (-1, 1, 1)$$

$${}_3P_{LL} = (0, 0, 1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_2P_{LT}^* \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LT}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_2P_{LT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.

Durum 3

$${}_1P_{LT}^* = (1,1,1)$$

$${}_2P_{LT} = (1, -1, -1)$$

$${}_3P_{LL} = (0,0,1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_2P_{LT} \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LT}, {}_3P_{LL} \rangle_L = -1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}^*$ ile ${}_2P_{LT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.
- ${}_2P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 4

$${}_1P_{LT} = (-1, -1, -1)$$

$${}_2P_{LT} = (1, -1, -1)$$

$${}_3P_{LL}^* = (0,0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_2P_{LT} \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LT}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_2P_{LT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_2P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 5

$${}_1P_{LT}^* = (1,1,1)$$

$${}_2P_{LT}^* = (-1,1,1)$$

$${}_3P_{LL} = (0,0,1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_2P_{LT}^* \rangle_L = 3$$

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LT}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = 1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_2P_{LT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like,
- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like,
- ${}_2P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dır.

Bu noktalar istenilen üçgensel bölgeyi oluşturmaktadır.

Durum 6

$${}_1P_{LT}^* = (1,1,1)$$

$${}_2P_{LT} = (1, -1, -1)$$

$${}_3P_{LL}^* = (0,0,-1)$$

noktaları alınırsa

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_2P_{LT} \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LT}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

bulunur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}^*$ ile ${}_2P_{LT}$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.

Durum 7

$${}_1P_{LT} = (-1,-1,-1)$$

$${}_2P_{LT}^* = (-1,1,1)$$

$${}_3P_{LL}^* = (0,0,-1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_2P_{LT}^* \rangle_L = -3$$

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = 1$$

$$\langle {}_2P_{LT}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

elde edilir.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_2P_{LT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_1P_{LT}$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası light-like dir.
- ${}_2P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.

Durum 8

$${}_1P_{LT}^* = (1,1,1)$$

$${}_2P_{LT}^* = (-1,1,1)$$

$${}_3P_{LL}^* = (0,0,-1)$$

noktaları alınırsa

$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_2P_{LT}^* \rangle_L = 3$$

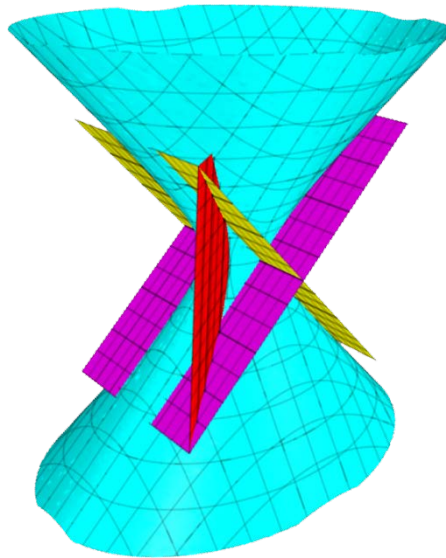
$$\langle {}_1P_{LT}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

$$\langle {}_2P_{LT}^*, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = -1$$

olur.

Önerme 2.2.7 ye göre

- ${}_1P_{LT}^*$ ile ${}_2P_{LT}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası time-like dır.
- ${}_1P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.
- ${}_2P_{LT}^*$ ile ${}_3P_{LL}^*$ noktalarını birleştiren jeodezik parçası yoktur.



Şekil 3.15 De Sitter uzayda LLT üçgen

Sonuç Durum 4 ve Durum 5 de elde edilen üçgenler simetrik üçgenlerdir.

3.5 De Sitter Üçgenlerde Üçgen Eşitsizliği

Hangi tipteki $\{A, B, C\}$ de Sitter üçgenlerinde

$$d_{HS}(A, C) \leq d_{HS}(A, B) + d_{HS}(B, C)$$

üçgen eşitsizliğinin korunduğu araştırılmıştır.

LLS ve LLT üçgenleri için bu eşitsizlik sağlanmazken, SSL, TTL ve STL üçgenleri için ikizkenar olmaları durumunda sağlanır. Ancak bu STL üçgenleri için yalnızca bir tesadüftür.

LLL üçgenlerinde eşitsizlik Teorem 2.2.5 gereği aşikar olarak sağlanır. Büzülebilir olmayan SSS üçgenleri için de durum böyledir. (Bu, kenar uzunlukları toplamının 2π den büyük olması ile sağlanır, çünkü her bir kenar yalnızca π den daha az bir uzunluğa sahip olabilir.)

Dejenere üçgenler için üçgen eşitsizliği sağlanır.

En az iki tuhaf (strange) kenara sahip olduklarından tuhaf (strange) üçgenler için eşitsizlik aşikar olarak sağlanır.

İki kenarı sonsuz uzunlukta olan imkansız üçgenler için eşitsizlik aşikar olarak sağlanır. Sadece bir kenarı sonsuz uzunlukta olan imkansız üçgenler için üçgen eşitsizliği sağlanmaz.

Dejenere olmayan TTT üçgenleri için üçgen eşitsizliği sağlanmaz.

SST ve TTS üçgenleri için üçgen eşitsizliği genellikle sağlanmaz (Asmus, 2009).

Örnek 3.5.1

3.4.1 TTS üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{TS}^* = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$${}_2P_{TS} = \frac{1}{\sqrt{7}}(-2, -2\sqrt{2}, -\sqrt{3})$$

$${}_3P_{TT}^* = (0, -1, 0)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa,

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS} \rangle_L = \| {}_1P_{TS}^* \|_L \| {}_2P_{TS} \|_L \cos \eta({}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS})$$

$$\frac{1}{7} = \cos \eta({}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS})$$

$$\eta({}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = 1,42$$

$$\langle {}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \| {}_1P_{TS}^* \|_L \| {}_3P_{TT}^* \|_L \cosh \eta({}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^*)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \cosh \eta({}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^*)$$

$$\eta({}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^*) = \cosh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) = 0,36$$

$$\langle {}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^* \rangle_L = \| {}_2P_{TS} \|_L \| {}_3P_{TT}^* \|_L \cosh \eta({}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^*)$$

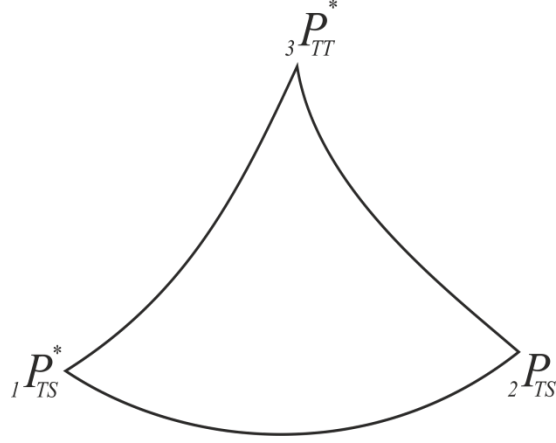
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \cosh \eta({}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^*)$$

$$\eta({}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^*) = \cosh^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) = 0,36$$

elde edilir.

$$\eta({}_1P_{TS}^*, {}_3P_{TT}^*) \not\leq \eta({}_1P_{TS}^*, {}_2P_{TS}) + \eta({}_2P_{TS}, {}_3P_{TT}^*)$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



Şekil 3.16 TTS Üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.2

3.4.2 TTT üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{TT} = (-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_2P_{TT}^* = (-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

$${}_3P_{TT} = (0,0,1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^* \rangle_L = \| {}_1P_{TT} \|_L \| {}_2P_{TT}^* \|_L \cosh \eta({}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^*)$$

$$-5 = \cosh \eta({}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^*)$$

$$\eta({}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^*) = \cosh^{-1}(|-5|) = 2,29$$

$$\langle {}_1P_{TT}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \| {}_1P_{TT} \|_L \| {}_3P_{TT} \|_L \cosh \eta({}_1P_{TT}, {}_3P_{TT})$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} = \cosh \eta({}_1P_{TT}, {}_3P_{TT})$$

$$\eta({}_1P_{TT}, {}_3P_{TT}) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0,65$$

$$\langle {}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT} \rangle_L = \| {}_2P_{TT}^* \|_L \| {}_3P_{TT} \|_L \cosh \eta({}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT})$$

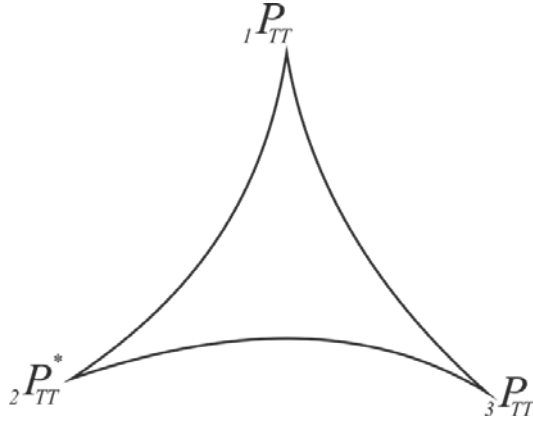
$$\frac{\sqrt{6}}{2} = \cosh \eta({}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT})$$

$$\eta({}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT}) = \cosh^{-1}\left(\left|-\frac{\sqrt{6}}{2}\right|\right) = 0,65$$

elde edilir.

$$\eta({}_1P_{TT}, {}_2P_{TT}^*) \not\leq \eta({}_1P_{TT}, {}_3P_{TT}) + \eta({}_2P_{TT}^*, {}_3P_{TT})$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



Şekil 3.17 TTT Üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.3

3.4.3 SST üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{ST} = (-1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_2P_{ST} = (1, -\sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, 1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_2P_{ST} \rangle_L = \| {}_1P_{ST} \|_L \| {}_2P_{ST} \|_L \cosh \eta({}_1P_{ST}, {}_2P_{ST})$$

$$3 = \cosh \eta({}_1P_{ST}, {}_2P_{ST})$$

$$\eta({}_1P_{ST}, {}_2P_{ST}) = \cosh^{-1}(3) = 1,76$$

$$\langle {}_1P_{ST}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_1P_{ST} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_1P_{ST}, {}_3P_{SS})$$

$$0 = \cos \eta({}_1P_{ST}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_1P_{ST}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1}(0) = 1,57$$

$$\langle {}_2P_{ST}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_2P_{ST} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_2P_{ST}, {}_3P_{SS})$$

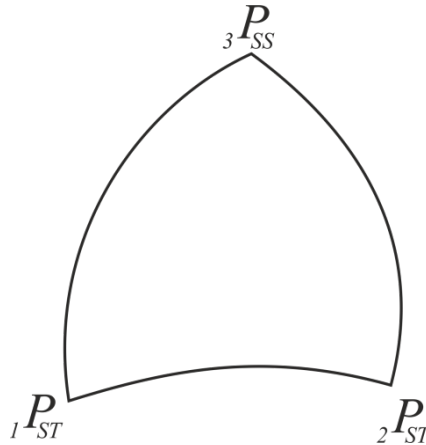
$$0 = \cos \eta({}_2P_{ST}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_2P_{ST}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1}(0) = 1,57$$

bulunur.

$$\eta({}_1P_{ST}, {}_2P_{ST}) \leq \eta({}_1P_{ST}, {}_3P_{SS}) + \eta({}_2P_{ST}, {}_3P_{SS})$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaktadır.



Şekil 3.18 SST Üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.4

3.4.4 STL üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{TL} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$${}_3P_{ST}^* = (0, 0, 1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{SL} \rangle_L = \left\| {}_1P_{TL} \right\|_L \left\| {}_2P_{SL} \right\|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{TL} {}_2P_{SL}$ null bir vektördür, dolayısıyla $\left\| {}_1P_{TL} {}_2P_{SL} \right\|_L = 0$ dir.

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = \left\| {}_1P_{TL} \right\|_L \left\| {}_3P_{ST}^* \right\|_L \cosh \eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^*)$$

$$\sqrt{2} = \cosh \eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^*)$$

$$\eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^*) = \cosh^{-1}(\sqrt{2}) = 0,88$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^* \rangle_L = \left\| {}_2P_{SL} \right\|_L \left\| {}_3P_{ST}^* \right\|_L \cos \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^*)$$

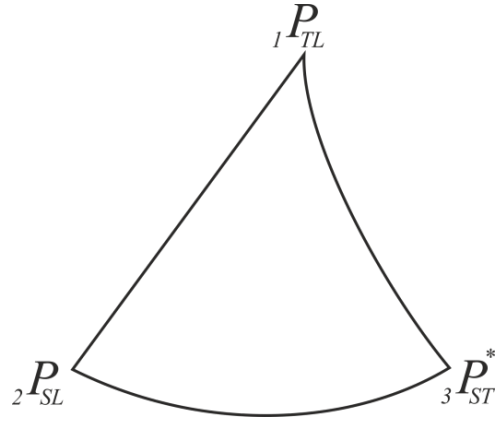
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^*)$$

$$\eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^*) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,78$$

olur.

$$\eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{ST}^*) \not\leq \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{ST}^*) + \left\| {}_1P_{TL} {}_2P_{SL} \right\|_L$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



Şekil 3.19 STL Üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.5

3.4.5 SSL üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{SL} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$${}_2P_{SL} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -1, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$${}_3P_{SS} = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_2P_{SL} \rangle_L = \| {}_1P_{SL} \|_L \| {}_2P_{SL} \|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{SL} \cdot {}_2P_{SL}$ null bir vektördür ve $\| {}_1P_{SL} \cdot {}_2P_{SL} \|_L = 0$ dır.

$$\langle {}_1P_{SL}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_1P_{SL} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{SS})$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \eta({}_1P_{SL}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_1P_{SL}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1} \left(\left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \right| \right) = 0,78$$

$$\langle {}_2P_{SL}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_2P_{SL} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{SS})$$

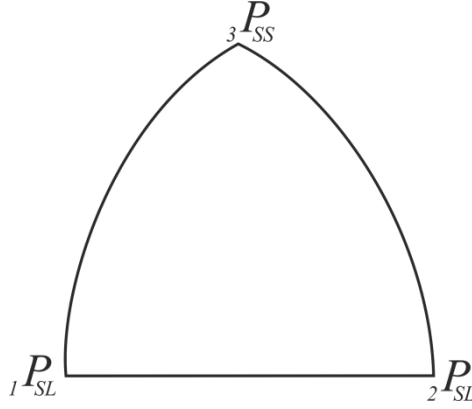
$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0,46$$

elde edilir.

$$\eta({}_1P_{SL}, {}_3P_{SS}) \not\leq \eta({}_2P_{SL}, {}_3P_{SS}) + \| {}_1P_{SL} {}_2P_{SL} \|_L$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



Şekil 3.20 SSL Üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.6

3.4.6 LLS üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{LS}^* = \frac{1}{3}(-1, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{LS} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{LL} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(-1, 1, \sqrt{2}-1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS} \rangle_L = \| {}_1P_{LS}^* \|_L \| {}_2P_{LS} \|_L \cos \eta({}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS})$$

$$\frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \cos \eta({}_1P_{LS}^*, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS}) = \cos^{-1} \left(\left| \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \right| \right) = 2,69$$

$$\langle {}_1P_{LS}^*, {}_3P_{LL} \rangle_L = \| {}_1P_{LS}^* \|_L \| {}_3P_{LL} \|_L = 1$$

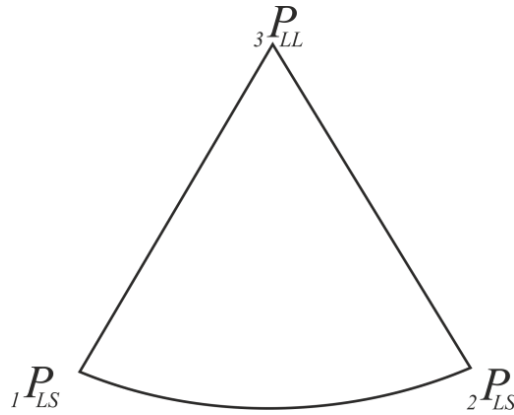
dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{LS}^* {}_3P_{LL}$ null bir vektördür, dolayısıyla $\| {}_1P_{LS}^* {}_3P_{LL} \|_L = 0$ dir.

$$\langle {}_2P_{LS}, {}_3P_{LL} \rangle_L = \| {}_2P_{LS} \|_L \| {}_3P_{LL} \|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_2P_{LS} {}_3P_{LL}$ null bir vektördür ve $\| {}_2P_{LS} {}_3P_{LL} \|_L = 0$ dir.

$$\eta({}_1P_{LS}^*, {}_2P_{LS}) \not\leq \| {}_1P_{LS}^* {}_3P_{LL} \| + \| {}_2P_{LS} {}_3P_{LL} \|$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



Şekil 3.21 LLS üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.7

3.4.7 SSS üçgen örneğinde büzülebilen üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS} = (0,0,1)$$

noktaları göz önüne alırsa

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_2P_{SS} \rangle_L = \| {}_1P_{SS} \|_L \| {}_2P_{SS} \|_L \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS})$$

$$\frac{1}{3} = \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS})$$

$$\eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 1,23$$

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_1P_{SS} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1}\left(\left|-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right|\right) = 0,61$$

$$\langle {}_2P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_2P_{SS} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_2P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

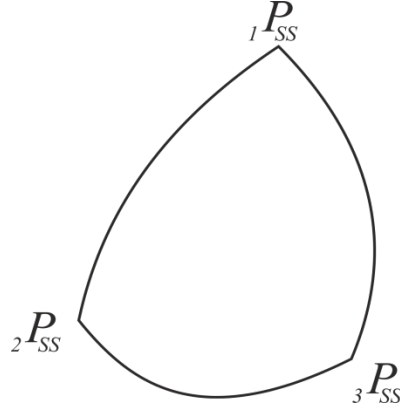
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos \eta({}_2P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_2P_{SS}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 0,61$$

bulunur.

$$\eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}) \leq \eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS}) + \eta({}_2P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanır.



Şekil 3.22 SSS Büzülebilen üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.8

3.4.7 SSS üçgen örneğinde büzülemeyen üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{SS} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_2P_{SS}^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$${}_3P_{SS} = (0,0,1)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^* \rangle_L = \| {}_1P_{SS} \|_L \| {}_2P_{SS}^* \|_L \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^*)$$

$$-\frac{1}{3} = \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^*)$$

$$\eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^*) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 1,23$$

$$\langle {}_1P_{SS}, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_1P_{SS} \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos \eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1} \left(\left| -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right| \right) = 0,61$$

$$\langle {}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS} \rangle_L = \| {}_2P_{SS}^* \|_L \| {}_3P_{SS} \|_L \cos \eta({}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS})$$

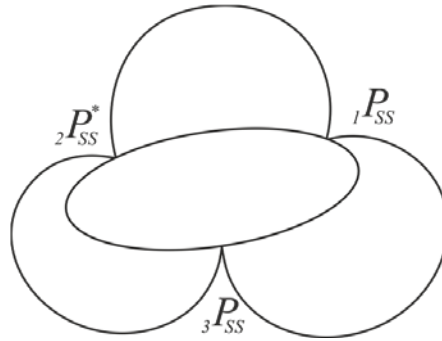
$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \cos \eta({}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS})$$

$$\eta({}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS}) = \cos^{-1} \left(\left| -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right| \right) = 0,61$$

elde edilir.

$$\eta({}_1P_{SS}, {}_2P_{SS}^*) \leq \eta({}_1P_{SS}, {}_3P_{SS}) + \eta({}_2P_{SS}^*, {}_3P_{SS})$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanır.



Şekil 3.23 SSS Büzülemeyen üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.9

3.4.8 LLL üçgen örneğinde elde edilen

$${}_1P_{LL} = (1, 0, \sqrt{2})$$

$${}_2P_{LL} = (-1, \sqrt{2}, 0)$$

$${}_3P_{LL} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları göz önünde bulundurulursa

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_2P_{LL} \rangle_L = \| {}_1P_{LL} \|_L \| {}_2P_{LL} \|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{LL} \quad {}_2P_{LL}$ null bir vektördür, dolayısıyla $\| {}_1P_{LL} \quad {}_2P_{LL} \|_L = 0$ dir.

$$\langle {}_1P_{LL}, {}_3P_{LL} \rangle_L = \| {}_1P_{LL} \|_L \| {}_3P_{LL} \|_L = 1$$

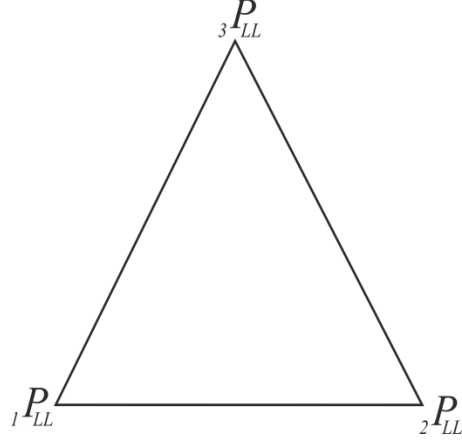
dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{LL} \quad {}_3P_{LL}$ null bir vektördür, $\| {}_1P_{LL} \quad {}_3P_{LL} \|_L = 0$ dir.

$$\langle {}_2P_{LL}, {}_3P_{LL} \rangle_L = \| {}_2P_{LL} \|_L \| {}_3P_{LL} \|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_2P_{LL} \quad {}_3P_{LL}$ null bir vektördür ve $\| {}_2P_{LL} \quad {}_3P_{LL} \|_L = 0$ dir.

$$\| {}_1P_{LL} \quad {}_2P_{LL} \|_L \leq \| {}_1P_{LL} \quad {}_3P_{LL} \|_L + \| {}_2P_{LL} \quad {}_3P_{LL} \|_L$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanır.



Şekil 3.24 LLL üçgende üçgen eşitsizliği

3.5.10 Örnek

3.4.9 TTL üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{TL} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$${}_2P_{TL} = (1, 1, 1)$$

$${}_3P_{TT} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları için

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_2P_{TL} \rangle_L = \| {}_1P_{TL} \|_L \| {}_2P_{TL} \|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{TL} {}_2P_{TL}$ null bir vektördür, dolayısıyla $\| {}_1P_{TL} {}_2P_{TL} \|_L = 0$ dir.

$$\langle {}_1P_{TL}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \| {}_1P_{TL} \|_L \| {}_3P_{TT} \|_L \cosh \eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{TT})$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} = \cosh \eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{TT})$$

$$\eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{TT}) = \cosh^{-1} \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} \right) = 0,34$$

$$\langle {}_2P_{TL}, {}_3P_{TT} \rangle_L = \| {}_2P_{TL} \|_L \| {}_3P_{TT} \|_L \cosh \eta({}_2P_{TL}, {}_3P_{TT})$$

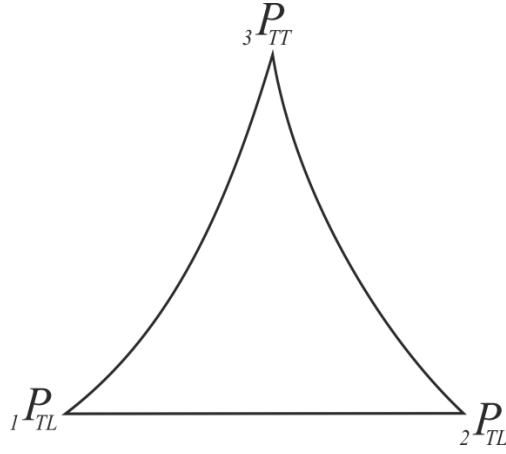
$$\sqrt{2} = \cosh \eta({}_2P_{TL}, {}_3P_{TT})$$

$$\eta({}_2P_{TL}, {}_3P_{TT}) = \cosh^{-1}(\sqrt{2}) = 0,88$$

elde edilir.

$$\eta({}_2P_{TL}, {}_3P_{TT}) \not\leq \eta({}_1P_{TL}, {}_3P_{TT}) + \| {}_1P_{TL} {}_2P_{TL} \|_L$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



Şekil 3.25 TTL üçgende üçgen eşitsizliği

Örnek 3.5.11

3.4.10 LLT üçgen örneğinde üçgensel bölge oluşturduğu gösterilen

$${}_1P_{LT} = (-1, -1, -1)$$

$${}_2P_{LT} = (1, -1, -1)$$

$${}_3P_{LL}^* = (0, 0, -1)$$

noktaları göz önüne alınırsa

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_2P_{LT} \rangle_L = \| {}_1P_{LT} \|_L \| {}_2P_{LT} \|_L \cosh \eta({}_1P_{LT}, {}_2P_{LT})$$

$$3 = \cosh \eta({}_1P_{LT}, {}_2P_{LT})$$

$$\eta({}_1P_{LT}, {}_2P_{LT}) = \cosh^{-1}(3) = 1,76$$

$$\langle {}_1P_{LT}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = \| {}_1P_{LT} \|_L \| {}_3P_{LL}^* \|_L = 1$$

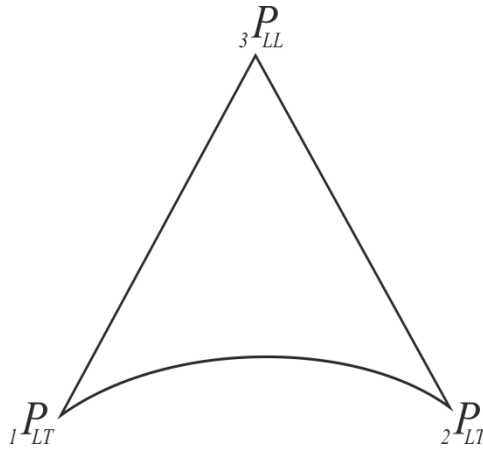
dir. Teorem 2.2.5 den ${}_1P_{LT} {}_3P_{LL}^*$ null bir vektördür ve $\| {}_1P_{LT} {}_3P_{LL}^* \|_L = 0$ dir.

$$\langle {}_2P_{LT}, {}_3P_{LL}^* \rangle_L = \| {}_2P_{LT} \|_L \| {}_3P_{LL}^* \|_L = 1$$

dir. Teorem 2.2.5 den ${}_2P_{LT} {}_3P_{LL}^*$ null bir vektördür, $\| {}_2P_{LT} {}_3P_{LL}^* \|_L = 0$ dir.

$$\eta({}_1P_{LT}, {}_2P_{LT}) \not\leq \| {}_1P_{LT} {}_3P_{LL}^* \|_L + \| {}_2P_{LT} {}_3P_{LL}^* \|_L$$

olduğundan üçgen eşitsizliği sağlanmaz.



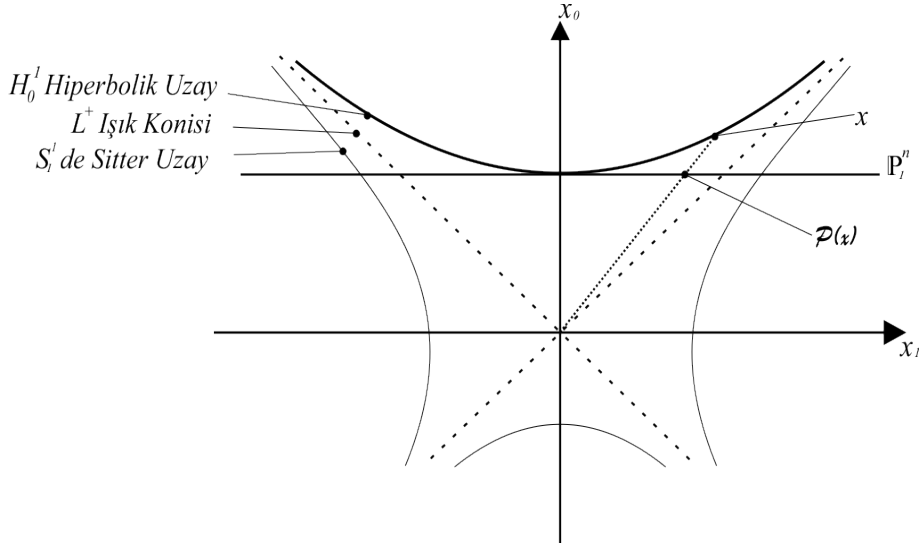
Şekil 3.26 LLT üçgende üçgen eşitsizliği

3.6 Hiperbolik ve De Sitter Uzayda Açı Bağlıları

$$H_0^1 = \{x \in E^{1,n} \mid \langle x, x \rangle_L = -1, x_0 > 0\} \quad (3.15)$$

olsun. n - boyutlu hiperbolik uzay H^n üzerinde tanımlı Riemann metriğe göre $x, y \in H_0^1$ noktaları arasındaki d uzaklığı için aşağıdaki eşitlik söz konusudur.

$$\langle x, y \rangle_L = -\cosh d \quad (3.16)$$



Şekil 3.27 $E^{1,n}$ Lorentzian uzay

$$L = \{x \in E^{1,n} \mid \langle x, x \rangle_L = 0\} \quad (3.17)$$

light koni ve bunun üst yarısı

$$L^+ = \{x \in E^{1,n} \mid \langle x, x \rangle_L = 0, x_0 > 0\} \quad (3.18)$$

olsun.

$u \in L^+$ keyfi bir nokta olmak üzere, bir Euclidean yapı olan horoküre

$$h_u = \{x \in H^n \mid \langle x, u \rangle_L = -1\} \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır.

\mathcal{P} , orijinden geçen ve $\{x \in E^{1,n} \mid x_0 \neq 0\}$ kümesinden $\mathbb{P}_1^n := \{x \in E^{1,n} \mid x_0 = 1\}$ afin hiperdüzlemine bir ışınsal yansıma belirtsin. \mathcal{P} yansıması H_0^1 den \mathbb{P}_1^n in merkezi $(1,0,0, \dots, 0)$ olan n -boyutlu B^n açık birim yuvarı üzerine bir homeomorfizmdir, buna Poincare disk modeli denir.

S_∞^{n-1} ile özdeşleştirilen afin hiperdüzlem \mathbb{P}_1^n , B^n i ve B^n in sınırı olan ∂B^n i içerir ve

$$\overline{B^n} = B^n \cup \partial B^n \text{ dır.}$$

Tek kanatlı hiperboloid

$$S_1^1 = \{x \in E^{1,n} \mid \langle x, x \rangle_L = 1\} \quad (3.20)$$

olmak üzere S_1^1 da alınan keyfi bir u noktası için tanımlı jeodezik

$$u^\perp = \{x \in H^n \mid \langle x, u \rangle_L = 0\} \quad (3.21)$$

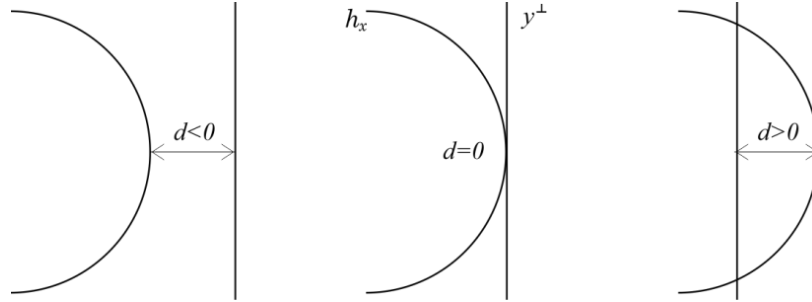
hiperdüzlemidir.

u noktası için H^n de bir yarı-uzay

$$\pi_u = \{x \in H^n \mid \langle x, u \rangle_L \leq 0\} \quad (3.22)$$

şeklinde belirlenir (Heard, 2005).

Tanım 3.6.1 Hiperdüzlemin horoküreye olan uzaklığı işaretli d uzunluğudur. Bu uzaklık pozitif, negatif veya sıfır olabilir.



Şekil 3.28 Hiperdüzlemin horoküreye uzaklığı

Teorem 3.6.2 $x, y \in H_0^1 \cup L^+ \cup S_1^1$ noktaları arasındaki iç çarpım aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

- (1) $x, y \in H_0^1$ ise bu durumda x ve y arasındaki uzunluk $\langle x, y \rangle_L = -\cosh d$ ile belirlidir.
- (2) Eğer $x, y \in S_1^1$ ise aşağıdaki durumlardan biri söz konusudur:

- a) x^\perp ve y^\perp jeodezik hiperdüzlemlerinin H^n de kesişmesi için gerek ve yeter koşul $|\langle x, y \rangle_L| < 1$ dir. Bu durumda bunlar arasındaki hiperbolik θ açısı π_x ve π_y yarı-uzayları arasında ölçülür ve $\langle x, y \rangle_L = -\cos \theta$ ile verilir.
- b) x^\perp ve y^\perp jeodezik hiperdüzlemlerinin $\overline{H^n} \cup H^n \cup \partial H^n$ de kesişmemeleri için gerek ve yeter koşul $|\langle x, y \rangle_L| > 1$ dir. Bu durumda bunlar arasındaki hiperbolik d uzunluğu $|\langle x, y \rangle_L| = \cosh d$ ile belirlidir.
- c) x^\perp ve y^\perp jeodezik hiperdüzlemlerinin H^n de kesişmeyip ∂H^n de kesişmesi için gerek ve yeter koşul $|\langle x, y \rangle_L| = 1$ olmasıdır. Bu durumda bunlar arasındaki hiperbolik uzunluk ve açının her ikisi de sıfırdır.
- (3) $x \in H_0^1$ ve $y \in S_1^1$ olmak üzere x ile y^\perp arasındaki uzaklık $|\langle x, y \rangle_L| = \sinh d$ ile belirlidir.
- (4) $x \in S_1^1$ ve $y \in L^+$ olmak üzere x^\perp ile h_y arasındaki d uzaklığı $|\langle x, y \rangle_L| = \cosh d - \sinh d$ ile bulunur.
- (5) $x \in H_0^1$ ve $y \in L^+$ olmak üzere x ile h_y arasındaki d uzaklığı $\langle x, y \rangle_L = \sinh d - \cosh d$ ile bulunur.
- (6) $x, y \in L^+$ olsun. Bu durumda h_x ile h_y arasındaki uzaklık $\langle x, y \rangle_L = 2(\sinh d - \cosh d)$ ile bulunur (Heard, 2005).

İspat P, x ve y ile gerilen düzlem olsun. 1. ve 3. durumlarda P, H_0^1 i $x \in L$ gibi hiperbolik bir doğru ile keser. Bu L doğrusu; v, x in H_0^1 deki birim tanjant vektörü olmak üzere

$$L = x \cos ht + v \sin ht$$

ile parametrize edilebilir.

(1) x ve y time-like vektörler olsun. Eğer $y \in H_0^1$ ise y, v nin seçimine bağlı olarak $y = x \cos ht + v \sin ht, t = \mp d(x, y)$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\langle x, y \rangle_L = \langle x, (x \cos ht + v \sin ht) \rangle_L$$

$$= \langle x, x \cos ht \rangle_L + \langle x, v \sin ht \rangle_L$$

x ile v ortogonal olduğundan,

$$= -\cos ht$$

$$= -\cosh d(x, y)$$

bulunur (Thurston, 1979).

(2)

- a) Eğer $\langle x, x \rangle_L, P$ üzerinde pozitif tanımlı ise P nin ortogonal tümleyeni P^\perp üzerinde tanımsızdır. Dolayısıyla $P^\perp \cap H_0^1 = x^\perp \cap y^\perp$ boşkümeden farklıdır. P bu kesişimde $\cos(x^\perp, y^\perp)$ ölçümüne sahip bir nokta olsun. P de x^\perp ve y^\perp e normal olan H_0^1 deki teğet vektörlerini bulmak ve bunların açılarının kosinüsünü almak yeterlidir.

$$\langle x, y \rangle_L = \mp \cos(x^\perp, y^\perp).$$

- b) Burada $L = P \cap H_0^1$, x ve y yi içermemektedir, fakat $\bar{x} = L \cap x^\perp$ ile parametrize edilebilir. Bu durumda

$$x = \mp v,$$

$$\bar{y} = L \cap y^\perp,$$

$$\bar{y} = \bar{x} \cos ht + v \sin ht,$$

$$t = d(x^\perp, y^\perp)$$

$$y = \mp (\bar{x} \sin ht + v \cos ht)$$

bulunur.

$$\langle x, y \rangle_L = \langle \mp v, \mp (\bar{x} \sin ht + v \cos ht) \rangle_L$$

$$= \mp \cos ht$$

$$= \mp \cosh d(x^\perp, y^\perp)$$

- c) Eğer $\langle x, x \rangle_L, P$ üzerinde pozitif yarı-tanımlı ise P nin ortogonal tümleyeni P^\perp üzerinde de yarı-tanımlıdır. Dolayısıyla $P^\perp \cap H_0^1 = x^\perp \cap y^\perp$ boş kümedir fakat $P^\perp \cap S_\infty^{n-1}$ orijinden geçen bir doğruyu içerir. Dolayısıyla x^\perp ve y^\perp ultra paraleldir ve aralarındaki açı sıfırdır (Thurston, 1979).

(3) x time-like y space-like vektörler olsun. Eğer $y \notin H_0^1$ ise $d(x, y^\perp)$ uzaklığı

$\bar{y} = L \cap y^\perp$ noktası için elde edilir. Çünkü L, x den y^\perp e çizilen tek dik doğrudur.

Dolayısıyla

$$\bar{y} = x \cos ht + v \sin ht$$

$$t = d(x, y^\perp)$$

olur. y, x ve v nin lineer kombinasyonu ve ayrıca \bar{y} ye ortogonal olduğundan

$$y = \mp (x \sin ht + v \cos ht)$$

formunda olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_L &= \bar{\mp} \langle x, (x \sin ht + v \cos ht) \rangle \\ &= \bar{\mp} \sin ht \\ &= \bar{\mp} \sinh d(x, y^\perp) \end{aligned}$$

elde edilir (Thurston, 1979).

(4) Bu özelliği H^2 de ispatlamak yeterlidir. x space-like ve y light-like vektörler olsun. $E^{1,2}$ deki bir izometri ile $x_0 x_2$ düzleminde yer alan ve h_y horoküresine en yakın noktası orijin olan x^\perp düzenlenebilir. Bu durumda x^\perp ile h_y arasındaki uzaklığı minimize eden tek jeodezik $x_0 x_1$ düzleminde yer almalıdır. Dolayısıyla herhangi $s > 0$ için $y = (s, s, 0) \in L^+$ ve $x = (0, \bar{\mp}1, 0) \in S_1^1$ kabul edilebilir. Bu durumda h_y üzerindeki $(\cosh(-d), \sinh(-d), 0)$ noktası x^\perp ile h_y arasındaki uzaklığı elde etmeye yarar.

$$(\cosh(-d), \sinh(-d), 0) \in h_y$$

olduğundan horokürenin tanımından

$$\langle (\cosh(-d), \sinh(-d), 0), (s, s, 0) \rangle_L = -1$$

$$-s \cosh(-d) + s \sinh(-d) + 0 = -1$$

$$s(\sinh(-d) - \cosh(-d)) = -1$$

$$s \left(\left(\frac{e^{-d} - e^d}{2} \right) - \left(\frac{e^{-d} + e^d}{2} \right) \right) = -1$$

$$s(-e^d) = -1$$

$$s = e^{-d}$$

bulunur. Bu durumda

$$y = (s, s, 0) = (e^{-d}, e^{-d}, 0)$$

olur ve böylece

$$\langle x, y \rangle_L = \langle (0, \bar{\mp}1, 0), (e^{-d}, e^{-d}, 0) \rangle_L$$

$$= \bar{\mp} e^{-d}$$

$$|\langle x, y \rangle_L| = e^{-d}$$

elde edilir (Heard, 2005).

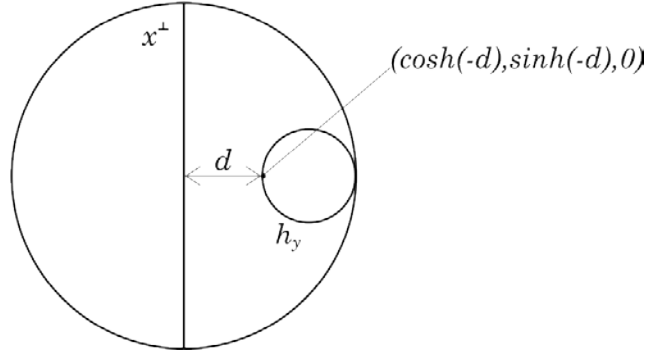
Bu sonuç

$$\begin{cases} \cosh d = \frac{e^d + e^{-d}}{2} \\ \sinh d = \frac{e^d - e^{-d}}{2} \end{cases} \quad (3.23)$$

denklemleri yardımı ile

$$|\langle x, y \rangle_L| = e^{-d} = \cosh d - \sinh d$$

bulunur.



Şekil 3.29 Poincare modelinde horoküre

(5) $x \in H_0^1$ ve $y \in L^+$ olsun. Yani x time-like y light-like vektörler ise bu durumda x ile h_y arasındaki d uzaklığı, yukarıdaki ispata benzer bir şekilde

$$x = (1, 0, 0) \text{ ve } y = (e^{-d}, e^{-d}, 0) \text{ alınır}$$

$$\langle x, y \rangle_L = \langle (1, 0, 0), (e^{-d}, e^{-d}, 0) \rangle_L = -e^{-d}$$

bulunur (Heard, 2005).

Bu sonuç

$$\langle x, y \rangle_L = \sinh d - \cosh d$$

şeklinde ifade edilebilir.

(6) $x, y \in L^+$ olsun. x ve y light-like vektörler olduğundan h_x ile h_y horoküreleri arasındaki uzaklık aranılan d uzaklığıdır.

İspat için $t > 0$ olmak üzere $x = (t, -t, 0) \in L^+$ kabul edelim ve h_x horoküresi üzerinde h_y horoküresine en yakın nokta $(1, 0, 0)$ ve $s > 0$ için $y = (s, s, 0) \in L^+$ olsun.

Bu durumda h_y horoküresi üzerinde h_x horoküresine en yakın nokta $(\cosh(-d), \sinh(-d), 0)$ olmalıdır.

$(1,0,0) \in h_x$ noktasına (3.19) denklemi uygulanırsa

$$\langle (1,0,0), (t, -t, 0) \rangle_L = -1$$

$t = 1$ bulunur. Ayrıca,

$$(\cosh(-d), \sinh(-d), 0) \in h_y$$

olup

$$\langle (s, s, 0), (\cosh(-d), \sinh(-d), 0) \rangle_L = -1$$

noktasına (3.19) denklemi uygulanırsa

$$-s \cosh(-d) + s \sinh(-d) = -1$$

$$s(\sinh(-d) - \cosh(-d)) = -1$$

$$s \left(\left(\frac{e^{-d} - e^d}{2} \right) - \left(\frac{e^{-d} + e^d}{2} \right) \right) = -1$$

$$s(e^{-d}) = -1$$

$$s = e^{-d}$$

bulunur.

Bulunan t ve s değerleri x ve y vektörlerinin ifadelerinde yerlerine yazılırsa

$$\langle x, y \rangle_L = \langle (1, -1, 0), (e^{-d}, e^{-d}, 0) \rangle_L$$

$$= -e^{-d} - e^{-d} + 0$$

$$= -2e^{-d}$$

elde edilir (Heard, 2005).

Bu sonuç, (3.23) denklemleri kullanılarak

$$\langle x, y \rangle_L = 2(\sinh d - \cosh d)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.7. Light-like (Null) Vektörlerin İç-Dış Çarpımları

x ve y light-like (null) vektörler olsun. x ve y vektörleri space-like ve time-like bileşenlerin toplamı olarak $x = \bar{x} + \tilde{x}$ ve $y = \bar{y} + \tilde{y}$ şeklinde ifade edilebilirler.

$x \otimes y$ vektörel çarpımında bu değerler sırasıyla yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}x \otimes y &= x \otimes (\bar{y} + \tilde{y}) \\&= (x \otimes \bar{y}) + (x \otimes \tilde{y}) \\&= [(\bar{x} + \tilde{x}) \otimes \bar{y}] + [(\bar{x} + \tilde{x}) \otimes \tilde{y}] \\&=[(\bar{x} \otimes \bar{y}) + (\tilde{x} \otimes \bar{y})] + [(\bar{x} \otimes \tilde{y}) + (\tilde{x} \otimes \tilde{y})]\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu sonucun x ve y vektörleri ile iç çarpımları sıfır olmalıdır.

Yani

$$\langle x, (\bar{x} \otimes \bar{y}) + (\tilde{x} \otimes \bar{y}) + (\bar{x} \otimes \tilde{y}) + (\tilde{x} \otimes \tilde{y}) \rangle_L = 0$$

ve

$$\langle y, (\bar{x} \otimes \bar{y}) + (\tilde{x} \otimes \bar{y}) + (\bar{x} \otimes \tilde{y}) + (\tilde{x} \otimes \tilde{y}) \rangle_L = 0$$

olmalıdır.

İspat

$$\begin{aligned}&\langle x, (\bar{x} \otimes \bar{y}) + (\tilde{x} \otimes \bar{y}) + (\bar{x} \otimes \tilde{y}) + (\tilde{x} \otimes \tilde{y}) \rangle_L \\&= \langle x, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle x, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle x, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle x, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L \\&= \langle \bar{x} + \tilde{x}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \bar{x} + \tilde{x}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \bar{x} + \tilde{x}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \bar{x} + \tilde{x}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L \\&= \langle \bar{x}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \tilde{x}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \bar{x}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \tilde{x}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \\&\quad \langle \bar{x}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \tilde{x}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \bar{x}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \tilde{x}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L \\&= 0\end{aligned}$$

dir.

Determinantın özelliklerinden dolayı

$\langle \bar{x}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L$, $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L$, $\langle \bar{x}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L$ ve $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L$ ifadeleri sıfıra eşittir. Ayrıca $\langle \tilde{x}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L$ ile $\langle \bar{x}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L$ ve $\langle \tilde{x}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L$ ile $\langle \bar{x}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L$ zıt işaretli olduğundan toplamları sıfıra eşittir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \langle y, (\bar{x} \otimes \bar{y}) + (\tilde{x} \otimes \bar{y}) + (\bar{x} \otimes \tilde{y}) + (\tilde{x} \otimes \tilde{y}) \rangle_L \\ &= \langle y, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle y, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle y, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle y, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L \\ &= \langle \bar{y} + \tilde{y}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \bar{y} + \tilde{y}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \bar{y} + \tilde{y}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \bar{y} + \tilde{y}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L \\ &= \langle \bar{y}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \tilde{y}, \bar{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \bar{y}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \langle \tilde{y}, \tilde{x} \otimes \bar{y} \rangle_L + \\ & \quad \langle \bar{y}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \tilde{y}, \bar{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \bar{y}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L + \langle \tilde{y}, \tilde{x} \otimes \tilde{y} \rangle_L \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\|x \otimes y\| > 0$$

olmalıdır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \|x \otimes y\| &= \sqrt{\langle x \otimes y, x \otimes y \rangle_L} \\ \langle x \otimes y, x \otimes y \rangle_L &= \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle_L & \langle x, x \rangle_L \\ \langle y, y \rangle_L & \langle y, x \rangle_L \end{vmatrix} \\ &= \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

x ve y light-like vektörler olduğundan

$$= \langle x, y \rangle^2$$

$$> 0$$

dır.

Sonuç olarak $\|x \otimes y\| > 0$ olduğundan $x \otimes y$ space-like dir.

3.7.1 Light-like (null) vektörler arasındaki açı

$L \in \mathbb{R}_1^4$ Lorentz uzayda bir light-like vektör olsun. $L = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere $|x_0| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \neq 0$ sağlansın. $L_t = (x_0, 0, 0, 0)$, $L_s = (0, x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere $L = L_t + L_s$ şeklinde yazılabilir. Burada L_t ve L_s sırasıyla L 'nin time-like ve space-like bileşenleridir. L null vektörü $\bar{L} = \frac{L}{\|L_s\|}$ şeklinde birimleştirilirse elde edilen \bar{L} vektörü pseudo-birim null vektör olarak adlandırılır ve null koninin bir kısmını belirler.

\bar{L} null vektörleri üzerindeki metrik Öklidyen olduğundan L ve N gibi iki null vektör için kolaylıkla aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\langle L, N \rangle_E = \|L_s\|_E \|N_s\|_E (\varepsilon + \cos \theta) \quad (3.24)$$

Burada θ , L_s ve N_s arasındaki Öklidyen açıdır. ε ise L ve N light koninin aynı tarafında ise -1 , diğer durumlarda 1 olarak alınır. Eğer Pseudo- null vektörler $\varepsilon = -1$ durumunda alınırsa (3.24) denklemini

$$\langle \bar{L}, \bar{N} \rangle_E = -1 + \cos \theta = -\sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.25)$$

denklemine dönüşür ve bu da Schwarz eşitsizliğini anımsatan

$$|\langle \bar{L}, \bar{N} \rangle_E + 1| \leq 1 \quad (3.26)$$

eşitsizliğini verir. Benzer ilişki Lorentz vektörel (dış) çarpım için de kurulabilir.

$x, y \in \mathbb{R}_1^3$ keyfi null vektörler olsun. $x = (x_0, x_1, x_2)$ ve $y = (y_0, y_1, y_2)$ olmak üzere $x \times y = (x_2 y_1 - x_1 y_2, x_2 y_0 - x_0 y_2, x_0 y_1 - x_1 y_0)$ şeklinde tanımlıdır.

$$\|L \times N\| = |\langle L, N \rangle|$$

(Çöken ve Çiftçi, 2007).

3.8 De Sitter Uzayda Bazı Üçgenlerin Ayrıt ve Gram Matrisleri

3.8.1 SSS üçgenin ayrıt ve gram matrisleri

Üç boyutlu Minkowski uzayında H_1, H_2, H_3 hiperdüzlemlerinin S_1^2 ile arakesitlerinden elde edilen noktalar P_1, P_2 ve P_3 olmak üzere bu noktaların oluşturduğu her ayrıtı space-like jeodezik olan SSS üçgen göz önüne alınırsa

$$M = \begin{bmatrix} \langle P_1, P_1 \rangle_L & \langle P_1, P_2 \rangle_L & \langle P_1, P_3 \rangle_L \\ \langle P_2, P_1 \rangle_L & \langle P_2, P_2 \rangle_L & \langle P_2, P_3 \rangle_L \\ \langle P_3, P_1 \rangle_L & \langle P_3, P_2 \rangle_L & \langle P_3, P_3 \rangle_L \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlanırsa

$$\langle P_1, P_2 \rangle_L = \cos \theta_{12}$$

$$\langle P_1, P_3 \rangle_L = \cos \theta_{13}$$

$$\langle P_2, P_3 \rangle_L = \cos \theta_{23}$$

değerleri yukarıda yerlerine yazılarak

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{13} & \cos \theta_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

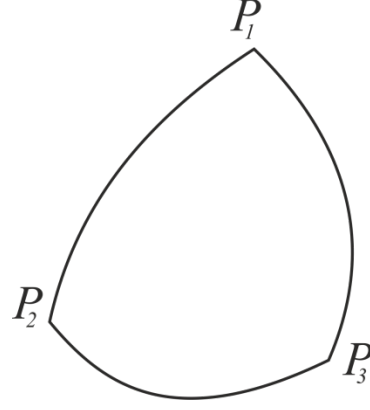
elde edilir. Bu matrise SSS üçgenin ayrıt matrisi denir. Hiperdüzlemlerin normal vektörleri N_1, N_2, N_3 şeklinde alınırsa

$$G = \begin{bmatrix} \langle N_1, N_1 \rangle_L & \langle N_1, N_2 \rangle_L & \langle N_1, N_3 \rangle_L \\ \langle N_2, N_1 \rangle_L & \langle N_2, N_2 \rangle_L & \langle N_2, N_3 \rangle_L \\ \langle N_3, N_1 \rangle_L & \langle N_3, N_2 \rangle_L & \langle N_3, N_3 \rangle_L \end{bmatrix}$$

yukarıdaki gibi normal vektörlerinin arasındaki açılar göz önüne alınırsa

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -\cosh \mu_{12} & -\cosh \mu_{13} \\ -\cosh \mu_{12} & -1 & -\cosh \mu_{23} \\ -\cosh \mu_{13} & -\cosh \mu_{23} & -1 \end{bmatrix}$$

matrisine SSS üçgenin Gram matrisi denir.



Şekil 3.30 Üç kenarı space-like olan üçgen

3.8.2 TTT üçgenin ayrıt ve gram matrisleri

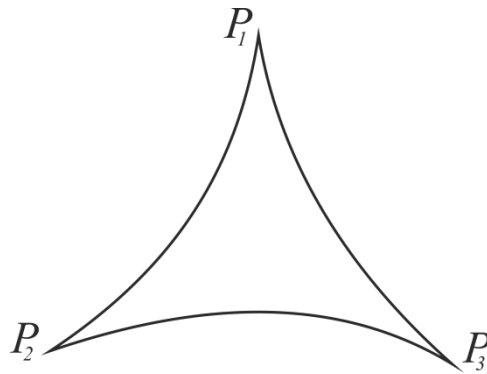
Üç boyutlu Minkowski uzayında H_1, H_2, H_3 hiperdüzlemlerinin S_1^2 ile arakesitlerinden elde edilen noktalar P_1, P_2 ve P_3 olmak üzere bu noktaların oluşturduğu her ayrıtı time-like jeodezik olan TTT üçgen göz önüne alınırsa yukarıda verilen benzer işlemler yapıldığında

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cosh \theta_{12} & \cosh \theta_{13} \\ \cosh \theta_{12} & 1 & \cosh \theta_{23} \\ \cosh \theta_{13} & \cosh \theta_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrise TTT üçgenin ayrıt matrisi denir.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -\cos \mu_{12} & -\cos \mu_{13} \\ -\cos \mu_{12} & 1 & -\cos \mu_{23} \\ -\cos \mu_{13} & -\cos \mu_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine ise TTT üçgenin Gram matrisi denir.



Şekil 3.31 Üç kenarı time-like olan üçgen

3.8.3 SST üçgenin ayrıt ve gram matrisleri

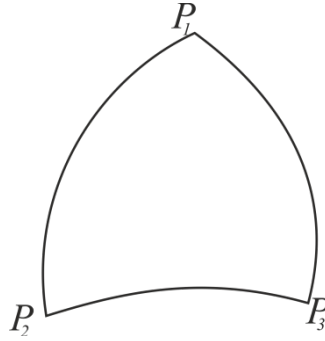
Üç boyutlu Minkowski uzayında H_1, H_2, H_3 hiperdüzlemlerinin S_1^2 ile arakesitlerinden elde edilen noktalar P_1, P_2 ve P_3 olsun. P_1 ve P_2 den geçen jeodezikle P_1 ve P_3 den geçen jeodezik space-like, P_2 ve P_3 den geçen jeodezik time-like olmak üzere SST üçgen için yukarıda verilen benzer işlemler yapıldığında

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} \\ \cos \theta_{12} & 1 & \cosh \theta_{23} \\ \cos \theta_{13} & \cosh \theta_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrise SST üçgenin ayrıt matrisi denir.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \sinh \mu_{12} & \sinh \mu_{13} \\ \sinh \mu_{12} & -1 & -\cosh \mu_{23} \\ \sinh \mu_{13} & -\cosh \mu_{23} & -1 \end{bmatrix}$$

matrisine ise SST üçgenin Gram matrisi denir.



Şekil 3.32 İki kenarı space-like bir kenarı time-like olan üçgen

3.8.4 STT üçgenin ayrıt ve gram matrisleri

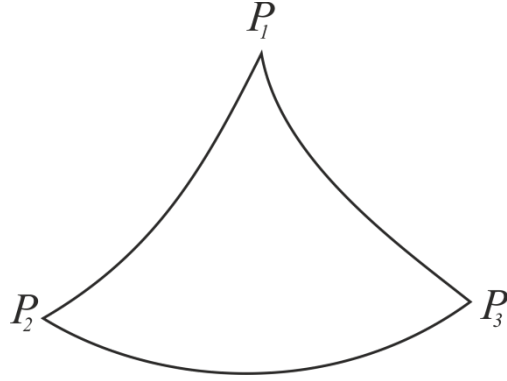
Üç boyutlu Minkowski uzayında H_1, H_2, H_3 hiperdüzlemlerinin S_1^2 ile arakesitlerinden elde edilen noktalar P_1, P_2 ve P_3 olsun. P_1 ve P_2 den geçen jeodezikle P_1 ve P_3 den geçen jeodezik time-like, P_2 ve P_3 den geçen jeodezik space-like olmak üzere STT üçgen için yukarıda verilen benzer işlemler yapıldığında

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cosh \theta_{12} & \cosh \theta_{13} \\ \cosh \theta_{12} & 1 & \cos \theta_{23} \\ \cosh \theta_{13} & \cos \theta_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matris STT üçgenin ayrıt matrisi denir.

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -\sinh \mu_{12} & -\sinh \mu_{13} \\ -\sinh \mu_{12} & 1 & -\cos \mu_{23} \\ -\sinh \mu_{13} & -\cos \mu_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine ise STT üçgenin Gram matrisi denir.



Şekil 3.33 İki kenarı time-like bir kenarı space-like olan üçgen

BÖLÜM IV

DE SİTTER UZAYDA DÖRT-YÜZLÜLER

4.1 De Sitter Yüzey Üzerinde Dört-yüzlüler

\mathbb{R}_1^4 Lorentz uzaydaki hiperdüzlemlerle (time-like, space-like, light-like) S_1^3 ün arakesitleri alınarak S_1^3 deki jeodezikler elde edilir. Bu jeodezikler farklı şekillerde kesiştiklerinde S_1^3 üzerinde dört-yüzlüler meydana gelir.

Teorem 2.2.10 göz önüne alındığında \mathbb{R}_1^4 Minkowski uzaydaki hiperdüzlemlerin S_1^3 de Sitter uzay ile kesişiminden $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ formülünde $n = 4$ alınarak, 15 farklı tip 3-simpleks (dört-yüzlü) oluştuğu sonucu elde edilmektedir.

Bu dört-yüzlüler içerdikleri kenarların sınıflarına göre aşağıdaki gibi isimlendirilebilir:

SSSS Dört kenarı space-like olan dört-yüzlü

SSST Üç kenarı space-like, bir kenarı time-like olan dört-yüzlü

SSTT İki kenarı space-like, iki kenarı time-like olan dört-yüzlü

STTT Bir kenarı space-like, üç kenarı time-like olan dört-yüzlü

TTTT Dört kenarı time-like olan dört-yüzlü

SSSL Üç kenarı space-like, bir kenarı light-like olan dört-yüzlü

SSLL İki kenarı space-like, iki kenarı light-like olan dört-yüzlü

SLLL Bir kenarı space-like, üç kenarı light-like olan dört-yüzlü

LLLL Dört kenarı light-like olan dört-yüzlü

TTTL Üç kenarı time-like, bir kenarı light-like olan dört-yüzlü

TTLL İki kenarı time-like, iki kenarı light-like olan dört-yüzlü

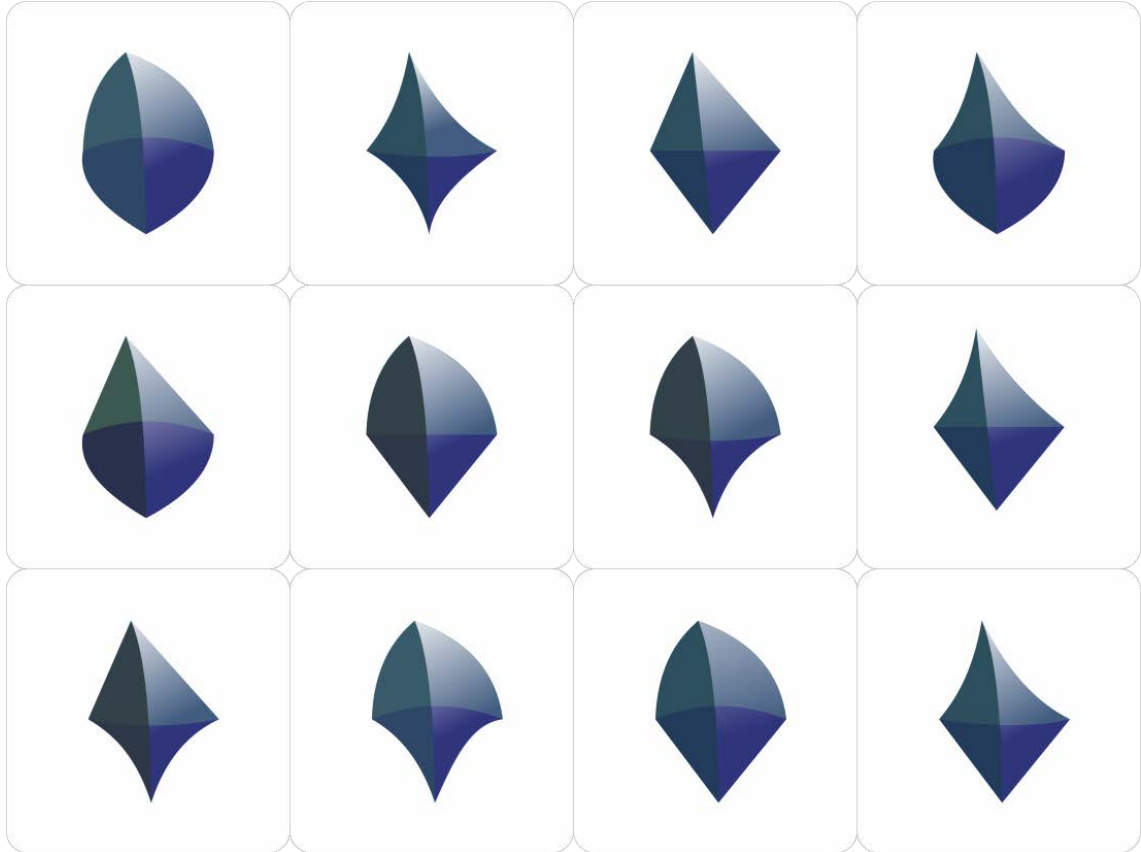
TLLL Bir kenarı time-like, üç kenarı light-like olan dört-yüzlü

STTL Bir kenarı space-like, iki kenarı time-like, bir kenarı light-like olan dört-yüzlü

STLL Bir kenarı space-like, bir kenarı time-like, iki kenarı light-like olan dörtyüzlü

SSTL İki kenarı space-like, bir kenarı time-like, bir kenarı light-like olan dörtyüzlü

Bunlardan bazıları sembolik olarak aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 4.1 De Sitter uzayda dörtyüzlüler

Özellik 4.1.1 $P_i^*, P_j^*, P_k^*, P_l^*$ sırasıyla P_i, P_j, P_k, P_l noktalarının antipodalleri olmak üzere,

$A = \{P_i^*, P_j^*, P_k^*, P_l^*, P_i, P_j, P_k, P_l\}$ kümesinin elemanları göz önüne alındığında bu

noktalardan geçen jeodeziklerin dörtyüzlü oluşturabilmesi için $\frac{\binom{8}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{4!} = 2^4$

tane durum incelenmelidir.

BÖLÜM V

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada S_1^2 ve S_1^3 deki farklı tipten üçyüzlüler ve dörtyüzlülerin varlığı hakkında araştırmalar yapılmıştır. S_1^2 deki üçgenler ayrıntılı olarak irdelenmiş, açı ve uzunluk bağıntıları incelenerek bazı üçgenlere ait ayrıt ve gram matris ifadeleri verilmiştir. S_1^3 de ise dörtyüzlülerin varlığı ortaya konmuş fakat açı, alan, hacim gibi özellikler ve ayrıt, gram matris kavramları hakkında detaylı bir inceleme yapılmamıştır. Dörtyüzlüler üzerindeki çalışmalarımız devam etmektedir. Bu çalışmanın bu konuda çalışan araştırmacılara yardımcı olmasını temenni ederim.

KAYNAKLAR

- Asmus, I., “Duality between Hyperbolic and de Sitter Geometry”, *Journal of Geometry* 96, 11-40, 2009.
- Çöken, A.C. and Çiftçi, Ü., “On Null Curves on Surfaces and Null Vectors in Lorentz Space”, *SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Fen Dergisi (E-Dergi)*, 2(1), 111-116, 2007.
- Hodgson, G.D. and Rivin, I.A., “Characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space”, *Invent. Math* 111, 77-111, 1993.
- Heard, D., Computation of Hyperbolic Structures on 3-Dimensional Orbifolds, PhD Thesis, *The University of Melbourne*, Melbourne, December, 2005.
- İmer, N., Hiperbolik ve de Sitter uzayda çok yüzlülerin hacmi, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Niğde, Ocak,2010.
- Luo, F.,”On a problem of Fenchel”, *Geometiae Dedicata*, *Kluwer Academic Publishers*, 64, 227-282, 1997
- Milnor,J., The Schlafli Differential Equality, John Milnor Collected Papers, Vol.1, Geometry, *Publish or Perish Inc.*, Houston and Texas 1994
- O’Neil, B., Semi-Riemannian Geometry, *Academic Press*, London, 1983.
- Ratchliffe, J.G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, *Springer-Verlag*, Berlin, 1994.
- Santalo, L., Integral Geometry and Geometric Probability, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. I, *Addision-Vesley*,1976
- Suarez-Peiro, E., “A Schlafli differential formula for simplices in Semi-Riemannian hyperquadrics, Gauss-Bonnet formulas for simplices in the de Sitter sphere and the dual volume of a hyperbolic simplex”, *Pacific Journal of Mathematics*, 194, No. 1, 2000.
- Thurston, W. P.,The Geometry and Topology of Three Manifolds, lecture notes, *Princeton Univ.*, Princeton, NJ, (1979).

Uyar Dldl, B and alıřkan, M., “Spacelike Intersection Curve of Three Spacelike Hypersurfaces in E_1^4 ”, *Annales Universtatis Mariae Curie-Sklodowska, Lublin-Polonia*, Vol, LXVII, No:1, Sectio A, 23-33, 2013.

Vinberg, E.B., Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 29, *Springer-Verlag*, 4-79,1993.

Yakut, A.T., Hiperbolik Uzayda Simplekslerin Tepe Açıları, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, Aralık, 2004.

ÖZ GEÇMİŞ

Efruz Özlem Mersin 18.05.1982 tarihinde Ankara'da doğdu. 2001 yılında girdiği Anadolu Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 1 yıl İngilizce eğitimi alarak Haziran 2006'da mezun oldu. 2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesinde Matematik Öğretimi üzerine tezsiz yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2006-2009 yılları arasında Eskişehir'de özel bir dershanede matematik ve geometri öğretmeni olarak çalıştı.