

T.C.
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE GRUPOİDLERİN OTOMORFİZMLERİ
VE HOMOTOPİLERİ

SURE SAVAŞCI

Temmuz 2012

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE GRUPOİDLERİN OTOMORFİZMLERİ
VE HOMOTOPİLERİ

SURE SAVAŞCI

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Murat ALP

Temmuz 2012

Sure SAVAŞCI tarafından Prof. Dr. Murat ALP danışmanlığında hazırlanan “Çaprazlanmış Modüller ve Grupoidlerin Otomorfizmleri ve Homotopileri” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Murat ALP (Niğde Üniversitesi)

[(Unvan, Adı Soyadı) (Kurumu)]

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali Haydar KOCAMAN (Niğde Üniversitesi)

[(Unvan, Adı Soyadı) (Kurumu)]

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI (Aksaray Üniversitesi)

[(Unvan, Adı Soyadı) (Kurumu)]

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA
MÜDÜR

ÖZET

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE GRUPOİDLERİN OTOMORFİZMLERİ VE HOMOTOPİLERİ

SAVAŞCI, Sure
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Murat ALP

Temmuz 2012, 62 sayfa

Bu tezde grupoidler hakkında bilgi verilmesi amaçlanmıştır. İlk olarak kategori tanımı yapılmış ve bu tanım kullanılarak grupoid tanımına geçilmiştir. Temel kavramlar verilerek grupoid örnekleri ve özellikleri verilmiştir. Hemen ardından ise konumuzun temeli olan çaprazlanmış modüller ve grupoidlerin otomorfizmleri incelenmiş ve homotopileri hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Kategori, grupoid, çaprazlanmış modül, otomorfizma, homotopi, fonktor

SUMMARY

AUTOMORPHISMS AND HOMOTOPIES OF GROUPOIDS AND CROSSED MODULES

SAVAŞCI, Sure

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Department

Supervisor : Prof. Dr. Murat ALP

July 2012, 62 pages

In this thesis, it is aimed to provide information related to Groupoids. As a first step, definition of Category was established and, then based on this definition, definition of Groupoid was given. By giving basic concepts, some examples of Groupoids and their related specifications were provided. Immediately after above mentioned examples, Crossed Modules and Automorphisms of Groupoids, which are the core focus of this research, were examined and also some information was given related to their Homotopies.

Key words : Category, Groupoid, Crossed Modules, Automorphisms, Homotopy, Functor

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu öneren ve bütün çalışmalarımda bana yardımcı olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat ALP‘ e ve bugüne kadar ki maddi ve manevi bütün desteklerinden dolayı aileme teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca eğitimime verdikleri destekten dolayı TÜBİTAK‘ a da teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
KISALTMALAR	vii
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. KATEGORİ VE GRUPOİDLER.....	6
2.1 Kategori	6
2.1.1 Kategori örnekleri	12
2.2 Epik ve Monik	13
2.3 Özel Nesneler ve Morfizmler	18
2.4 Funktorlar	19
2.5 Grupoidler	21
2.5.1 Grupoidlerin özellikleri	23
2.5.2 Grupoid örnekleri	26
2.6 Homotopi	30
2.6.1 Homotopi örnekleri	31
BÖLÜM III. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER	35
3.1 Çaprazlanmış Modül Örnekleri	36
3.2 Çaprazlanmış Modüllerin Özellikleri	39
3.3 Actor Çaprazlanmış Modüller	42
BÖLÜM IV. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE GRUPOİDLERİN OTOMORFİZMLERİ VE HOMOTOPİLERİ	47
4.1 Grupoidlerin Otomorfizmleri	47
4.2 Otomorfizm Grupoidleri ve Bölümler.....	53
4.3 AUTC Üzerine $\otimes$ Grup Yapıları	55
4.4 Grupoidlerin Çaprazlanmış Modülleri	57
KAYNAKLAR	61

KISALTMALAR

$\text{Ob}(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ kategorisinin nesnelerinin kümesi
$\text{Mor}(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmlerinin kümesi
Set	: Kümelerin kategorisi
Top	: Topolojik uzayların sınıfının ürettiği kategori
TopGrup	: Topolojik grupların kategorisi
BölAb	: Abel grupların ürettiği kategori
$\text{Ob}(\mathcal{G})$	: $\mathcal{G}$ grupoidinin nesnelerinin kümesi
$\text{Mor}(\mathcal{G})$	: $\mathcal{G}$ grupoidinin morfizmlerinin kümesi
$\text{Mor}_H(X, Y)$	: X 'den Y 'ye tanımlı H 'nin morfizmlerinin kümesi
$\text{Mor}_G(X, Y)$	: X 'den Y 'ye tanımlı G 'nin morfizmlerinin kümesi
$\text{Mor}_H(X, X)$	: X 'den X 'e tanımlı H 'nin morfizmlerinin kümesi
$\text{CONJ}\mathcal{C}$	: $\mathcal{C}$ 'nin konjugasyon grupoidi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde ileride işimize yarayacak olan ve cebirin de temelini teşkil eden tanımlar verilecektir. Bu bilgiler ışığında konumuzun ilerleyen safhalarında karşımıza çıkacak olan tanımlar daha iyi anlaşılacaktır.

Tanım 1.1 (Fonksiyon) : X ve Y herhangi iki küme olsun. X in her bir elemanına Y nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren f kuralına X den Y ye bir **fonksiyon** denir.

$$f: X \rightarrow Y \text{ veya } X \xrightarrow{f} Y$$

şeklinde gösterilir. X kümesine **tanım kümesi**, Y kümesine de **değer kümesi** adı verilir.

Eğer $f(X) = Y$ ise f fonksiyonu **örtendir** denir.

$x_1, x_2 \in X$ olsun. $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna **birebir fonksiyon** adı verilir. Hem birebir hem de örten olan fonksiyona birebir örten fonksiyon denir [1].

Tanım 1.2 (Topolojik uzay) : X boştan farklı bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ sınıfına X üzerinde bir **topoloji** ve (X, τ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir.

$[T_1]$ $\emptyset, X \in \tau$ dır.

$[T_2]$ $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^n G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı sonlu arakesite göre kapalıdır.

$[T_3]$ $\forall i \in I$ için $G_{k_i} \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır [2].

Tanım 1.3 (Homeomorfizm) : (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir **homeomorfizm** denir.

- f fonksiyonu birebir ve örten;
- f fonksiyonu sürekli;
- f nin ters fonksiyonu $f^{-1}: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ sürekli.

Eğer (X, τ) ve (Y, σ) uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara homeomorf ya da topolojik olarak eş yapılıdır denir [2].

Tanım 1.4 (Grup) : Grup tanımını yapabilmek için öncelikle ikili işlem tanımını vermeliyiz.

$G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $*: G \times G \rightarrow G$ şeklinde tanımlanan $*$ dönüşümüne G de bir ikili işlem ve üzerinde ikili işlemin tarif edildiği bu G kümesine de cebirsel yapı denir ve $(G, *)$ ile gösterilir.

$G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $*: G \times G \rightarrow G$ dönüşümü G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ ikilisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa buna **grup** denir.

G₁) $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ dir. (Kapalılık Özelliği)

G₂) $\forall a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ dir. (Birleşme Özelliği)

G₃) $\forall a \in G$ için $e * a = a * e = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır. (Birim Eleman)

G₄) $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ vardır. (Ters Eleman)

$*$ ikili işlemi $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ şartını sağlıyorsa bu gruba **değişmeli (abelyen, komütatif) grup** denir [1].

$(G, *)$ bir grup ve H, G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G deki grup işlemine göre H kümesi bir grup teşkil ediyorsa H 'ye G 'nin **alt grubu** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.5 (Cosetler (Yan kümeler)) : G bir grup ve H, G 'nin bir alt grubu olsun. $g \in G$ olmak üzere,

$$H.g = \{hg : h \in H\} \quad \text{ve} \quad g.H = \{gh : h \in H\}$$

kümelerine H 'nin sırasıyla sağ ve sol yan kümeleri denir. (toplam notasyonunda $H + g = \{h + g : h \in H\}$ ve $g + H = \{g + h : h \in H\}$ olur.) [3].

Tanım 1.6 (Normal Alt grup) : G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer H 'ın G 'deki bütün sağ ve sol yan kümeleri eşitse, yani $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa o takdirde H alt grubuna G 'nin normal alt grubu denir ve $H \triangleleft G$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.7 (Bir grubun merkezi) : G bir grup olmak üzere G 'nin merkezi $M(G)$ ile gösterilir ve

$$M(G) = \{a \in G : ax = xa, \forall x \in G \text{ için}\}$$

olarak tanımlanır. Diğer bir deyimle bir G grubunun merkezi, G 'nin her elemanı ile değişmeli olan G deki elemanlardan oluşan bir kümedir [1].

Tanım 1.8 (Bir grubun bir küme üzerine etkisi) : G bir grup ve A boştan farklı bir küme olsun. Bir

$$*: G \times A \rightarrow A, \quad (g, a) \mapsto ((g, a)) = g * a$$

fonksiyonu verilsin. Eğer

- i. $\forall a \in A$ için $e * a = a$ ise;
- ii. $\forall a \in A$ ve $g, h \in G$ için $(gh) * a = g * (h * a)$ ise;

o zaman $*$ fonksiyonuna G nin A üzerine bir etkisi ve A ya bir $G -$ kümesi denir [4].

Tanım 1.9 (Grup izomorfizmi ve homomorfizmi) :

$(G, \circ), (G', \circ')$ iki grup ve $\phi: G \rightarrow G'$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in G$ için,

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ' \phi(b)$$

oluyorsa bu ϕ dönüşümüne **izomorfizm** (eş yapı dönüşümü) denir. $G = G'$ olması halinde $\phi: G \rightarrow G$ izomorfizmine ise G 'nin **otomorfizmi** adı verilir.

Şayet $\phi: G \rightarrow G'$, bir izomorfizm ise G ve G' ye izomorf denir ve bu $G \cong G'$ ile ifade edilir.

Homomorfizm kavramı izomorfizm kavramından daha zayıf olmakla beraber cebirde çok büyük bir öneme sahiptir.

$(G, \circ), (G', \circ')$ iki grup ve $\phi: G \rightarrow G'$ bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in G$ için,

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ' \phi(b)$$

oluyorsa bu ϕ dönüşümüne **grup homomorfizmi (veya kısaca homomorfizm)** denir. ϕ homomorfizmi birebir ise ϕ ye **monomorfizm**, ϕ dönüşümü örten ise ϕ ye **epimorfizm** adı verilir. $G = G'$ olması halinde $\phi: G \rightarrow G$ homomorfizmine ise G nin **endomorfizmi** denir [3].

Tanım 1.10 (İç otomorfizm) : G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için,

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$ nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G 'nin bir **iç otomorfizması** denir [5].

G nin bütün otomorfizmlerinin kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.11 (Halka) : $H \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere H üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan toplama (+) ve çarpma (.) işlemleri tanımlı ise, H kümesine toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka denir ve $(H, +, .)$ ile gösterilir.

H_1) H kümesi (+) işlemine göre değişmeli grup olmalıdır.

H_2) $\forall a, b, c \in H$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ olmalıdır. (Çarpma işleminin birleşme özelliği)

H_3) $\forall a, b, c \in H$ için $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$ olmalıdır. (Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği)

Eğer $\forall a \in H$ için $a.e = e.a = a$ olacak şekilde $e \in H$ varsa yani H halkasının çarpma işlemine göre birim elemanı varsa H halkasına **birimli bir halka** denir [1].

Tanım 1.12 (Cisim) : H değişmeli ve birimli bir halka olsun.

$$\forall a \in H ; a \neq 0 \text{ için } \exists b \in H ; a.b = b.a = 1$$

ise ,yani değişmeli H halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa H ye bir **cisim** denir [1].

BÖLÜM II

KATEGORİ VE GRUPOİDLER

2.1 Kategori

Kategori teorisinin matematiğin diğer birçok dallarında da kullanım alanı vardır. Kategori teorisi aynı tip nesneler ve bunlar arasındaki dönüşümlerle ilgilidir. Daha genel olarak, kümeler arasındaki fonksiyonların bileşkesinin birleşme özelliğine sahip olduğunu ve her bir küme için bir birim fonksiyonu bulunduğunu biliyoruz. Burada daha genel olarak kümeler yerine **nesneler** ve fonksiyonlar yerine **morfizmler** alındığında kategori kavramı elde edilmiş olur [2,6] .

Genellikle bu kavramların açıklandığı temel kaynak Blyth ‘in yapmış olduğu Categories [6] kitabı olduğundan burada o kaynak referans gösterilerek alıntılar yapılmıştır.

Tanım 2.1.1 : Bir $\mathcal{C}$ kategorisi nesnelerinin kümesi $Ob(\mathcal{C})$, morfizimlerinin kümesi $Mor(\mathcal{C})$, kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha, \beta : Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{C})$$

nesne dönüşümü,

$$\varepsilon : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C})$$

$$x \rightarrow \varepsilon(x) = I_x$$

ve

$$Mor(\mathcal{C})_\alpha \times_\beta Mor(\mathcal{C}) = \{(a, b) \in Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) : \alpha(b) = \beta(a)\}$$

üzerinde tanımlı “.” biçimindeki çarpma işlemi kısmi çarpma işlemi olarak adlandırılacaktır. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlarlar;

$$\mathbf{K}_1) \forall (a, b) \in Mor(\mathcal{C})_\alpha \times_\beta Mor(\mathcal{C}) \text{ için } \alpha(b.a) = \alpha(a) \text{ ve } \beta(b.a) = \beta(b)$$

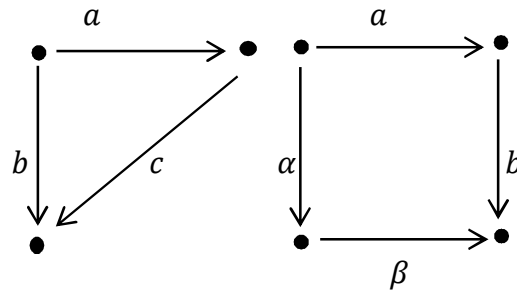
$$\mathbf{K}_2) \forall a, b, c \in Mor(\mathcal{C}) \text{ ile } \alpha(c) = \beta(b) \text{ ve } \alpha(b) = \beta(a) \text{ için}$$

$$c.(b.a) = (c.b).a$$

$$\mathbf{K_3)} \quad \forall x \in Ob(\mathcal{C}) \text{ için } \alpha(I_x) = x = \beta(I_x)$$

$$\mathbf{K_4)} \quad \forall a \in Mor(\mathcal{C}) \text{ için } a.I_{\alpha(a)} = a \text{ ve } I_{\beta(a)}.a = a \text{ dır [2,6] .}$$

Tanım 2.1.2 : Her hangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde nesnelerin ve morfizmlerin bir diyagramı için verilen bir kaynak nesnesinden bir hedef nesnesine tüm bileşke morfizmler eşit ise kategori değişimlidir denir. Bu geometrik olarak gösterilecek olursa



biçiminde ifade edilir. Bu diyagramının değişmeli olması için gerek ve yeter şart

$$c = b \circ a \text{ ve } \beta \circ \alpha = b \circ a$$

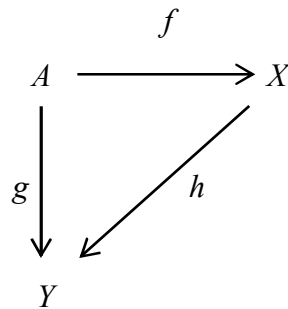
olmasıdır. Değişmeli kategoriye aşağıdaki örnekler verilebilir [6,7].

Örnek 2.1.1 : $\mathcal{C}$ bir kategori ve $A, \mathcal{C}$ kategorisinin sabit nesnesi olsun. Aşağıdaki gibi bir $A^{\rightarrow}$ kategorisi oluşturulabilir:

$\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmleri olarak $A \xrightarrow{f} X$ nesneleri alınır. Yani,

$$Ob(A^{\rightarrow}) = \{f | f: A \rightarrow X, X \in Ob(\mathcal{C})\}$$

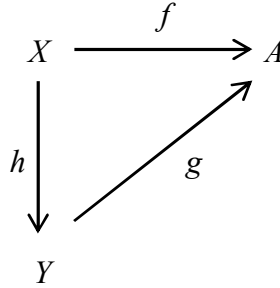
dir. $A \xrightarrow{f} X$ nesnesinden $A \xrightarrow{g} Y$ nesnesine bir morfizm aşağıdaki diyagramdaki gibi verilirse



değişimli diyagramı elde edilir.

Benzer şekilde ; $\rightarrow A$ kategorisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Nesneler için $\mathcal{C}$ kategorisinin $X \xrightarrow{f} A$ şeklindeki morfizmleri ile ve $X \xrightarrow{f} A$ nesnesinden $Y \xrightarrow{g} A$ nesnesine bir morfizm de aşağıdaki diyagramla ifade edilir ve

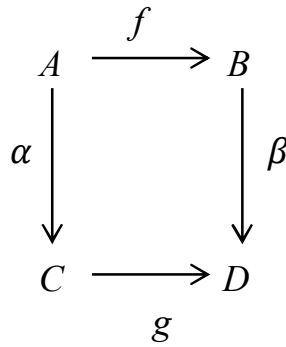


değişimli diyagramı elde edilir [6] .

Bu kategorilere *comma kategorileri* de denir.

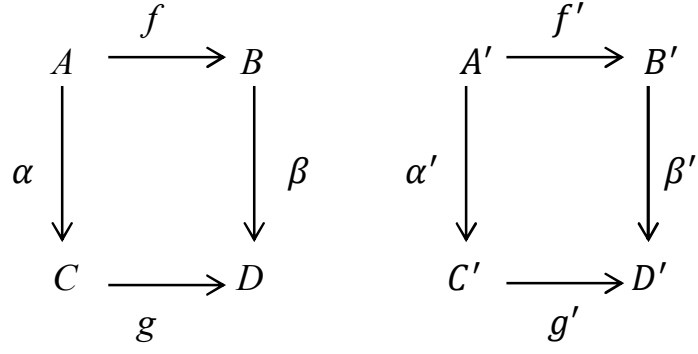
Örnek 2.1.2 : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$ kategorisinden aşağıdaki gibi bir başka kategori de elde edilir.

Nesneleri $\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmleri ve $A \xrightarrow{f} B$ nesnesinden $C \xrightarrow{g} D$ nesnesine bir morfizm olan kategori



değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

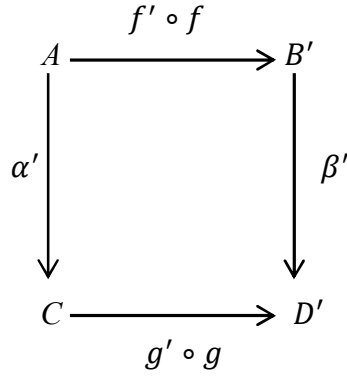
Morfizmlerin bileşimi de aşağıda verilen şekilde tanımlanabilir:



Bu diyagramlarının birleşimli olması için gerek ve yeter şart

$$A' = B \text{ ve } C' = D$$

olmasıdır. Bu durumda diyagramların bileşkeleri olan şekil



ile verilir.

Bu kategoriye $\mathcal{C}$ kategorisi üzerindeki *ok kategori* denir [6].

Tanım 2.1.3 : Eğer bir kategorinin nesneleri bir küme şeklinde ise bu kategoriye *küçük kategori* denir [6].

Kategori tanımından hemen sonra alt kategorinin ne olması gerektiği konusunda alt kategori tanımı aşağıdaki biçimde verilebilir.

Tanım 2.1.4 : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun.

- i) $Ob \mathcal{C} \subseteq Ob \mathcal{D}$
- ii) $\forall x, y \in Ob \mathcal{C}$ için $\mathcal{C}(x, y) \subseteq \mathcal{D}(x, y)$
- iii) $\mathcal{C}$ nin morfizmalarının bileşke işlemi $\mathcal{D}$ nin ki ile aynı ise bu durumda

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ nin *alt kategorisidir* denir [9] .

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ nin alt kategorisi ve $\forall x, y \in Ob \mathcal{C}$ için $\mathcal{C}(x, y) = \mathcal{D}(x, y)$ ise $\mathcal{C}$ ye $\mathcal{D}$ nin dolu alt kategorisi, $Ob\mathcal{C} = Ob \mathcal{D}$ ise $\mathcal{C}$ ye $\mathcal{D}$ nin *geniş alt kategorisi* denir [2,7].

Tanımını vermiş olduğumuz kategorilere aşağıdaki örnekler tanımların anlaşılması için verilebilir.

Örnek 2.1.3 : Her kategori kendisinin dolu bir alt kategorisidir [2].

Çözüm için her kategori kendisinin bir alt kategorisi ise bu kategorinin nesnelerinin kümesi ve morfizmlerinin kümesi her zaman için mevcuttur. Aynı zamanda birebir olduklarından alt kategori şartları sağlanır. Bu durumda her kategori kendisinin dolu alt kategorisidir.

Örnek 2.1.4 : Sonlu olan kümelerin kategorisi *Set* kategorisinin dolu bir alt kategorisidir [2].

Örnek 2.1.5 : *Abel* grupların kategorisi, *Grup* kategorisinin dolu bir alt kategorisidir [2].

Örneklerle tanıttığımız *Set* kategorisi için aşağıdaki önemli özellikler verilebilir.

Önerme 2.1.1 : Kümelerin *Set* kategorisinde bir $a: A \rightarrow B$ morfizmi için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1. a bire-bir dir. (Yani $a(X) = a(Y)$ ise $X = Y$ dir.)
2. a soldan sadeleşebilir. (Yani $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$ dir.) [6].

İspat : Gerçekten ;

$1 \Rightarrow 2$) : Kabul edelim ki a birebir, $b, c: C \rightarrow A$ ve $a \circ b = a \circ c$ olsun. Bu durumda $\forall X \in C$ için,

$$(a \circ b)(X) = (a \circ c)(X) \Rightarrow a(b(X)) = a(c(X))$$

olur ve a bire-bir olduğundan

$$b(X) = c(X)$$

dir. $\forall X \in C$ için ve $b, c: C \rightarrow A$ tanımlandığından

$$b = c$$

bulunur.

$2 \Rightarrow 1$) : Kabul edelim ki a soldan sadeleşebilir ve bire-birlik şartının hipotez kısmı olan $a(X) = a(Y)$ ve $C = \{\alpha\}$ olsun.

$$b(\alpha) = X \text{ ve } c(\alpha) = Y$$

olacak şekilde $b, c: C \rightarrow A$ dönüşümleri tanımlansın. Bu takdirde

$$a(X) = a(Y)$$

eşitliğinde X ve Y yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a(b(\alpha)) &= a(c(\alpha)) \Rightarrow a \circ b = a \circ c \\ &\Rightarrow b = c \end{aligned}$$

olduğundan

$$X = b(\alpha) = c(\alpha) = Y$$

bulunur [6].

2.1.1 Kategori örnekleri

Şimdi tanımı verilen ve kategori tanımına bağlı olarak çeşitli özellikleri yukarıda sunulan kategori örneklerini inceleyelim. Kategori kavramının net anlaşılması açısından aşağıda verilen örnekler genellikle kategori üzerine yayımlanan kitaplarda ve makalelerde verilen temel örneklerdir.

Örnek 2.1.1.1: Kategorinin nesneleri kümeler ve morfizmleri de kümeler arasındaki fonksiyonlar olmak üzere tüm kümelerin sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategoriye *kümeler kategorisi* denir ve *Set* ile gösterilir. Bu yapının bir kategori oluşturduğu şu şekilde gösterilebilir.

A, B kümeleri için $\mathcal{C}(A, B)$ sınıfı A dan B ye tüm fonksiyonların sınıfıdır. Burada kısmi çarpma işlemi ise fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanır. Her bir A kümesi için birim morfizm $I_A : A \rightarrow A$ birim fonksiyondur. O halde tüm kümelerin sınıfı bir kategori oluşturur [2].

Örnek 2.1.1.2: Topolojik uzayların sınıfı bir kategori oluşturur. Bu kategorinin nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi çarpma işlemi ise fonksiyonların bileşkesidir. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan böyle bir kısmi işlem tanımlıdır. Bu kategori kısaca *Top* ile gösterilir [2].

Örnek 2.1.1.3: Nesneleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve kısmi işlem ise grup homomorfizmlerinin bileşkesi olarak alındığında bir kategori elde edilir. Bu kategori *Grup* olarak adlandırılır.

Benzer olarak halkalar ve halka homomorfizmleri de bir kategori oluşturur. Bu kategori de *Ring* olarak adlandırılır [2].

Örnek 2.1.1.4: Topolojik grupların kategorisini oluşturmak için nesneler topolojik gruplar ve morfizmler ise sürekli grup homomorfizmleri olarak alınır. Bu şekilde elde edilen topolojik grupların kategorisi *TopGrup* olarak adlandırılır [2].

2.2 Epik ve Monik

Yukarıda tanımları, özellikleri ve örnekleri verilen kategori tanımının sıkça kullanılan ve verilmesi kaçınılmaz olan bazı özellikleri aşağıda verilmektedir. Bu konu hakkında daha detaylı bilgiler [6] ve [8] de bulunabilir.

Tanım 2.2.1 (Monik) : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Eğer $\mathcal{C}$ kategorisinde bir $a: A \rightarrow B$ morfizmi soldan kısaltılabilir ise a ' ya *monik* denir.

Set kategorisinde bir morfizmin monik olması için gerek ve yeter şart morfizmin bire-bir olmasıdır [6,8].

Yukarıda ispatlanan Önerme 2.1.1 'in $(1 \Rightarrow 2)$ ispatından bir kategoride her bir morfizmin monik olduğu gösterilmiştir. Bu verilen önermenin tersinin doğru olmadığına aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.2.1 : $\forall g \in G$ ve her pozitif n -tamsayısı için $g = ng'$ olacak şekilde $g' \in G$ varsa G abel grubuna bölünebilirdir denir. Daha sade bir şekilde ifade etmek gerekirse nesneler olarak bölünebilir abel grupları ve morfizmler olarak da grup morfizmleri alınırsa *BölAb* kategorisi oluşturulabilir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}|\mathbb{Z}$ nin ikisi de *BölAb* kategorisinde nesnelerdir. Bu durum matematiksel olarak ifade edilirse

$$\frac{p}{q} = n\left(\frac{p}{n.q}\right)$$

biçiminde gösterilir. Yine

$$\frac{p}{q} + \mathbb{Z} = n + \left(\frac{p}{nq} + \mathbb{Z}\right)$$

eşitliğinden de görülebilir. Şimdi;

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q}|\mathbb{Z} \\ q &\rightarrow \varphi(q) = q + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ile tanımlanan doğal morfizmini göz önüne alalım. Bu morfizm bire-bir değildir, fakat moniktir. Gerçekten φ 'nin bire-bir olmadığı açıktır. Monik olduğunu göstermek için kabul edelim ki;

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{Q}$$

$f \neq g$ olmak üzere $BölAb$ kategorisinde morfizmler olsun. Bu takdirde

$$f(a) - g(a) = \frac{r}{s} \neq 0 \text{ ve } s \neq \pm 1$$

olacak şekilde $a \in A$ vardır. A bölünebilir olduğundan $a = rb$ olacak şekilde bir $b \in A$ bulunabilir. Öyleyse;

$$\begin{aligned} r[f(b) - g(b)] &= r.f(b) - r.g(b) \\ &= f(rb) - g(rb) \\ &= f(a) - g(a) \\ &= \frac{r}{s} \end{aligned}$$

olur ve böylece

$$f(b) - g(b) = \frac{1}{s}$$

elde edilir. Bu da

$$\varphi(f(b)) \neq \varphi(g(b))$$

olduğunu verir. Böylece;

$$\varphi \circ f \neq \varphi \circ g$$

olur. Bu da φ 'nin soldan kısaltılabilir olduğunu verir. Dolayısıyla moniktir [6].

Tanım 2.2.2 (Epik) : $\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ kategorisinde bir $a: A \rightarrow B$ morfizmi sağdan kısaltılabilirse, yani;

$$b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c$$

ise a ' ya *epik morfizmler* denir.

Epik morfizmlerin özelliklerini yansıtan önerme ve örnekler aşağıdaki gibi verilebilir [6,8].

Önerme 2.2.1 : *Set* kategorisindeki morfizmlerin epik olması için gerek ve yeter şart örten dönüşümler olmasıdır [6].

İspat : Bunu göstermek için kabul edelim ki $a: A \rightarrow B$ sağdan kısaltılabilir olsun.

Burada ;

$$b, c: B \rightarrow \{0,1\}$$

olmak üzere

$$b(X) = \begin{cases} X & , X \in \text{Im } a \\ 0 & , X \notin \text{Im } a \end{cases} , \quad c(X) = \begin{cases} X & , X \in \text{Im } a \\ 1 & , X \notin \text{Im } a \end{cases}$$

verilirse $\forall y \in A$ için

$$b(a(Y)) = a(Y) = c(a(Y))$$

dir. Buradan;

$$b \circ a = c \circ a$$

elde edilir. Hipotezden

$$b = c$$

dir. Eğer $\text{Im } a \subset B$ ise bu durumda $X \in B$ ve $X \notin \text{Im } a$ olacak şekilde mevcuttur.

Böylelikle bir X elemanı için

$$0=b(X)=c(X)=I$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\text{Im } a=B$ dir ve a örtendir.

Tersine kabul edelim ki

$$a: A \rightarrow B$$

örten olsun ve $b \circ a = c \circ a$ olacak şekilde

$$b, c: B \rightarrow C$$

morfizmleri verilsin. $Y \in B$ ise bazı $X \in A$ 'lar için a örten olduğundan $Y = a(X)$ biçiminde ifade edilir.

Buradan

$$b(Y) = b(a(X)) = c(a(X)) = c(Y)$$

bulunur.

Sonuç olarak $b=c$ elde edilir ki bu da a nın sağdan kısaltılabilir olduğunu gösterir. O halde *Set* kategorisinde epik morfizmler örtendir [6].

Örnek 2.2.2 : *Ring* kategorisindeki

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

dönüşümü ele alınsın. Bu morfizm örten değildir, ancak epiktir.

Gerçekten de i dönüşümünün örten olmadığı açıktır. Şöyle ki $\forall z \in \mathbb{Z}$ için $i(z) = q$ olacak şekilde $\exists q \in \mathbb{Q}$ yoktur. Bu yüzden örten değildir. Şimdi ise i' nin epik olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$b, c: \mathbb{Q} \rightarrow A$$

morfizmleri *Ring* kategorisinde

$$b \circ i = c \circ i$$

eşitliğini sağlayan morfizmler olsunlar. Bu takdirde her n -tamsayısı için

$$b(n) = c(n)$$

elde edilir. $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ için

$$\begin{aligned} b\left(\frac{m}{n}\right) &= b(m \cdot n^{-1} \cdot 1) \\ &= b(m) \cdot b(n^{-1}) \cdot b(1) \\ &= c(m) \cdot b(n^{-1}) \cdot c(1) \\ &= c(m) \cdot b(n^{-1}) \cdot c(n) \cdot c(n^{-1}) \\ &= c(m) \cdot b(n^{-1}) \cdot b(n) \cdot c(n^{-1}) \\ &= c(m) \cdot b(1) \cdot c(n^{-1}) \\ &= c(m) \cdot c(1) \cdot c(n^{-1}) \\ &= c\left(\frac{m}{n}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan $b = c$ elde edilir. Böylece i dönüşümü sağdan kısaltılabilir ve dolayısıyla epiktir [6].

Bu tanımlama ve örnekler ışığı altında epik ve monik morfizmler için aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir [6].

SONUÇ:

1. a ve b monik olmak üzere $a \circ b$ de moniktir. Gerçekten de ;

$$\begin{aligned} a \circ b \circ c = a \circ b \circ d &\Rightarrow b \circ c = b \circ d \\ &\Rightarrow c = d \end{aligned}$$

2. a ve b epik olmak üzere $a \circ b$ de epiktir. Gerçekten de ;

$$\begin{aligned} c \circ a \circ b = d \circ a \circ b &\Rightarrow c \circ a = d \circ a \\ &\Rightarrow c = d \end{aligned}$$

3. $a \circ b$ monik olmak üzere b moniktir. Gerçekten de ;

$$\begin{aligned} b \circ c = b \circ d &\Rightarrow a \circ b \circ c = a \circ b \circ d \\ &\Rightarrow c = d \end{aligned}$$

4. $a \circ b$ epik olmak üzere a epiktir. Gerçekten de ;

$$\begin{aligned} c \circ a = d \circ a &\Rightarrow c \circ a \circ b = d \circ a \circ b \\ &\Rightarrow c = d \end{aligned} \quad [6]$$

2.3 Özel Nesneler ve Morfizmler

Tanım 2.3.1: Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : A \rightarrow B$ morfizmi verilsin. Eğer bu f morfizmi soldan kısaltma özelliğine sahipse yani $f \circ g = f \circ h$ olacak şekildeki g ve h morfizmleri için $g = h$ olacak şekilde bulunabilirse f morfizmine bir *monomorfizm* denir [2] .

Tanım 2.3.2: Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : A \rightarrow B$ morfizmi verilsin. Eğer bu f morfizmi sağdan kısaltma özelliğine sahipse yani $g \circ f = h \circ f$ olacak şekildeki g ve h morfizmleri için $g = h$ bulunabilirse f morfizmine bir *epimorfizm* denir [2].

Tanım 2.3.3: $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : A \rightarrow B$ de bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer $g f = 1_A$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow A$ morfizmi varsa f ye bir *kesit* denir. Eğer $f g = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow A$ morfizmi varsa f ye bir *dual kesit* denir [2].

Tanım 2.3.4: Monomorfizm ve epimorfizm olan bir morfizme *bimorfizm*, kesit ve dual kesit olan bir morfizme ise *izomorfizm* denir. Eğer $f : A \rightarrow B$ dönüşümü bir izomorfizm ise A ve B nesnelere *izomorf* denir [2].

Tanım 2.3.5: Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $A \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi verilsin. Eğer her bir $X \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi için $Mor_{\mathcal{C}}(A, X)$ bir tek morfizme sahipse $A \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesine bir *kaynak dönüşümü* denir.

Benzer olarak her bir $X \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi için $Mor_{\mathcal{C}}(X, A)$ bir tek morfizme sahipse $A \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesine bir *hedef dönüşümü* denir [2].

2.4 Funktorlar

Her kategoride, nesneler arasındaki dönüşümlere karşılık gelen morfizmlerin olduğu bilinmektedir. Örneğin kümeler arasında fonksiyonlar, topolojik uzaylar arasında sürekli fonksiyonlar, gruplar arasında grup homomorfizmleri vardır. Benzer olarak kategoriler arasında da dönüşümlerin olması kaçınılmazdır. Bu dönüşümlere literatürde funktor denir ve çeşitli özellikleri mevcuttur. Bu özellikler ve tanımlamalar aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.4.1: $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ nin her bir A nesnesini $\mathcal{D}$ nin bir $F(A)$ nesnesine, $\mathcal{C}$ nin her bir $f : A \rightarrow B$ morfizmini ise $\mathcal{D}$ deki bir $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir *funktor* denir ve $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ biçiminde gösterilir.

- i) $\mathcal{C}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.
- ii) $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır [2,6].

Tanım 2.4.2 : $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategorisinin alt kategorisi, $\forall X \in \mathcal{C}$ için $iX = X$ ve $\mathcal{C}$ kategorisinin her morfizmi için de

$$ia = a$$

biçiminde ise $i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir funktordur. Bu funktora *dahil etme funktoru* denir [6].

Tanım 2.4.3 : $F: Grp \rightarrow Grp$ funktoru *türemiş grup funktoru* denir. $F: Grp \rightarrow Abel$ funktoru ise *abel funktoru* adı verilir [6].

Tanım 2.4.4 : $F: A_1 \times A_2 \rightarrow A$ şeklinde tanımlı funktora *bifunktor* , $F: A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow A$ şeklinde tanımlı funktora *trifunktor* ,ve

$$F: A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \rightarrow A \quad n \geq 4$$

şeklinde tanımlı funktora ise *multifunktor* denir [6].

Tanım 2.4.5 : $F: A \rightarrow B$ funktoru için $G \circ F = 1_A$ ve $F \circ G = 1_B$ olacak şekilde $G: B \rightarrow A$ funktoru bulunabiliyor ise F funktoru *izomorfizm* denir [6].

Tanım 2.4.6 : Eğer $F: A \rightarrow B$ izomorfizm ise A ve B kategorilerine *izomorfik kategoriler* denir [6].

Özelliklerini vermiş olduğumuz funktor tanımını daha açıklayıcı yapmak için aşağıdaki örnekler verilebilir. Bu örnekler funktor kavramının başka özelliklerini veren örnekler olacaktır.

Örnek 2.4.1 : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri ve bir $B \in Ob(\mathcal{D})$ nesnesi verilsin. $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(A)=B$ ve her bir f morfizmi için $F(f)=1_B$ alınıp $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktoru elde edilir. Bu funktora *sabit funktor* adı verilir [2,6].

Örnek 2.4.2 : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesini A ya ve her bir $f : A \rightarrow B$ morfizmini ise kendisine dönüştüren $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktoru vardır. Bu fonktora *birim fonktor* adı verilir ve $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ şeklinde gösterilir [2,6].

2.5 Grupoidler

Tanım 2.5.1: $\mathcal{G}$ bir kategori olmak üzere nesnelerin kümesi $Ob(\mathcal{G})$ ve morfizimlerinin kümesi $Mor(\mathcal{G})$ den, kaynak ve hedef dönüşümleri ;

$$\alpha, \beta : Mor(\mathcal{G}) \rightarrow Ob(\mathcal{G})$$

olmak üzere nesne dönüşümü ;

$$\begin{aligned} \varepsilon : Ob(\mathcal{G}) &\rightarrow Mor(\mathcal{G}) \\ x &\mapsto \varepsilon(x) = I_x \end{aligned}$$

ters dönüşüm ;

$$\begin{aligned} i : Mor(\mathcal{G}) &\rightarrow Mor(\mathcal{G}) \\ a &\mapsto i(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$Mor(\mathcal{G})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{G}) = \{(a, b) \in Mor(\mathcal{G}) \times Mor(\mathcal{G}) : \alpha(b) = \beta(a)\}$$

üzerinde tanımlı bu dönüşümler aşağıdaki aksiyomları sağlaması durumunda bir grupoid olarak adlandırılır.

$$\mathbf{G_1)} \quad \forall (a, b) \in Mor(\mathcal{G})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{G}) \quad \text{için} \quad \alpha(b \cdot a) = \alpha(a) \quad \text{ve} \quad \beta(b \cdot a) = \beta(b)$$

$$\mathbf{G_2)} \quad \forall a, b, c \in Mor(\mathcal{G}) \quad \text{öyle ki,} \quad \alpha(c) = \beta(b) \quad \text{ve} \quad \alpha(b) = \beta(a) \quad \text{için,}$$

$$c \cdot (b \cdot a) = (c \cdot b) \cdot a$$

$$\mathbf{G_3)} \quad \forall x \in Ob(\mathcal{G}) \quad \text{için} \quad \alpha(I_x) = x = \beta(I_x),$$

$$\mathbf{G_4)} \quad \forall a \in \text{Mor}(\mathcal{G}) \text{ için } a \cdot I_{\alpha(a)} = a \text{ ve } I_{\beta(a)} \cdot a = a,$$

$$\mathbf{G_5)} \quad \text{Her bir } a \in \text{Mor}(\mathcal{G}) \text{ bir çift taraflı } a^{-1} \text{ tersine sahiptir öyle ki } \alpha(a) = \beta(a^{-1}),$$

$$\beta(a) = \alpha(a^{-1}) \text{ ve } a^{-1} \cdot a = I_{\alpha(a)} \text{ ile } a \cdot a^{-1} = I_{\beta(a)} \text{ sağlanır. [2,6,9]}$$

Tanım 2.5.2: $\mathcal{G}$ bir grupoid ve $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{H}$ ’ ye $\mathcal{G}$ ’nin bir altgrupoid i denir.

$\mathbf{N_1)}$ α ve β sırasıyla $\mathcal{G}$ grupoidinin kaynak ve hedef dönüşümleri olmak üzere

$$\alpha(\mathcal{H}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{H}) \text{ ve } \beta(\mathcal{H}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{H})$$

$$\mathbf{N_2)} \quad \forall x \in \text{Ob}(\mathcal{H}) \text{ için } 1_x \in \mathcal{H}$$

$$\mathbf{N_3)} \quad \mathcal{H} \text{ kısmi çarpım altında kapalıdır. [6,9]}$$

Tanım 2.5.3: $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ nin bir altgrupoidi olsun. Eğer $\text{Ob}(\mathcal{H}) = \text{Ob}(\mathcal{G})$ ise $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$ grupoidinin geniş (wide) altgrupoidi denir.

Eğer $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{H})$ için,

$$\text{Mor}_{\mathcal{H}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{G}}(X, Y)$$

ise $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$ grupoidinin tam(full) altgrupoidi denir.

Eğer $\mathcal{H}$ geniş altgrupoid ve $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{H})$, $\lambda \in \text{Mor}_{\mathcal{H}}(X, X)$ ve $g \in \text{Mor}_{\mathcal{G}}(X, Y)$ için,

$$g\lambda g^{-1} \in \text{Mor}_{\mathcal{H}}(Y, Y)$$

ise $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$ grupoidinin normal altgrupoidi denir [6,9].

Tanım 2.5.4: $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid olsun. $\mathcal{G}$ grupoidinin her bir X nesnesini $\mathcal{H}$ grupoidinin bir $f(X)$ nesnesine ve $\forall a \in Mor_G(X, Y)$ elemanını $f(a) \in Mor_H(f(X), f(Y))$ elemanına dönüştüren bir

$$f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$$

morfizmine $\mathcal{G}$ grupoidinden $\mathcal{H}$ grupoidine bir *grupoid morfizmi* denir.

Eğer $I_X \in Mor_G(X, X)$, $X \in Mor_G$ 'de özdeş morfizm ise $f(I_X) = I_{f(X)}$ 'de $f(X) \in \mathcal{H}$ 'da özdeş morfizm olarak adlandırılır [6].

2.5.1 Grupoidlerin özellikleri

Bu bölümde groupoidlerin bazı özellikleri incelenecektir. Toplamsal notasyon kullanılacak olursa;

-a : $\mathcal{G}$ groupoidinin a morfizmasının tersini gösterebilir. Böylece $a - b = a + (-b)$ olarak yazabilir ve ayrıca $a - b - c$ hem $(a - b) - c$ olarak hem de $a - (c + b)$ olarak ifade edilebilir [7,9].

Tanım 2.5.1.1 : Sadece tek nesneden oluşan grupoidler gruptur. $\mathcal{G}(x)$ e $\mathcal{G}$ nin nesne grubu adı verilir [7,9].

Tanım 2.5.1.2 : $\mathcal{G}$ bir grupoid olsun. $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{G})$ için $\mathcal{G}(X, Y) \neq \emptyset$ ise $\mathcal{G}$ bağlantılıdır denir [7,9].

Teorem 2.5.1.1 : $\mathcal{G}$ bir grupoid $x, y, x', y' \in Ob \mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}$ bağlantılı grupoid olsun. Bu durumda $\varphi: \mathcal{G}(x, y) \rightarrow \mathcal{G}(x', y')$ eşlemesi vardır. Eğer $x = y$ ve $x' = y'$ seçilirse φ bir grup izomorfizmi olacak şekilde bulunabilir.

İspat : $\mathcal{G}$ bağlantılı olduğundan $\mathcal{G}(x, x') \neq \emptyset$ ve $\mathcal{G}(y, y') \neq \emptyset$ olduğundan $a: x \rightarrow x'$,
 $b: y \rightarrow y'$ seçebiliriz.

$$\begin{array}{ccc}
 x' & \xrightarrow{\varphi c} & y' \\
 \uparrow a & & \uparrow b \\
 x & \xrightarrow{c} & y
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi: \mathcal{G}(x, y) &\rightarrow \mathcal{G}(x', y') , \quad \varphi(c) = b + c - a \\
 \psi: \mathcal{G}(x', y') &\rightarrow \mathcal{G}(x, y) , \quad \psi(d) = -b + d + a
 \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 (\varphi\psi)(c) &= \varphi(b + c - a) \\
 &= -b + b + c - a + a \\
 &= c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi\psi &= 1_{\mathcal{G}(x', y')} \\
 \psi\varphi &= 1_{\mathcal{G}(x, y)}
 \end{aligned}$$

olur. Böylece φ eşleme olur. Eğer $x=y$ ve $x' = y'$ ise $a=b$ seçebiliriz. Böylece $\varphi(c) = a + c - a$ olur.

$x \in Ob\mathcal{G}$; $c, c' \in \mathcal{G}(x, x)$ için,

$$\begin{aligned}
 \varphi c + \varphi c' &= a + c - a + a + c' - a \\
 &= a + c + c' - a \\
 &= \varphi(c + c')
 \end{aligned}$$

Böylece φ grup homomorfizması olur ve φ birebir eşleme olduğundan φ grup izomorfizmasıdır. Böylece bağlantılı grupoidlerin nesne grupları izomorftur ve bu izomorfizm;

$$a_x: \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x')$$

$$c \mapsto a + c - a$$

olarak yazılır. Eğer $x = x'$ ise a_x , $\mathcal{G}(x)$ in iç otomorfizması olur [7,9].

Teorem 2.5.1.2 : x ve x' , $\mathcal{G}$ nin aynı bileşenine ait nesneleri olsun. Bu durumda $\forall a, b : x \rightarrow x'$ için $a_x = b_x : \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x')$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{G}(x)$ in abelyen olmasıdır.

$$\textbf{İspat : } \Rightarrow) ((-b + a)_x)(c) = (-b + a) + c - (-b + a) = -b + a + c - a + b =$$

$$(-b)_x(a_x(c))(-b + a)_x = (-b)_x a_x = b_x^{-1} a_x$$

$$\textbf{İddia 2.5.1.1 : } (-b)_x = b_x^{-1}$$

$$b_x(-b)_x = (b - b)_x = 0_x$$

$$(-b)_x b_x = (-b + b)_x = 0_x$$

$$(-b)_x = b_x^{-1}$$

olur.

$c: x \rightarrow x$ ise bu durumda

$$(b_x)^{-1}(b + c)_x = (b_x)^{-1}(b_x c_x) = ((b_x)^{-1} b_x) c_x = c_x$$

olduğundan $\mathcal{G}(x)$ in her iç otomorfizması $b_x^{-1} a_x$ formundadır [7,9].

İddia 2.5.1.2 : Bir grubun her iç otomorfizmasının aşikar izomorfizma olması için gerek ve yeter koşul grubun abelyen olmasıdır.

İspat : G bir grup olsun. $\forall g \in G$ için $\varphi: G \rightarrow G$ $\varphi(x) = gxg^{-1}$ olsun.

$\Rightarrow)$ φ iç otomorfizması aşikar olsun. Bu durumda $\forall x \in G$ için

$$gxg^{-1} = x \text{ olur.}$$

$$gxg^{-1} = x \Rightarrow gx = xg \text{ olup,}$$

$\forall x, g \in G$ için sağlandığından, G abelyendir.

$\Leftarrow)$ Açıktır.

$\forall a, b : x \rightarrow x'$ için

$b_x^{-1}a_x = 1_{\mathcal{G}}(x)$ olduğundan $\mathcal{G}(x)$ abelyendir.

$\Rightarrow$) $\mathcal{G}(x)$ abelyen olsun. Bu durumda bir önceki iddiadan $\mathcal{G}(x)$ in iç otomorfizmaları aşıkardır.

$\mathcal{G}(x)$ in iç otomorfizmaları $(b_x^{-1}a_x)$ formunda olduğundan,

$b_x^{-1}a_x = 1_{\mathcal{G}}(x)$ olur. Böylece $a_x = b_x$ olur [7,9].

2.5.2 Grupoid örnekleri

Örnek 2.5.2.1: Her grup grupoid yapılabilir [9] .

Kabul edelim ki G bir grup olsun. $\mathcal{C}$ 'nin tek nesnesi $*$, $\mathcal{C}(*, *) = G$ ve işlem grup işlemidir. G bir grup olduğundan birleşme ve birim eleman özelliğini sağlar. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ bir kategoridir. $\mathcal{C}$ 'nin her morfizması izomorfizma olduğundan (yani G 'nin elemanlarının tersi olduğundan) $\mathcal{C}$ bir grupoiddir.

Örnek 2.5.2.2: Bir X kümesi kendi üzerinde bir grupoid olarak düşünülebilir. Burada

$$\alpha = \beta = I_X$$

ve her elemanı birim dönüşümdür. Bütün elemanları birim olan bu tür grupoidlere *boş (null) grupoid* denir. $\forall x \in X$ için sadece bir 1_X dönüşümü vardır. Bu dönüşümlerin bileşkesi de

$$1_X \cdot 1_X = 1_X$$

olacağından başka bir işlemi de yoktur [6].

Örnek 2.5.2.3: X bir küme ve K bir grup olsun. $X \times K \times X$ yapısı X kümesi üzerinde aşağıdaki gibi bir grupoid oluşturur: Kaynak ve hedef dönüşümleri

$$\alpha(x, g, y) = x$$

$$\beta(x, g, y) = y$$

Ters dönüşüm

$$i(x, g, y) = (x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x)$$

Nesne dönüşümü

$$\varepsilon(x, g, y) = (x, 1, y)$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$(z, h, y)(y, g, x) = (z, hg, x)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$(X \times K \times X, X, \alpha, \beta, i, \varepsilon, m)$$

bir grupoid olur. Bu grupoide *aşıkâr grupoid* denir [6] .

Örnek 2.5.2.4: X bir küme olsun. O halde X nesne kümesi ve $X \times X$ morfizm kümesi olacak şekilde bir grupoid vardır. Burada (y, x) ikilisi $x \rightarrow y$ morfizmini göstermektedir. Kısmi çarpım işlemi

$$(z, y)(y, x) = (z, x)$$

olarak verilir.

Çok basit ve sıradan görünmesine karşın bu grupoidin uygulamada kilit bir rolü vardır. Bunun bir nedeni, eğer $\mathcal{G}$, $X \times X$ in bir altgrupoidi ve X üzerinde tam ise o zaman $\mathcal{G}$, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu da $\forall x \in X, (x, x) \in X \times X$ için $(x, y) \in \mathcal{G}$ ise $(y, x) \in \mathcal{G}$ ve $(z, y), (y, x) \in \mathcal{G}$ ise $(z, x) \in \mathcal{G}$ demektir [6] .

Örnek 2.5.2.5 : Topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki homeomorfizmler kategorisi bir grupoid oluşturur. Gerçekten, morfizmlerin kümesi topolojik uzaylar arası homeomorfizmler, yani;

$$Mor(\mathcal{G}) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ homeomorfizmler}, X, Y \text{ topolojik uzaylar}\}$$

ve nesnelerin kümesi

$$Ob(\mathcal{G}) = \{X \mid X \text{ bir topolojik uzay}\}$$

olmak üzere, $f \in Mor(\mathcal{G})$, $f : X \rightarrow Y$ için kaynak ve hedef dönüşümleri

$$\alpha(f) = X \text{ ve } \beta(f) = Y,$$

ters dönüşüm

$$i : Mor(\mathcal{G}) \rightarrow Mor(\mathcal{G})$$

$$f \mapsto f^{-1},$$

nesne dönüşümü

$$\varepsilon : X \rightarrow Mor(\mathcal{G})$$

$$X \mapsto \varepsilon(X) = I_X$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$Mor(\mathcal{G})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{G}) = \{(f, g) \in Mor(\mathcal{G}) \times Mor(\mathcal{G}) : \beta(f) = \alpha(g)\}$$

olmak üzere

$$m : Mor(\mathcal{G}) \times Mor(\mathcal{G}) \rightarrow Mor(\mathcal{G})$$

$$(f, g) \mapsto g \cdot f$$

ile tanımlıdır. Böylece $(Mor(\mathcal{G}), Ob(\mathcal{G}), \alpha, \beta, i, \varepsilon, m)$ bir grupoid oluşturur [6].

Örnek 2.5.2.6: X bir küme olmak üzere $R \subset X \times X$ denklik bağıntısı X üzerinde bir grupoiddir.

Burada morfizmlerin kümesi $Mor(R) = R = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$ ve nesneler kümesi $Ob(R) = X$ olmak üzere hedef ve kaynak dönüşümleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\alpha : R &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto \alpha(x, y) = x \\ \beta : R &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto \beta(x, y) = y,\end{aligned}$$

ters dönüşüm

$$\begin{aligned}i : R &\rightarrow R \\ (x, y) &\mapsto (x, y)^{-1} = (y, x),\end{aligned}$$

nesne dönüşümü

$$\begin{aligned}e : X &\rightarrow R \\ x &\mapsto I_x,\end{aligned}$$

ve kısmi çarpım işlemi

$$\begin{aligned}m : R \times R &\rightarrow R \\ (x, y), (y, z) &\mapsto (x, z)\end{aligned}$$

şeklinde dir. Böylece $(Mor(R), Ob(R), \alpha, \beta, i, e, m)$ bir grupoid oluşturur [6].

2.6 Homotopi

Tanım 2.6.1 : $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x) \quad \forall x \in X$ şartları ile birlikte $F : X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümüne *homotopi* denir. Burada X, Y uzaylar olmak üzere $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümlerdir ve f_0, f_1 'e *homotopiktir* denir [10-12].

İki matematiksel nesnenin homotopik olması, birinin diğeri üzerine sürekli olarak deforme edilebilmesi ile aynı anlamdadır. Örneğin gerçel sayı doğrusu, tek bir noktaya homotopiktir. Ancak çember, tek bir nokta uzayına homotopik değildir [10-12].

Tanım 2.6.2 : Nesneleri X topolojik uzayları, Hom kümeleri $Hom(X, Y) = [X, Y]$ ve birleşimleri $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ biçimindeki bölüm kategorisi *homotopi kategorisi* olarak adlandırılır ve $hTop$ ile ifade edilir [10-12].

Örnek 2.6.1 : $n \geq 1$ için $X = Y = R^n$ olsun. $\forall x \in R^n$ için $f(x) = x$ ve $g(x) = 0$ fonksiyonları için $H(x, t) = (1 - t)x$ ile tanımlı $H : R^n \times I \rightarrow R^n$ tanımlı fonksiyonu f ve g fonksiyonları arasında homotopi fonksiyonudur ve $f \simeq g$ 'dir [10-12].

Tanım 2.6.3 : Nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri homotopi sınıfları ve kısmi çarpım işlemide homotopi sınıfları arasında tanımlı $*$ işleminden oluşan kategoriye *homotopiler kategorisi* denir [10-12].

Tanım 2.6.4 : $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu sabit bir fonksiyona homotopik ise f 'ye *null homotopik fonksiyon* denir [10-12].

Tanım 2.6.5 : (Relatif homotopi)

$A \subset X, f : X \rightarrow Y$ ve $g : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $a \in A$ için f ve g arasında $t \in I$ dan bağımsız $F(a, t)$ homotopisi mevcutsa f ve g fonksiyonlarına A ya göre homotopiktirler denir. Diğer bir deyişle $\forall a \in A$ ve $\forall t \in I$ için $F(a, t) = f(a) = g(a)$ olacak şekildeki F homotopisine A ya göre homotopi denir. Bu homotopi $f \simeq g(relA)$ veya $F : f \simeq g(relA)$ biçiminde gösterilir.

$F: f \simeq g(\text{rel}A)$ ise $\forall x \in X$ için $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ olup $\forall x_0 \in A$, $\forall t \in I$ için $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$ elde edilir. Eğer $A = \emptyset$ ise A ya göre homotopiye *null homotopi* denir [10-12].

Homotopi denkliği

İki sürekli fonksiyonun homotopik iken denk oluşunu düşünecek isek, homeomorfizm tanımını değiştirmemiz gerekir ‘=’ işareti yerine homotopiyi koymalıyız. Bu bizi aşağıdaki ‘homotopi denkliği’ kavramına götürür:

Tanım 2.6.6 : X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $g \circ f \simeq I_X: X \rightarrow X$ ve $f \circ g \simeq I_Y: Y \rightarrow Y$ olacak şekilde $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları mevcutsa, X ve Y uzaylarına aynı homotopi tipindendir ya da homotopik olarak denktir denir. f ile g fonksiyonlarına ise homotopi denklikleri denir.

Yazarken ‘homotopi denkliği’ kavramından ziyade ‘iki uzayın homotopik olması’ kavramı daha yaygındır [10-12].

Örnek 2.6.2 : S tek bir nokta içeren bir uzay ise S ve $\mathbb{R}$ homotopi denktir. Bunu görmek için $f: \mathbb{R} \rightarrow S$ sabit bir fonksiyon (f i nasıl tanımladığımıza dair herhangi bir seçim yok) ve $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, S deki tek noktayı $\mathbb{R}$ de 0 a götüren bir fonksiyon olsun. $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 0’a göre sabit fonksiyon iken, $f \circ g: S \rightarrow S$ birim fonksiyondur. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tüm fonksiyonlar homotopik olduğundan $g \circ f$ birime homotopiktir.

2.6.1 Homotopi örnekleri

Örnek 2.6.1.1 : $\forall (x, y) \in S^1$ için

$$f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, y)$$

doğal içine (inclusion) fonksiyon ve

$$g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (0, 0)$$

sabit fonksiyon olmak üzere

$$F: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

($I=[0,1]$) fonksiyonu $F((x, y), t) = (1 - t)f(x, y)$ şeklinde tanımlandığında sürekli olur. Ayrıca

$$F((x, y), 0) = (1 - 0)f(x, y)$$

$$= f(x, y)$$

ve

$$F((x, y), 1) = (1 - 1)f(x, y)$$

$$= (0, 0)$$

$$= g(x, y)$$

olup f ve g homotopiktir [10-12].

Örnek 2.6.1.2 : $\forall x$ için $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ birim dönüşüm ve $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ sabit dönüşümü $g(x)=0$ olacak şekilde verilsin. Böylece $F: [0,1] \times I \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$F(x, t) = (1 - t)x$$

şeklinde tanımlandığında, f ile g arasında bir homotopi belirtir [10-12].

Örnek 2.6.1.3 : $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ herhangi iki sürekli fonksiyon olsun.

$$f: \mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ şeklinde tanımlansın. F , sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak yazıldığından süreklidir. Ayrıca $F(x, 0) = (1 - 0)f(x) + 0 = f(x)$ ve $F(x, 1) = 0 + 1g(x) = g(x)$ olup F , f ve g arasında bir homotopidir [10-12].

Teorem 2.6.1.1 : Homotopi bağıntısı $\simeq$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat : $\simeq$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olması için yansıma, simetri ve geçişme özelliğine sahip olduğunu göstermeliyiz.

i) $\simeq$ bağıntısının yansıyan olduğunu göstermek için $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = f(x)$ olacak şekilde bir $F: X \times I \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonunun tanımlanması gerekir. Burada $F(x, t) = f(x)$ olacak şekilde tanımlanırsa $f \simeq f$ olduğu görülür.

ii) $\simeq$ bağıntısının simetrik olduğunu göstermek için $f \simeq g$ iken $g \simeq f$ olduğunu göstermeliyiz. $f \simeq g$ olsun. Bu durumda

$$F: X \times I \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto F(x, t)$$

sürekli fonksiyonu $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan

$$G: X \times I \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto F(x, 1 - t)$$

fonksiyonu da sürekli olup $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ ve $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ elde edilir. O halde $g \simeq f$ dir.

iii) $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ olsun. O halde;

$$F: X \times I \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto F(x, t)$$

sürekli fonksiyonu $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ olacak şekilde ve

$$G: X \times I \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto G(x, t)$$

sürekli fonksiyonu $G(x, 0) = g(x)$ ve $G(x, 1) = h(x)$ olacak şekilde mevcuttur.

F ve G yardımı ile

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

$$(x, t) \mapsto H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

sürekli fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Buradan

$$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$$

ve

$$H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$$

elde edilir. O halde $f \simeq h$ dır [10-12].

BÖLÜM III

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış modüller J. H. C. Whitehead [13] tarafından tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modüller grup teoride, cebirsel kategoride ve homotopi teoride önemli bir yer tutmuştur. Whitehead' in bu çalışmasından sonra konu hakkında çok detaylı çalışmalar yapılmış olup bu çalışmalardan bazıları, Yarı-Tamlanmış Çaprazlanmış Modüller [14] , Actor Çaprazlanmış Modüller [15-17], Pullback Çaprazlanmış Modüller [6], Induced Çaprazlanmış Modüller [18] olarak sıralanabilir.

Daha sonra çaprazlanmış modüller kategorisinin denk kategorileri çalışılmaya başlanmış olup bu denk kategorilerden en önemlisi Cat1-gruplar kategorisidir. Yapılan bu çalışmaların bilgisayar uygulamaları ve denk kategorilerin bilgisayar yardımıyla gösterilmesi de ilk olarak Alp [19] tarafından verilmiştir.

Çaprazlanmış modüller için otomorfizm yapısına Brown [20,21] ve Gilbert [15] tarafından farklı bir bakış açısı getirilmiştir. Norrie [17] ise gruplar üzerinde çaprazlanmış modülleri ayrıntılı bir biçimde incelemiştir.

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ifade ederek, grup teorisinden bildiğimiz normal alt grup, iç otomorfizmler grubu, grup genişlemesi, tensör çarpım gibi kavramlar üzerinde çaprazlanmış modül örneklerini çalışmamıza temel teşkil etmesi açısından burada inceleyeceğiz.

D ve G iki grup olsun. G, D üzerinde bir etki ise d üzerindeki g' nin sağ etkisi d^g , sol etkisi ise ${}^g d$ şeklinde tanımlanır. Eğer $G \subset D$ ise bu durumda G kendi kendisini etkiler denir ve

$${}^{g_2}g_1 = g_2g_1g_2^{-1} \quad , \quad g_1, g_2 \in G$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1 : $\partial: D \rightarrow G$

grup homomorfizmi ve

$$G \times D \rightarrow D$$

$$(g, d) \mapsto g_d$$

G nin D üzerine etkisi ile birlikte, $\forall d, d' \in D$ ve $g \in G$ için

$$\text{ÇM1)} \partial(g_d) = g\partial(d)g^{-1}$$

$$\text{ÇM2)} \partial d_{d'} = dd'd^{-1}$$

şartları sağlanıyor ise D ye bir çaprazlanmış modül denir ve (D, G, ∂) ile gösterilir [22,23].

3.1 Çaprazlanmış Modül Örnekleri

Örnek 3.1.1 : G, D grubunun normal alt grubu olmak üzere

$$\partial: G \rightarrow D$$

$$n \mapsto n$$

içine (inclusion) homomorfizmi ve

$$D \times G \rightarrow G$$

$$(d, g) \mapsto d_g = dgd^{-1}$$

şeklindeki D 'nin G üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \partial(d_g) &= \partial(dgd^{-1}) \\ &= \partial(d)\partial(g)\partial(d^{-1}) \\ &= d\partial(g)d^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ÇM2)} \quad \partial_{g_{g'}} &= g_{g'} \\ &= gg'g^{-1}\end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığı görülür [22,23].

Örnek 3.1.2: M , bir $\mathbb{Z}G$ – modül olmak üzere

$$\begin{aligned}\partial &= 1: M \rightarrow G \\ m &\mapsto 1_G\end{aligned}$$

aşık (trivial) homomorfizmi ve

$$\begin{aligned}G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g_m = gm\end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü

$$\begin{aligned}\text{ÇM1)} \quad \partial(g_m) &= \partial(gm) \\ &= 1 \\ &= g1g^{-1} \\ &= g\partial(m)g^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ÇM2)} \quad \partial_{m_{m'}} &= 1_{m'} \\ &= 1m' \\ &= m'mm^{-1} \\ &= mm'm^{-1} \text{ (M abelyen grup)}\end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır [22,23].

Örnek 3.1.3 : K bir grup ve

$$G = \{f_k: K \rightarrow K ; f_k(k') = kk'k^{-1}\}$$

kümesi K nın iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere,

$$\partial: K \rightarrow G$$

$$k \mapsto f_k$$

homomorfizmi

$$G \times K \rightarrow K$$

$$(f_k, k') \mapsto (f_k)_{k'} = kk'k^{-1}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \partial((f_k)_{k'}) &= \partial(kk'k^{-1}) \\ &= \partial(k)\partial(k')\partial(k^{-1}) \\ &= f_k\partial(k')\partial(k)^{-1} \\ &= f_k\partial(k')f_k^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \quad \partial k_{k'} &= (f_k)_{k'} \\ &= kk'k^{-1} \end{aligned}$$

şartlarının sağlandığı açıktır [22,23].

Örnek 3.1.4 : D ve G iki abelyen grup olsun. D deki G grup etkisi trivial sıfır “0” olmak üzere $\partial: D \rightarrow G$ bir çaprazlanmış modül oluşturur [22,23].

Örnek 3.1.5 : $X_1 = (\partial_1: C_1 \rightarrow G_1)$ ve $X_2 = (\partial_2: C_2 \rightarrow G_2)$ iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $X_1 \times X_2$ ‘nin kartezyen çarpımı, C_1, C_2, G_1 ve G_2 de trivial etkiye sahipse $\partial_1 \times \partial_2: C_1 \times C_2 \rightarrow G_1 \times G_2$ bir çaprazlanmış modül oluşturur. (Çaprazlanmış modüllerin direk çarpımından) [22,23].

Şimdi, herhangi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını açıklayalım.

Tanım 3.2 (Çaprazlanmış Modül Morfizmi) :

$X = (\partial: S \rightarrow R)$ ve $X' = (\partial': S' \rightarrow R')$ iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda çaprazlanmış modül morfizmi

$$\langle \sigma, \rho \rangle = X \rightarrow X'$$

şeklinde bir homomorfizm çiftidir. Burada $\delta: S \rightarrow S'$ $\rho: R \rightarrow R'$ dir. Ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\sigma} & S' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow{\rho} & R' \end{array}$$

$$1) \partial' \sigma(s) = \rho \partial(s) \quad , \quad \forall s \in S$$

$$2) \sigma(s^r) = \sigma(s)^{\rho(r)}$$

X bir çaprazlanmış modül olmak üzere X' den X e tüm morfizmlerin kümesine X in endomorfizmlerinin kümesi adı verilir ve $End(X)$ ile gösterilir. Eğer δ ve ρ ile birlikte grup homomorfizmi ise bu durumda $\langle \delta, \rho \rangle$ çiftine bir izomorfizm denir [22,23].

3.2 Çaprazlanmış Modüllerin Özellikleri

$\partial: D \rightarrow G$ herhangi bir çaprazlanmış modül olmak üzere, çaprazlanmış modül kavramının temel bir sonucu olarak aşağıdaki önermeleri verebiliriz.

Önerme 3.2.1 :

$$\partial: D \rightarrow G$$

$$d \mapsto \partial d = g$$

grupların bir çaprazlanmış modülü olsun.

i) ∂ nin çekirdeği, D nin merkezinin bir alt grubudur.

ii) $\partial D, G$ nin normal alt grubudur.

İspat :

i) G nin D üzerine etki fonksiyonu

$$G \times D \rightarrow D$$

$$(g, d) \mapsto g_d = gd$$

ve

$$\text{Çek}\partial = \{a \in D \mid \partial(a) = 1_G\}$$

$$Z(D) = \{x \in D \mid \forall y \in D \text{ için } xy = yx\}$$

olmak üzere, $a \in \text{Çek}\partial$, $y \in D$ için

$$\begin{aligned} ay &= aya^{-1}a \\ &= (\partial(a)_y)a \quad ((D, G, \partial), \text{çaprazlanmış modül}) \\ &= 1_y a \quad (a \in \text{Çek}\partial) \\ &= 1ya \\ &= ya \end{aligned}$$

olduğundan $\text{Çek}\partial \subset Z(D)$ sağlanır. Ayrıca, $a_1, a_2 \in \text{Çek}\partial$ için

$$\partial(a_1 a_2^{-1}) = \partial(a_1) \partial(a_2^{-1}) = \partial(a_1) \partial(a_2)^{-1} = 1$$

olduğunda $a_1 a_2^{-1} \in \text{Çek}\partial$ dir. Dolayısıyla $\text{Çek}\partial < Z(d)$ elde edilir.

ii) (D, G, ∂) çaprazlanmış modül olduğundan

$$g\partial(d)g^{-1} = \partial(g_d)$$

eşitliği geçerlidir ve G nin D üzerine etkisinden dolayı $g_d \in D$ dir. Dolayısıyla,

$$g\partial(d)g^{-1} = \partial(g_d) \in \partial(D)$$

elde edilir [22,23].

Önerme 3.2.2 : $\partial:D \rightarrow G$ bir çaprazlanmış modül olsun. D nin komütatörü bir $G/\partial D$ -modül yapısına sahiptir.

İspat : İlk olarak komütatörünün tanımını hatırlatalım.

$$[D, D] = \{dd'd^{-1}(d')^{-1} : d, d' \in D\}$$

kümesi D nin bir normal alt gurubudur. Dolayısıyla

$$D^{Ab} = D/[D, D]$$

bölüm grubu oluşturulur. Aynı zamanda, abelyan olan bu bölüm grubuna D 'nin *abelyanasyonu* denir.

İspatı yapabilmek için, önerme 3.2.1 deki gibi, ∂D nin D^{Ab} üzerine birim etki yaptığını göstermek yeterlidir. $n \in \partial(D)$ ve $\partial d = n$ olmak üzere, herhangi $d' \in D$ için, ∂ çaprazlanmış modül olduğundan

$$n_{d'} = \partial_{d'} = dd'd^{-1}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla

$$n_{d'(d')^{-1}} \in [D, D]$$

olur veya bu ifadeye denk olarak

$$n_{(d'[D, D])} = d'[D, D]$$

dir. Böylece $\partial D, D^{Ab}$ üzerine birim etki eder [22,23].

3.3 Actor Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde çaprazlanmış modül çeşitlerine kısa bir şekilde bakılacaktır. Bunun nedeni her biri çalışmalarda kullanılan bu kavramların matematiksel temelini burada sunmaktır. Seçilen çaprazlanmış modüller bilinen çaprazlanmış kare kavramını en temel şekilde oluşturduğundan bu bölümde seçilerek konulmuştur.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\eta} & W(X) \\
 \partial \downarrow & \searrow \alpha\partial & \downarrow \Delta \\
 R & \xrightarrow{\alpha} & Aut(X)
 \end{array}$$

Geometrik olarak diyagramını verdiğimiz bu çaprazlanmış kareyi oluşturan çaprazlanmış modülleri aşağıdaki gibi adlandırabiliriz.

- 1) Norrie çaprazlanmış modül ($\alpha = R \rightarrow Aut(X)$)
- 2) Lue çaprazlanmış modül ($\alpha\partial = \Delta\eta: S \rightarrow Aut(x)$)
- 3) Whitehead çaprazlanmış modül ($\eta: S \rightarrow W(X)$)
- 4) Actor çaprazlanmış modül ($\Delta: W(X) \rightarrow Aut(X)$)

Şimdi adlandırdığımız bu çaprazlanmış modülleri inceleyelim.

Tanım 3.3.1 : Her bir $s \in S$ için aşağıdaki gibi tanımlanan $\eta_s: R \rightarrow S$ derivasyonu

$$\eta_s(x) = (s)^x s^{-1}$$

principal derivasyonu olarak adlandırılır [17,24] . Bu nedenle $\eta_s: R \rightarrow S$ derivasyonu;

$$\eta_s(xy) = (\eta_s x)^y (\eta_s y)$$

aksiyomunu sağlar. Gerçekten de

$$\begin{aligned}\eta_s(xy) &= (\eta_s x)^y (\eta_s y) \\ \eta_t(x) &= t^x t^{-1} \\ (\eta_t x)^y &= ((t^x) t^{-1})^y t^y t^{-1} \\ &= t^{xy} (t^y)^{-1} t^y t^{-1} \\ &= t^{xy} t^{-1} \\ &= \eta_t(xy)\end{aligned}$$

dir. η_s bir derivasyon olduğundan iki derivasyonun birleşme özelliğini sağlar. Yani;

$$(\eta_r \circ \eta_s)(x) = \eta_{rs}(x)$$

$$\begin{aligned}(\eta_s \circ \eta_t)(x) &= \eta_s(x) \eta_t(x) \eta_s \partial \eta_t(x) \\ &= s^x s^{-1} t^x t^{-1} \eta_s \{t^x t^{-1} \\ &= s^x s^{-1} t^x t^{-1} (\eta_s (\partial t)^x)^{\partial t^{-1}} \eta_s (\partial t^{-1}) \\ &= s^x s^{-1} t^x s^{\partial t^x} s^{-1} t^{-1} s^{\partial t^{-1}} s^{-1} \\ &= s^x s^{-1} t^x (t^x)^{-1} s t^x s^{-1} t^{-1} t s t^{-1} s^{-1} \\ &= s^x t^x t^{-1} s^{-1} \\ &= (st)^x (st)^{-1} \\ &= \eta_{st}(x)\end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}\eta: S &\rightarrow Der(\chi) \\ s &\mapsto \eta\end{aligned}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir [22,23].

Tanım 3.3.2 (Norrie Çaprazlanmış Modül) :

Aşağıdaki gibi tanımlanan homomorfizm

$$\alpha: R \rightarrow AutX$$

$$r \mapsto \langle \sigma_r, \rho_r \rangle$$

$Inn(X)$ 'de αR nin bir görüntüsü olsun. Burada $\langle \sigma_r, \rho_r \rangle$ inner otomorfizm olup $s \in S, r, q \in R$ için

$$\sigma_r(s) = s^r$$

$$\rho_r(q) = r^{-1}qr$$

şeklinde tanımlanır.

$$\Delta(\eta_s) = \langle \sigma_{\partial s}, \rho_{\partial s} \rangle$$

$$\sigma_{\eta_s}(x) = x\eta_s(\partial x)$$

$$= s(s^{-1})^{\partial x}s$$

$$= s^{-1}xs$$

$$= x^{\partial s}$$

$$\rho_{\eta_s}(x) = x\partial(\eta_s x)$$

$$= x\partial((s^{-1})^x s)$$

$$= x\partial((s^{-1})^x)(\partial s)$$

$$= (\partial s^{-1})x(\partial s)$$

Buradan da $\alpha\partial = \Delta_\eta: S \rightarrow Aut(X)$ dir. Burada Norrie çaprazlanmış modülü oluşturmak için gerekli olan etkiyi tanımlayalım. Bunun için $\Phi \in AutS$ ve $\Psi \in AutR$ olmak üzere $\langle \Phi, \Psi \rangle \in AutX$ olup,

$$\partial\Phi = \Psi\partial$$

$$\Phi(s^r) = (\Phi s)^{\Psi r}$$

dir. Böylece R üzerinde $Aut(X)$ in bir etkisi aşağıdaki gibi tanımlanır [17] .

$$r^{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \Psi r$$

Teorem 3.3.1 : Yukarıda tanımlanan etki ile birlikte bir grup homomorfizmi

$$\alpha: R \rightarrow \text{Aut} X$$

$$r \mapsto \langle \sigma_r, \rho_r \rangle$$

mevcut olup $\alpha: R \rightarrow \text{Aut} X$ homomorfizmi bir çapraz modül oluşturur.

İspat : Çaprazlanmış modül olması için çaprazlanmış modül aksiyomlarından ÇM1) ve ÇM2) sağlanmalıdır.

$$\text{ÇM1)} \alpha(r^{\langle \Phi, \Psi \rangle}) = (\Phi^{-1}, \Psi^{-1})(\alpha r)(\Phi, \Psi)$$

olmalıdır. Bu nedenle göstermeliyiz ki

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1}, \Psi^{-1})(\sigma_r, \rho_r)(\Phi, \Psi) &= (\Phi \circ \sigma_r \circ \Phi^{-1}, \Psi \circ \rho_r \circ \Psi^{-1}) \\ \alpha(r^{\langle \Phi, \Psi \rangle}) &= \alpha(\Psi r) \\ &= (\sigma_{\Psi r}, \rho_{\Psi r}) \end{aligned}$$

$$\rho_{\Psi r}(q) = (\Psi r)^{-1} q (\Psi r)$$

$$\delta_{\Psi r}(s) = s^{\Psi r}$$

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \rho_r \circ \Psi^{-1})(q) &= \Psi(r^{-1}(\Psi^{-1} q) r) \\ &= (\Psi^{-1} r)^{-1} q (\Psi^{-1} r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \sigma_r \circ \Phi^{-1})(s) &= \Phi \circ \sigma_r(\Phi^{-1} s) \\ &= \Phi((\Phi^{-1} s)^r) \\ &= (\Phi(\Phi^{-1} s))^{\Psi r} \\ &= s^{\Psi r} \end{aligned}$$

$$\text{ÇM2)} \quad q^{\alpha r} = q^{\rho r} = r^{-1} q r$$

Bu çaprazlanmış modül Norrie çaprazlanmış modül olarak adlandırılır ve

$$N(X) = (\alpha: R \rightarrow AutX)$$

şeklinde gösterilir [22,23].

Tanım 3.3.3 (Lue Çaprazlanmış Modül) :

Bir grup homomorfizmi

$$\alpha\partial: S \rightarrow AutX$$

$$s \mapsto \langle \sigma_s, \rho_s \rangle$$

ve S üzerindeki $AutX$ etkisi

$$s^{\langle \Phi, \Psi \rangle} = \Phi s$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$L(x) = (\alpha\partial = \Delta\eta: S \rightarrow AutX)$$

bir çaprazlanmış modüldür [14,24].

Tanım 3.3.4 (Whitehead Çaprazlanmış Modül) :

S üzerinde $W(X)$ etkisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$s^X = s^{\Delta X} = s^{\langle \sigma_x, \rho_x \rangle} = \sigma_x s = s(X\partial s)$$

Bu durumda

$$\varepsilon(X) = (\eta: S \rightarrow W(X))$$

dönüşümü yukarıda tanımlanan etki ile birlikte Whitehead çaprazlanmış modülünü oluşturur [25].

BÖLÜM IV

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE GRUPOİDLERİN OTOMORFİZMLERİ VE HOMOTOPİLERİ

Bu bölümdeki çalışma grupoidlerin homotopileri ve otomorfizmlerini içerdiğinden burada çalışma [9] ten aynen alınmıştır.

4.1 Grupoidlerin Otomorfizmleri

Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin otomorfizması, $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ izomorfizma olan funktordur. Bağlı nesneler kümesi $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ olan $\{(\alpha_p: u_1 \rightarrow u_p): 2 \leq p \leq n\}$ olmak üzere $\mathcal{C}$ bağlı bir grupoid olsun. Eğer $\mathcal{C}$, u_1 deki bir nesne grubu ise $\mathcal{C}'$ nin bir otomorfizması aşağıdaki verilenlerin seçilmesiyle elde edilir.

- $k \in \text{Aut}\mathcal{C}$
- $\{(\beta_p: u_1 \rightarrow u_p): 2 \leq p \leq n\}$, α_p ile yer değiştirerek,
- $\pi \in \text{Symm}(U)$, U daki nesneleri yer değiştirerek,

Böylelikle $\mathcal{C}'$ nin toplam olarak var olan otomorfizmleri $n! \times \text{Aut}|\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}|^{n-1}$ şeklinde elde edilir [9] .

Tanım 4.1.1. (Standart Bağlı Grupoidlerin Otomorfizmleri)

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \times I_n$ grupoidinin standart durumunu inceleyelim. Eğer $\mathcal{C}$, $X_{\mathcal{C}} = \{c_1, \dots, c_l\}$ üreteçleri tarafından üretilirse her bir p nesnesi için $\mathcal{C}$ yi üreten küme $X_p = \{(p, c_k, p): c_k \in X_{\mathcal{C}}\} \cup \{(p, c, q): q \neq p\}$ dir. Kalan dönüşümlerin bileşenleri $c = c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_j} \in \mathcal{C}$, $c_{k_i} \in X_{\mathcal{C}}$, $(q, c, r) = (p, e, q)^{-1}(p, c, p)(p, e, r)$ iken $(p, c, p) = (p, c_1, p), (p, c_2, p) \dots (p, c_k, p)$ dir.

$\mathcal{C}'$ nin bir otomorfizması X_p' lerden birindeki dönüşümlerin görüntüleri verilerek özelleştirilecektir.

$A = \text{Aut}(\mathcal{C})$ grubu tarafından üretilen 3 çeşit otomorfizm kümesi vardır.

- 1) S_n simetrik grubundaki bir π permütasyonu için a_π otomorfizması $a_\pi(q, c, r) = (\pi_q, c, \pi_r)$ biçiminde tanımlanır.
- 2) $\mathcal{C}$ 'nin bir k otomorfizmasını p nesnelerindeki adımlara uygulayarak $\mathcal{C}$ 'nin verilen bir a_k otomorfizmasındaki elde etmek için üreteçler aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

$$a_k(p, c, p) = (p, k_c, p), a_k(p, e, q) = (p, e, q).$$
Buradan $a_k(q, c, r) = (q, k_c, r)$ elde edilir. Ve böylece eş zamanlı bir şekilde tüm hom-setlere k uygulanabilir.
- 3) $(q, c, r)^{c'} = (q, cc', r)$ etkisi ile birlikte $\mathcal{C}$ 'nin bir temsili $\mathcal{C}(q, r)$ hom-seti verir. Her bir $1 \leq p \leq n$ için $\mathcal{C}_p \in \mathcal{C}$ alalım. $\mathcal{C}$ 'nin nesnelerini elde etmede bir a_c otomorfizmasını n boyutlu $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ belirler. Burada $a_c(q, c, r) = (q, c_q^{-1}cc_r, r)$ dir.

Vertex gruplarda bu $a_c(\mathcal{C}(q)) = (\mathcal{C}(q))^{c_q}$ konjugasyonunu verir. Şimdi $X_A = \{a_\pi: \pi \in S_n\} \cup \{a_k: k \in \text{Aut}\mathcal{C}\} \cup \{a_c: c \in \mathcal{C}^n\}$ kümelerinin bileşkelerini incelersek $\text{Aut}\mathcal{C}$ için açık bir formu bir yarı çarpımın bölümüdür. Sağ etkinin kullanımıyla $a * b$ çarpımını $b \circ a$ birleşim dönüşümü şeklinde kullanabiliriz.

$\mathcal{C}^n$ 'de hem S_n hem de $\text{Aut}\mathcal{C}$ 'nin etkileri

$$c^\pi = \pi c = (c_{\pi^{-1}1}, \dots, c_{\pi^{-1}n}), c^k = kc = (k_{c_1}, \dots, k_{c_n})$$

olacak şekilde vardır ve bu etkiler değişmeli olup, $\mathcal{C}^n$ üzerinde $S_n \times \text{Aut}\mathcal{C}$ nin bir etkisini vermektedir. $\mathcal{C}_p^n$ 'yi $\{c \in \mathcal{C}^n: c_p = e\}$ alt kümesi biçiminde tanımlarsak çarpma işlemi altında $\mathcal{C}_p^n$, $\mathcal{C}^n$ de kapalıdır. Burada

$$a_c = a_{\wedge c_p} * a_{c^{-1}p_c} \text{ ve } c_p^{-1}c = (c_p^{-1}c_1, \dots, c_p^{-1}c_n) \in \mathcal{C}_p^n \quad (4.1)$$

dir [9] .

Önerme 4.1.1 : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\bullet \times I_n$ nin otomorfizm grubu $\text{Aut}\mathcal{C} \cong ((S_n \times \text{Aut}\mathcal{C}) \ltimes \mathcal{C}^n)/K_1(\mathcal{C})$ dir. Burada $K_1(\mathcal{C}) = \{((\pi, \wedge c), (c^{-1}, \dots, c^{-1})) | c \in \mathcal{C}\} \cong \mathcal{C}$, ve $(\pi, \wedge c)$ birim permütasyonudur.

İspat : $\theta_C: (S_n \times \text{Aut}\mathcal{C}) \ltimes \mathcal{C}^n \rightarrow \text{Aut}\mathcal{C}$, $((\pi, \kappa), c) \mapsto a_\pi * a_\kappa * a_c$ dönüşümünü tanımlayalım. X_A da ki otomorfizmlerinin ikililerinin aşağıdaki gibi elde edildiğini göstermek basittir.

Burada $\pi, \xi \in S_n$, $\kappa, \lambda \in \text{Aut}\mathcal{C}$ ve $c, d \in \mathcal{C}^n$ dir.

$$\begin{aligned} (a_\pi * a_\xi)(q, c, r) &= a_{\pi*\xi}(q, c, r) = ((\pi * \xi)q, c, (\pi * \xi)r), \\ (a_\kappa * a_\lambda)(q, c, r) &= a_{\kappa*\lambda}(q, c, r) = (q, (\kappa * \lambda)c, r), \\ (a_c * a_d)(q, c, r) &= a_{cd}(q, c, r) = (q, (c_q d_q)^{-1} c(c_r d_r), r), \\ (a_\kappa * a_\pi)(q, c, r) &= (a_\pi * a_\kappa)(q, c, r) = (\pi q, \kappa c, \pi r), \\ (a_c * a_\pi)(q, c, r) &= (a_\pi * a_{\pi c})(q, c, r) = (\pi q, c_q^{-1} c c_r, \pi r), \\ (a_c * a_\kappa)(q, c, r) &= (a_\kappa * a_{\kappa c})(q, c, r) = (q, \kappa(c_q^{-1} c c_r), r). \end{aligned}$$

ve

$$(a_\pi * a_\kappa * a_c) * (a_\xi * a_\lambda * a_d) = a_{\pi*\xi} * a_{\kappa*\lambda} * a_{(\xi\lambda c)d} \quad (4.2)$$

dir. Bu yarı direk çarpım kuralı $((\pi, \kappa), c)((\xi, \lambda), d) = ((\pi\xi, \kappa\lambda), c^{(\xi, \lambda)}d)$ yi verir. Burada

$$a_\pi * a_\kappa * a_c : \begin{cases} (1, c, 1) \mapsto (\pi 1, c_{\pi 1}^{-1}, \pi 1), \\ (1, e, j) \mapsto (\pi 1, c_{\pi 1}^{-1} c_{\pi j}, \pi j) \end{cases}$$

ifadesi $\theta_C((\pi, \kappa), c)$ birim otomorfizminin

- π birim permütasyonudur.
- $\forall 2 \leq j \leq n$ için $c_j = c_1$ dir. Böylece $c = (c_1, c_1, \dots, c_1)$ dir
- $\forall c \in \mathcal{C}$ için $\kappa c = c_1 c c_1^{-1}$ dir. Böylece $\kappa = \wedge c_1^{-1}$ dir.

şartlarını sağladığını gösterir.

Böylece $\ker \theta_C$ özelleştirilmiş $K_1(\mathcal{C})$ grubudur.

Açıktır ki, a_π tarafından üretilen A_1 grubu, S_n ile izomorfiktir. a_κ tarafından üretilen A_2 grubu $\text{Aut}\mathcal{C}$ 'ye izomorfiktir. Ve a_c tarafından üretilen A_3 grubu $\mathcal{C}^n$ 'e izomorfiktir. Burada sırasıyla $A_1 \cup A_3$ ve $A_2 \cup A_3$ tarafından üretilen $\text{Aut}\mathcal{C}$ 'nin alt gruplarını $A_{1,3}, A_{2,3}$ olarak tanımlarız. A_1 ve A_2 'nin birleşimi olan $A_1 \times A_2$ ye izomorfiktir.

Bu önermenin ispatı

$$A_{1,3} \cong (S_n \ltimes \mathcal{C}^n)/Z(\mathcal{C}) \text{ ve } A_{2,3} \cong (Aut\mathcal{C} \ltimes \mathcal{C}^n)/\{(\wedge c, (c^{-1}, \dots, c^{-1})) | c \in \mathcal{C}\}$$

olduğunu göstermek içinde kullanılabilir. Burada $Z = Z(\mathcal{C})$, $Z(\mathcal{C}) = \{((), (z, \dots, z)) | z \in Z\}$ ve $\mathcal{C}$ 'nin merkezidir. $((\pi, \kappa), (0, c_2, c_3, \dots, c_n))$ elementlerinin $K_1(\mathcal{C})$ 'nin kosetleri ise bir transversal (çapraz) oluşturduğu için bir $f = (f_1, f_0): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ otomorfizminin

- nesnelerin f_0 permütasyonu
- $f_1(1, c, 1) = (f_0 1, \kappa_f c, f_0 1)$ olması için $\mathcal{C}$ nesne grubunun bir κ_f otomorfizmi
- $c_f := (e, c_{f,2}, \dots, c_{f,n})$ için $f_1(1, e, q) = (f_0 1, c_{f,q}, f_0 q)$ görüntüleri

verilerek özelleştirilebilir olduğunu gözlemleyelim. f için uygun bir standart form $f = a_{\kappa_f} * a_{c_f} * a_{f_0}$ dir. Burada $f_1(q, c, r) = (f_0 q, c_{f,q}^{-1}(\kappa_f c) c_{f,r}, f_0 r)$ dir. Önerme 4.1.1 ve eşitlik (4.1) deki formüller iki standart formun birleşimini,

$$(a_{\kappa_f} * a_{c_f} * a_{f_0}) * (a_{\kappa_g} * a_{c_g} * a_g) = a_{\kappa_f * \kappa_g * (\wedge c_g, f_0 1)} * a_{c_{g, f_0 1(\kappa_g c_f)(f_0^{-1} c_g)}^{-1}} * a_{f_0 * g_0}$$

gibi bir standart formda yazmayı mümkün kılar. Bir sonraki grupoid tipi bağlı bir $\mathcal{C}$ grupoidinin m kopyasının D ayrık bir birleşimidir. Bileşenleri değişmemiş olan D nin bir otomorfizmi herbir bileşen için bir otomorfizm seçerek elde edilir ve bu otomorfizm $(Aut\mathcal{C})^m$ ye izomorfik bir grup oluşturur. D nin otomorfizm grubu

$$(f_1, \dots, f_m)^\pi = (f_{(\pi^{-1}1)}, \dots, f_{(\pi^{-1}m)})$$

etkisi ile $S_m \wr Aut\mathcal{C}$ izomorfik grupların ayrık birleşimi olan halka(wreath) çarpımıdır [9].

Tanım 4.1.2 (Grupoidlerde Konjugasyonlar) : Bir $\mathcal{C}$ grubunun her bir c elemanı, $\wedge c: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $c' \mapsto c^{-1}c'c$ iç otomorfizmasını belirler. Burada orbitler konjugasyon sınıflarıdır ve bazı $z \in Z(\mathcal{C})$ için $c' = zc$ olduğunda $\wedge c = \wedge c'$ dir [9].

Tanım 4.1.3 : Bir bağlı $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\bullet} \times I_n$ grupoidinde $c_{p,q} = (p, c, q)$ dönüşümü için $\mathcal{C}$ 'nin konjugasyonu, $c_{p,q}$ biçiminde gösterilen $\wedge c_{p,q} := a_{(p,q)} * a_c$ otomorfizmidir. Burada c

diğer yerlerde $\begin{cases} c_p = c^{-1} \\ c_q = c \\ c_r = e \end{cases}$ bileşenlerine sahiptir. Bu otomorfizm değişkendir.

- p ile q ve sabit kalan nesneler.
- p ve q da ki adımlar : $q: (p, b, p) \mapsto (q, c^{-1}bc, q), (q, b, q) \mapsto (p, cbc^{-1}, p)$
- hom-setler, $\mathcal{C}(p, q), \mathcal{C}(q, p): (p, b, q) \mapsto (q, c^{-1}bc^{-1}, p), (q, b, p) \mapsto (p, cbc, q)$
- p, q da ki co çarpımların diğerleri: $(r, b, p) \mapsto (r, bc, q), (r, b, q) \mapsto (r, bc^{-1}, p)$
- p, q da ki çarpımların diğerleri: $(p, b, r) \mapsto (q, c^{-1}b, r), (q, b, r) \mapsto (p, cb, r)$

Burada $r \notin \{p, q\}$ dır. Kalan dönüşümler değiştirilemez. $c_{p,p}$ şeklinde gösterilen konjugasyon (denklik) $\wedge c_{p,p} = a_c$ dir. Burada c diğer yerlerde, $\begin{cases} c_p = c \\ c_r = e \end{cases}$ bileşenlerine sahiptir. Bütün bu nesneler sabittir. p de ki dönüşümler $c, (p, b, p) \mapsto (p, c^{-1}bc, p)$ tarafından konjuge edilir ve c 'de ki çarpım ve co çarpımların diğerleri permutasyoniktir. $r \neq p$ için $(p, b, r) \mapsto (p, c^{-1}b, r), (r, b, p) \mapsto (r, bc, p)$ dir.

Bu yapılar “ sırasıyla c^{-1} veya c ‘yi soldan b ile çarpmak p veya q ‘nun tanım kümesi ve c veya c^{-1} ‘i sağdan b ile çarpmak p veya q ‘nun değer kümesi ” olarak tanımlayabileceğimizi hatırlatır.

Bu $\wedge: \mathcal{C} \rightarrow (Aut \mathcal{C})$. dönüşümü grupoid morfizmi olması durumu değildir. Sonuçta p, q, r aralarında ayrık ve $\alpha_1 = (p, c_1, q), \alpha_2 = (q, c_2, r)$ ise

$$\wedge (\alpha_1 \alpha_2) = (\wedge \alpha_1) * (\wedge \alpha_2) * (\wedge \alpha_1) = (\wedge \alpha_2) * (\wedge \alpha_1) * (\wedge \alpha_2) \quad (4.3)$$

dir. Bu birimin görüntüsü, $\wedge (\mathcal{C}) \rightarrow S_n$, $\wedge (p, c, q) \mapsto (p, q)$ dönüşümü altında $(p, r) = (p, q)(q, r)(p, q) = (q, r)(p, q)(q, r)$ birim permutasyonudur. Bu $\wedge c_{p,q}$ ve $\wedge c_{p,p}$ yoluyla diğer gerekli birimler vardır. Eğer $\beta_1 = (p, d_1, p), \beta_2 = (p, d_2, p)$ ve $\beta_3 = (q, d_3, q)$ ise

$$\begin{aligned}
\wedge (\beta_1 \beta_2) &= (\wedge \beta_1) * (\wedge \beta_2), \\
\wedge (\beta_1 \alpha_1) &= (\wedge \beta_1) * (\wedge \alpha_1) * (\wedge \beta_1)^{-1}, \\
\wedge (\alpha_1 \beta_3) &= (\wedge \beta_3)^{-1} * (\wedge \alpha_1) * (\wedge \beta_3)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dir. Üçüncü olarak p, q, u, v 'nin hepsi ayrık ve $\alpha_3 = (q, c_3, p), \alpha_4 = (u, c_4, v)$ ve $\beta_4 = (q, c_3 c_1, q)$ ise

$$\begin{aligned}
\wedge (\alpha_1 \alpha_3) &= (\wedge \alpha_1) * (\wedge \alpha_3) * (\wedge \beta_4) \\
(\wedge \alpha_1) * (\wedge \alpha_4) &= (\wedge \alpha_4) * (\wedge \alpha_1)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dir [4].

Önerme 4.1.2 : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\bullet \times I_n$ ve $|\mathcal{C}| = k$ iken farklı konjugasyon otomorfizmlerinin sayısı $\omega_{\mathcal{C}} = 1 + n(k - 1) + \frac{1}{2}n(n - 1)k$ dir.

İspat : $\forall p$ için $e_{p,p}$ bir özdeş otomorfizmdir. $c \neq e$ ile $\wedge c_{p,p}$ için p deki çarpım ve co çarpımlar üzerine c veya c^{-1} ile etki eder. Bu $p = p'$ ve $c = c'$ olduğunda $\wedge c_{p,p} = \wedge c_{p,p'}$ durumu tektir. Bu $n(k - 1)$ terimini verir. Üçüncü olarak ise $\wedge c_{p,q} = \wedge c'_{p',q'}$ olduğu düşünülür. Burada $\{p, q = p', q'\}$ dir [9] .

Şimdi grupoidler için normalliğin standart olmayan bir tanımını verelim.

Tanım 4.1.4 : $\mathcal{C}$ 'nin $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_0)$ bir alt grupoidi $\mathcal{C}$ 'de normaldir. Eğer her $\beta \in \mathcal{N}_1, \alpha \in \mathcal{C}_1$ için $\beta^\alpha \in \mathcal{N}_1$ ise $\mathcal{N} \trianglelefteq \mathcal{C}$ yazılır [9] .

Önerme 4.1.3 : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\bullet \times I_n$ 'nin normal alt grupoidleri $\mathcal{C}$ 'nin kendisidir ve bütün $\mathcal{N} \trianglelefteq \mathcal{C}$ için tamamen bağlantısız altgrupoidlerdir.

İspat : Eğer $\mathcal{N}_0, p$ 'den q 'ya (p, e, q) dönüşümleri tarafından konjuge edilebilen her bir q nesnesi için p nesnesini içeriyorsa $\mathcal{N}, \mathcal{C}$ 'nin geniş bir alt grupoidi olmak zorundadır. Eğer $\mathcal{N}$ tamamen bağlantısız ise ve eğer bu p bileşeni $\mathcal{N}$ vertex grubuna sahipse o zaman (p, e, q) konjugasyonu gösterir ki $\mathcal{N} \trianglelefteq \mathcal{C}$ dir.

Eğer her bir $c \in \mathcal{C}$ için $q \neq r$ ile $(q, n, r) \in \mathcal{N}_1$ ise (p, c, q) konjugasyonu (q, n, r) 'den (p, cn, r) 'ye bir dönüşümdür. Böylece $\mathcal{N} = \mathcal{C}$ dir [9].

4.2 Otomorfizm Grupoidleri ve Bölümler

Tanım 4.2.1 (Doğal Dönüşümler) :

Funktorlar doğal dönüşümlerle ilişkilidir. Eğer $h, k: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ fonktörler ise, $\tau: h \rightarrow k$ doğal dönüşümü $\tau_0: Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Arr(\mathcal{D})$ fonksiyonu tarafından belirlenir. Her bir $(\alpha: u \rightarrow v) \in \mathcal{C}$ dönüşümü için aşağıdaki diyagram değişmelidir:

$$\begin{array}{ccc}
 h_0 u & \xrightarrow{\tau_0 u} & k_0 u \\
 h_1 \alpha \downarrow & \searrow \tau_1 \alpha & \downarrow k_1 \alpha \\
 h_0 v & \xrightarrow{\tau_0 v} & k_0 v
 \end{array} \quad (4.6)$$

Diyagramın değişmeli olması $\tau_1: Arr(\mathcal{C}) \rightarrow Arr(\mathcal{D})$ fonksiyonunu tanımlamayı mümkün kılar. Burada $\tau_1 \alpha$ diagonal dönüşümü ve her bir u nesnesi için $\tau_1 1_u = \tau_0 u$ dır.

Doğal dönüşümler çeşitli yollarla oluşturulabilir. Eğer $j, \mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye üçüncü bir fonktor ise ve eğer $\alpha: k \rightarrow j$ ikinci bir doğal dönüşüm ise aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccccc}
 h_0 u & \xrightarrow{\tau_0 u} & k_0 u & \xrightarrow{\sigma_0 u} & j_0 u \\
 h_1 \alpha \downarrow & \searrow \tau_1 \alpha & \downarrow k_1 \alpha & \searrow \sigma_1 \alpha & \downarrow j_1 \alpha \\
 h_0 v & \xrightarrow{\tau_0 v} & k_0 v & \xrightarrow{\sigma_0 v} & j_0 v
 \end{array}$$

$\tau * \sigma: h \rightarrow j$ doğal dönüşüm bileşkesi

$$(\tau * \sigma)_0 u = (\tau_0 u)(\sigma_0 u),$$

$$(\tau * \sigma)_1 \alpha = (\tau_1 \alpha)(\sigma_0 v) = (\tau_0 u)(k_1 \alpha)(\sigma_0 v) = (\tau_0 u)(\sigma_1 \alpha)$$

şeklinde tanımlanır. Dönüşümleri tersine çevirebilmek için $\tau_0 v = (h_1 \alpha)^{-1} (\tau_0 u) (k_1 \alpha)$ alınabilir. Böylece $\mathcal{C}$ nin her bir bileşeni için bir nesnenin görüntüsü verilebiliyorsa τ tanımlanır. Ayrıca, τ dönüşümünün tersi $\tau^{-1}: k \rightarrow h$ şeklindedir. Bu τ^{-1} de $(\tau^{-1})_0 u = (\tau_0 u)^{-1}$ ve $(\tau^{-1})_1 \alpha = (k_1 \alpha) (\tau_0 v)^{-1} = (\tau_0 u)^{-1} (h_1 \alpha)$ dır.

$$\begin{array}{ccc}
 k_0 u & \xrightarrow{(\tau^{-1})_0 u = (\tau_0 u)^{-1}} & h_0 u \\
 \downarrow k_1 \alpha & \searrow (\tau^{-1})_1 \alpha & \downarrow h_1 \alpha \\
 k_0 v & \xrightarrow{(\tau^{-1})_0 v = (\tau_0 v)^{-1}} & h_0 v
 \end{array}$$

Böylece τ bir doğal denkliktir. Bu yolla dönüşümler olarak doğal dönüşümler ve nesneler olarak fonktörler alınarak $HOM(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ grupoidi elde edilir. h 'daki l_h birim denkliği $l_{h,0} u = 1_{h_0 u}$, $l_{h,1} \alpha = h_1 \alpha$ şeklinde verilir [9].

Tanım 4.2.2 (Bir Grupoidin Otomorfizm Grupoidi)

$\mathcal{C} = \mathcal{D}$ ve h, k izomorfizmler olsun. Bu durumda ilk homotopi örneği $\tau: \mathcal{C} \times I \rightarrow \mathcal{D}$ bir grupoid kabul edilerek (h, k) – homotopisi biçiminde $\tau(u, 0) = h_0 u$, $\tau(u, 1) = k_0 u$, $\tau(\alpha, 0) = h_1 \alpha$, $\tau(\alpha, 1) = k_1 \alpha$ ile elde edilir.

τ nun önemli bir özelliği aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi bir seviyeden diğer bir seviyeye yükseltmesidir.

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{h_1, k_1} & C_1 \\
 \downarrow \partial_1^- & \nearrow \tau_0 & \downarrow \partial_1^- \\
 C_0 & \xrightarrow{h_0, k_0} & C_0
 \end{array}$$

∂_1^+ (left), ∂_1^+ (right)

Böylece $\mathcal{C}$ 'nin $AUTC$ otomorfizm grupoidi elde edilir. $AUTC$ 'nin nesneleri $\mathcal{C}$ 'nin otomorfizmleridir ve $AUTC$ 'nin dönüşümleri bu otomorfizmler arasındaki doğal denkliklerdir.

Verilen bir $\tau: h \rightarrow k$ ve j üçüncü izomorfizmi için

$$\rho_0 u = \tau_0(j_0 u), \quad \rho_1 \alpha = \tau_1(j_1 \alpha) = (\rho_0 u)(k_1 j_1 \alpha) = (h_1 j_1 \alpha)(\rho_0 v) \quad (4.7)$$

vasıtasıyla $(j * h, j * k)$ - homotopi ρ tanımlanabilir.

Bu yapıyı kullanarak $\mathcal{C}$ üzerinde birim fonktor olan $(k^{-1} * h, i)$ - homotopilerinden, bütün (h, k) - homotopileri elde edilir [4] .

Önerme 4.2.1 : $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\bullet \times I_n$ ve $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\bullet \times O_n$ nin otomorfizm grupoidlerinin yapıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	$\mathcal{C} = \mathcal{C}_\bullet \times I_n$	$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\bullet \times O_n$
Nesnelerin sayısı (otomorfizmler)	$n! Aut\mathcal{C} \mathcal{C} ^{n-1}$	$n! Aut\mathcal{B} ^n$
Okların sayısı (doğal denklik)	$(n!)^2 Aut\mathcal{C} \mathcal{C} ^{2n-1}$	$n! Aut\mathcal{B} ^n \mathcal{B} ^n$
Vertex (tepe) gruplar	$Z(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C}/Inn\mathcal{C}$	$(Z(\mathcal{B}))^n$
Bağlı bileşenlerin sayısı	$ Out\mathcal{C} $	$n! Out\mathcal{B} ^n$
Her bir bileşendeki nesnelerin sayısı	$n! Inn\mathcal{C} \mathcal{C} ^{n-1}$	$ Inn\mathcal{B} ^n$

Sonuç 4.2.1 : $AUTC$ 'de ki iç otomorfizmler $1 \leq p, q \leq n$ için $\wedge c_{p,q}$ konjugasyonları yoluyla üretilebilir. $AUT\mathcal{B}$ 'de ki iç otomorfizmler $\wedge (b_1, \dots, b_n) := (\wedge b_1, \dots, \wedge b_n)$ konjugasyonlarıdır .

4.3 $AUTC$ Üzerine $\otimes$ Grup Yapıları

$AUTC$ grupoid otomorfizmi grubu grupoid yada çaprazlanmış modül yapan bir grup yapısına sahiptir. Bu grup çarpımı $\otimes$ temel olarak doğal denkliklerin birleşimleridir.

Eğer $\tau: h \rightarrow k$ ve $\sigma: g \rightarrow j$ ve $(\alpha: u \rightarrow v)$, $(\beta: x \rightarrow y) \in \mathcal{C}$ ise $\tau_1\alpha = (h_1\alpha)(\tau_0v) = (\tau_0u)(k_1\alpha)$ ve $\sigma_1\beta = (g_1\beta)(\sigma_0y) = (\sigma_0x)(j_1\beta)$ elde edilir ve $(\tau: h \rightarrow k) \otimes (\sigma: g \rightarrow j) = (\tau \otimes \sigma: h * g \rightarrow k * j)$ şeklinde tanımlanır. Burada $(\tau \otimes \sigma)_1\alpha = \sigma_1(\tau_1\alpha)$ dır. İlgili değişmeli diyagramlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{ccc}
 g_0 h_0 u & \xrightarrow{\sigma_0 h_0 u} & j_0 h_0 u \\
 \downarrow g_1 \tau_1 \alpha & \searrow \sigma_1(\tau_1 \alpha) & \downarrow j_1 \tau_1 \alpha \\
 g_0 k_0 v & \xrightarrow{\sigma_0 k_0 v} & j_0 k_0 v
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 g_0 h_0 u & \xrightarrow{(\tau \otimes \sigma)_0 u} & j_0 k_0 u \\
 \downarrow g_1 h_1 \alpha & \searrow (\tau \otimes \sigma)_1 \alpha & \downarrow j_1 k_1 \alpha \\
 g_0 h_0 v & \xrightarrow{(\tau \otimes \sigma)_0 v} & j_0 k_0 v
 \end{array}$$

Doğal dönüşüm için bu şart aşağıdaki şekilde kolaylıkla kontrol edilebilir.

$$\begin{aligned}
 (\tau \otimes \sigma)_0 u &= (g_1 \tau_0 u)(\sigma_0 k_0 v) = (\sigma_0 h_0 u)(j_1 \tau_0 u) \\
 (\tau \otimes \sigma)_1 \alpha &= (g_1 \tau_1 \alpha)(\sigma_0 k_0 v) = (g_1 \tau_0 u)(g_1 k_1 \alpha)(\sigma_0 k_0 v) = (g_1 \tau_0 u)(\sigma_0 k_0 u)(j_1 k_1 \alpha) \\
 &= (\sigma_0 h_0 u)(j_1 \tau_0 u)(j_1 k_1 \alpha) = (\sigma_0 h_0 u)(j_1 \tau_1 \alpha)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Beklenildiği gibi $l_h * l_k = l_{h * k}$ dir. Bir M monoidindeki terslenebilir bir eleman k için $(M, *_k)$ monoidi $*_k$ çarpımına sahiptir ve $*_k$ çarpımı bilinen anlamdaki çarpım aracılığıyla

$$m *_k n := m k^{-1} n \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır ve özdeş k ya sahiptir. Eğer $m \in M, M$ de terslenebilir ise m , $*_k$ -tersi $\bar{m} := k m^{-1} k$ olacak şekildedir. M bir grup olduğunda $*_k$ -konjugasyon otomorfizmi

$$\Lambda_k m: M \rightarrow M, \quad n \mapsto \bar{m} *_k n *_k m = k m^{-1} n k^{-1} m \tag{4.10}$$

dir. $\gamma: X \times M \rightarrow X, (x, m) \mapsto x^m$, X kümesi üzerine M 'nin bir etkisi ise $*_k$ - etkisi $(x, m) \mapsto x^{k^{-1}m}$ ile verilen $\gamma_k: X \times M \rightarrow X$ karşılık gelir ve

$$\gamma_k(\gamma_k(x, m), n) = \gamma_k(x^{k^{-1}m}, n) = x^{k^{-1}mk^{-1}n} = x^{k^{-1}(m*_kn)} = \gamma_k(x, m*_kn) \quad (4.11)$$

dir. Her bir u nesnesinde (u, k_u, u) terslenebilir elemanı seçilir ve $*_k$ - çarpımı

$$(u, a, v) *_k (v, b, w) := (u, ak_v^{-1}b, w)$$

Şeklindeki gibi tanımlanırsa $\mathcal{C}$ kategorisini genelleştirir. $(\mathcal{C}, *_k)$ kategorisi (u, k_u, u) birimlerine sahiptir ve $\mathcal{C}$ 'de (u, a, v) , (u, a^{-1}, v) tersine sahipse $*_k$ - tersi $(u, a, v) = (v, k_v a^{-1} k_u, u)$ dir.

4.4 Grupoidlerin Çaprazlanmış Modülleri

Tanım 4.4.1 : (Gruplar İçin Temel Tanımlar)

Grupların bir çaprazlanmış modülü $\mathcal{X} = (\delta: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$, δ grup homomorfizmini ve $\mathcal{C}$ nin $\mathcal{B}$ üzerinde sağ etkisini oluşturur. Her bir $c \in \mathcal{C}$, $b, b' \in \mathcal{B}$ için

$$\delta(b^c) = c^{-1}(\delta b)c \text{ ve } (b')^{\delta b} = b^{-1}b'b$$

dir. Hem $\mathcal{B}$ hem de $\mathcal{C}$ üzerine aşıkâr bir şekilde etki eden $c \in \mathcal{C}$ 'lerden oluşan $Z(\mathcal{C})$ 'nin altgrubunu $Triv(\mathcal{C})$ olarak göstereceğiz. $\mathcal{X}$ 'in η endomorfizmi

$$\eta = (\eta_2: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \eta_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$$

homomorfizimlerinin ikililerindendir ve

$$\eta_2 * \delta = \delta * \eta_1 \text{ ve } \eta_2(b^c) = (\eta_2 b)^{\eta_1 c}$$

dir.

$m *_\kappa n := mk^{-1}n$ eşitliğindeki alternatif bir işleme göre, $\kappa, \mathcal{X}$ 'in bir otomorfizması iken birim κ ya sahip olarak $\eta *_\kappa \zeta := \eta * \kappa^{-1} * \zeta$ tarafından $End\mathcal{X}$ üzerine $*_\kappa$ çarpımı tanımlanır ve sonuç olarak $End_\kappa\mathcal{X}$ 'nin bir monoid olduğu görülür. $End_\kappa\mathcal{X}$ 'nin maksimal altgrubu $Aut_\kappa\mathcal{X}$ dir.

$\mathcal{X}$ 'in bu otomorfizm yapısı Whitehead [5], Lue [6] ve Norrie [7] tarafından geliştirilmektedir ve $S(\mathcal{X})$ actor çaprazlanmış karesini oluşturmaktadır. Çaprazlanmış karelerin çok daha fazla detayı için Ellis and Steiner [8] 'a örnek olarak bakılabilir.

$\mathcal{X}$ 'in bir κ -derivasyonu $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ dönüşümüdür ki $\phi(cc') = (\phi c)^{\kappa_1 c'}(\phi c')$ dir. Buradan $\phi e = e$ ve $(\phi c)^{-1} = (\phi(c^{-1}))^{\kappa_1 c}$ ve ϕ kaynak endomorfizmi ζ_ϕ 'yi

$$\zeta_\phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad \zeta_{\phi,2}b = (\kappa_2 b)(\phi \delta b), \quad \zeta_{\phi,1}c = (\kappa_1 c)(\phi \delta c), \quad (4.12)$$

biçiminde belirler ve $\phi(\zeta_\phi, \kappa)$ -derivasyonu olarak adlandırılır. $a \in \mathcal{B}$ temel κ -derivasyonu için $\phi_a, \phi_a: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}, c \mapsto (a^{-1})^{\kappa_1 c} a$ dönüşümü

$$\phi_a \delta b = [\kappa_2 b, a], \quad \delta \phi_a c = [\kappa_1 c, \delta a] \quad (4.13)$$

dir. Bu $\phi_a, (\zeta_a, \kappa)$ -derivasyonu ve $\zeta_{a,2}b = (\kappa_2 b)^a$ ve $\zeta_{a,1}c = (\kappa_1 c)^{\delta a}$ dir.

Bu κ -derivasyonu Whitehead çarpımı $\star_\kappa$ ile verilen $Der_\kappa(\mathcal{X})$ monoidi formundadır. Whitehead çarpımı $\star_\kappa$

$$(\phi \star_\kappa \psi)c = (\psi c)(\phi c)(\psi \kappa_1^{-1} \delta \phi c) = (\phi c)(\psi \kappa_1^{-1} \zeta_{\phi,1}c) = (\psi c)(\zeta_{\psi,2} \kappa_2^{-1} \phi c) \quad (4.14)$$

biçimindedir ve $\phi \star_\kappa \psi$ bir $(\zeta_\phi *_\kappa \zeta_\psi, \kappa)$ -derivasyonudur. 0 türevi $0: c \mapsto e$ bu çarpım için bir birimdir. $\zeta_\phi, \mathcal{X}$ nin bir otomorfizması olduğu zaman ϕ nin $\star_\kappa$ ya göre kesinlikle bir tersi vardır ve tersinin derivasyon monoidinin Whitehead grubu $W_\kappa(\mathcal{X})$ yi oluşturur. Buradan $W_\kappa(\mathcal{X}) \cong W(\mathcal{X}) := W_\iota(\mathcal{X})$ olduğu görülür. ($\iota, \mathcal{X}$ nin birim otomorfizmasıdır.)

Eğer λ , $\mathcal{X}$ nin bir diğer otomorfizması ise $\theta_{\kappa,\lambda}(\phi) = \mathcal{X}_\phi$, $\mathcal{X}_\phi c = \phi \kappa_1^{-1} \lambda_1 c$, ve $\theta_{\kappa,\lambda}^{-1}(\chi) = \phi_\chi$, $\phi_\chi c = \mathcal{X} \lambda_1^{-1} \kappa_1 c$ olarak verilen $\theta_{\kappa,\lambda}: Der_\kappa(\mathcal{X}) \rightarrow Der_\lambda(\mathcal{X})$ izomorfizmi vardır. Bu sonucun özel bir durumu $\lambda = \iota$ olduğundadır. Eğer μ , λ nin bir diğer otomorfizması ise $\psi c = \psi \mu_1 c$ vasıtasıyla $(\mu * \kappa)$ –derivasyonu tanımlanabilir. ψ için kaynak otomorfizmi

$$\zeta_{\psi,2} b = ((\mu * \kappa)_2 b)(\psi \delta b) = (\kappa_2 \mu_2 b)(\phi \mu_1 \delta b) = (\kappa_2 \mu_2 b)(\phi \delta \mu_2 b) = \zeta_{\phi,2} \mu_2 b \quad (4.15)$$

eşitliğini sağlar. Bu sonuç $\zeta_{\phi,1} c$ için benzer bir yaklaşım ile birlikte ψ , $(\mu * \zeta_\phi, \mu * \kappa)$ –derivasyonu olduğunu gösterir. Böylece $\rho_0 u = \tau_0(j_0 u)$, $\rho_1 \alpha = \tau_1(j_1 \alpha) = (\rho_0 u)(k_1 j_1 \alpha) = (h_1 j_1 \alpha)(\rho_0 v)$ eşitliğindeki homotopiler için (ζ, k) –derivasyonu $(\kappa^{-1} * \zeta, \iota)$ –derivasyonlarından elde edilebilir.

$A_\kappa = Aut_\kappa \mathcal{X}$ otomorfizmlerinin grupları

$$b^\eta := \eta_2 \kappa_2^{-1} b , \quad c^\eta := \eta_1 \kappa_1^{-1} c \quad (4.16)$$

aracılığıyla verilen $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{C}$ üzerine bir sağ etkiye sahiptir. Bu Norrie çaprazlanmış modülü $\mathcal{N}_\kappa(\mathcal{X})$, $\mathcal{N}_\kappa(\mathcal{X}) = (v_{\kappa,1}: \mathcal{C} \rightarrow A_\kappa)$ karenin altını oluşturur. Burada $v_{\kappa,1} c = \zeta_c$, $\zeta_{c,1} d = (\kappa_1 d)^c$, $\zeta_{c,2} a = (\kappa_2 a)^c$, dir ve bu etki eşitlik (5) de verilmiştir.

Benzer şekilde Lue çaprazlanmış modülü $\mathcal{L}_\kappa(\mathcal{X})$, $\mathcal{L}_\kappa(\mathcal{X}) = (\delta * v_{\kappa,1}: \mathcal{B} \rightarrow A_\kappa)$ karenin köşegenini oluşturur. Burada $v_{\kappa,1} \delta b = \zeta_{\delta b}$, $\zeta_{\delta b,1} d = (\kappa_1 d)^{\delta b}$, $\zeta_{\delta b,2} a = (\kappa_2 a)^b$ dir ve bu etki aynı zamanda eşitlik (4.5) de verilmiştir.

$\mathcal{X}^c$ in actor çaprazlanmış modülü $A_\kappa(\mathcal{X}) = (\Delta_\kappa: W_\kappa \rightarrow A_\kappa)$ dır. Burada $\Delta_\kappa \phi$ eşitlik (4.1) in ζ_ϕ si dir ve W_κ üzerine A_κ nın etkisi

$$\phi^\eta := \kappa_1 * \eta_1^{-1} * \phi * \kappa_2^{-1} * \eta_2: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \quad (4.17)$$

tarafından verilir. Bu ϕ^η , κ -birleşim formülü $\Lambda_\kappa m: M \rightarrow M$, $n \mapsto \bar{m} *_\kappa n *_\kappa m = km^{-1}nk^{-1}m$ kullanılarak elde edilen türevidir. Böylece $\Lambda_\kappa \eta: A_\kappa \rightarrow A_\kappa$, $\zeta \mapsto \zeta^\eta = \kappa *$

$\eta^{-1} * \zeta * \kappa^{-1} * \eta$ dır. κ için $\mathcal{X}$ nin bu Whitehead çaprazlanmış modülü $W_\kappa(\mathcal{X}) = (v_{\kappa,2}: B \rightarrow W_\kappa)$ dır. B üzerine W_κ nın bu etkisi $a^\eta := a^{\zeta\phi} = \zeta_{\phi,2}\kappa_2^{-1}a = a(\phi\kappa_1^{-1}\delta a)$ olarak verilir. W_κ ve N_κ nın sınır dönüşümleri $v_\kappa: \mathcal{X} \rightarrow A_\kappa(\mathcal{X})$ çaprazlanmış modülünün iç morfizmini oluşturur. κ için $\mathcal{X}$ nin bu iç aktör çaprazlanmış modülü $v_\kappa\mathcal{X}$ görüntüsüdür. Burada kaynak grup temel κ –türevlerinden oluşur ve hedef grup κ –birleşim otomorfizmlerinden oluşur [9] .

KAYNAKLAR

- [1] Taşçı, D., Soyut Cebir, Alp Yayınevi, Ankara, 2007.
- [2] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010.
- [3] Bayraktar, M., Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006.
- [4] Asar, A.O., Arıkan, A., Cebir, Eflatun Yayınevi, Ankara, 2009.
- [5] Çallıalp, F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001.
- [6] Blyth, T.S., Categories, University of St. Andrews, Scotland, 1986.
- [7] Higgins, P. J., Categories and Groupoids, Van Nostrand, New York, 1971.
- [8] Brown, R., Topology, Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [9] Alp M. and Wensley, Christopher D., Automorphisms and Homotopies of Groupoids and Crossed Modules, Appl Categor. Struct., 18, 473–504, 2010.
- [10] Whitehead, J.H.C., Combinatorial Homotopy II, Bull. American Math. Society., 55, 1949.
- [11] Hilton, P.J., An Introduction to Homotopy Theory, Cambridge, 1961.
- [12] Ellis, G.J., Crossed Squares and Combinatorial Homotopy, Math. Z., 214, 1993.
- [13] Whitehead J. H. C., Combinatorial homotopy II, Bull. A. M. S., 55, 453-496, 1949.
- [14] Lue, A.S.T., Semi-complete crossed modules and holomorphs of groups, Bull. London Math. Soc., 11, 8-16, 1979.

- [15] Norrie, K.J., Actions and automorphisms of crossed modules, Bull. Soc. Math. France, 118, 129-146, 1990.
- [16] Ellis, G. and Steiner, R., Higher dimensional crossed modules and homotopy groups of $(n+1)$ -ads., J. Pure Appl. Algebra, 46, 117-136, 1987.
- [17] Norrie, K.J., Crossed module and analogues of group theorems, Ph. D thesis, Kings College, University of London, 1987.
- [18] Brown, R. and Loday, J. L., Homotopical Excision and Hurewicz Theorems for n -cubes of Spaces, Proc. London, Math. Soc., 3, 54, 176-192, 1987.
- [19] Alp, M., GAP, Crossed modules, Cat^1 -groups to the Computational Group theory, Phd. Thesis, University of Wales Bangor, 1420, 1997.
- [20] Brown, R. and Loday, J. L., Van Kampen theorems for diagram of spaces Topology, 26, 311-335, 1987.
- [21] Brown, R. and Gilbert, Algebraic models of 3-types and automorphisms structures for crossed modules, Proceedings of the London Mathematical Society, 3, 59, 51-73, 1989.
- [22] Ellis, G.J., Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras, J.P.A.A., 52, 277-282, 1988.
- [23] Ellis, G.J., Crossed Modules, IMS Bulletin, 21, 29-37, 1988.
- [24] Lue, A.S.T., The Ganea map for nilpotent groups, J. London Math. Soc., 2, 14, 309-312, 1976.
- [25] Whitehead, J.H.C., On operators in relative homotopy groups, Ann. Math., 49, 610-640, 1948.