T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT KÜMELER VE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME YÖNTEMLERİ

NAİME TOZLU

Mayıs 2018

N. TOZLU, 2018

DOKTORA TEZİ

NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T. C
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT KÜMELER VE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME YÖNTEMLERİ

Naime TOZLU

Doktora Tezi

1. Danışman
Doç. Dr. Serkan KADER

2. Danışman
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Mayıs 2018-NİĞDE

Naime TOZLU tarafından **Doç. Dr. Serkan KADER** ve **Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL** danışmanlığında hazırlanan "**Soft Kümeler ve Çok Kriterli Karar Verme Yöntemleri**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kemal AYDIN, Selçuk Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Serkan KADER, Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yusuf BECEREN, Selçuk Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ali Haydar KOCAMAN, Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Tuğba Han DİZMAN, Gaziantep Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve .... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT

MÜDÜR V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Naime TOZLU

ÖZET

SOFT KÜMELER VE ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME YÖNTEMLERİ

TOZLU, Naime
Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Doç. Dr. Serkan KADER
İkinci Danışman :Prof.Dr. Şaziye YÜKSEL

Mayıs 2018, 122 sayfa

Bu çalışma, yedi bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde; tezde kullanılan kavramların literatür bilgileri ve ikinci bölümde; belirsizlik için önerilen fuzzy küme, rough küme, soft küme teorileri ile soft topolojik uzay kavramı ve bunların bazı özellikleri verilmiştir.
Üçüncü bölümde; soft topolojik uzayda soft komşuluğun bazı özellikleri ve soft süzgeç kavramı ile temel özellikleri çalışılmıştır.
Dördüncü bölümde; soft topolojik uzaylarda yeni soft küme çeşitleri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.
Beşinci bölümde; yeni soft süreklilik kavramları verilmiş ve bunlarla soft sürekliliğin çeşitli dağılımları elde edilmiştir.
Altıncı bölümde; zayıf soft yapı kavramı ve $\alpha(\widetilde{w})$, $\pi(\widetilde{w})$, $\sigma(\widetilde{w})$, $\beta(\widetilde{w})$, $\rho(\widetilde{w})$, $r(\widetilde{w})$ yapıları incelenmiştir.
Yedinci bölümde; çok kriterli karar verme yöntemleri kullanılarak tıp alanında uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Soft küme, Soft topolojik uzay, Zayıf soft uzay, Çok kriterli karar verme yöntemleri.

SUMMARY

SOFT SETS AND MULTICRITERIA DECISION MAKING METHODS

TOZLU, Naime
Nigde Omer Halisdemir University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor :Associate Professor Dr. Serkan KADER
Co-Advisor :Professor Dr. Şaziye YÜKSEL

May 2018, 122 pages

This study consists of seven sections.
In the first section; literature knowledges of concepts used in thesis and in the second section; fuzzy set, rough set and soft set theories which proposed for vagueness and the concept of soft topological space and their some properties were given.
In the third section; some soft neighbourhood properties in a soft topological space were studied and the concept of soft filter with its some properties were studied.
In the fourth section; new types of soft sets in soft topological spaces were defined and their properties were investigated.
In the fifth section; the concepts new different soft continuity were given and the decompositions of soft continuity were obtained by using them.
In the sixth section; the concept of weak soft structure and the structures $\alpha(\widetilde{w})$, $\pi(\widetilde{w})$, $\sigma(\widetilde{w})$, $\beta(\widetilde{w})$, $\rho(\widetilde{w})$, $r(\widetilde{w})$ were investigated.
In the seventh section; using multicriteria decision making methods, applications in medicine were given.

Keywords: Soft set, Soft topological space, Weak soft space, Multicriteria decision making methods.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, öncelikle soft topolojik uzaylarda bazı soft komşuluk özellikleri ve soft süzgeç kavramı incelenmiştir. Daha sonra, soft açık ve soft kapalı kümelerin farklı çeşitleri çalışılmış ve ters örnekler yardımıyla bunlar arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Ayrıca, farklı soft süreklilik çeşitleri verilmiş ve bunlar yardımıyla soft sürekliliğin yeni dağılımları elde edilmiştir. Sonrasında soft topolojik uzaydan daha genel olan zayıf soft uzay kavramı irdelenmiştir. Son olarak, çok kriterli karar verme yöntemi kullanılarak tıp alanında bir örnek sunulmuş ve Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesi'ne prostat şikayetiyle gelen hastaların verileri farklı yöntemlere uygulanarak elde edilen sonuçlara göre hangi yöntemin daha elverişli olduğu tartışılmıştır.

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL ve Doç. Dr. Serkan KADER'e, tıp verilerini bizimle paylaşan Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesi öğretim üyesi Prof. Dr. Ünal Sert'e ve TÜBİTAK BİDEB-2211 Yurt İçi Doktora burs programına teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu tezi, beni bugünlere getiren, maddi ve manevi destekleriyle hiçbir zaman yalnız bırakmayan biricik aileme ve nişanlım Abdullah DEMİRTAŞ'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
X	Evren küme
E	Parametre kümesi
$P(X)$	X'in güç kümesi
A^t	A'nın tümleyeni
$\emptyset$	Boş küme
μ	Üyelik fonksiyonu
$\tilde{A}$	Fuzzy küme
$\mathcal{F}(X)$	Fuzzy kümelerin ailesi
R	İkili bağıntı
(X,R)	Pawlak yaklaşım uzayı
R_{-}	Alt yaklaşım
R^{-}	Üst yaklaşım
(F,E)	Soft küme
$SS(X,E)$	Soft kümelerin ailesi
Φ	Boş soft küme
$\tilde{E}$	Tam soft küme
$\sqcup$	Soft birleşim
$\sqcap$	Soft kesişim
$\sqsubseteq$	Soft alt küme
e_F	Soft nokta
$(F,E)^c$	(F,E)'nin soft relatif tümleyeni
(X,τ,E)	Soft topolojik uzay
τ_Y	Y üzerindeki soft relatif topoloji
$cl(F,E)$	(F,E) soft kümesinin soft kapanışı
$int(F,E)$	(F,E) soft kümesinin soft içi
$\tilde{\mathcal{F}}$	Soft süzgeç
$\tilde{\beta}$	Soft süzgeç tabanı

$\tilde{S}$	Soft süzgeç alt tabanı
$(X, \widetilde{w}, E)$	Zayıf soft uzay
$\mathfrak{S} = (\tilde{F}, A)$	Fuzzy soft küme
$P = (X, G)$	Soft yaklaşım uzayı
$\underline{apr_P}$	Alt soft rough yaklaşım
$\overline{apr_P}$	Üst soft rough yaklaşım
$S = (X, C_G)$	Soft örtü yaklaşım uzayı
S_-	Soft örtü alt yaklaşım
S_1^-	I. tip soft örtü üst yaklaşım
S_2^-	II. tip soft örtü üst yaklaşım
Md_S	Soft minimal ifade
$\widetilde{m}$	Üçgen fuzzy sayı
$\widetilde{D}$	Fuzzy matris
$d(\cdot,\cdot)$	Uzaklık ölçümü
CC_i	Yakınlık katsayısı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Klasik matematik; kesin olan fikirleri gerektirir. Fakat mühendislik, tıp ve ekonomi gibi diğer alanlarda kesin olmayan kavramlar mevcuttur. Örneğin, ekonomide, “pahalı (ya da ucuz) ev” kesin değildir. Bu gibi kesin olmayan kavramlar belirsiz olarak adlandırılır. Gerçek hayatta karşılaştığımız problemlerdeki belirsiz kavramları ifade edebilmek için araştırmacılar tarafından fuzzy (bulanık) küme teori, rough (kaba) küme teori ve soft (esnek) küme teori gibi birkaç metod önerilmiştir. İlk olarak, Zadeh (1965) tarafından fuzzy küme teori verilmiştir. Bu teorinin temeli, fuzzy üyelik fonksiyonuna dayanır. Fuzzy üyelik fonksiyonuyla bir elemanın bir kümeye aitlik derecesini ifade edebiliriz.

Daha sonra, Pawlak (1982) tarafından önerilen rough küme teori belirsizlik için verilen diğer bir matematiksel yaklaşımdır. Bu teorinin avantajı, fuzzy küme teorisindeki üyelik gibi veri hakkında ek bir bilgiye ihtiyaç duymamasıdır. Rough küme teori, denklik bağıntısına dayalıdır. Ancak, rough kümeler farklı açılardan da ele alınmıştır. Örneğin; evrenin parçalanışı örtüye genelleştirilmiştir (Pomykala, 1987; Bryniarski, 1989). Örtü tabanlı rough kümeler, rough kümelerin önemli bir genelleştirmesidir (Zhu ve Wang, 2003; Zhu, 2007; Zhu, 2009).

Fuzzy küme ve rough küme teorileri, belirsizlik için verilen araçlar olarak düşünülebilir. Fakat bu teorilerin her ikisi de kendi açısından zorluklara sahiptir. Bu zorlukların sebebi, 1999’da Molodtsov’un bahsettiği teorideki parametreleme aracının eksikliğidir. Soft küme teori (Molodtsov, 1999), belirsizlik ve kesin olmayışlığı modellemek için tamamen yeni bir yaklaşım olarak verilmiştir. Molodtsov (1999; 2004)’a göre, soft küme teori, oyun teori, Riemann integrasyon ve ölçü teori gibi birçok alana başarıyla uygulanabilir. Soft küme teoride hiçbir kısıtlamanın bulunmaması, bu teorinin pratiğe kolayca uygulanmasını sağlar. Son yıllarda soft kümeler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Maji vd. (2002) soft küme teoride birkaç işlem vererek Molodtsov’un fikrine uygulamışlardır. Maji vd. (2003) tarafından karar verme probleminde soft küme teorinin bir uygulaması verilmiştir. Ali vd. (2009), soft kümeler üzerinde bazı işlemler tanımlamışlardır. Daha sonra Ge ve Yang (2011), Maji vd. (2003) ile Ali vd. (2009)

tarafından yapılan çalışmalardaki işlemsel kuralları daha fazla incelemiş ve Ali vd. (2009)'nin çalışması ile farklı bakış açıları içeren bazı ilginç sonuçlar elde etmişlerdir. Ge vd. (2011), topoloji ve soft küme teori arasında bazı bağlantılar kurmuşlardır. Aktaş ve Çağman (2007), fuzzy ve rough kümeler ile ilgili kavramlarla soft kümeleri örnekler vererek karşılaştırmışlardır.

Fuzzy soft küme (Maji vd., 2001), soft rough küme (Feng vd., 2010), rough soft küme (Feng vd., 2010) gibi, belirsizlik için verilen küme teorilerinin hibrit modelleri araştırmacılar tarafından dikkat çekmiştir. Feng vd. (2010) soft ve rough kümenin kombinasyonu olan soft rough küme kavramını vermiştir. İyi bilinir ki, rough küme modelinde denklik bağıntısı evrenin taneciklenmiş yapısını oluşturmak için kullanılır. Soft rough küme modelinde ise evrenin taneciklenmiş yapısını oluşturmak için de soft küme kullanılır. Daha sonra, Feng (2011) soft rough kümeleri kullanarak çok kriterli grup karar verme problemini irdelemiştir. Bu çalışma, belirsizlik altında çok kriterli grup karar vermede soft rough yaklaşımların uygulanmasına ilk teşebbüs olarak görülebilir. Tozlu vd. (2016) soft örtü tabanlı rough kümeler olarak adlandırılan yeni bir kavramı ve temel özelliklerini vermişlerdir. Soft örtü alt ve üst yaklaşımları tanımlayıp, topolojideki iç ve kapanış kavramlarıyla aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Belirsizlik için verilen küme teorileri; araştırmacılara, günlük hayatta karşılaşılan problemleri çözebilmeleri için de imkan sağlamıştır. Örneğin; prostat kanserinin teşhisi ve sonucunun tahmini hakkında yapılan birçok çalışma vardır. Bunlardan bir tanesi, hastanın yaş, prostat hacmi (PV) ve prostat spesifik antijen (PSA) verilerinin kullanıldığı kural tabanlı fuzzy uzman sistemi (FES) dir (Saritas vd., 2003). Bu sistem, risk faktörünü ve biyopsinin gerekliliğini ifade etmek için uzman doktora yardım etmeyi amaçlar. Benecchi (2006), hastaların PSA, serbest prostat spesifik antijen (fPSA) ve yaş verilerini kullanarak neuro-fuzzy sistemi geliştirmiştir. Keleş vd. (2007) prostat kanserinin teşhisinde kullanılan neuro-fuzzy sınıflandırıcıyı yapmışlardır. Saritas vd. (2010) hastaların PSA, fPSA ve yaş verilerini kullanarak kanser olup olmadıklarının tahminini sağlayacak yapay sinirsel (neural) ağı geliştirmişlerdir. Yuksel vd. (2013) hastaların PSA, prostat hacmi ve yaş faktörlerini kullanarak, fuzzy ve soft kümelere dayalı soft uzman sistemi (SES) olarak adlandırılan bir tahmin sistemi oluşturmuşlardır. Yüksel vd. (2014), Feng (2011)'in soft küme tabanlı grup karar verme yönteminde soft örtü yaklaşımları kullanmış ve prostat kanser riski olan hastalara biyopsi uygulanıp uygulanmaması açısından en uygun seçimi elde etmeyi amaçlayan, tıp alanında bir örnek sunmuşlardır.

Soft kümelerin topolojik yapısı da birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Shabir ve Naz (2011) parametrelerin sabit kümesi ile evren kümesi üzerinde soft topolojik uzay kavramını vermişlerdir. Soft açık küme, soft iç nokta, bir noktanın soft komşuluğu, soft ayırma aksiyomları ve soft topolojik uzayın alt uzayını çalışmışlardır. Soft topoloji kavramına farklı bir yaklaşım da Çağman vd. (2011) tarafından yapılmış ve soft açık küme, soft iç, soft kapanış, soft limit noktası, soft Hausdorff uzayı tanımları verilmiştir. Min (2011), soft topolojik uzaylarda bazı sonuçlar elde etmiştir. Hussain ve Ahmad (2011), soft topoloji üzerindeki soft iç, soft dış ve soft sınırın özelliklerini irdelemişlerdir. Kharal ve Ahmad (2011) soft topolojik uzaylarda dönüşümlerin sürekliliğini tanımlamış ve özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca, soft açık ve soft kapalı dönüşümler ile soft homeomorfizmi çalışmışlardır. Aygünoğlu ve Aygün (2012) soft dönüşümün soft sürekliliğini, soft çarpım topolojisini tanımlamışlar, soft izdüşüm dönüşümlerinin ve soft kompaktlığın özelliklerini çalışmışlardır. Ayrıca, Tychonoff teoremini soft topolojik uzaya genelleştirmişlerdir. Zorlutuna vd. (2012) soft nokta tanımını vermişler ve de soft iç nokta, soft komşuluk ve soft süreklilik kavramlarını çalışmışlardır. Ayrıca, soft topoloji ve fuzzy topoloji arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Varol ve Aygün (2013), soft topolojik uzayda dizilerin yakınsaklığını, diyagonal soft kümeyi tanımlamışlar ve soft Hausdorff uzayın özelliklerini çalışmışlardır.

Son zamanlarda, soft topolojik uzaylarda bazı soft küme çeşitleri çalışılmıştır. Örneğin, Kannan (2012) soft genelleştirilmiş kapalı ve açık kümeleri tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, yeni bir ayırma aksiyomu vermiş ve çalışmıştır. Mahanta ve Das (2012) semi-açık ve semi-kapalı soft kümeler ile soft semi-sürekliliği incelemişlerdir. Kandil vd. (2012) γ-işlem kavramıyla pre-açık, α-açık, semi-açık ve β-açık soft kümeleri tanımlayıp bunlar arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Ayrıca soft α-sürekli, soft pre-sürekli, soft semi-sürekli ve soft β-sürekli fonksiyon kavramlarını vermişlerdir. Chen (2013) soft semi açık kümeleri tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Arockiarani ve Arokialancy (2013) soft β-açık küme ve soft pre-açık küme kavramlarını araştırmışlardır. Sonrasında, Akdağ ve Özkan (2014) tarafından soft α-açık kümeler, soft α-sürekli ve soft pre-sürekli fonksiyonlar çalışılmıştır. Güzel Ergül vd. (2014) soft genelleştirilmiş pre-regüler kapalı kümeleri ve özelliklerini vermişlerdir.

Zakari vd. (2016) soft topolojik yapıdan daha genel olan zayıf soft yapı kavramını ve bazı özelliklerini vermişlerdir Ayrıca, bu yapı üzerinde bazı yeni ayırma aksiyomlarını ve kompaktlığı incelemişlerdir.

BÖLÜM II

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmamız boyunca kullanacağımız bazı temel kavramların kısa bir özeti verilecektir.

2.1 Fuzzy Kümeler

Bir fuzzy küme, μ_x üyelik fonksiyonuyla ifade edilen elemanlardan oluşur öyle ki bu elemanlar; kümeye tam olarak aitse "1" üyelik derecesine, eğer hiç ait değillerse "0" üyelik derecesine ya da kısmi aitlik söz konusu ise "0 ile 1 arasında" üyelik derecesine sahiptirler (Ural, 2006).

Klasik matematikte karşılaşılan bir küme $A = \{x: x = 2y + 1, y\ doğal\ sayı\}$ olsun. Açıkça görülmektedir ki, A tüm tek doğal sayıların kümesidir. Böylelikle, herhangi bir x doğal sayısı eğer tek ise A'nın elemanı olacaktır. Aksi halde, A'nın bir elemanı değildir. Bu durum, birinci elemanı üyelik derecesini, ikinci elemanı sayıyı gösteren sıralı bir çift şeklinde aşağıda gösterilmiştir.

$A = \{(1,1), (0,2), (1,3), (0,4), \dots\}$

Görüldüğü üzere, klasik bir kümede bir eleman ya o kümeye ait olmakta veya ait olmamaktadır. Halbuki fuzzy kümelerde, aidiyetin bir derecesi söz konusudur. Bu derece "üyelik derecesi" olarak ifade edilir ve $[0,1]$ aralığındadır.

Gerçek dünya, kesin sınırları olmayan kümeleri karşımıza çıkarır. Kümenin elemanlarının verilen kümeye kısmen ait olmasını kabul eden fuzzy kümeler, bu noktada klasik kümelere göre açık bir avantaj sağlar.

X, elemanları "x" ile gösterilen bir evrensel küme olarak tanımlansın. X'in klasik bir alt kümesi olan A için üyelik, μ_A karakteristik fonksiyonu ile gösterilir ve $\{0,1\}$ olarak değişmektedir:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \ ise \\ 0, & aksi \ halde \end{cases} \quad (2.1)$$

Eğer küme değerinin $[0,1]$ aralığında olmasına izin verilirse, $\tilde{A}$ kümesi "Fuzzy Küme" olarak isimlendirilir. $\mu_A(x)$, x'in $\tilde{A}$ kümesi içindeki üyelik derecesidir ve $\mu_A(x)$'in değerleri 1'e yaklaştıkça x'in $\tilde{A}$ kümesine üyeliği artar (Zadeh, 1965).

$\tilde{A}$ fuzzy kümesi, sıralı ikililer kümesi ile,

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in A\} \quad (2.2)$$

biçiminde karakterize edilmiştir.

X'in tüm fuzzy alt kümelerinin kümesi $\mathcal{F}(X)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1. (Paksoy vd., 2013) Aynı uzunluğa sahip dört erkek öğrenciden oluşan bir örnek uzay verilsin. $X = \{\ Ahmet, Hasan, Hüseyin, Mehmet\ \}$, öğrencilerin ağırlıkları ise aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{matrix} Ahmet\ (56\ kg) & Hüseyin\ (66\ kg) \\ Hasan\ (74\ kg) & Mehmet\ (82\ kg) \end{matrix}$$

"Şişman erkek öğrenciler" önermesi ele alındığında, şişman erkek öğrenciler kümesine dahil olan öğrencilerden bir fuzzy küme oluşturulması gerekir. Ancak bu önerme "şişman" fuzzy kavramını içermektedir. İsmi geçen öğrencilerden hangilerinin bu fuzzy kümenin elemanı olacağı; öğrencilerin bulunduğu coğrafyadan, ait oldukları etnik gruba kadar geniş bir aralıkta değişen kriterlerin etkisine bağlıdır. Uzman görüşü gerektirmeyecek genel bir konu olduğu için, keyfi olarak yapılan bir değerlendirme ile öğrencilerin bu kümeye üyelik dereceleri aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\tilde{B} = \{\ (Ahmet, 0.2), (Hüseyin, 0.4), (Hasan, 0.6), (Mehmet, 0.8)\}.$$

Teorem 2.1.1. (Zadeh, 1965) $A, B \subseteq X$ olmak üzere karakteristik fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\forall\ x \in \mathrm{X}$ için, $\mu_{\mathrm{X-A}}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}(x)$,
ii. $\forall\ x \in X$ için, $\mu_{\mathrm{A\cup B}}(x) = \max(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(x))$,
iii. $\forall\ x \in \mathrm{X}$ için, $\mu_{\mathrm{A\cap B}}(x) = \min(\mu_{\mathrm{A}}(x), \mu_{\mathrm{B}}(x))$.

Bu demektir ki, bir elemanın kesişime ve birleşime ait olması yalnızca onun eleman kümesine ait olmasıyla belirlenir. Bu iyi bir özelliktir ve fuzzy kümelerde çok basit işlemlerin yapılmasına izin verir öyle ki bu özellik teorikte ve pratikte de önemlidir.

Bir fuzzy küme, α-seviye kümesi kavramı sayesinde kesin kümelerin bir ailesi ile ilişkilendirilebilir.

Tanım 2.1.1. (Zadeh, 1965) Bir $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin α-seviye kümesi,

$$\tilde{A}(\alpha) = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in [0,1] \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. α değeri keyfi olarak seçilebilir, fakat genellikle düşünülen fuzzy kümedeki üyelik derecelerinin biri olarak seçilir.

Uyarı 2.1.1. (Aktaş ve Çağman, 2003) Bir $\tilde{A}$ fuzzy kümesi aşağıdaki formül yardımıyla α-seviye kümelerinin herhangi bir ailesinden yeniden oluşturulabilir:

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha : x \in \tilde{A}(\alpha)\} \tag{2.4}$$

Fuzzy küme teorisi son yıllarda kapsamlı olarak genişlemiş ve dünya çapında pratikçilerin, mantıkçıların ve filozofların dikkatini çekmiştir.

2.2 Rough Kümeler

Pawlak (1982) tarafından verilen rough küme teori, kesin olmayan ve belirsiz durumlar için verilmiş sistematik bir metottur.

Tanım 2.2.1. (Pawlak ve Skowron, 2007) $X \neq \emptyset$ sonlu nesnelerin kümesi ve $A \neq \emptyset$ sonlu özelliklerin kümesi olmak üzere (X, A) ikilisi bir bilgi sistemidir. Her $a \in A$

özelliği için V_a; a özelliklerinin değer kümesi olmak üzere $a: X \rightarrow V_a$ şeklinde bir dönüşümdür.

R, X evreni üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. (X, R) ikilisi Pawlak yaklaşım uzayı olarak adlandırılır. Genelde R, bilgi sisteminden elde edildiği ve X evrenindeki nesnelerin belirsizliği yüzünden bir parçalanma verdiği için ayırtedilemez bağıntı olarak verilir (Pawlak ve Skowron, 2007). $x, y \in X$ için eğer $(x, y) \in R$ ise x ve y ayırtedilemez olarak adlandırılır. R bağıntısının tüm denklik sınıflarının ailesi yani R denklik bağıntısıyla belirlenmiş parçalanış X / R ile gösterilir. R bağıntısının bir denklik sınıfı yani X / R parçalanışının x' i içeren bloğu $[x]_R$ ile gösterilir.

R denklik bağıntısı kullanılarak aşağıdaki işlemler tanımlanmıştır (Pawlak, 1982):

$$R_{-}(Y) = \cup_{x \in X} \{ [x]_R : [x]_R \subseteq Y \} \tag{2.5}$$
$$R^{-}(Y) = \cup_{x \in X} \{ [x]_R : [x]_R \cap Y \neq \emptyset \} \tag{2.6}$$

Her $Y \subseteq X$ için $R_{-}(Y)$ ve $R^{-}(Y)$ sırasıyla (X, R) Pawlak yaklaşım uzayına göre Y' nin alt ve üst yaklaşımı olarak adlandırılır. Ayrıca

$$POZ_R(Y) = R_{-}(Y),$$
$$NEG_R(Y) = X - R^{-}(Y),$$
$$SNR_R(Y) = R^{-}(Y) - R_{-}(Y)$$

sırasıyla Y kümesinin pozitif, negatif ve sınır bölgeleridir.

Tanım 2.2.2. (Pawlak, 1982) (X, R) Pawlak yaklaşım uzayı olsun. Eğer $R_{-}(Y) = R^{-}(Y)$ ise $Y \subseteq X$ alt kümesi tanımlanabilirdir. Eğer $SNR_R(Y) \neq \emptyset$ ise $Y \subseteq X$ alt kümesi rough küme olarak adlandırılır. Y kümesinin rough kümesi $Y = (R_{-}(Y), R^{-}(Y))$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.1. (Pawlak, 1982) (X, R) Pawlak yaklaşım uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i. $R_{-}(A) \subseteq A \subseteq R^{-}(A)$,

ii. $R_{-}(\emptyset) = \emptyset = R^{-}(\emptyset)$,

iii. $R_{-}(X) = X = R^{-}(X)$,

iv. $R_{-}(R_{-}(A)) = R_{-}(A)$,

v. $R^{-}(R^{-}(A)) = R^{-}(A)$,

vi. $R^{-}(R_{-}(A)) = R_{-}(A)$,

vii. $R_{-}(R^{-}(A)) = R^{-}(A)$,

viii. $R_{-}(A) = (R^{-}(A^{t}))^{t}$,

ix. $R_{-}(A) = (R^{-}(A^{t}))^{t}$,

x. $R^{-}(A) = (R_{-}(A^{t}))^{t}$,

xi. $R_{-}(A \cap B) = R_{-}(A) \cap R_{-}(B)$,

xii. $R^{-}(A \cap B) \subseteq R^{-}(A) \cap R^{-}(B)$,

xiii. $R_{-}(A \cup B) \supseteq R_{-}(A) \cup R_{-}(B)$,

xiv. $R^{-}(A \cup B) = R^{-}(A) \cup R^{-}(B)$,

xv. $A \subseteq B \Longrightarrow R_{-}(A) \subseteq R_{-}(B)$,

xvi. $A \subseteq B \Longrightarrow R^{-}(A) \subseteq R^{-}(B)$,

xvii. $\forall K \in X/R$ için $R_{-}(K) = K$,

xviii. $\forall K \in X/R$ için $R^{-}(K) = K$.

Örnek 2.2.1. (Tozlu, 2013) $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ sonlu evren kümesi, şart özellikleri C={Ateş, Hemoglobin, Kan basıncı, Oksijen doygunluğu} ve karar özelliği D={Rahatlık} olmak üzere aşağıdaki tablo verilsin.

Çizelge 2.2.1. Hipotermi sonrası anestezi hastaları

X	**Ateş**	**Hemoglobin**	**Kan basıncı**	**Oksijen doygunluğu**	**Rahatlık**
a	Düşük	Orta	Düşük	Orta	Düşük
b	Düşük	Orta	Normal	Az	Düşük
c	Normal	İyi	Düşük	İyi	Düşük
d	Düşük	İyi	Normal	İyi	Orta
e	Düşük	İyi	Normal	Orta	Orta
f	Normal	Orta	Normal	İyi	Orta
g	Normal	Az	Yüksek	İyi	Çok düşük
h	Yüksek	İyi	Yüksek	Orta	Çok düşük

$R = \{(x, y): x\ ve\ y\ aynı\ kan\ basıncına\ sahip\}$ şeklinde R bağıntısını tanımlayalım. Bu durumda

$R = \{(a, a), (a, c,), (c, c), (c, a), (b, b), (b, d), (b, e), (b, f), (d, d), (d, b), (d, e), (d, f), (e, e), (e, b), (e, d), (e, f), (f, f), (f, b), (f, d), (f, e), (g, g), (g, h), (h, h), (h, g)\}$

ve

$X/R = \{\{a, c\}, \{b, d, e, f\}, \{g, h\}\}$

elde edilir. $A = \{a, b, c, g, h\} \subseteq X$ kümesi için

$R_{-}(A) = \cup_{x \in X} \{ [x]_R : [x]_R \subseteq A \} = \{a, c, g, h\}$,
$R^{-}(A) = \cup_{x \in X} \{ [x]_R : [x]_R \cap A \neq \emptyset \} = X$

bulunur. $R_{-}(A) \neq R^{-}(A)$ olduğundan A, rough kümedir. Ayrıca $B = \{b, d, e, f\}$ kümesi için

$R_{-}(B) = \cup_{y \in X} \{ [y]_R : [y]_R \subseteq B \} = \{b, d, e, f\}$,
$R^{-}(B) = \cup_{y \in X} \{ [y]_R : [y]_R \cap B \neq \emptyset \} = \{b, d, e, f\}$

olur. $R_{-}(B) = R^{-}(B)$ olduğundan B, tanımlanabilir kümedir.

Rough kümeler, yaklaşımların yerine rough üyelik fonksiyonları kullanılarak da aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.2.3. (Pawlak ve Skowron, 1994) X sonlu evren kümesi, $R \subseteq X \times X$ denklik bağıntısı ve $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Rough üyelik fonksiyonu,

$$\mu_Y^R : X \to [0,1] \ni \mu_Y^R(x) = \frac{|Y \cap [x]_R|}{|[x]_R|} \quad (|[x]_R| ; [x]_R\text{' nin kardinalitesi }) \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir.

Rough üyelik fonksiyonu R verildiğinde x'in Y'ye ait olmasının şartlı olasılığını ifade eder ve R ile belirtilmiş x hakkındaki bilgileri göz önüne alarak x'in Y'ye ait olma derecesi olarak düşünülebilir.

Rough üyelik fonksiyonu, bir kümenin yaklaşımlarını ve sınır bölgesini ifade etmek için aşağıdaki gibi kullanılabilir:

Tanım 2.2.4. (Pawlak ve Skowron, 1994) X sonlu evren kümesi, $R \subseteq X \times X$ bağıntısı ve $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde

$R_{-}(\mathrm{Y}) = \{ x \in \mathrm{X} : \mu_{\mathrm{Y}}^{R}(x) = 1 \}$,
$R^{-}(\mathrm{Y}) = \{ x \in \mathrm{X} : \mu_{\mathrm{Y}}^{R}(x) > 0 \}$,
$\mathrm{SNR}_{R}(\mathrm{Y}) = \{ x \in \mathrm{X} : 0 < \mu_{\mathrm{Y}}^{R}(x) < 1 \}$

dir.

Uyarı 2.2.1. (Pawlak ve Skowron, 1994) $A, B \subseteq X$ olmak üzere rough üyelik fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\mu_{\mathrm{A}}^{R}(x) = 1 \iff x \in R_{-}(\mathrm{A})$,
ii. $\mu_{\mathrm{A}}^{R}(x) = 0 \iff x \in \mathrm{X} - R^{-}(\mathrm{A})$,
iii. $0 < \mu_{\mathrm{A}}^{R}(x) < 1 \iff x \in \mathrm{SNR}_{R}(\mathrm{A})$,
iv. $\forall x \in \mathrm{X}$ için, $\mu_{\mathrm{X-A}}^{R}(x) = 1 - \mu_{\mathrm{A}}^{R}(x)$,
v. $\forall x \in \mathrm{X}$ için, $\mu_{\mathrm{A\cup B}}^{R}(x) \geq \max(\mu_{\mathrm{A}}^{R}(x), \mu_{\mathrm{B}}^{R}(x))$,
vi. $\forall x \in \mathrm{X}$ için, $\mu_{\mathrm{A\cap B}}^{R}(x) \leq \min(\mu_{\mathrm{A}}^{R}(x), \mu_{\mathrm{B}}^{R}(x))$.

Sonuç 2.2.1. (Pawlak ve Skowron, 1994) Özelliklerden anlaşılacağı gibi rough üyeliği, fuzzy üyeliğinden farklıdır. Yukarıdaki son iki özellikte, kümelerin birleşimi ve kesişimi için üyelik genelde fuzzy kümelerdeki gibi onları oluşturan üyeliklerden hesaplanamaz. Bu durumda rough üyelik, fuzzy üyeliğin bir genellemesidir. Ayrıca rough üyelik fonksiyonu fuzzy üyeliklerin aksine olasılık özelliğine sahiptir.

Şimdi, rough kümenin diğer tanımı verilebilir:

Tanım 2.2.5. (Pawlak ve Skowron, 1994) Eğer $0 < \mu_Y^R(x) < 1$ olacak şekilde bir $x \in Y$ varsa $Y \subseteq X$ kümesi R'ye göre rough'tır.

Sonuç 2.2.2. (Pawlak ve Skowron, 1994) Rough küme teorisinde, iki önemli kavram olan belirsizlik ve kesin olmayışlık birbirinden kesinlikle farklıdır. Belirsizlik kümelerin özelliği olup yaklaşımlarla tanımlanırken, kesin olmayışlık bir kümenin elemanlarının özelliğidir ve rough üyelik fonksiyonu ile ifade edilebilir.

2.3 Soft Kümeler

X bir başlangıç evreni ve E, X evrenine göre olası tüm parametrelerin kümesi olsun. Genellikle parametreler; özellikler, karakteristikler ya da X evrenindeki nesnelerin özellikleridir. Soft küme kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.3.1. (Molodtsov, 1999) $P(X)$, X'in güç kümesini göstersin ve A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $F: A \longrightarrow P(X)$ bir dönüşüm olmak üzere $G = (F, A)$ ikilisine X üzerinde bir soft küme denir.

Diğer bir deyişle, X üzerinde bir soft küme, X evreninin alt kümelerinin parametrelenmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$, (F, A) soft kümesinin ε-tahmini elemanlarının kümesi gibi düşünülebilir. Açıktır ki, soft küme bir küme değildir.

Bundan sonra X kümesi üzerindeki bütün soft kümelerin ailesi $SS(X, E)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.3.1. (Molodtsov, 1999) $X = \{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, altı tane evi içeren evren ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ile verilmiş parametreler kümesi öyle ki e_i (i =1,2,3,4,5) "pahalı", "güzel", "modern", "ucuz", "yeşil çevreli" olsun. (F, E) soft kümesi Bay Y'nin almaya gönüllü olduğu evlerin cazipliği olarak alınsın. Bu durumda soft kümeyi tanımlamak demek; güzel, modern vb. evleri göstermektir. F dönüşümünü " (.) evler " olarak düşünelim; öyle ki nokta, $e_i \in E$ parametrelerinin biriyle doldurulsun. Örneğin; $F(e_1)$, " (pahalı) evler" demektir ve fonksiyonel değeri X evrenindeki tüm pahalı evlerdir. $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$,

$F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. O halde, (F, E) soft kümesi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak düşünülebilir, öyle ki her yaklaşım, bir tahmin ve yaklaşık değer kümesi olmak üzere iki kısma sahiptir. Örneğin; (pahalı evler, $\{h_2, h_4\}$) yaklaşımlardan biridir. Dolayısıyla (F, E) soft kümesi,

$$(F, E) = \{(e_1, \{h_2, h_4\}), (e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_1, h_3, h_5\}), (e_5, \{h_1\})\}$$

şeklinde yazılabilir.

Soft küme teoride bir şey tanımlamak ya da kurmak, geleneksel matematikten daha farklıdır (Molodtsov, 1999). Çünkü, soft küme teoride bir şeyin ilk kez tanımında doğal bir tahmin vardır ve klasik matematik gibi kesin çözümü tanımlamak gerekli değildir.

Aktaş ve Çağman (2007), her rough kümenin bir soft küme gibi düşünülebileceğini göstermiştir. O halde soft küme teorisi, belirsiz bilgiyle ilgili çalışmalar için daha genel bir metottur.

Teorem 2.3.2. (Aktaş ve Çağman, 2007) Her rough küme bir soft kümedir.

İspat: X evreninde R denklik bağıntısına göre $Y = (R_-(Y), R^-(Y))$ rough kümesi alınsın. $p_1(x)$ tahmini "$[x]_R \subseteq Y$" ve $p_2(x)$ tahmini "$[x]_R \cap Y \neq \emptyset$" gibi düşünülsün. Bu durumda $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ şartları parametre kümesinin elemanıdırlar, yani $E = \{ p_1(x), p_2(x) \}$' dir. F fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F: E \longrightarrow P(X),\ F\big(p_i(x)\big) = \{x \in X: p_i(x) doğru\},\ i = 1, 2.$$

Böylece, her Y rough kümesi bir soft küme gibi düşünülebilir:

$$(F, E) = \{ (p_1(x), R_-(Y)), (p_2(x), R^-(Y))\}.$$

Aşağıdaki sonuç, soft kümeler ve ikili bağıntıların yakından ilgili olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.3. (Feng vd., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir soft küme olsun. O halde G soft kümesi, $R_G \subseteq A \times X$ ikili bağıntısını oluşturur ve bu bağıntı

$$(x, y) \in R_G \Leftrightarrow y \in F(x) \ni x \in A, y \in X \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır.

R, A parametre kümesinden X evrenine bir ikili bağıntı olsun. $F_R: A \longrightarrow P(X)$ küme değerli dönüşümü $x \in A$ için $F_R(x) = \{y \in X: (x, y) \in R\}$ şeklinde tanımlansın. O halde $G_R = (F_R, A)$, X üzerinde bir soft kümedir. Üstelik $G_{R_G} = G$ ve $R_{G_R} = R$' dir.

R_G, G soft kümesinin kanonik bağıntısı olarak adlandırılır ve G_R, R ikili bağıntısının kanonik soft kümesi olarak adlandırılır.

Bazı araştırmacıların gösterdiği gibi bilgi sistemleri ve soft kümeler yakından ilişkilidir.

Teorem 2.3.4. (Chen vd., 2005; Zou ve Xiao, 2008) X evreni üzerinde $G = (F, A)$ soft kümesi verilsin. Eğer X ve A, sonlu boştan farklı kümeler ise G doğal olarak bir bilgi sistemi oluşturur.

Her $a \in A$ özelliği için $a: X \longrightarrow V_a = \{0,1\}$ fonksiyonu

$$a(x) = \begin{cases} 1, & x \in F(a) \\ 0, & aksi\ halde \end{cases} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece, her soft küme bir bilgi sistemi olarak düşünülebilir. Bu da soft kümelerin literatürde sıkça kullanılan tablo gösterimidir. Aksine, soft küme bilgi sistemini açıklamada kullanılabilir. (X, A) ikilisi bir bilgi sistemi olsun.

$$B = \cup_{a \in A} \{a\} \times V_a$$

parametre kümesi gibi alarak (F, B) soft kümesi

$$F(a, v) = \{x \in X: a(x) = v\}, a \in A \text{ ve } v \in V_a \tag{2.10}$$

ile tanımlanabilir.

Şimdi, soft kümelerle ilgili bazı temel özellikleri verelim.

Tanım 2.3.2. (Maji vd., 2003) (F, A) ve (G, B), X evreni üzerinde soft kümeler olsun. Eğer $A \subseteq B$ ve $\forall e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ ise (F, A), (G, B)'nin bir soft alt kümesidir denir. $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Eğer (G, B), (F, A)'nın bir soft alt kümesi ise (F, A)'ya (G, B)'nin bir soft süper kümesi denir ve $(F, A) \sqsupseteq (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3. (Maji vd., 2003) (F, A) ve (G, B), X evreni üzerinde soft kümeler olmak üzere, (F, A), (G, B)'nin soft alt kümesi ve (G, B), (F, A)'nın soft alt kümesi ise (F, A), (G, B)'ye soft eşittir denir.

Tanım 2.3.4. (Shabir ve Naz, 2011) (F, E) soft kümesinin relatif tümleyeni $(F, E)^c$ ile gösterilir ve $(F, E)^c = (F^c, E)$ şeklinde tanımlanır öyle ki her $\alpha \in E$ için $F^c(\alpha) = X \backslash F(\alpha)$ ile verilen $F^c : A \longrightarrow P(X)$ bir dönüşümdür.

Tanım 2.3.5. (Maji vd., 2003) Eğer $\forall \varepsilon \in E$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ ise X üzerindeki (F, E) soft kümesi boş soft küme olarak adlandırılır ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.3.6. (Maji vd., 2003) Eğer $\forall \varepsilon \in E$ için $F(\varepsilon) = X$ ise X üzerindeki (F, E) soft kümesi tam soft küme olarak adlandırılır ve $\tilde{E}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4., Tanım 2.3.5. ve Tanım 2.3.6.'dan

$\tilde{E}^c = \Phi$ ve $\Phi^c = \tilde{E}$

olduğu açıktır.

Tanım 2.3.7. (Maji vd., 2003) X evreni üzerindeki (F, A) ve (G, B) soft kümelerinin birleşimi (H, C) soft kümesidir öyle ki $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & e\in A\backslash B \\ G(e), & e\in B\backslash A \\ F(e)\cup G(e), & e\in A\cap B \end{cases}$$

şeklindedir. $(F,A)\sqcup(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.8. (Feng vd., 2008) X evreni üzerindeki (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin kesişimi (H,C) soft kümesidir öyle ki $C=A\cap B$ ve $\forall e\in C$ için $H(e)=F(e)\cap G(e)$ şeklindedir. $(F,A)\sqcap(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.9. (Zorlutuna vd., 2012) I keyfi bir indis kümesi ve $\{(F_i,E)\}_{i\in I}$, $SS(X,E)$ ailesinin bir alt ailesi olsun. Bu takdirde,

i. Bu soft kümelerin birleşimi (G,E) soft kümesidir öyle ki her $e\in E$ için $G(e)=\bigcup_{i\in I}F_i(e)$ dir. $\sqcup_{i\in I}(F_i,E)=(G,E)$ ile gösterilir.
ii. Bu soft kümelerin kesişimi (H,E) soft kümesidir öyle ki her $e\in E$ için $H(e)=\bigcap_{i\in I}F_i(e)$ dir. $\sqcap_{i\in I}(F_i,E)=(H,E)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.10. (Yüksel vd., 2014) $(F,E),(G,E)\in SS(X,E)$ olsun. Eğer $(F,E)\sqcap(G,E)=\Phi$ ise (F,E) ve (G,E) ayrık soft kümeler olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.11. (Shabir ve Naz, 2011) X üzerindeki (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin farkı (H,E), $(F,E)\backslash(G,E)$ ile gösterilir ve $\forall e\in E$ için $H(e)=F(e)\backslash G(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.12. (Shabir ve Naz, 2011) (F,E), X üzerinde bir soft küme ve $x\in X$ olsun. Eğer her $\alpha\in E$ için $x\in F(\alpha)$ ise x, (F,E) soft kümesine aittir denir ve $x\in(F,E)$ şeklinde gösterilir.

Eğer bazı $\alpha\in E$ için $x\notin F(\alpha)$ ise $x\notin(F,E)$'dir.

Tanım 2.3.13. (Shabir ve Naz, 2011) Y, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $\alpha\in E$ için $Y(\alpha)=Y$ ise $\tilde{Y}$, X üzerindeki (Y,E) soft kümesini gösterir. Benzer şekilde (X,E), $\tilde{X}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.14. (Zorlutuna vd., 2012) Eğer $e \in E$ için $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e' \in E\backslash\{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ ise $(F,E) \in SS(X,E)$ soft kümesi $\tilde{X}$' da soft nokta olarak adlandırılır ve e_F ile gösterilir. Eğer $e \in E$ elemanı için $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ise e_F soft noktası, (G,E) soft kümesindedir denir ve $e_F \in (G,E)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.3.1. (Zorlutuna vd., 2012) $e_F \in \tilde{X}$ ve $(G,E) \sqsubseteq \tilde{X}$ olsun. Bu takdirde $e_F \in (G,E)$ ise $e_F \notin (G,E)^c$ dir.

Önerme 2.3.2. (Maji vd., 2003; Ali vd., 2009; Shabir ve Naz, 2011; Zorlutuna vd., 2012) $(F,E),(G,E),(H,E),(K,E) \in SS(X,E)$ ve I keyfi bir indis kümesi olmak üzere $\{(F_i,E)\}_{i\in I}$ ailesi, $SS(X,E)$ ailesinin bir alt ailesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(F,E) \sqcap \Phi = \Phi$, $(F,E) \sqcap \tilde{X} = (F,E)$, $(F,E) \sqcap (F,E) = (F,E)$,
ii. $(F,E) \sqcup \Phi = (F,E)$, $(F,E) \sqcup \tilde{X} = \tilde{X}$, $(F,E) \sqcup (F,E) = (F,E)$,
iii. $(F,E) \sqcap (G,E) = (G,E) \sqcap (F,E)$, $(F,E) \sqcup (G,E) = (G,E) \sqcup (F,E)$,
iv. $\big((F,E) \sqcup (G,E)\big) \sqcup (H,E) = (F,E) \sqcup \big((G,E) \sqcup (H,E)\big)$,
v. $\big((F,E) \sqcap (G,E)\big) \sqcap (H,E) = (F,E) \sqcap \big((G,E) \sqcap (H,E)\big)$,
vi. $(F,E) \sqcup [(G,E) \sqcap (H,E)] = [(F,E) \sqcup (G,E)] \sqcap [(F,E) \sqcup (H,E)]$,
vii. $(F,E) \sqcap [(G,E) \sqcup (H,E)] = [(F,E) \sqcap (G,E)] \sqcup [(F,E) \sqcap (H,E)]$,
viii. $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve $(G,E) \sqsubseteq (H,E)$ ise $(F,E) \sqsubseteq (H,E)$,
ix. $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve $(H,E) \sqsubseteq (K,E)$ ise $(F,E) \sqcap (H,E) \sqsubseteq (G,E) \sqcap (K,E)$,
x. $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve $(H,E) \sqsubseteq (K,E)$ ise $(F,E) \sqcup (H,E) \sqsubseteq (G,E) \sqcup (K,E)$,
xi. $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \Leftrightarrow (F,E) \sqcap (G,E) = (F,E)$,
xii. $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \Leftrightarrow (F,E) \sqcup (G,E) = (G,E)$,
xiii. $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \Leftrightarrow (G,E)^c \sqsubseteq (F,E)^c$,
xiv. $(F,E) \sqcap (G,E) = \Phi$ ise $(F,E) \sqsubseteq (G,E)^c$,
xv. $(F,E) \sqcup (F,E)^c = \tilde{X}$, $(F,E) \sqcap (F,E)^c = \Phi$,
xvi. $[(F,E) \sqcup (G,E)]^c = (F,E)^c \sqcap (G,E)^c$,
xvii. $[(F,E) \sqcap (G,E)]^c = (F,E)^c \sqcup (G,E)^c$,
xviii. $[\bigsqcup_{i\in I}(F_i,E)]^c = \bigsqcap_{i\in I}(F_i,E)^c$,
xix. $[\bigsqcap_{i\in I}(F_i,E)]^c = \bigsqcup_{i\in I}(F_i,E)^c$.

2.4 Fuzzy Soft Kümeler

Tanım 2.4.1. (Maji vd., 2001) $A \subseteq E$ ve $\tilde{F}: A \longrightarrow \mathcal{F}(X)$, $\mathfrak{S}$'nın yaklaşık fonksiyonu olmak üzere $\mathfrak{S} = (\tilde{F}, A)$ çifti X üzerinde fuzzy soft küme olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.1. (Simsekler ve Yuksel, 2013) Bayan U ve Bay V evlenecek ve bir salon kiralamak istiyorlar. (f_A, E) fuzzy soft kümesi "salonun kapasitesini" ifade eder. $X = \{a, b, c, d, e\}$ düşünülen salonlar, $E = \{e_1 = büyük, e_2 = merkezi, e_3 = ucuz, e_4 = pahalı, e_5 = şık, e_6 = kaliteli, e_7 = iyi\ servisli\}$ parametrelerin kümesi ve $A = \{e_2, e_5, e_6\}$, E'nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda,

$(f_A, E) = \{e_2 = \{a_{0.3}, b_{0.5}, c_{0.9}, d_{0.8}, e_{0.6}\}, e_5 = \{a_{0.8}, b_{0.6}, c_{0.2}, d_{0.1}, e_{0.5}\}, e_6 = \{a_{0.7}, b_{0.5}, c_{0.3}, d_{0.2}, e_{0.4}\}\}$

X üzerinde bir fuzzy soft kümedir.

2.5 Soft Örtü Tabanlı Rough Kümeler

Tanım 2.5.1. (Feng vd., 2010) $G = (F, A)$, X üzerinde bir soft küme olsun. $P = (X, G)$ çifti, soft yaklaşım uzayı olarak adlandırılır. $Y \subseteq X$ alt kümesinin alt ve üst soft rough yaklaşımları sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\underline{apr_P}(Y) = \cup_{a \in A}\{F(a): F(a) \subseteq Y\} \tag{2.11}$$

$$\overline{apr}_P(Y) = \cup_{a \in A}\{F(a): F(a) \cap Y \neq \emptyset\} \tag{2.12}$$

Eğer $\underline{apr_P}(Y) = \overline{apr}_P(Y)$ ise Y, soft P-tanımlanabilir; aksi halde Y, soft P-rough küme olarak adlandırılır.

Bu kesimde, özel bir soft küme kullanılmış ve bu soft küme ile soft örtü yaklaşım uzayı kurulmuştur.

Tanım 2.5.2. (Feng vd., 2010) Eğer $\cup_{a \in A} F(a) = X$ ise X üzerindeki $G = (F, A)$ soft kümesi, tüm soft küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.3. (Feng vd., 2010) Eğer her $e \in A$ için $F(e) \neq \emptyset$ ise X üzerindeki $G = (F, A)$ tüm soft kümesi, örtü soft küme olarak adlandırılır ve C_G ile gösterilir.

Tanım 2.5.4. (Yüksel vd., 2014) $G = (F, A)$, X üzerinde örtü soft küme olsun. Bu takdirde, $S = (X, C_G)$ çifti, soft örtü yaklaşım uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.5. (Yüksel vd., 2014) $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı ve $x \in X$ olsun. x'in soft minimal ifadesi şu şekilde tanımlanır:

$$Md_S(x) = \{F(e): e \in A \ \wedge x \in F(e) \ \wedge (\forall a \in A \ \wedge x \in F(a) \subseteq F(e) \Longrightarrow F(a) = F(e))\} \quad (2.13)$$

Tanım 2.5.6. (Yüksel vd., 2014) $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi için I. tip soft örtü alt ve üst yaklaşımlar sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S_-(Y) = \cup \{F(e): e \in A \ \wedge F(e) \subseteq Y\} \quad (2.14)$$
$$S_1^-(Y) = \cup \{Md_S(x): x \in Y\} \quad (2.15)$$

Ayrıca, $POZ_S(Y) = S_-(Y)$, $NEG_S(Y) = X - S_1^-(Y)$, $SNR_S(Y) = S_1^-(Y) - S_-(Y)$ sırasıyla Y'nin soft örtü pozitif, negatif ve sınır bölgeleri olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.7. (Yüksel vd., 2014) $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı olsun. Eğer $S_1^-(Y) = S_-(Y)$ ise $Y \subseteq X$ alt kümesi, soft örtü tabanlı tanımlanabilir; aksi halde, yani $S_1^-(Y) \neq S_-(Y)$ ise Y, I. tip soft örtü tabanlı rough küme olarak adlandırılır.

Örnek 2.5.1. (Yüksel vd., 2014) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ve $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı olsun. $F(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $F(e_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $F(e_3) = \{x_3, x_4\}$, $F(e_4) = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$,
$F(e_5) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$, $F(e_6) = \{x_3, x_5, x_6\}$ olmak üzere $U = \{x_1, x_2\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. Bu durumda

$$S_-(U) = \cup \{F(e): e \in E \wedge F(e) \subseteq U\} = \{x_1, x_2\},$$
$$S_1^-(U) = \cup \{Md_S(x): x \in U\} = \{x_1, x_2\}$$

dir. O halde, $S_{-}(U) = S_1^{-}(U)$ olduğundan U, soft örtü tabanlı tanımlanabilir kümedir.

Ayrıca $Y = \{x_1, x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesi için

$S_{-}(Y) = \cup \{F(e): e \in E \wedge F(e) \subseteq Y\} = \{x_1, x_2\}$,
$S_1^{-}(Y) = \cup \{Md_S(x): x \in Y\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

olur. $S_{-}(Y) \neq S_1^{-}(Y)$ olduğundan Y, I. tip soft örtü tabanlı rough kümedir.

Tanım 2.5.8. (Tozlu vd., 2016) $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi için II. tip soft örtü alt ve üst yaklaşımlar sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S_{-}(Y) = \cup \{F(e): e \in A \wedge F(e) \subseteq Y\} \quad (2.16)$$
$$S_2^{-}(Y) = S_{-}(Y) \cup \{Md_S(x): x \in Y - S_{-}(Y)\} \quad (2.17)$$

Ayrıca, $POZ_S(Y) = S_{-}(Y)$, $NEG_S(Y) = X - S_2^{-}(Y)$, $SNR_S(Y) = S_2^{-}(Y) - S_{-}(Y)$ sırasıyla Y'nin soft örtü pozitif, negatif ve sınır bölgeleri olarak adlandırılır.

Tanım 2.5.9. (Tozlu vd., 2016) $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı olsun. Eğer $S_2^{-}(Y) = S_{-}(Y)$ ise $Y \subseteq X$ alt kümesi, soft örtü tabanlı tanımlanabilir; aksi halde, yani $S_2^{-}(Y) \neq S_{-}(Y)$ ise Y, II. tip soft örtü tabanlı rough küme olarak adlandırılır.

Örnek 2.5.2. (Tozlu vd., 2016) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve $S = (X, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayı olsun. $F(e_1) = \{x_1, x_2\}$, $F(e_2) = \{x_2, x_3, x_4\}$, $F(e_3) = \{x_5, x_6\}$, $F(e_4) = \{x_7\}$, $F(e_5) = \{x_7, x_8\}$ olmak üzere $U = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım. Bu durumda

$S_{-}(U) = \cup \{F(e): e \in E \wedge F(e) \subseteq U\} = \{x_1, x_2\}$,
$S_2^{-}(U) = S_{-}(U) \cup \{Md_S(x): x \in U - S_{-}(U)\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

dir. O halde, $S_{-}(U) \neq S_2^{-}(U)$ olduğundan U, II. tip soft örtü tabanlı rough kümedir.

Ayrıca $Y = \{x_5, x_6, x_7\} \subseteq X$ alt kümesi için

$S_{-}(Y) = \cup \{F(e): e \in E \wedge F(e) \subseteq Y\} = \{x_5, x_6, x_7\}$,
$S_2^{-}(Y) = S_{-}(Y) \cup \{Md_S(x): x \in Y - S_{-}(Y)\} = \{x_5, x_6, x_7\}$

olur. $S_{-}(Y) = S_2^{-}(Y)$ olduğundan Y, soft örtü tabanlı tanımlanabilir kümedir.

2.6 Soft Topolojik Uzaylar

Bu bölümde, soft topolojik uzay ve bu uzayda tanımlanan bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.6.1. (Shabir ve Naz, 2011) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. X üzerindeki E parametre kümesine bağlı soft kümelerin bir alt ailesi olan τ, aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ailesine X evreni üzerinde soft topoloji denir.

i. $\Phi, \tilde{X} \in \tau$,
ii. τ ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki soft kümelerin birleşimi τ ailesine aittir,
iii. τ ailesine ait iki soft kümenin kesişimi τ ailesine aittir.

τ ailesinin her elemanına, soft açık küme ve (X, τ, E) üçlüsüne, soft topolojik uzay denir.

(X, τ, E) soft topolojik uzayındaki bütün soft açık kümelerin ailesini $SOS(X)$ ile göstereceğiz.

Aksi belirtilmedikçe, X ve Y (ya da (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K)) uzayları, soft topolojik uzaylar anlamına gelecektir.

Örnek 2.6.1. (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun.

$F_1(e_1) = \{x_2\}, F_1(e_2) = \{x_1\}$,
$F_2(e_1) = \{x_2, x_3\}, F_2(e_2) = \{x_1, x_2\}$,
$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_3(e_2) = X$,

$F_4(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_4(e_2) = \{ x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ailesi, X üzerinde bir soft topolojik uzaydır.

Tanım 2.6.2. (Shabir ve Naz, 2011) X evren kümesi ve E parametre kümesi olsun. $\tau = SS(X, E)$ ise τ ailesine, X üzerinde soft ayrık topoloji ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}\}$ ise τ ailesine, X üzerinde soft ayrık olmayan topoloji denir.

Önerme 2.6.1. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin.

$$\tau_e = \{F(e): (F, E) \in \tau\} \quad (2.18)$$

ailesi her $e \in E$ için X evreni üzerinde bir klasik topoloji ifade eder.

Örnek 2.6.2. (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olmak üzere Örnek 2.6.1.'deki (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin.

$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{x_1\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$

aileleri, X evreni üzerinde birer klasik topoloji tanımlar.

Uyarı 2.6.1. (Shabir ve Naz, 2011) Soft topolojik uzay kavramında, başlangıç evreni üzerinde her bir parametreye karşılık bir klasik topoloji var olduğundan, parametreler önemli rol oynar. Soft topolojik uzay, bir başlangıç evreni üzerindeki klasik topolojilerin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Bu durumun karşıtı doğru değildir. Yani her bir parametreye karşılık bir klasik topolojik uzay verildiğinde, bazı soft kümelerin ailesi soft topolojik uzay oluşturmayabilir. Dolayısıyla, soft topolojik uzayların klasik topolojik uzaylardan daha kapsamlı ve daha genel olduğu söylenebilir.

Örnek 2.6.3. (Shabir ve Naz, 2011) $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren kümesi, $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesi olsun.

$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}\}$

aileleri, Örnek 2.6.2. gereği X evreni üzerinde, birer klasik topoloji tanımlar. Ancak X üzerindeki bazı soft kümeler

$F_1(e_1) = \{x_2\}, F_1(e_2) = \{x_1\},$
$F_2(e_1) = \{x_2, x_3\}, F_2(e_2) = \{x_1, x_2\},$
$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}, F_3(e_2) = \{x_1, x_2\},$
$F_4(e_1) = \{x_2\}, F_4(e_2) = \{x_1, x_3\}$

olmak üzere $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ailesi, X evreni üzerinde bir soft topoloji değildir.

Tanım 2.6.3. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. X evreni üzerindeki (F, E) soft kümesinin relatif tümleyeni olan $(F, E)^c$ soft kümesi, τ ailesine ait ise (F, E) soft kümesine, soft kapalı küme denir.

Önerme 2.6.2. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzay ve τ' ailesi, tüm soft kapalı kümelerin ailesini göstersin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\Phi, \tilde{X} \in \tau'$,
ii. τ' ailesine ait sonlu yada sonsuz çokluktaki soft kümelerin kesişimi τ' ailesine aittir,
iii. τ' ailesine ait iki soft kümenin birleşimi τ' ailesine aittir.

Tanım 2.6.4. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin. $(F, E) \in SS(X, E)$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in (G, E) \sqsubseteq (F, E)$ olacak şekilde bir (G, E) soft açık kümesi varsa x noktasına, (F, E) soft kümesinin soft iç noktası ve (F, E) soft kümesine de, x noktasının bir soft komşuluğu denir.

Uyarı 2.6.2. Klasik topolojide, bir noktanın komşuluğu kavramı, topolojinin karakterizasyonu için çok önemlidir. Bir soft küme, bilinen anlamda klasik bir küme olmadığından Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen soft topolojik uzaylardaki komşuluk aksiyomları, klasik topolojiden farklıdır.

Önerme 2.6.3. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E), (G, E) \in SS(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. Her $x \in X$ noktası bir soft komşuluğa sahiptir,
ii. Eğer (F, E) ve (G, E), $x \in X$ noktasının soft komşulukları ise $(F, E) \sqcap (G, E)$ soft kümesi de x noktasının bir soft komşuluğudur,
iii. Eğer (F, E), $x \in X$ noktasının bir soft komşuluğu ve $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ise (G, E) soft kümesi de x noktasının bir soft komşuluğudur.

Tanım 2.6.5. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E) \in SS(X, E)$ olsun. (F, E) soft kümesini kapsayan tüm soft kapalı kümelerin kesişimine, (F, E) soft kümesinin soft kapanışı denir ve $cl(F, E)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.1. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin ve $(F, E), (G, E) \in SS(X, E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $cl(\Phi) = \Phi$, $cl(\tilde{X}) = \tilde{X}$,
ii. $(F, E) \sqsubseteq cl(F, E)$,
iii. (F, E)'nin soft kapalı olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) = cl(F, E)$ olmasıdır,
iv. $cl(cl(F, E)) = cl(F, E)$,
v. $(F, E) \sqsubseteq (G, E) \Longrightarrow cl(F, E) \sqsubseteq cl(G, E)$,
vi. $cl(F, E) \sqcup cl(G, E) = cl((F, E) \sqcup (G, E))$,
vii. $cl((F, E) \sqcap (G, E)) \sqsubseteq cl(F, E) \sqcap cl(G, E)$.

Tanım 2.6.6. (Hussain ve Ahmad, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzay ve $(F, E) \in SS(X, E)$ olsun. (F, E) soft kümesinin kapsadığı tüm soft açık kümelerin birleşimine, (F, E) soft kümesinin soft içi denir ve $int(F, E)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.6.2. (Hussain ve Ahmad, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzay ve $(F, E), (G, E) \in SS(X, E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $int(\Phi) = \Phi$, $int(\tilde{X}) = \tilde{X}$,
ii. $int(F, E) \sqsubseteq (F, E)$,

iii. (F,E)'nin soft açık olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) = int(F,E)$ olmasıdır,
iv. $int(int(F,E)) = int(F,E)$,
v. $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \Longrightarrow int(F,E) \sqsubseteq int(G,E)$,
vi. $int(F,E) \sqcap int(G,E) = int((F,E) \sqcap (G,E))$,
vii. $int(F,E) \sqcup int(G,E) \sqsubseteq int((F,E) \sqcup (G,E))$.

Teorem 2.6.3. (Hussain ve Ahmad, 2011) (X,τ,E) soft topolojik uzay ve $(F,E) \in SS(X,E)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $int((F,E)^c) = (cl(F,E))^c$,
ii. $cl((F,E)^c) = (int(F,E))^c$.

Tanım 2.6.7. (Shabir ve Naz, 2011) $(F,E) \in SS(X,E)$ ve Y, X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Y kümesi üzerindeki (F,E) soft kümesi, her $e \in E$ için $F^Y(e) = Y \cap F(e)$ şeklinde tanımlanır ve $(F^Y,E) = \tilde{Y} \sqcap (F,E)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.8. (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ,E) soft topolojik uzay ve Y, X evreninin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $\tau_Y = \{(F^Y,E) : (F,E) \in \tau\}$ ailesine, Y üzerindeki soft relatif topoloji denir ve (Y,τ_Y,E) üçlüsüne de (X,τ,E) soft topolojik uzayının soft alt uzayı denir.

Teorem 2.6.4. (Shabir ve Naz, 2011) (Y,τ_Y,E), (X,τ,E) soft topolojik uzayının soft alt uzayı ve $(F,E) \in SS(X,E)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i. (F,E) soft kümesinin Y üzerinde soft açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) = \tilde{Y} \sqcap (G,E)$ olacak şekilde bir $(G,E) \in \tau$ kümesinin var olmasıdır.
ii. (F,E) soft kümesinin Y üzerinde soft kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) = \tilde{Y} \sqcap (G,E)$ olacak şekilde bir $(G,E) \in \tau'$ kümesinin var olmasıdır.

Tanım 2.6.9. (Shabir ve Naz, 2011) (X,τ,E) soft topolojik uzay, (G,E), X'de soft kapalı küme ve $x \in X$ öyle ki $x \notin (G,E)$ olsun. Eğer $x \in (F_1,E)$, $(G,E) \sqsubseteq (F_2,E)$ ve $(F_1,E) \sqcap (F_2,E) = \Phi$ olacak şekilde (F_1,E) ve (F_2,E) soft açık kümeleri varsa (X,τ,E) soft regüler uzay olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.10. (Shabir ve Naz, 2011) (X, τ, E) soft topolojik uzay ve $(F, E) \sqcap (G, E) = \Phi$ olmak üzere (F, E) ve (G, E), X'de soft kapalı kümeler olsun. Eğer $(F, E) \sqsubseteq (F_1, E)$, $(G, E) \sqsubseteq (F_2, E)$ ve $(F_1, E) \sqcap (F_2, E) = \Phi$ olacak şekilde (F_1, E) ve (F_2, E) soft açık kümeleri varsa (X, τ, E) soft normal uzay olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.11. (Aygünoğlu ve Aygün, 2012) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin.

i. Eğer $\sqcup_{i \in I} (F_i, E) = \tilde{X}$ ise soft açık kümelerin $C = \{(F_i, E): i \in I\}$ ailesine X'in soft açık örtüsü denir. X'in soft açık örtüsü C'nin sonlu alt ailesi, C'nin sonlu alt örtüsü olarak adlandırılır.
ii. Eğer X'in her soft açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X soft kompakt olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.12. (Yüksel vd., 2013) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin. Eğer X'in her sayılabilir soft açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X soft sayılabilir kompakt olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.13. (Rong, 2012) (X, τ, E) soft topolojik uzayı verilsin. Eğer X'in her soft açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa X soft Lindelöf olarak adlandırılır.

Teorem 2.6.5. (Yüksel vd., 2013) (X, τ, E) soft uzayının bir soft regüler uzay olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $x \in X$ noktasının her (F, E) soft açık kümesi için, $x \in (G, E) \sqsubseteq cl(G, E) \sqsubseteq (F, E)$ olacak şekilde x noktasının bir (G, E) soft açık kümesinin var olmasıdır.

Tanım 2.6.14. (Yüksel vd., 2014) (X, τ, E) soft topolojik uzay ve $(F, E), (G, E) \in SS(X, E)$ olsun. Eğer $cl(F, E) \sqcap (G, E) = \Phi$ ve $cl(G, E) \sqcap (F, E) = \Phi$ ise (F, E) ve (G, E) soft kümelerine soft bağlantılı olmayan (bağlantısız) kümeler denir.

Tanım 2.6.15. (X, τ, E) soft topolojik uzay ve $(F, E) \in SS(X, E)$ olsun. Eğer

i. $(F, E) \sqsubseteq cl(int(F, E))$ ise (F, E), soft semi-açık küme (Chen, 2013),

ii. $(F,E) \sqsubseteq int(cl(F,E))$ ise (F,E), soft pre-açık küme (Arockiarani ve Arokialancy, 2013),
iii. $(F,E) \sqsubseteq int\Big(cl\big(int(F,E)\big)\Big)$ ise (F,E), soft α-açık küme (Akdağ ve Özkan, 2014),
iv. $(F,E) \sqsubseteq cl\Big(int\big(cl(F,E)\big)\Big)$ ise (F,E), soft β-açık küme (Kandil vd., 2014)

olarak adlandırılır.

Soft semi-açık (soft pre-açık, soft α-açık, soft β-açık) kümenin relatif tümleyeni soft semi-kapalı (soft pre-kapalı, soft α-kapalı, soft β-kapalı) küme olarak adlandırılır.

(X,τ,E) soft topolojik uzayındaki bütün soft semi-açık (soft pre-açık, soft α-açık, soft β-açık) kümelerin ailesi $SSOS(X)$ ($SPOS(X)$, $S\alpha OS(X)$, $S\beta OS(X)$) ile gösterilir.

Uyarı 2.6.3. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Bu durumda,

i. Her soft açık küme soft α-açıktır (Akdağ ve Özkan, 2014).
ii. Her soft α-açık küme soft pre-açık ve soft semi-açıktır (Akdağ ve Özkan, 2014).
iii. Soft pre-açık ve soft semi-açık olan küme soft α-açıktır (Kandil vd., 2014).

Lemma 2.6.1. (Kandil vd., 2014) (X,τ,E) soft topolojik uzay ve $(F,E),(G,E) \in SS(X,E)$ olsun. Eğer (F,E) ya da (G,E) soft semi-açık ise

$$int\Big(cl\big((F,E) \sqcap (G,E)\big)\Big) = int\big(cl(F,E)\big) \sqcap int\big(cl(G,E)\big).$$

Teorem 2.6.6. (Chen, 2013) (X,τ,E) soft topolojik uzayında (F,E) soft kümesinin soft semi-açık olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $(G,E) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq cl(G,E)$ olacak şekilde (G,E) soft açık kümesinin var olmasıdır.

Tanım 2.6.16. (Chen, 2013) (X,τ,E) soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun.

i. (F,E)'nin soft semi-kapanışı,

$cl_s(F,E) = \sqcap \{(H,E): (H,E)$ soft semi-kapalı ve $(F,E) \sqsubseteq (H,E)\}$,
ii. (F,E)'nin soft semi-içi,
$int_s(F,E) = \sqcup \{(G,E): (G,E)$ soft semi-açık ve $(G,E) \sqsubseteq (F,E)\}$

şeklinde tanımlanır. $int_s(F,E)$ soft semi-açık ve $cl_s(F,E)$ soft semi-kapalıdır.

Teorem 2.6.7. (Chen, 2013) (X,τ,E) soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda,

$int(F,E) \sqsubseteq int_s(F,E) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq cl_s(F,E) \sqsubseteq cl(F,E)$.

2.7 Soft Süreklilik

Tanım 2.7.1. (Kharal ve Ahmad, 2011) $SS(X,E)$ ve $SS(Y,K)$ soft kümelerin iki ailesi olsun. $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümler olsun. Bu durumda $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

i. (F,E), $SS(X,E)$' de bir soft küme olsun. (F,E)' nin f_{pu} altındaki görüntüsü $SS(Y,K)$' da bir soft kümedir öyle ki her $y \in K$ için

$$f_{pu}(F)(y) = \begin{cases} \cup_{x \in p^{-1}(y) \cap E}\, u\big(F(x)\big), & p^{-1}(y) \cap E \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$f_{pu}(F,E) = \big(f_{pu}(F), p(E)\big)$ yazılır.
ii. (G,K), $SS(Y,K)$' da bir soft küme olsun. (G,K)' nın f_{pu} altındaki ters görüntüsü $SS(X,E)$' de bir soft kümedir öyle ki her $x \in E$ için

$$f_{pu}^{-1}(G)(x) = \begin{cases} u^{-1}\Big(G\big(p(x)\big)\Big), & p(x) \in K \\ \emptyset, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$f_{pu}^{-1}(G,K) = \big(f_{pu}^{-1}(G), p^{-1}(K)\big)$ yazılır.

Teorem 2.7.1. (Kharal ve Ahmad, 2011) $SS(X,E)$ ve $SS(Y,K)$ soft kümelerin iki ailesi olsun. Bu durumda $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır:

i. $f_{pu}(\Phi) = \Phi$,
ii. $f_{pu}(X) \sqsubseteq Y$,
iii. $(F,E),(G,E) \in SS(X,E)$ için $f_{pu}\big((F,E) \sqcup (G,E)\big) = f_{pu}(F,E) \sqcup f_{pu}(G,E)$ $\big((F_i,E) \in SS(X,E)$ için $f_{pu}\big(\sqcup_i (F_i,E)\big) = \sqcup_i f_{pu}(F_i,E)\big)$,
iv. $(F,E),(G,E) \in SS(X,E)$ için $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ise $f_{pu}(F,E) \sqsubseteq f_{pu}(G,E)$,
v. $(G,K),(H,K) \in SS(Y,K)$ için $(G,K) \sqsubseteq (H,K)$ ise $f_{pu}^{-1}(G,K) \sqsubseteq f_{pu}^{-1}(H,K)$.

Eğer p ve u dönüşümleri örten ise f_{pu} fonksiyonu örten olarak adlandırılır. Benzer şekilde, p ve u dönüşümleri birebir ise f_{pu} fonksiyonu birebir olarak adlandırılır.

Teorem 2.7.2. (Zorlutuna vd., 2012) $SS(X,E)$ ve $SS(Y,K)$ soft kümelerin iki ailesi olsun. Bu durumda $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır:

i. $(G,K) \in SS(Y,K)$ için $f_{pu}^{-1}(G,K)^c = (f_{pu}^{-1}(G,K))^c$.
ii. $(G,K) \in SS(Y,K)$ için $f_{pu}\big(f_{pu}^{-1}(G,K)\big) \sqsubseteq (G,K)$. Eğer f_{pu} örten ise eşitlik sağlanır.
iii. $(F,E) \in SS(X,E)$ için $(F,E) \sqsubseteq f_{pu}^{-1}\left(f_{pu}(F,E)\right)$. Eğer f_{pu} birebir ise eşitlik sağlanır.

Tanım 2.7.2. (Zorlutuna vd., 2012) (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $(G,K) \in \vartheta$ için $f_{pu}^{-1}((G,K)) \in \tau$ ise f_{pu} soft sürekli olarak adlandırılır.

Teorem 2.7.3. (Zorlutuna vd., 2012) (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $(H,K) \in \vartheta'$ için $f_{pu}^{-1}(H,K) \in \tau'$ ise f_{pu} soft sürekli olarak adlandırılır.

Tanım 2.7.3. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i. Her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K) \in SSOS(X)$ ise f_{pu} soft semi-sürekli (Mahanta ve Das, 2012),
ii. Her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K) \in SPOS(X)$ ise f_{pu} soft pre-sürekli (Akdağ ve Özkan, 2014),
iii. Her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K) \in S\alpha OS(X)$ ise f_{pu} soft α-sürekli (Akdağ ve Özkan, 2014),
iv. Her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K) \in S\beta OS(X)$ ise f_{pu} soft β-sürekli (Kandil vd., 2014)

olarak adlandırılır.

Uyarı 2.7.1. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

i. Her soft sürekli fonksiyon soft α-süreklidir (Akdağ ve Özkan, 2014).
ii. Her soft α-sürekli fonksiyon soft semi-sürekli ve soft pre-süreklidir (Akdağ ve Özkan, 2014).
iii. Eğer f_{pu} soft semi-sürekli ve soft pre-sürekli ise f_{pu} soft α-süreklidir (Akdağ ve Özkan, 2014).

BÖLÜM III

SOFT SÜZGEÇ

Tanım 3.1. (Zorlutuna vd., 2012) (X, τ, E) soft topolojik uzayı, $(G, E) \in SS(X, E)$ ve $e_F \in \tilde{X}$ soft noktası verilsin. Eğer $e_F \in (H, E) \sqsubseteq (G, E)$ olacak şekilde (H, E) soft açık kümesi varsa (G, E), e_F soft noktasının soft komşuluğudur.

Uyarı 3.1. (Zorlutuna vd., 2012) Tanım 3.1. gereğince, (G, E) soft kümesi sadece e_F soft noktasının soft komşuluğu değildir, (H, E) soft kümesinin tüm soft noktaları için bir soft komşuluktur.

e_F soft noktasının komşuluk sistemi $\mathcal{N}_\tau(e_F)$, bütün soft komşuluklarının ailesidir.

Teorem 3.1. (Zorlutuna vd., 2012) (X, τ, E) soft topolojik uzayındaki $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ komşuluk sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

V_1) Her $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ için $e_F \in (G, E)$,
V_2) $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ve $(G, E) \sqsubseteq (H, E)$ ise $(H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$,
V_3) $(G, E), (H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ise $(G, E) \sqcap (H, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$,
V_4) Her $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ için $\exists (M, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ öyle ki her $e'_H \in (M, E)$ için $(G, E) \in \mathcal{N}_\tau(e'_H)$.

Tanım 3.2. (X, τ, E) soft topolojik uzayı ve e_F soft noktasının $\mathfrak{S}_\tau(e_F)$ soft komşuluklar ailesi verilsin. e_F'in her (G, E) soft komşuluğu için $e_F \in (H, E) \sqsubseteq (G, E)$ olacak şekilde bir $(H, E) \in \mathfrak{S}_\tau(e_F)$ varsa $\mathfrak{S}_\tau(e_F)$'ye e_F'in bir soft komşuluk tabanı denir.

Teorem 3.2. (X, τ, E) soft topolojik uzayı ve $(G, E) \in SS(X, E)$ verilsin. Bu takdirde, (G, E)'nin soft açık olması için gerek ve yeter koşul (G, E) soft kümesinin kendi içindeki her soft noktanın bir soft komşuluğu olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: (G,E) bir soft açık küme ise her $e_F \in (G,E)$ soft noktası için $e_F \in (G,E) \sqsubseteq (G,E)$. $(G,E) \in \tau$ olduğundan, Tanım 3.1. gereğince, (G,E) soft kümesi kendi içindeki soft noktaların soft komşuluğudur.

$\Longleftarrow$: Her $e_F \in (G,E)$ soft noktası için, $e_F \in (H,E)_{e_F} \sqsubseteq (G,E)$ olacak şekilde bir $(H,E)_{e_F} \in \tau$ soft kümesi vardır. Her $e_F \in (G,E)$ için, $e_F \in (H,E)_{e_F}$ olduğundan $e_F \in \sqcup_{e_F \in (G,E)} (H,E)_{e_F}$ ve $(G,E) \sqsubseteq \sqcup_{e_F \in (G,E)} (H,E)_{e_F}$ elde edilir. Diğer taraftan, her $e_F \in (G,E)$ için, $(H,E)_{e_F} \sqsubseteq (G,E)$ olduğundan $\sqcup_{e_F \in (G,E)} (H,E)_{e_F} \sqsubseteq (G,E)$ bulunur. Sonuç olarak, $(G,E) = \sqcup_{e_F \in (G,E)} (H,E)_{e_F}$ olup Tanım 2.6.1. gereğince, (G,E) bir soft açık kümedir.

Teorem 3.3. Her $e_F \in \tilde{X}$ soft noktası için, Teorem 3.1.'deki V_1), V_2), V_3) ve V_4) aksiyomlarını sağlayacak şekilde bir $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ ailesi varsa, X üzerinde bir tek τ soft topolojik yapısı vardır öyle ki $\mathcal{N}_\tau(e_F)$, $e_F \in \tilde{X}$ soft noktasının τ-soft komşuluklarından ibarettir.

İspat. $\tau = \{(G,E) \in SS(X,E) \colon e_F \in (G,E) \Longrightarrow (G,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)\}$ olsun. Açıktır ki, τ, X üzerinde bir soft topolojidir. τ ailesi Tanım 2.6.1.'deki ii. ve iii. aksiyomlarını sağlar. Aksiyom iii., Teorem 3.1.'in V_2) aksiyomundan ve aksiyom ii. de Teorem 3.1.'in V_3) aksiyomundan elde edilir. Tanım 2.6.1.'deki aksiyom i., Teorem 3.1.'deki V_2) ve V_3)'ün bir sonucudur.

Şimdi, her $e_F \in \tilde{X}$ için, $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ ailesinin, e_F'in τ-soft komşuluklar ailesi olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.'in V_2) aksiyomundan, e_F'in her τ-soft komşuluğu $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ ailesine aittir.

Tersine, $(G_1,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ve $(G_2,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_M)$ olmak üzere (G_2,E), $e_M \in \tilde{X}$ soft noktalarının soft kümesi olsun. Eğer $e_F \in (G_2,E)$, $(G_2,E) \sqsubseteq (G_1,E)$ ve $(G_2,E) \in \tau$ olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olacak. Teorem 3.1.'in V_1) aksiyomundan her $e_M \in (G_2,E)$ soft noktası (G_1,E)'ye ait olduğundan ve $(G_1,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_M)$ hipotezinden, $(G_2,E) \sqsubseteq (G_1,E)$ elde edilir. $(G_1,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ ve $(G_2,E) \sqsubseteq (G_1,E)$ olduğundan $e_F \in (G_2,E)$. Şimdi de $(G_2,E) \in \tau$, yani her $e_M \in (G_2,E)$ için $(G_2,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_M)$ olduğunu gösterelim. Eğer $e_M \in (G_2,E)$ ise Teorem 3.1.'in V_4) aksiyomundan, her $e_H \in (G_3, E)$ için $(G_1, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_H)$ olacak şekilde (G_3, E) soft kümesi vardır. $(G_1, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_H)$ olduğundan $e_H \in (G_2, E)$, $(G_3, E) \sqsubseteq (G_2, E)$ ve böylece Teorem 3.1.'in V_2) aksiyomu gereğince $(G_2, E) \in \mathcal{N}_\tau(e_M)$.

Tanım 3.3. $\tilde{\mathcal{F}} \sqsubseteq SS(X, E)$ verilsin. Eğer

f_1) $\Phi \notin \tilde{\mathcal{F}}$,
f_2) $\forall (F, E), (G, E) \in \tilde{\mathcal{F}}$ ise $(F, E) \sqcap (G, E) \in \tilde{\mathcal{F}}$,
f_3) $\forall (F, E) \in \tilde{\mathcal{F}}$ ve $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ise $(G, E) \in \tilde{\mathcal{F}}$

özellikleri sağlanırsa $\tilde{\mathcal{F}}$ ailesi, X üzerinde bir soft süzgeç olarak adlandırılır.

Uyarı 3.2. f_1) ve f_2) aksiyomları gereği, $\tilde{\mathcal{F}}$ soft süzgeci sonlu arakesitleri soft boş olmama özelliğine sahiptir.

Uyarı 3.3. f_3) aksiyomundan, $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{F}}$ olduğu açıktır.

Örnek 3.1. $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{X}\}$ ailesi, X üzerinde bir soft süzgeçtir.

Örnek 3.2. $\Phi \neq (F, E) \in SS(X, E)$ olsun. Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}}_{(F,E)} = \{(G, E) : (F, E) \sqsubseteq (G, E) \in SS(X, E)\}$ ailesi X üzerinde bir soft süzgeçtir ve atomik soft süzgeç olarak adlandırılır.

Örnek 3.3. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve E sonlu bir küme olsun. Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}} = \{(F, E) : \bigcup_{e \in E} (\mathbb{N} \setminus F_E(e))\ sonlu\}$ ailesi bir soft süzgeçtir ve soft Frechet süzgeci olarak adlandırılır.

Örnek 3.4. X sonsuz bir küme ve E sonlu bir küme olsun. Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}} = \{(F, E) : \bigcup_{e \in E} (X \setminus F_E(e))\ sonlu\}$ ailesi bir soft süzgeçtir ve soft sonlu tümleyenler süzgeci olarak adlandırılır.

Örnek 3.5. Sayılamayan bir X kümesi ve sayılabilir bir E kümesi verilsin. Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}} = \{(F,E): \bigcup_{e\in E}\big(X\backslash F_E(e)\big)\ sayılabilir\}$ ailesi bir soft süzgeçtir ve soft sayılabilir tümleyenler süzgeci olarak adlandırılır.

Önerme 3.1. $\tilde{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir soft süzgeç olsun. Bu takdirde, her $e \in E$ için

$$\tilde{\mathcal{F}}_e = \{F_E(e): (F,E) \in \tilde{\mathcal{F}}\} \tag{3.1}$$

ailesi, X üzerinde bir süzgeç ifade etmez.

İspat. Herhangi bir $e \in E$ için $F_E(e) = \emptyset$ ise $\emptyset \in \tilde{\mathcal{F}}_e$. Bu nedenle $\tilde{\mathcal{F}}_e$, X üzerinde bir süzgeç belirtmez.

Örnek 3.6. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), (F_4,E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft süzgeç olsun:

$(F_1,E) = \{(e_1,\emptyset), (e_2,\emptyset), (e_3,\{x_1,x_3\})\}$,
$(F_2,E) = \{(e_1,\emptyset), (e_2,\{x_2,x_3\}), (e_3,\{x_1,x_3\})\}$,
$(F_3,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}), (e_2,\emptyset), (e_3,\{x_1,x_3\})\}$,
$(F_4,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}), (e_2,\{x_2,x_3\}), (e_3,\{x_1,x_3\})\}$.

$\emptyset \in \tilde{\mathcal{F}}_{e_1}$ olduğundan $\tilde{\mathcal{F}}_{e_1}$, X üzerinde bir süzgeç değildir.

Teorem 3.4. (X,τ,E) soft topolojik uzayı verilsin. Her $e_F \in \tilde{X}$ için $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ soft komşuluklar ailesi bir soft süzgeçtir. Ayrıca, e_F soft noktasının soft komşuluklar süzgeci olarak adlandırılır.

İspat.
f_1) Teorem 3.1. V_1) gereğince, $e_F \in (G,E)$ olduğundan $\Phi \notin \mathcal{N}_\tau(e_F)$ elde edilir.
f_2) Teorem 3.1. V_3) gereğince açıktır.
f_3) Teorem 3.1. V_2) gereğince açıktır.

Teorem 3.5. Eğer her $e_F \in \tilde{X}$ için, aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir $\tilde{\mathcal{F}}(e_F) = \mathcal{N}_\tau(e_F)$ soft süzgeci varsa, tek bir τ soft topolojik yapısı vardır öyle ki; $\tilde{\mathcal{F}}(e_F)$ süzgeci e_F soft noktasının τ-soft komşuluklarından oluşur.

V_{f_1}) $\tilde{\mathcal{F}}(e_F)$ soft süzgecine ait her soft küme e_F soft noktasını içerir,
V_{f_2}) Her $(G,E) \in \tilde{\mathcal{F}}(e_F)$ için, en az bir $(H,E) \in \tilde{\mathcal{F}}(e_F)$ vardır öyle ki her $e_M \in (H,E)$ için $(G,E) \in \tilde{\mathcal{F}}(e_M)$ dir.

İspat. f_1), f_2), f_3) ile V_{f_1}) ve V_{f_2}) aksiyomları $V_1) - V_4$) soft komşuluk aksiyomlarıyla eşdeğer olduğundan, Teorem 3.3. gereğince, $\tilde{\mathcal{F}}(e_F)$ soft süzgeci e_F soft noktasının τ-soft komşuluklarından oluşacak şekilde X üzerinde bir τ soft topolojisi vardır.

Örnek 3.7. (X,τ,E) soft topolojik uzayı ve bir $e_F \in \tilde{X}$ soft noktası verilsin. Her $(H,E) \in \mathfrak{S}_\tau(e_F)$ ve $(H,E) \sqsubseteq (G,E)$ için, (G,E) soft kümesi $\mathfrak{S}_\tau(e_F)$ ailesinin elemanı olamayacağından soft komşuluk tabanı $\mathfrak{S}_\tau(e_F)$, X üzerinde bir soft süzgeç oluşturmaz.

Tanım 3.4. X kümesi üzerinde $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ve $\tilde{\mathcal{F}}_2$ soft süzgeçleri verilsin. Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}}_1 \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_2$ ise $\tilde{\mathcal{F}}_2$ soft süzgecine, $\tilde{\mathcal{F}}_1$ soft süzgecinden daha incedir denir. Eğer $\tilde{\mathcal{F}}_1 \sqsubset \tilde{\mathcal{F}}_2$ ise $\tilde{\mathcal{F}}_2$, $\tilde{\mathcal{F}}_1$'den kesinlikle daha incedir denir. Eğer $\tilde{\mathcal{F}}_1 \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_2$ ya da $\tilde{\mathcal{F}}_2 \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_1$ ise $\tilde{\mathcal{F}}_1$ ile $\tilde{\mathcal{F}}_2$ karşılaştırılabilirdir.

Önerme 3.2. $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i\in I}$ soft süzgeçler ailesi verilsin. Bu takdirde, $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i\in I}$ ailesi "$\sqsubseteq$" bağıntısına göre kısmen sıralıdır.

Teorem 3.6. Bir X kümesi üzerinde $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i\in I}$ soft süzgeçler ailesi verilsin. Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}} = \sqcap_{i\in I} \tilde{\mathcal{F}}_i$, X üzerinde bir soft süzgeçtir.

İspat.
f_1) Her $i \in I$ için $\Phi \notin \tilde{\mathcal{F}}_i$ olduğundan $\Phi \notin \tilde{\mathcal{F}} = \sqcap_{i\in I} \tilde{\mathcal{F}}_i$.
f_2) (F,E), $(G,E) \in \tilde{\mathcal{F}} = \sqcap_{i\in I} \tilde{\mathcal{F}}_i$ olsun. Bu takdirde, her $i \in I$ için (F,E), $(G,E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i$ olur. Her $i \in I$ için $(F,E) \sqcap (G,E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i$ olduğundan $(F,E) \sqcap (G,E) \in \tilde{\mathcal{F}} = \sqcap_{i\in I} \tilde{\mathcal{F}}_i$ elde edilir.

f_3) $(F,E) \in \tilde{\mathcal{F}} = \sqcap_{i\in I} \tilde{\mathcal{F}}_i$ ve $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olsun. Her $i \in I$ için $(F,E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i$ ve $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olduğundan, her $i \in I$ için $(G,E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i$ elde edilir. Böylece $(G,E) \in \tilde{\mathcal{F}} = \sqcap_{i\in I} \tilde{\mathcal{F}}_i$.

Uyarı 3.4. Teorem 3.6.'da verilen $\tilde{\mathcal{F}}$ soft süzgecine, $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i\in I}$ ailesinin en büyük alt sınırı denir.

Uyarı 3.5. Bir X kümesi üzerindeki soft süzgeçlerin birleşimi genellikle bir soft süzgeç değildir.

Örnek 3.8. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, ve $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \{\tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E)\}$ ile $\tilde{\mathcal{F}}_2 = \{\tilde{X}, (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan soft süzgeçler olsunlar:

$(F_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}), (e_2,\{x_2,x_3\})\}$,
$(F_2,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}), (e_2,X)\}$,
$(F_3,E) = \{(e_1,\{x_1\}), (e_2,\{x_2\})\}$

ve

$(G_1,E) = \{(e_1,\{x_3\}), (e_2,\{x_1,x_2\})\}$,
$(G_2,E) = \{(e_1,\{x_1,x_3\}), (e_2,X)\}$,
$(G_3,E) = \{(e_1,\{x_1,x_3\}), (e_2,\{x_1,x_2\})\}$.

Bu takdirde, $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_1 \cup \tilde{\mathcal{F}}_2 = \{\tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), (G_1,E), (G_2,E), (G_3,E)\}$ bulunur. Eğer $(F_1,E) \sqcap (G_1,E) = (H_1,E)$ alırsak $(H_1,E) = \{(e_1,\emptyset), (e_2,\{x_2\})\} \notin \tilde{\mathcal{F}}$ olduğundan $\tilde{\mathcal{F}}$, X üzerinde bir soft süzgeç değildir.

Önerme 3.3. Bir $\tilde{S} \sqsubseteq SS(X,E)$ ailesi verilsin. Eğer $\tilde{S}$ ailesi sonlu arakesitleri soft boş olmama özelliğine sahipse, X üzerinde $\tilde{S}$ ailesini kapsayan bir $\tilde{\mathcal{F}}$ soft süzgeci vardır.

İspat. $\tilde{S} = \{(F_i, E): \forall i \in J\ (J\ sonlu), \sqcap_{i\in I}(F_i, E) \neq \Phi\}$ olsun. $\tilde{S}$ ailesinin elemanlarının sonlu arakesitlerinden oluşan aileyi $\tilde{\beta} = \{(G, E): \forall i \in J\ (J\ sonlu), (F_i, E) \in \tilde{S}\ ve\ (G, E) = \sqcap_{i\in J}(F_i, E)\}$ ile gösterelim. Bu takdirde,

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S}) = \{(H, E): (G, E) \in \tilde{\beta}\ ve\ (G, E) \sqsubseteq (H, E)\}$$

ailesi X üzerinde bir soft süzgeçtir.

f_1) $\Phi \notin \tilde{\beta}$ olduğundan, her $(H, E) \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ için $(H, E) \neq \Phi$ ve böylece $\Phi \notin \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$.
f_2) (H_1, E), $(H_2, E) \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ olsun. $(G_1, E) \sqsubseteq (H_1, E)$ ve $(G_2, E) \sqsubseteq (H_2, E)$ olacak şekilde (G_1, E), $(G_2, E) \in \tilde{\beta}$ soft kümeleri vardır. $\tilde{\beta}$ tanımından, $\Phi \neq (G_1, E) \sqcap (G_2, E) \in \tilde{\beta}$. $(G_1, E) \sqcap (G_2, E) \sqsubseteq (H_1, E) \sqcap (H_2, E)$ olduğundan $(H_1, E) \sqcap (H_2, E) \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ elde edilir.
f_3) $(H_1, E) \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ ve $(H_1, E) \sqsubseteq (H_2, E)$ olsun. Bu takdirde, $(G, E) \sqsubseteq (H_1, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \in \tilde{\beta}$ soft kümesi vardır. $(H_1, E) \sqsubseteq (H_2, E)$ olduğundan $(H_2, E) \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ elde edilir.

Uyarı 3.6. Önerme 3.3.'te oluşturulan $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ soft süzgecine, verilen $\tilde{S}$ ailesinin doğurduğu soft süzgeç ve $\tilde{S}$ ailesine de $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ soft süzgecinin alt tabanı denir. $\tilde{S} \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ olduğu aşikardır.

Önerme 3.4. $\tilde{S}$ ailesinin doğurduğu $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ soft süzgeci, $\tilde{S}$ ailesini kapsayan soft süzgeçlerin en kabasıdır.

İspat. Varsayalım ki, $\tilde{S} \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_1$ olsun. Önerme 3.3. gereğince, $\tilde{S} \sqsubseteq \tilde{\beta} \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_1$ dir. Uyarı 3.6. gereğince, her $(H, E) \in \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S})$ için, $(G, E) \sqsubseteq (H, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \in \tilde{\beta}$ soft kümesi vardır. $\tilde{\beta} \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_1$ olduğundan $(G, E) \in \tilde{\mathcal{F}}_1$ bulunur. $\tilde{\mathcal{F}}_1$ soft süzgeç olduğundan, Tanım 3.3.'teki f_3) aksiyomu gereğince, $(H, E) \in \tilde{\mathcal{F}}_1$ ve buradan $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S}) \sqsubseteq \tilde{\mathcal{F}}_1$ elde edilir.

Teorem 3.7. X üzerindeki soft süzgeçlerin $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i\in I}$ ailesinin en küçük üst sınırının olması için gerek ve yeter koşul $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i\in I}$ ailesinin her sonlu $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{1\le i\le n}$ alt ailesi ve her

$(G_i, E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i (1 \leq i \leq n)$ soft kümeleri için, $(G_1, E) \sqcap \ldots \sqcap (G_n, E)$ arakesitinin soft boş olmamasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$ ailesinin bir en küçük üst sınırı varsa, Tanım 3.3.'teki f_1) ve f_2) aksiyomları gereği, $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$ ailesinin her sonlu $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{1 \leq i \leq n}$ alt ailesi ve her $(G_i, E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i (1 \leq i \leq n)$ soft kümeleri için, $(G_1, E) \sqcap \ldots \sqcap (G_n, E) \neq \Phi$ olur.

$\Longleftarrow$: $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$ ailesinin her sonlu $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{1 \leq i \leq n}$ alt ailesi ve her $(G_i, E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i (1 \leq i \leq n)$ soft kümeleri için, $(G_1, E) \sqcap \ldots \sqcap (G_n, E) \neq \Phi$ olsun. Bu takdirde,

$$\tilde{\mathcal{S}} = \sqcup_{i \in I} \tilde{\mathcal{F}}_i = \{(F, E) : (\exists i \in I)(F, E) \in \tilde{\mathcal{F}}_i\}$$

ailesinin doğurduğu $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{S}})$ soft süzgeci, Önerme 3.4. gereğince, $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$ ailesinin en küçük üst sınırıdır.

Tanım 3.5. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\tilde{\beta} \sqsubseteq SS(X, E)$ ailesine, X kümesi üzerinde bir soft süzgeç tabanı denir.

b_1) $\tilde{\beta} \neq \emptyset$ ve $\Phi \notin \tilde{\beta}$,
b_2) $\forall (F, E), (G, E) \in \tilde{\beta}$ için $\exists (H, E) \in \tilde{\beta}$ öyle ki $(H, E) \sqsubseteq (F, E) \sqcap (G, E)$.

Uyarı 3.7. Önerme 3.3.'teki $\tilde{\beta}$ ailesi bir soft süzgeç tabanıdır.

Uyarı 3.8. Her soft süzgecin bir soft süzgeç tabanı olduğu açıktır.

Örnek 3.9. $\Phi \neq (F, E) \in SS(X, E)$ verilsin. $\tilde{\beta} = \{(F, E)\}$ ailesi, X üzerinde bir soft süzgeç tabanıdır.

Örnek 3.10. (X, τ, E) bir soft topolojik uzay ve $e_F \in \tilde{X}$ olsun. Bu durumda, $\mathfrak{S}_\tau(e_F)$ soft komşuluk tabanı, X üzerinde bir soft süzgeç tabanıdır.

b_1) $\mathfrak{S}_\tau(e_F) \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Her $(H, E) \in \mathfrak{S}_\tau(e_F)$ için $e_F \in (H, E)$'dir. Buradan $(H, E) \neq \Phi$ olup $\Phi \notin \mathfrak{S}_\tau(e_F)$ elde edilir.

b_2) $(G,E),(H,E) \in \mathfrak{S}_\tau(e_F)$ soft kümeleri verilsin. $(G,E),(H,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ olduğundan $(G,E) \sqcap (H,E) \in \mathcal{N}_\tau(e_F)$ elde edilir. Tanım 3.2. gereğince, $(K,E) \sqsubseteq (G,E) \sqcap (H,E)$ olacak şekilde bir $(K,E) \in \mathfrak{S}_\tau(e_F)$ vardır. O halde Tanım 3.5. gereğince, $\mathfrak{S}_\tau(e_F)$ ailesi, $\mathcal{N}_\tau(e_F)$ soft komşuluklar süzgecinin bir soft süzgeç tabanıdır.

BÖLÜM IV

YENİ SOFT KÜME ÇEŞİTLERİ

4.1 Soft Genelleştirilmiş Kapalı ve Açık Kümeler

Tanım 4.1.1. (Kannan, 2012) (X, τ, E) bir soft topolojik uzay olsun. Eğer $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft açık olmak üzere $cl(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ise (F, E) soft kümesi, soft genelleştirilmiş kapalı (kısaca; soft g-kapalı) olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (F_5, E), (F_6, E), (F_7, E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, X)\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesi verilsin. (G, E)'nin soft g-kapalı olduğu açıktır.

Teorem 4.1.1. (Kannan, 2012) (X, τ, E) soft topolojik uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer (F, E) soft kapalı ise (F, E) soft g-kapalıdır.

Örnek 4.1.2. Örnek 4.1.1.'deki (X, τ, E) soft topolojik uzayını alalım. Açıktır ki, (G, E), X'de soft g-kapalıdır fakat soft kapalı değildir.

Teorem 4.1.2. (Kannan, 2012) (F,E), X'de soft g-kapalı ve $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \sqsubseteq cl(F,E)$ ise (G,E) soft g-kapalıdır.

Teorem 4.1.3. (Kannan, 2012) (F,E) ve (G,E) soft g-kapalı kümeler ise $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft g-kapalıdır.

Teorem 4.1.4. (Kannan, 2012) (F,E) soft kümesinin X'de soft g-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl(F,E) \backslash (F,E)$'nin sadece boş soft kapalı kümeyi içermesidir.

Sonuç 4.1.1. (Kannan, 2012) (F,E) soft g-kapalı kümesinin, soft kapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl(F,E) \setminus (F,E)$'nin soft kapalı olmasıdır.

Teorem 4.1.5. (Kannan, 2012) (F,E) soft g-kapalı ve (G,E) soft kapalı küme olsun. Bu durumda $(F,E) \sqcap (G,E)$ bir soft g-kapalı kümedir.

(X,τ,E) soft topolojik uzay ve $Y \subseteq Z \subseteq X$ boştan farklı alt kümeler ise $\tilde{Y}$'nın, (Z,τ_Z,E) relatif soft topolojisine göre soft kapanışı $cl(\tilde{Y})_Z = cl(\tilde{Y}) \sqcap \tilde{Z}$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.6. (X,τ,E) soft topolojik uzay ve $Y \subseteq Z \subseteq X$ boştan farklı alt kümeler olsun. Eğer $\tilde{Y}$, (Z,τ_Z,E)'ye göre soft g-kapalı ve $\tilde{Z}$, (X,τ,E)'ye göre soft g-kapalı ise $\tilde{Y}$, (X,τ,E)'ye göre soft g-kapalı kümedir.

İspat. $\tilde{Y} \sqsubseteq (F,E)$ ve $(F,E) \in \tau$ olsun. $Y \subseteq Z$ olduğundan $\tilde{Y} \sqsubseteq \tilde{Z}$ elde edilir. Bu durumda $\tilde{Y} \sqsubseteq \tilde{Z} \sqcap (F,E)$. $\tilde{Y}$, (Z,τ_Z,E)'ye göre soft g-kapalı ve $\tilde{Z} \sqcap (F,E)$, (Z,τ_Z,E)'de soft açık küme ise $cl(\tilde{Y})_Z \sqsubseteq \tilde{Z} \sqcap (F,E)$ elde edilir. Buradan $cl(\tilde{Y}) \sqcap \tilde{Z} \sqsubseteq \tilde{Z} \sqcap (F,E)$ ve $cl(\tilde{Y}) \sqcap \tilde{Z} \sqsubseteq (F,E)$ olur. Böylece $\tilde{Z} \sqcap [cl(\tilde{Y}) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c] \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$ dir, yani $\tilde{Z} \sqcap \tilde{X} \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$. $Z \subseteq X$ olduğundan $\tilde{Z} \sqsubseteq \tilde{X}$ elde edilir. Böylece $\tilde{Z} \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$ ve $(F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$ soft açıktır. $\tilde{Z}$, (X,τ,E)'ye göre soft g-kapalı ve $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq cl(\tilde{Z})$ olduğundan, $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$ elde edilir. Bu nedenle, $cl(\tilde{Y}) \sqcap (cl(\tilde{Y}))^c = \Phi$ olduğundan $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq (F,E)$ bulunur.

Teorem 4.1.7. (X, τ, E) soft topolojik uzay, $Y \subseteq X$, (F, E), Y'de bir soft küme ve (F, E), X'de soft g-kapalı olsun. Bu takdirde (F, E), (Y, τ_Y, E)'ye göre soft g-kapalıdır.

İspat. $(F, E) \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G, E)$ ve (G, E), X'de soft açık olsun. Buradan $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve $cl(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ olur. Böylece $\tilde{Y} \sqcap cl(F, E) \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G, E)$ elde edilir.

Teorem 4.1.8. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, $\tau = \tau'$ olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her soft kümenin, soft g-kapalı olmasıdır.

İspat. $\tau = \tau'$ ve $(G, E) \in \tau$ olmak üzere $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ olsun. Buradan $cl(F, E) \sqsubseteq cl(G, E) = (G, E)$ ve (F, E) soft g-kapalıdır. Tersine, X üzerindeki her soft küme soft g-kapalı ve $(G, E) \in \tau$ olsun. $(G, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft g-kapalı olduğundan, $cl(G, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve $(G, E) \in \tau'$ elde edilir. Böylece $\tau \sqsubseteq \tau'$ dir. Eğer $(H, E) \in \tau'$ ise $(H, E)^c \in \tau \sqsubseteq \tau'$ ve $(H, E) \in \tau$. Sonuç olarak, $\tau = \tau'$ bulunur.

Teorem 4.1.9. (Yüksel vd., 2013) (X, τ, E) soft kompakt uzay olsun. Eğer (F, E) soft kapalı küme ise (F, E) soft kompakttır.

Teorem 4.1.10. (X, τ, E) soft kompakt uzay olsun. Eğer (F, E) soft g-kapalı küme ise (F, E) soft kompakttır.

İspat. $C = \{(G_i, E) : i \in I\}$, (F, E)'nin soft açık örtüsü olsun. (F, E) soft g-kapalı olduğundan $cl(F, E) \sqsubseteq \sqcup_{i \in I} (G_i, E)$. Teorem 4.1.9. gereğince, $cl(F, E)$ soft kompakt ve bazı $(G_i, E) \in C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ için $(F, E) \sqsubseteq cl(F, E) \sqsubseteq (G_1, E) \sqcup \ldots \sqcup (G_n, E)$.

Teorem 4.1.11. (Yüksel vd., 2013) (X, τ, E) soft Lindelöf (ya da soft sayılabilir kompakt) uzay olsun. (F, E), X'de soft kapalı küme ise (F, E) soft Lindelöftür (ya da soft sayılabilir kompakttır).

Teorem 4.1.12. (X, τ, E) soft Lindelöf (ya da soft sayılabilir kompakt) uzay ve (F, E) soft g-kapalı küme olsun. Bu takdirde (F, E) soft Lindelöftür (ya da soft sayılabilir kompakttır).

İspat. Teorem 4.1.10.'a benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.13. (Yüksel vd., 2013) (X, τ, E) soft topolojik uzayının soft regüler olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve x'in her soft açık kümesi (F, E) için, $x \in (G, E) \sqsubseteq cl(G, E) \sqsubseteq (F, E)$ olacak şekilde x'in bir (G, E) soft açık kümesinin var olmasıdır.

Teorem 4.1.14. (X, τ, E) soft regüler ve (F, E), X'de soft kompakt küme ise (F, E) soft g-kapalıdır.

İspat. (X, τ, E) soft regüler, (F, E) soft kompakt ve $(H, E) \in \tau$ olmak üzere $(F, E) \sqsubseteq (H, E)$ olsun. Teorem 4.1.13. gereğince, her $x \in (F, E)$ için $x \in (G, E)_x \sqsubseteq cl(G, E)_x \sqsubseteq (H, E)$ olacak şekilde x'in bir $(G, E)_x$ soft açık kümesi vardır. (F, E)'nin soft kompaktlığından, her i için $cl(G, E)_{x_i} \sqsubseteq (H, E)$ olacak şekilde (F, E)'nin, $(G, E)_{x_1}$, $(G, E)_{x_2}$, … , $(G, E)_{x_k}$ sonlu açık örtüsü vardır. Buradan $(G, E)_{x_1}$, $(G, E)_{x_2}$, … , $(G, E)_{x_k}$'nın sonlu birleşimi olarak (G, E) tanımlanır. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve $cl(G, E) = \{cl(G, E)_{x_i} : i = 1,2, \dots, k\} \sqsubseteq (H, E)$. Bu durumda $(F, E) \sqsubseteq (G, E) \sqsubseteq cl(G, E) \sqsubseteq (H, E)$ ve böylece $cl(F, E) \sqsubseteq (H, E)$ elde edilir.

Teorem 4.1.15. (X, τ, E) soft normal uzay, Y; X'in boştan farklı bir alt kümesi ve $\tilde{Y}$, X'de soft g-kapalı küme olsun. Bu takdirde (Y, τ_Y, E) soft normaldir.

İspat. (F_1, E) ve (F_2, E), X'de soft kapalı ve $\left(\tilde{Y} \sqcap (F_1, E)\right) \sqcap \left(\tilde{Y} \sqcap (F_2, E)\right) = \Phi$ olsun. Buradan $\tilde{Y} \sqsubseteq [(F_1, E) \sqcap (F_2, E)]^c \in \tau$ ve $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq [(F_1, E) \sqcap (F_2, E)]^c$. Böylece $\left(cl(\tilde{Y}) \sqcap (F_1, E)\right) \sqcap \left(cl(\tilde{Y}) \sqcap (F_2, E)\right) = \Phi$. (X, τ, E) soft normal olduğundan $cl(\tilde{Y}) \sqcap (F_1, E) \sqsubseteq (G_1, E)$ ve $cl(\tilde{Y}) \sqcap (F_2, E) \sqsubseteq (G_2, E)$ olacak şekilde (G_1, E) ve (G_2, E) ayrık soft açık kümeleri vardır. Bu durumda $\tilde{Y} \sqcap (F_1, E) \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G_1, E)$ ve $\tilde{Y} \sqcap (F_2, E) \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G_2, E)$ dir.

Teorem 4.1.16. (X, τ, E) soft normal, (F, E) soft kapalı ve (H, E) soft g-kapalı olmak üzere $(F, E) \sqcap (H, E) = \Phi$ ise $(F, E) \sqsubseteq (G_1, E)$ ve $(H, E) \sqsubseteq (G_2, E)$ olacak şekilde (G_1, E) ve (G_2, E) ayrık soft açık kümeleri vardır.

İspat. $(H,E) \sqsubseteq (F,E)^c \in \tau$ olup $cl(H,E) \sqsubseteq (F,E)^c$ dir. Böylece $cl(H,E) \sqcap (F,E) = \Phi$. (X,τ,E) soft normal olduğundan $(F,E) \sqsubseteq (G_1,E)$ ve $cl(H,E) \sqsubseteq (G_2,E)$ olacak şekilde (G_1,E) ve (G_2,E) ayrık soft açık kümeleri vardır. $(H,E) \sqsubseteq cl(H,E)$ olduğundan, $(F,E) \sqsubseteq (G_1,E)$ ve $(H,E) \sqsubseteq (G_2,E)$ elde edilir.

Uyarı 4.1.1. Bir soft normal uzayda, ayrık iki soft g-kapalı küme için Teorem 4.1.16. genellikle sağlanmaz.

Örnek 4.1.3. Örnek 4.1.1.'deki (X,τ,E) bir soft normal uzaydır. Açıktır ki, X'deki ayrık soft g-kapalı kümeler (F_1,E) ve (F_2,E) için $(F_1,E) \sqsubseteq (G_1,E)$ ve $(F_2,E) \sqsubseteq (G_2,E)$ olacak şekilde (G_1,E) ve (G_2,E) ayrık soft açık kümeleri yoktur.

Tanım 4.1.2. (Kannan, 2012) (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer $(F,E)^c$, X'de soft g-kapalı ise (F,E) soft kümesi X'de soft genelleştirilmiş açık (kısaca; soft g-açık) küme olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.17. (Kannan, 2012) (F,E)'nin X'de soft g-açık küme olması için gerek ve yeter koşul $(G,E) \sqsubseteq (F,E)$ ve (G,E), X'de soft kapalı olmak üzere $(G,E) \sqsubseteq int(F,E)$ olmasıdır.

Teorem 4.1.18. (Kannan, 2012) (F,E), X'de soft g-açık ve $int(F,E) \sqsubseteq (G,E) \sqsubseteq (F,E)$ ise (G,E) soft g-açıktır.

Teorem 4.1.19. (Kannan, 2012) (F,E) ve (G,E) soft g-açık kümeler ise $(F,E) \sqcap (G,E)$ soft g-açıktır.

Teorem 4.1.20. (F,E) ve (G,E) soft bağlantısız ve soft g-açık kümeler ise $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft g-açıktır.

İspat. (H,E), $(F,E) \sqcup (G,E)$'nin soft kapalı alt kümesi olsun. Buradan $(H,E) \sqcap cl(F,E) \sqsubseteq (F,E)$ ve Teorem 4.1.17. gereğince, $(H,E) \sqcap cl(F,E) \sqsubseteq int(F,E)$. Benzer şekilde, $(H,E) \sqcap cl(G,E) \sqsubseteq int(G,E)$ dir. Şimdi, $(H,E) = (H,E) \sqcap \big((F,E) \sqcup (G,E)\big) \sqsubseteq ((H,E) \sqcap cl(F,E)) \sqcup ((H,E) \sqcap cl(G,E)) \sqsubseteq int(F,E) \sqcup int(G,E) \sqsubseteq$

$int((F,E) \sqcup (G,E))$. Böylece, $(H,E) \sqsubseteq int((F,E) \sqcup (G,E))$ ve Teorem 4.1.17. gereğince, $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft g-açıktır.

Teorem 4.1.21. (F,E) soft kümesinin, soft g-açık olması için gerek ve yeter koşul (G,E) soft açık ve $int(F,E) \sqcup (F,E)^c \sqsubseteq (G,E)$ olmak üzere $(G,E) = \tilde{X}$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: (G,E) soft açık ve $int(F,E) \sqcup (F,E)^c \sqsubseteq (G,E)$ olsun. Şimdi, $(G,E)^c \sqsubseteq cl((F,E)^c) \backslash (F,E)^c$ dir. $(G,E)^c$ soft kapalı ve $(F,E)^c$ soft g-kapalı olduğundan, Teorem 4.1.4. gereğince $(G,E)^c = \Phi$'dir, yani $(G,E) = \tilde{X}$ dır.

$\Longleftarrow$: (H,E) soft kapalı küme ve $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ olsun. Teorem 4.1.17. gereğince, $(H,E) \sqsubseteq int(F,E)$ olduğu gösterilmelidir. Bu takdirde, $int(F,E) \sqcup (F,E)^c \sqsubseteq int(F,E) \sqcup (H,E)^c$ ve böylece $int(F,E) \sqcup (H,E)^c = \tilde{X}$ elde edilir. Buradan $(H,E) \sqsubseteq int(F,E)$ olur.

Teorem 4.1.22. (F,E) soft kümesinin soft g-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl(F,E) \backslash (F,E)$'nin soft g-açık olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: (F,E) soft g-kapalı ve (H,E) soft kapalı olmak üzere $(H,E) \sqsubseteq cl(F,E) \backslash (F,E)$ olsun. Teorem 4.1.4. gereğince, $(H,E) = \Phi$ ve böylece $(H,E) \sqsubseteq int(cl(F,E) \backslash (F,E))$. Teorem 4.1.17. gereğince, $cl(F,E) \backslash (F,E)$ soft g-açıktır.

$\Longleftarrow$: (G,E) soft açık küme olmak üzere $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olsun. Buradan $cl(F,E) \sqcap (G,E)^c \sqsubseteq cl(F,E) \sqcap (F,E)^c = cl(F,E) \backslash (F,E)$ ve $cl(F,E) \sqcap (G,E)^c$ soft kapalı ve $cl(F,E) \backslash (F,E)$ soft g-açık olduğundan, $cl(F,E) \sqcap (G,E)^c \sqsubseteq int(cl(F,E) \backslash (F,E)) = \Phi$'dir. Bu nedenle, $cl(F,E) \sqcap (G,E)^c = \Phi$ ya da $cl(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olur. Böylece, (F,E)'nin soft g-kapalı olduğu elde edilir.

4.2 Soft Regüler Genelleştirilmiş Kapalı ve Açık Kümeler

Tanım 4.2.1. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. Eğer $(F, E) = int\big(cl(F, E)\big)$ $\Big((F, E) = cl\big(int(F, E)\big)\Big)$ ise (F, E) soft kümesi X'de soft regüler açık (soft regüler kapalı) olarak adlandırılır.

Uyarı 4.2.1. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft regüler açık küme soft açıktır.

Şimdi, yukarıdaki uyarının tersinin sağlanmadığını gösteren bir örnek verelim:

Örnek 4.2.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, X)\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır. Açıktır ki, (F_2, E), X'de soft açıktır fakat soft regüler açık değildir.

Tanım 4.2.2. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin X'de soft regüler genelleştirilmiş kapalı (kısaca; soft rg-kapalı) küme olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E), X'de soft regüler açık olmak üzere $cl(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ olmasıdır.

Teorem 4.2.1. (X, τ, E) soft topolojik uzay, (F, E) ve (G, E), X üzerinde soft kümeler olsun. (F, E) ve (G, E) soft rg-kapalı kümeler ise $(F, E) \sqcup (G, E)$ soft rg-kapalıdır.

İspat. $(F, E) \sqcup (G, E) \sqsubseteq (H, E)$ ve (H, E) soft regüler açık ise $(F, E) \sqsubseteq (H, E)$ ve $(G, E) \sqsubseteq (H, E)$'dir. (F, E) ve (G, E) soft rg-kapalı kümeler olduğundan $cl(F, E) \sqsubseteq (H, E)$ ve $cl(G, E) \sqsubseteq (H, E)$ bulunur. Buradan $cl(F, E) \sqcup cl(G, E) \sqsubseteq (H, E)$ ve böylece $cl\big((F, E) \sqcup (G, E)\big) \sqsubseteq (H, E)$'dir. Sonuç olarak, $(F, E) \sqcup (G, E)$ soft rg-kapalıdır.

Uyarı 4.2.2. Soft rg-kapalı iki kümenin kesişimi genellikle bir soft rg-kapalı küme değildir.

Örnek 4.2.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), \dots, (F_{11}, E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_8, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_9, E) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{10}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{11}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

$(H, E) = \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_1\})\}$ ve $(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$, X üzerinde iki soft küme olsun. (H, E) ve (G, E)'nin soft rg-kapalı olduğu fakat $(H, E) \sqcap (G, E)$'nin soft rg-kapalı olmadığı açıktır.

(X, τ, E) soft topolojik uzay ve $Y \subseteq Z \subseteq X$ boştan farklı alt kümeler ise $\tilde{Y}$'nın, (Z, τ_Z, E) relatif soft topolojisine göre soft kapanışı $cl(\tilde{Y})_Z = cl(\tilde{Y}) \sqcap Z$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.2.2. (X, τ, E) soft topolojik uzay ve $Y \subseteq Z \subseteq X$ boştan farklı alt kümeler olsun. Eğer $\tilde{Y}$, (Z, τ_Z, E)'ye göre soft rg-kapalı küme ve $\tilde{Z}$ soft g-kapalı, (X, τ, E)'ye göre soft açık küme ise $\tilde{Y}$, (X, τ, E)'ye göre soft rg-kapalıdır.

İspat. $\tilde{Y} \sqsubseteq (F, E)$ ve (F, E) soft regüler açık olsun. $Y \subseteq Z$ olduğundan, $\tilde{Y} \sqsubseteq \tilde{Z}$ ve $\tilde{Y} \sqsubseteq \tilde{Z} \sqcap (F, E)$ dir. Fakat $\tilde{Y}$, (Z, τ_Z, E)'ye göre soft rg-kapalı kümedir. Böylece $cl(\tilde{Y})_Z \sqsubseteq$

$\tilde{Z} \sqcap (F,E)$. Dikkat edelim ki, $\tilde{Z} \sqcap (F,E)$, (Z,τ_Z,E)'de soft regüler açıktır. Fakat $cl(\tilde{Y})_Z = cl(\tilde{Y}) \sqcap \tilde{Z}$ dir. Buradan $\tilde{Z} \sqcap cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq \tilde{Z} \sqcap (F,E)$ bulunur. Sonuç olarak $\tilde{Z} \sqcap cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq (F,E)$. Böylece $\tilde{Z} \sqcap [cl(\tilde{Y}) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c] \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$. Yani, $\tilde{Z} \sqcap \tilde{X} \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$. $Z \subseteq X$ olduğundan, $\tilde{Z} \sqsubseteq \tilde{X}$ elde edilir. Böylece $\tilde{Z} \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$. Fakat $(F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$, (X,τ,E)'de soft açık kümedir. $\tilde{Z}$, (X,τ,E)'de soft g-kapalı olduğundan, $cl(\tilde{Z}) \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$ elde edilir. Fakat $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq cl(\tilde{Z})$ dır. Buradan $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq (F,E) \sqcup (cl(\tilde{Y}))^c$ elde edilir. Bu nedenle, $cl(\tilde{Y}) \sqcap (cl(\tilde{Y}))^c = \Phi$ olduğundan, $cl(\tilde{Y}) \sqsubseteq (F,E)$ bulunur. Bu durumda $\tilde{Y}$, (X,τ,E)'ye göre soft rg-kapalıdır.

Teorem 4.2.3. (X,τ,E) soft topolojik uzay, $Y \subseteq X$ boştan farklı alt küme ve (F,E), Y üzerinde soft küme olsun. Eğer $\tilde{Y}$, X'de soft açık ve (F,E), X'de soft rg-kapalı ise (F,E), (Y,τ_Y,E)'ye göre soft rg-kapalıdır.

İspat. $(F,E) \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G,E)$ ve (G,E), X'de soft regüler açık olsun. Buradan $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve böylece $cl(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olur. Bu $\tilde{Y} \sqcap cl(F,E) = cl(F,E)_Y \sqsubseteq \tilde{Y} \sqcap (G,E)$ olmasını gerektirir. Böylece (F,E)'nin, (Y,τ_Y,E)'ye göre soft rg-kapalı olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.4. (X,τ,E) soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer (F,E) soft rg-kapalı ise $cl(F,E)\backslash(F,E)$ sadece boş soft regüler kapalı kümeyi içerir.

İspat. Varsayalım ki (F,E) soft rg-kapalı ve (H,E), $cl(F,E)\backslash(F,E)$'nin soft regüler kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $(H,E) \sqsubseteq cl(F,E) \sqcap (F,E)^c$ ve $(F,E) \sqsubseteq (H,E)^c$ dir. Fakat (F,E) soft rg-kapalı kümedir. Bu nedenle $cl(F,E) \sqsubseteq (H,E)^c$ dir. Sonuç olarak, $(H,E) \sqsubseteq (cl(F,E))^c$. Ayrıca, biliyoruz ki $(H,E) \sqsubseteq cl(F,E)$ dir. Buradan, $(H,E) \sqsubseteq cl(F,E) \sqcap (cl(F,E))^c = \Phi$. Böylece $(H,E) = \Phi$ dir. Bu nedenle $cl(F,E)\backslash (F,E)$ yalnızca boş soft regüler kapalı kümeyi içerir.

Bu teoremin tersinin doğru olmadığı aşağıda verilen örnekte görülebilir.

Örnek 4.2.3. Örnek 4.2.2. gereği, $cl(F_1, E)\backslash(F_1, E)$ sadece boş soft regüler kapalı kümeyi içerir. Fakat (F_1, E) soft rg-kapalı küme değildir.

Sonuç 4.2.1. (X, τ, E) soft topolojik uzay ve (F, E) soft rg-kapalı küme olsun. (F, E)'nin soft regüler kapalı olması için gerek ve yeter koşul $cl\big(int(F, E)\big)\backslash(F, E)$'nin soft regüler kapalı olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: (F, E) soft rg-kapalı küme olsun. (F, E) soft regüler kapalı ise $cl\big(int(F, E)\big)\backslash(F, E) = \Phi$ dir. Boş soft küme daima soft regüler kapalı olduğundan $cl\big(int(F, E)\big)\backslash(F, E)$ soft regüler kapalıdır.

$\Longleftarrow$: Varsayalım ki, $cl\big(int(F, E)\big)\backslash(F, E)$ soft regüler kapalı olsun. (F, E) soft rg-kapalı olduğundan ve $cl(F, E)\backslash(F, E)$, soft regüler kapalı küme $cl\big(int(F, E)\big)\backslash(F, E)$'yi içerdiğinden, Teorem 4.2.4. gereğince $cl\big(int(F, E)\big)\backslash(F, E) = \Phi$ dir. Böylece $cl\big(int(F, E)\big) = (F, E)$ olup (F, E) soft regüler kapalıdır.

Teorem 4.2.5. (X, τ, E) soft topolojik uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer (F, E) soft g-kapalı ise (F, E) soft rg-kapalıdır.

İspat. Varsayalım ki, (G, E) soft regüler açık olmak üzere $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ olsun. (G, E) soft regüler açık ise soft açıktır. Böylece $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve (G, E) soft açıktır. (F, E) soft g-kapalı olduğundan $cl(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ elde edilir. Bu nedenle (F, E) soft rg-kapalı kümedir.

Örnek 4.2.4. Örnek 4.2.1.'deki (X, τ, E) soft topolojik uzayını alalım. Açıktır ki, (F_1, E), X'de soft rg-kapalıdır fakat soft g-kapalı değildir.

Teorem 4.2.6. (X, τ, E) soft topolojik uzay, (F, E) ve (G, E), X üzerinde soft kümeler olsun. Eğer (F, E) soft rg-kapalı ve $(F, E) \sqsubseteq (G, E) \sqsubseteq cl(F, E)$ ise $cl(G, E)\backslash(G, E)$ sadece boş soft regüler kapalı kümeyi içerir.

İspat. $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ise $(G,E)^c \sqsubseteq (F,E)^c$ ve $(G,E) \sqsubseteq cl(F,E)$ ise $cl(G,E) \sqsubseteq cl\big(cl(F,E)\big) = cl(F,E)$ dir. Yani $cl(G,E) \sqsubseteq cl(F,E)$ olur. Böylece, $cl(G,E) \sqcap (G,E)^c \sqsubseteq cl(F,E) \sqcap (F,E)^c$ olup $cl(G,E) \backslash (G,E) \sqsubseteq cl(F,E) \backslash (F,E)$ bulunur. (F,E) soft rg-kapalı olduğundan, Teorem 4.2.4. gereğince $cl(F,E) \backslash (F,E)$ ve dolayısıyla $cl(G,E) \backslash (G,E)$ de sadece boş soft regüler kapalı kümeyi içerir.

Teorem 4.2.7. (X,τ,E) soft regüler uzay ve (F,E), X üzerinde soft kompakt küme olsun. Bu takdirde, (F,E) soft rg-kapalı kümedir.

İspat. Varsayalım ki, (H,E) soft regüler açık olmak üzere $(F,E) \sqsubseteq (H,E)$ olsun. (H,E) soft regüler açık ise soft açıktır. (F,E), X soft regüler uzayında soft kompakt olduğundan, $(F,E) \sqsubseteq (G,E) \sqsubseteq cl(G,E) \sqsubseteq (H,E)$ olacak şekilde bir (G,E) soft açık kümesi vardır. Eğer $(F,E) \sqsubseteq cl(G,E)$ ise $cl(F,E) \sqsubseteq cl\big(cl(G,E)\big) = cl(G,E) \sqsubseteq (H,E)$'dir. Yani, $cl(F,E) \sqsubseteq (H,E)$ olur. Böylece, (F,E)'nin X'de soft rg-kapalı olduğu elde edilir.

Tanım 4.2.3. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (F,E) soft kümesinin X'de soft regüler genelleştirilmiş açık (kısaca; soft rg-açık) olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $(F,E)^c$ nin soft rg-kapalı olmasıdır.

Teorem 4.2.8. (F,E) soft kümesinin (X,τ,E) soft topolojik uzayında soft rg-açık olması için gerek ve yeter koşul (H,E) soft regüler kapalı ve $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ olmak üzere $(H,E) \sqsubseteq int(F,E)$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: Varsayalım ki (F,E) soft rg-açık, $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ ve (H,E) soft regüler kapalı olsun. Buradan $(H,E)^c$ soft regüler açık ve $(F,E)^c \sqsubseteq (H,E)^c$ dir. $(F,E)^c$ soft rg-kapalı olduğundan $cl(F,E)^c \sqsubseteq (H,E)^c$ elde edilir. Böylece $(H,E) \sqsubseteq (cl(F,E)^c)^c = int(F,E)$.

$\Leftarrow$: (H,E), X'de soft regüler kapalı, $(H,E) \sqsubseteq (F,E)$ olmak üzere $(H,E) \sqsubseteq int(F,E)$ ve $(K,E) = (F,E)^c$ olsun. Varsayalım ki, $(K,E) \sqsubseteq (G,E)$ öyle ki (G,E) soft regüler açıktır. $(F,E)^c \sqsubseteq (G,E)$ olması $(H,E) = (G,E)^c \sqsubseteq (F,E)$ olmasını gerektirir ve $(H,E) \sqsubseteq int(F,E)$ olmak üzere (H,E) soft regüler kapalıdır. Ayrıca $(H,E) \sqsubseteq$

$int(F,E)$ olması $(int(F,E))^c \sqsubseteq (H,E)^c = (G,E)$ olmasını gerektirir. Buradan $(int(K,E)^c)^c \sqsubseteq (G,E)$'dir. Ya da eşdeğer olarak $cl(K,E) \sqsubseteq (G,E)$'dir. Böylece (K,E) soft rg-kapalı olup (F,E)'nin soft rg-açık olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.9. (X,τ,E) soft topolojik uzay, (F,E) ve (G,E), X üzerinde soft kümeler olsun. (F,E) ve (G,E) soft bağlantısız rg-açık kümeler ise $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft rg-açıktır.

İspat. (H,E), $(F,E) \sqcup (G,E)$'nin soft regüler kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $(H,E) \sqcap cl(F,E) \sqsubseteq (F,E)$ ve böylece Teorem 4.2.8. gereğince, $(H,E) \sqcap cl(F,E) \sqsubseteq int(F,E)$ dir. Benzer olarak $(H,E) \sqcap cl(G,E) \sqsubseteq int(G,E)$ olur. Şimdi,
$(H,E) = (H,E) \sqcap \big((F,E) \sqcup (G,E)\big) \sqsubseteq \big((H,E) \sqcap cl(F,E)\big) \sqcup ((H,E) \sqcap cl(G,E)) \sqsubseteq int(F,E) \sqcup int(G,E) \sqsubseteq int((F,E) \sqcup (G,E))$. Böylece $(H,E) \sqsubseteq int((F,E) \sqcup (G,E))$ ve Teorem 4.2.8. gereğince, $(F,E) \sqcup (G,E)$ soft rg-açıktır.

Uyarı 4.2.3. Soft rg-açık iki kümenin birleşimi genellikle soft rg-açık değildir. (Örnek 4.2.2.'ye bakılabilir.)

Teorem 4.2.10. (F,E) soft kümesi X'de soft rg-açık ise (G,E) soft regüler açık ve $int(F,E) \sqcup (F,E)^c \sqsubseteq (G,E)$ olmak üzere $(G,E) = \tilde{X}$ dır.

İspat. Varsayalım ki (F,E) soft rg-açık, (G,E) soft regüler açık ve $int(F,E) \sqcup (F,E)^c \sqsubseteq (G,E)$ olsun. Buradan $(G,E)^c \sqsubseteq (int(F,E))^c \sqcap ((F,E)^c)^c$ dir. Yani $(G,E)^c \sqsubseteq (int(F,E))^c \sqcap (F,E)$ ya da eşdeğer olarak $(G,E)^c \sqsubseteq (int(F,E))^c \setminus (F,E)^c = cl(F,E)^c \setminus (F,E)^c$ dir. $(G,E)^c$ soft regüler kapalı ve $(F,E)^c$ soft rg-kapalıdır. Teorem 4.2.4. gereğince, $(G,E)^c = \Phi$ elde edilir. Böylece $(G,E) = \tilde{X}$ dır.

(X,τ,E) soft topolojik uzay ve $Y \subseteq Z \subseteq X$ boştan farklı alt kümeler ise $\tilde{Y}$ nın, (Z,τ_Z,E) relatif soft topolojisine göre soft içi $int(\tilde{Y})_Z = int(\tilde{Y}) \sqcap \tilde{Z}$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.2.11. (X,τ,E) soft topolojik uzay ve $Y \subseteq Z \subseteq X$ boştan farklı alt kümeler olsun. Eğer $\tilde{Y}$, (Z,τ_Z,E)'ye göre soft rg-açık ve $\tilde{Z}$, (X,τ,E)'ye göre soft açık ise $\tilde{Y}$, (X,τ,E)'ye göre soft rg-açıktır.

İspat. (F,E) soft regüler kapalı küme ve $(F,E) \sqsubseteq \tilde{Y}$ olsun. Buradan (F,E), (Z,τ_Z,E)'ye göre soft regüler kapalı ve Teorem 4.2.8. gereğince $(F,E) \sqsubseteq int(\tilde{Y})_Z$ dir. Böylece $(F,E) \sqsubseteq int(\tilde{Y}) \sqcap \tilde{Z}$ olur. Buradan $(F,E) \sqsubseteq int(\tilde{Y})$ dir. Teorem 4.2.8. gereğince $\tilde{Y}$, (X,τ,E)'de soft rg-açıktır.

Teorem 4.2.12. (X,τ,E) soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde soft küme olsun. (F,E) soft kümesi soft rg-kapalı ise $cl(F,E) \backslash (F,E)$ soft rg-açıktır.

İspat. Varsayalım ki, (F,E) soft rg-kapalı ve (H,E) soft regüler kapalı olmak üzere $(H,E) \sqsubseteq cl(F,E) \backslash (F,E)$ olsun. Teorem 4.2.4. gereğince, $(H,E) = \Phi$ ve böylece $(H,E) \sqsubseteq int(cl(F,E) \backslash (F,E))$ dir. Teorem 4.2.8. gereğince, $cl(F,E) \backslash (F,E)$ soft rg-açıktır.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, yukarıdaki teoremin tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 4.2.5. Örnek 4.2.2.'den, $cl(F_1,E) \backslash (F_1,E)$ soft rg-açık kümedir. Fakat (F_1,E), (X,τ,E)'de bir soft rg-kapalı küme değildir.

(X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. X'deki (F,E) soft kümesi için aşağıdaki gerektirmeler elde edilir:

Soft kapalı küme $\rightarrow$ Soft g-kapalı küme $\rightarrow$ Soft rg-kapalı küme

4.3 Soft A-Kümeler ve Soft B-Kümeler

Tanım 4.3.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (G,E) soft açık ve (H,E) soft regüler açık küme olmak üzere $(F,E) = (G,E) \backslash (H,E)$ ise (F,E), X'de soft A-küme olarak adlandırılır.

Açıktır ki, (F,E)'nin soft A-küme olması için gerek ve yeter koşul (G,E) soft açık ve (K,E) soft regüler kapalı küme olmak üzere $(F,E) = (G,E) \sqcap (K,E)$ olmasıdır.

Teorem 4.3.1. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft açık küme bir soft A-kümedir.

İspat. (F, E), X'de soft açık küme olsun. $(F, E) = (F, E) \backslash \Phi$ olduğundan (F, E) bir soft A-kümedir.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, Teorem 4.3.1.'in tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 4.3.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), \dots, (F_{11}, E)\}$, X üzerinde

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_8, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_9, E) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{10}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{11}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$

şeklinde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun. Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_3\})\}$ soft kümesi verilsin. (F_4, E) soft açık ve (F_1, E) soft regüler açık olmak üzere $(G, E) = (F_4, E) \backslash (F_1, E)$ olduğundan (G, E) bir soft A-kümedir, fakat soft açık değildir.

Teorem 4.3.2. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft A-küme soft semi-açıktır.

İspat. (G, E) soft açık ve $(K, E) = cl(int(K, E))$ olmak üzere $(F, E) = (G, E) \sqcap (K, E)$ bir soft A-küme olsun. $(F, E) = (G, E) \sqcap (K, E)$ olduğundan $int(F, E) \sqsupseteq (G, E) \sqcap$

$int(K,E)$ dir. Kolayca görülür ki, $int(F,E) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq (K,E)$, böylece $int(F,E) = int(int(F,E)) \sqsubseteq int(K,E)$. Fakat $int(F,E) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq (G,E)$ olup $int(F,E) \sqsubseteq (G,E) \sqcap int(K,E)$. Bu nedenle $int(F,E) = (G,E) \sqcap int(K,E)$ dir.

Şimdi, $(F,E) \sqsubseteq cl(int(F,E))$ olduğunu ispatlayalım. $e_M \in (F,E)$ ve (H,E), e_M'i içeren herhangi bir soft açık küme olsun. Buradan $(G,E) \sqcap (H,E)$ de e_M'i içeren bir soft açık kümedir. $e_M \in (K,E) = cl(int(K,E))$ olduğundan $e_M \neq e_N$ ve $e_N \in (G,E) \sqcap (H,E)$ olacak şekilde $e_N \in int(K,E)$ soft noktası vardır. Böylece $e_N \in (G,E) \sqcap int(K,E) = int(F,E)$ dir. Bu nedenle $e_M \in cl(int(F,E))$ ve $(F,E) \sqsubseteq cl(int(F,E))$ dir. Böylece (F,E), X'de soft semi-açıktır.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, Teorem 4.3.2.'nin tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 4.3.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}), (e_2,\{x_1\})\}$,
$(F_2,E) = \{(e_1,\{x_2\}), (e_2,\{x_2\})\}$,
$(F_3,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}), (e_2,\{x_1,x_2\})\}$.

Bu durumda, (X,τ,E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G,E) = \{(e_1,\{x_1\}), (e_2,\{x_1,x_3\})\}$ soft kümesi verilsin. $(G,E) \sqsubseteq cl\big(int(G,E)\big) = (F_2,E)^c$ olduğundan (G,E) soft semi-açıktır fakat soft A-küme değildir.

Aşağıdaki örnekler, soft α-açık küme ile soft A-kümenin birbirinden bağımsız olduğunu gösterir.

Örnek 4.3.3. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.3.1.'deki τ soft topolojisini ve (G,E) soft kümesini ele alalım. Bu takdirde, (G,E) soft A-kümedir fakat soft α-açık değildir.

Örnek 4.3.4. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F, E)\}$, X üzerinde

$(F, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$

şeklinde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun. Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesi verilsin. $(G, E) \sqsubseteq int\left(cl\big(int(G, E)\big)\right) = \tilde{X}$ olduğundan, (G, E) soft α-açıktır fakat soft A-küme değildir.

Teorem 4.3.3. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin soft açık olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin X'de hem soft α-açık hem de soft A-küme olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: İspat açıktır.

$\Longleftarrow$: (G, E) soft açık ve $(K, E) = cl\big(int(K, E)\big)$ olmak üzere $(F, E) = (G, E) \sqcap (K, E)$ bir soft A-küme olsun. (F, E) soft α-açık olduğundan $(G, E) \sqcap (K, E) \sqsubseteq$ $int\left(cl\left(int\big((G, E) \sqcap (K, E)\big)\right)\right) = int\left(cl\big(int(G, E) \sqcap int(K, E)\big)\right) = int\left(cl\big((G, E) \sqcap int(K, E)\big)\right) \sqsubseteq int\left(cl(G, E) \sqcap cl\big(int(K, E)\big)\right) = int\big(cl(G, E) \sqcap (K, E)\big) = int\big(cl(G, E)\big) \sqcap int(K, E)$ dir. $(G, E) \sqsubseteq int\big(cl(G, E)\big)$ olduğundan $(G, E) \sqcap (K, E) = \big((G, E) \sqcap (K, E)\big) \sqcap (G, E) \sqsubseteq int\big(cl(G, E)\big) \sqcap int(K, E) \sqcap (G, E) = (G, E) \sqcap int(K, E)$. $(G, E) \sqcap int(K, E) \sqsubseteq (G, E) \sqcap (K, E)$ olup $(G, E) \sqcap (K, E) = (G, E) \sqcap int(K, E)$ elde edilir. Bu nedenle, $(F, E) = (G, E) \sqcap (K, E)$ bir soft açık kümedir.

Sonuç 4.3.1. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin soft açık olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin X'de hem soft pre-açık hem de soft A-küme olmasıdır.

Uyarı 2.6.3. ve Teorem 4.3.2.'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer (F,E) soft kümesi hem soft pre-açık hem de soft A-küme ise soft α-açıktır.

Tanım 4.3.2. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer $int(cl(F,E)) = int(F,E)$ ise (F,E) soft kümesi X'de soft t-küme olarak adlandırılır.

Tanım 4.3.2.'den direkt aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.3.4. (X,τ,E) soft topolojik uzayında, her soft kapalı küme bir soft t-kümedir.

Teorem 4.3.5. (X,τ,E) soft topolojik uzayında, her soft regüler açık küme bir soft t-kümedir.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, bir soft açık kümenin soft t-küme olması gerekmez.

Örnek 4.3.5. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\emptyset)\}$,
$(F_2,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\emptyset)\}$.

Bu durumda, (X,τ,E) bir soft topolojik uzaydır. Burada (F_1,E) soft açıktır fakat bir soft t-küme değildir.

Teorem 4.3.6. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer (F,E) ve (G,E), X'de iki soft t-küme ise $(F,E) \sqcap (G,E)$ bir soft t-kümedir.

İspat. $int\big((F,E) \sqcap (G,E)\big) \sqsubseteq int\Big(cl\big((F,E) \sqcap (G,E)\big)\Big) \sqsubseteq int\big(cl(F,E) \sqcap cl(G,E)\big) = int\big(cl(F,E)\big) \sqcap int\big(cl(G,E)\big) = int(F,E) \sqcap int(G,E) = int\big((F,E) \sqcap (G,E)\big)$.

Teorem 4.3.7. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin X'de soft regüler açık olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin hem soft pre-açık hem de soft t-küme olmasıdır.

İspat. $int(F, E) \sqsubseteq (F, E) \sqsubseteq int\big(cl(F, E)\big) = int(F, E)$ olduğu kullanılarak ispat elde edilir.

Tanım 4.3.3. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (G, E) soft açık küme ve (H, E) soft t-küme olmak üzere $(F, E) = (G, E) \sqcap (H, E)$ ise (F, E), X'de soft B-küme olarak adlandırılır.

Teorem 4.3.8. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft t-küme bir soft B-kümedir.

İspat. (F, E), X'de soft t-küme olsun. $(F, E) = \tilde{X} \sqcap (F, E)$ olduğundan ispat açıktır.

Teorem 4.3.9. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft açık küme bir soft B-kümedir.

İspat. (F, E), X'de soft açık olsun. $(F, E) = \tilde{X} \sqcap (F, E)$ öyle ki $int\big(cl(\tilde{X})\big) = int(\tilde{X}) = \tilde{X}$ dır.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere Teorem 4.3.9.'un tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 4.3.6. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.3.1.'de tanımlanan τ soft topolojisini ele alalım. X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_3, x_4\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesi verilsin. $int\big(cl(G, E)\big) = int(G, E) = \Phi$ olduğundan (G, E) bir soft t-kümedir. X üzerinde $(H, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesi verilsin. (F_5, E) soft açık ve (G, E) soft t-küme olmak üzere $(H, E) = (F_5, E) \sqcap (G, E)$ olduğundan (H, E) bir soft B-kümedir fakat soft açık değildir. Ayrıca, her soft t-küme bir soft B-küme olduğundan (G, E) bir soft B-kümedir fakat soft açık değildir.

Teorem 4.3.10. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft kapalı küme bir soft B-kümedir.

İspat. Teorem 4.3.4. ve Teorem 4.3.8.'den elde edilir.

Teorem 4.3.11. (X, τ, E) soft topolojik uzayında, her soft A-küme bir soft B-kümedir.

İspat. Teorem 4.3.4.'ten elde edilir.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere Teorem 4.3.11.'in tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 4.3.7. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.3.1.'de tanımlanan τ soft topolojisini ve Örnek 4.3.6.'daki $(G, E) = \{(e_1, \{x_3, x_4\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesini ele alalım. Bu takdirde, (G, E) bir soft B-kümedir fakat soft A-küme değildir.

Aşağıdaki örnekler, soft B-küme ile soft pre-açık kümenin birbirinden bağımsız olduğunu gösterir.

Örnek 4.3.8. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.3.1.'de tanımlanan τ soft topolojisini ve Örnek 4.3.6.'daki $(H, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesini ele alalım. Bu takdirde, (H, E) bir soft B-kümedir fakat soft pre-açık değildir.

Örnek 4.3.9. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.3.4.'te tanımlanan τ soft topolojisini ve $(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesini ele alalım. Her soft α-açık küme bir soft pre-açık küme olduğundan (G, E) soft pre-açıktır fakat bir soft B-küme değildir.

Teorem 4.3.12. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin soft açık olması için gerek ve yeter koşul hem soft pre-açık hem de soft B-küme olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: İspat açıktır.

$\Longleftarrow$: (F, E) bir soft B-küme olduğundan $(F, E) = (G, E) \sqcap (H, E)$ olacak şekilde (G, E) soft açık kümesi vardır ve $int\big(cl(H, E)\big) = int(H, E)$. (F, E) soft pre-açık olduğundan $(F, E) \sqsubseteq int\big(cl(F, E)\big) = int\Big(cl\big((G, E) \sqcap (H, E)\big)\Big) \sqsubseteq int\big(cl(G, E) \sqcap cl(H, E)\big) =$

$int\big(cl(G,E)\big) \sqcap int\big(cl(H,E)\big) = int\big(cl(G,E)\big) \sqcap int(H,E)$ olur. Böylece $(F,E) = (G,E) \sqcap (H,E) = \big((G,E) \sqcap (H,E)\big) \sqcap (G,E) \sqsubseteq int\big(cl(G,E)\big) \sqcap int(H,E) \sqcap (G,E)$
$= \Big(int\big(cl(G,E)\big) \sqcap (G,E)\Big) \sqcap int(H,E) = (G,E) \sqcap int(H,E)$.
$(F,E) = (G,E) \sqcap (H,E) \sqsupseteq (G,E) \sqcap int(H,E)$ olup $(F,E) = (G,E) \sqcap int(H,E)$ elde edilir. Böylece, (F,E) soft açıktır.

4.4 Soft C-Kümeler

Tanım 4.4.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer $int\Big(cl\big(int(F,E)\big)\Big) = int(F,E)$ ise (F,E) soft kümesi X'de soft α^*-küme olarak adlandırılır.

Teorem 4.4.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (F,E) soft kümesi için aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. (F,E), X'de soft α^*-küme,
ii. (F,E) soft β-kapalı,
iii. $int(F,E)$ soft regüler açık.

İspat. İspat açıktır.

Teorem 4.4.2. (X,τ,E) soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer (F,E) soft t-küme ise soft α^*-kümedir.

İspat. (F,E) soft t-küme ve $int\Big(cl\big(int(F,E)\big)\Big) = int\big(cl(F,E)\big) = int(F,E)$. Böylece (F,E)'nin X'de soft α^*-küme olduğu elde edilir.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere Teorem 4.4.2.'nin tersi doğru değildir.

Örnek 4.4.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1,E), \dots, (F_{11},E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}), (e_2,\{x_1\})\}$,

$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_8, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_9, E) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{10}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{11}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$ soft kümesi verilsin. $int(G, E) = int\Big(cl\big(int(G, E)\big)\Big)$ olduğundan (G, E) soft α^*-kümedir fakat bir soft t-küme değildir.

Teorem 4.4.3. (X, τ, E) soft topolojik uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. (F, E) soft semi-açık kümesinin soft t-küme olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin soft α^*-küme olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: (F, E) soft semi-açık ve soft t-küme olsun. (F, E), soft semi-açık olduğundan $int(F, E) \sqsubseteq int\Big(cl\big(int(F, E)\big)\Big)$ ve soft t-küme olduğundan $int(F, E) = int\big(cl(F, E)\big)$ $\sqsupseteq int\Big(cl\big(int(F, E)\big)\Big)$. Böylece, (F, E) bir soft α^*-kümedir.

$\Longleftarrow$: (F, E) soft semi-açık ve soft α^*-küme olsun. Buradan, (F, E) soft semi-açık olduğundan $cl\big(int(F, E)\big) = cl(F, E)$ ve $int\big(cl(F, E)\big) = int\Big(cl\big(int(F, E)\big)\Big) = int(F, E)$. Böylece, (F, E) bir soft t-kümedir.

Teorem 4.4.4. (X, τ, E) soft topolojik uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. (F, E)'nin soft α-açık ve soft α^*-küme olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin soft regüler açık olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: (F,E) soft α-açık ve soft α^*-küme olsun. Teorem 4.4.1. ve soft α-açık kümenin tanımı gereğince, $int\Big(cl\big(int(F,E)\big)\Big) = (F,E)$ elde edilir ve böylece $int\big(cl(F,E)\big) = int\Big(cl\big(int(F,E)\big)\Big) = (F,E)$ dir.

$\Longleftarrow$: İspat açıktır.

Uyarı 4.4.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Aşağıdaki örnekler gösterir ki,

i. Soft açık kümenin, soft α^*-küme olması gerekmez,
ii. Soft α-açık küme kavramı, soft α^*-küme kavramından farklıdır.

Örnek 4.4.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E)\}$, X üzerinde

$(F_1,E) = \{(e_1,\{x_1\}), (e_2,\{x_1\})\}$,
$(F_2,E) = \{(e_1,\{x_2\}), (e_2,\{x_2\})\}$,
$(F_3,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}), (e_2,\{x_1,x_2\})\}$

şeklinde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun. Bu durumda, (X,τ,E) bir soft topolojik uzaydır.

$int\Big(cl\big(int(F_3,E)\big)\Big) = \tilde{X} \neq int(F_3,E)$ olduğundan (F_3,E) soft α^*-küme değildir fakat bir soft açık kümedir.

Örnek 4.4.3. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.2.'deki, τ soft topolojisini ve (F_3,E) soft kümesini ele alalım. Her soft açık küme soft α-açık olduğundan (F_3,E) bir soft α-açık kümedir. Fakat Örnek 4.4.2. gereği, (F_3,E) bir soft α^*-küme değildir.

Örnek 4.4.4. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.1.'deki, τ soft topolojisini ele alalım. $(G,E) = \{(e_1,\{x_3,x_4\}), (e_2,\{x_2\})\}$, X üzerinde bir soft küme olsun. Bu durumda, $int\left(cl\big(int(G,E)\big)\right) = \Phi = int(G,E)$ olduğundan (G,E) bir soft α^*-kümedir, fakat soft α-açık değildir.

Uyarı 4.4.2. Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, iki soft α^*-kümenin birleşimi bir soft α^*-küme olmayabilir.

Örnek 4.4.5. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.2.'deki, τ soft topolojisini, (F_1, E) ve (F_2, E) soft kümelerini ele alalım. Açıktır ki, (F_1, E) ve (F_2, E) soft α^*-kümelerdir, fakat $(F_1, E) \sqcup (F_2, E)$ bir soft α^*-küme değildir.

Teorem 4.4.5. Soft α^*-kümelerin keyfi kesişimi bir soft α^*-kümedir.

İspat. $\{(F_i, E): i \in I\}$, soft α^*-kümelerin ailesi olsun. Her $i \in I$ için,

$$int\left(cl\big(int(F_i,E)\big)\right) = int(F_i,E)$$

dir. Buradan,

$$\sqcap_{i\in I}\, int(F_i,E) = \sqcap_{i\in I}\, int\left(cl\big(int(F_i,E)\big)\right)$$
$$int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big) = int\left(\sqcap_{i\in I}\, cl\big(int(F_i,E)\big)\right) \sqsupseteq int\left(cl\big(\sqcap_{i\in I}\, int(F_i,E)\big)\right) =$$
$$int\left(cl\left(int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big)\right)\right)$$

olur. Ayrıca,

$$int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big) \sqsubseteq cl\left(int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big)\right)$$
$$int\left(int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big)\right) \sqsubseteq int\left(cl\left(int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big)\right)\right)$$
$$int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big) \sqsubseteq int\left(cl\left(int\big(\sqcap_{i\in I}\,(F_i,E)\big)\right)\right)$$

dir. Böylece, $int(\sqcap_{i\in I}(F_i,E)) = int\left(cl\left(int(\sqcap_{i\in I}(F_i,E))\right)\right)$ elde edilir ve $\sqcap_{i\in I}(F_i,E)$ bir soft α^*-kümedir.

Tanım 4.4.2. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. $(F,E) = (G,E) \sqcap (H,E)$ olacak şekilde bir (G,E) soft açık kümesi ve bir (H,E) soft α^*-kümesi varsa (F,E), X'de soft C-küme olarak adlandırılır.

Teorem 4.4.6. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Bu durumda, her soft α^*-küme ve her soft açık küme bir soft C-kümedir.

İspat. $\tilde{X}$ hem soft açık küme hem de soft α^*-küme olduğundan ispat açıktır.

Aşağıdaki örneklerde gösterildiği üzere, Teorem 4.4.6.'nın tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 4.4.6. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E = \{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.1.'deki, τ soft topolojisini ve (F_5,E) soft kümesini ele alalım. (F_5,E) soft açık ve $\tilde{X}$ soft α^*-küme olmak üzere $(F_5,E) = (F_5,E) \sqcap \tilde{X}$ olduğundan (F_5,E) bir soft C-kümedir fakat soft α^*-küme değildir.

Örnek 4.4.7. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E = \{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.1.'deki, τ soft topolojisini ve $(G,E) = \{(e_1,\{x_1,x_4\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}$ soft kümesini ele alalım. (G,E) bir soft α^*-küme olduğundan soft C-kümedir, fakat soft açık değildir.

Teorem 4.4.7. (X,τ,E) soft topolojik uzayında, her soft B-küme bir soft C-kümedir.

İspat. Teorem 4.4.2. gereğince, her soft t-küme bir soft α^*-kümedir. Bu durumda, her soft B-kümenin bir soft C-küme olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek, Teorem 4.4.7.'nin tersinin genellikle doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.4.8. $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E = \{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.2.'deki, τ soft topolojisini ele alalım. $(G,E) = \{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$, X üzerinde soft küme olsun.

$int\left(cl\left(int(G,E)\right)\right) = int(G,E)$ olduğundan, (G,E) bir soft α^*-kümedir ve böylece bir soft C-kümedir. Fakat $int\left(cl(G,E)\right) \neq int(G,E)$ olduğundan bir soft t-küme değildir ve dolayısıyla da soft B-küme değildir.

Uyarı 4.4.3. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Soft α-açık küme kavramı, soft C-kümeden farklıdır. Aşağıdaki örnekler bunu göstermektedir.

Örnek 4.4.9. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.4.1.'deki, τ soft topolojisini ve Örnek 4.4.4.'teki $(G,E) = \{(e_1,\{x_3,x_4\}),(e_2,\{x_2\})\}$ soft kümesini ele alalım. Örnek 4.4.4. gereği, (G,E) bir soft α^*-kümedir ve her soft α^*-küme bir soft C-küme olduğundan (G,E) bir soft C-kümedir. Fakat (G,E) soft α-açık değildir.

Örnek 4.4.10. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F,E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F,E) = \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2\})\}$.

Bu durumda, (X,τ,E) bir soft topolojik uzaydır.

$(G,E) = \{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_2\})\}$, X üzerinde bir soft küme olsun. $(G,E) \sqsubseteq int\left(cl\left(int(G,E)\right)\right) = \tilde{X}$ olduğundan, (G,E) bir soft α-açık kümedir fakat soft C-küme değildir.

Teorem 4.4.8. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Bu durumda, (F,E) soft kümesinin soft açık olması için gerek ve yeter koşul (F,E)'nin hem soft α-açık hem de soft C-küme olmasıdır.

İspat. Teorem 4.4.6. ve Uyarı 2.6.3. gereğince, her soft açık küme, bir soft C-küme ve bir soft α-açık kümedir. (F,E) soft α-açık ve soft C-küme olsun. (F,E) bir soft C-küme olduğundan $(F,E) = (G,E) \sqcap (H,E)$ öyle ki (G,E) soft açık ve (H,E) soft α^*-kümedir. (F,E) soft α-açık olduğundan, Lemma 2.6.1. gereğince,

$$
\begin{aligned}
(F,E) &\sqsubseteq int(cl(int(F,E))) \\
&= int\left(cl\left(int((G,E)\sqcap(H,E))\right)\right) \\
&= int(cl(G,E))\sqcap int(cl(int(H,E))) \\
&= int(cl(G,E))\sqcap int(H,E)
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$
\begin{aligned}
(F,E) &= (G,E)\sqcap(F,E) \\
&\sqsubseteq (G,E)\sqcap(int(cl(G,E))\sqcap int(H,E)) \\
&= (G,E)\sqcap int(H,E) \\
&\sqsubseteq (F,E)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $(F,E)=(G,E)\sqcap int(H,E)$ olup (F,E) soft açıktır.

4.5 Soft AB-Kümeler ve Soft αAB-Kümeler

Tanım 4.5.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer (F,E) hem soft semi-açık hem de soft semi-kapalı küme ise (F,E) soft kümesi, X'de soft semi-regüler küme olarak adlandırılır.

Teorem 4.5.1. (Kandil vd., 2014) (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (F,E) soft kümesinin X'de soft semi-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $(F,E)=(F,E)\sqcup int(cl(F,E))$ olmasıdır. Yani, her (F,E) soft kümesi için $cl_s(F,E)=(F,E)\sqcup int(cl(F,E))$ olmasıdır.

Uyarı 4.5.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (F,E), X üzerinde bir soft küme olmak üzere $int(cl(F,E))\sqsubseteq cl_s(F,E)$ dir.

İspat. Teorem 4.5.1.'den açıktır.

Önerme 4.5.1. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. X üzerindeki (F,E) soft kümesi için aşağıdakiler eşdeğerdir:

i. (F,E), X'de soft semi-regülerdir,

ii. $(F,E) = int_s(cl_s(F,E))$,

iii. $(G,E) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq cl(G,E)$ olacak şekilde X'de en az bir (G,E) soft regüler açık kümesi vardır.

İspat. i.⇒ii. : Varsayalım ki, (F,E) soft semi-regüler küme olsun. Bu durumda, $int_s\big(cl_s(F,E)\big) = int_s(F,E) = (F,E)$.

ii.⇒iii. : Varsayalım ki, $(F,E) = int_s\big(cl_s(F,E)\big)$ olsun. $int(cl(G,E)) \sqsubseteq cl_s(G,E)$ olduğundan X üzerindeki her (G,E) soft kümesi için Uyarı 4.5.1.'den, $int\big(cl(F,E)\big) \sqsubseteq int_s\big(cl_s(F,E)\big) = (F,E)$. (F,E) soft semi-açık olduğundan $(F,E) \sqsubseteq cl(int(F,E))$. Buradan,

$int\big(cl(F,E)\big) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq cl(int(F,E)) \sqsubseteq cl\left(int\big(cl(F,E)\big)\right)$

elde edilir. $int\big(cl(int(cl(F,E)))\big)$= $int(cl(F,E))$ olduğundan $int(cl(F,E))$ soft regüler açıktır.

iii.⇒i. : Açıktır ki (F,E), X'de soft semi-açıktır. Buradan

$int\big(cl(F,E)\big) \sqsubseteq int\big(cl(G,E)\big) = (G,E) \sqsubseteq (F,E)$.

Böylece (F,E) soft semi-kapalı olup soft semi-regüler kümedir.

Önerme 4.5.2. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Eğer (F,E) soft semi-açık küme ise $cl_s(F,E)$, X'de soft semi-regüler kümedir.

İspat. $cl_s(F,E)$ soft semi-kapalı olduğundan $cl_s(F,E)$'nin X'de soft semi-açık olduğu gösterilir. (F,E) soft semi-açık olduğundan X'deki (G,E) soft açık kümesi için $(G,E) \sqsubseteq (F,E) \sqsubseteq cl(G,E)$ dir. Buradan $(G,E) \sqsubseteq cl_s(G,E) \sqsubseteq cl_s(F,E) \sqsubseteq cl(G,E)$ elde edilir. Böylece $cl_s(F,E)$, X'de soft semi-regüler kümedir.

Tanım 4.5.2. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (G, E) soft açık ve (H, E) soft semi-regüler küme olmak üzere $(F, E) = (G, E) \sqcap (H, E)$ ise (F, E) soft kümesi X'de soft AB-küme olarak adlandırılır.

Örnek 4.5.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_3\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(H, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$ soft kümesi verilsin. Açıktır ki (H, E), soft AB-kümedir fakat soft açık değildir.

Örnek 4.5.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), \dots, (F_{11}, E)\}$, X üzerinde

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$,
$(F_5, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_6, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}$,
$(F_7, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_8, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_9, E) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{10}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_{11}, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$

şeklinde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun. Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_3\})\}$ soft kümesi verilsin. Açıktır ki, (G,E) soft AB-kümedir, fakat soft semi-regüler değildir.

Önerme 4.5.3. (X,τ,E) soft topolojik uzayındaki her soft regüler kapalı küme soft semi-regülerdir.

İspat. (F,E) soft regüler kapalı küme olsun. Tanım 4.2.1.'den, $(F,E)\sqsubseteq cl(int(F,E))$ olduğu açıktır ve (F,E) soft semi-açıktır. Soft regüler kapalı küme soft kapalı olduğundan $(F,E)=cl(F,E)$. Buradan $int\big(cl(F,E)\big)\sqsubseteq int(F,E)\sqsubseteq(F,E)$ ve $int\big(cl(F,E)\big)\sqsubseteq(F,E)$. Böylece (F,E) soft semi-kapalı olup soft semi-regüler kümedir.

Uyarı 4.5.2. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. Soft regüler kapalı küme, soft semi-regüler ve soft semi-regüler küme, soft t-küme olduğundan aşağıdaki gerektirmeler açıktır:

Soft A-küme $\Longrightarrow$ Soft AB-küme $\Longrightarrow$ Soft B-küme

Aşağıdaki örneklerde gösterildiği üzere, bu gerektirmelerin tersleri doğru değildir.

Örnek 4.5.3. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.5.1.'deki τ soft topolojisini ve $(H,E)=\{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_1,x_2\})\}$ soft kümesini ele alalım. Açıktır ki (H,E), X'de soft AB-kümedir fakat soft A-küme değildir.

Örnek 4.5.4. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.5.1.'deki τ soft topolojisini ve $(G,E)=\{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_1\})\}$ soft kümesini ele alalım. Açıktır ki (G,E), X'de soft B-kümedir fakat soft AB-küme değildir.

Uyarı 4.5.3. (X,τ,E) soft topolojik uzayında, bir soft açık küme ile bir soft semi-regüler kümenin kesişimi daima soft semi-açıktır. Bu durumda aşağıdaki gerektirme açıktır:

Soft AB-küme $\Longrightarrow$ Soft semi-açık küme

Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere, bu gerektirmenin tersi doğru değildir.

Örnek 4.5.5. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2, x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, X)\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\})\}$ soft kümesi verilsin. Açıktır ki (G, E), soft semi-açık kümedir fakat soft AB-küme değildir.

Teorem 4.5.2. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin X'de soft AB-küme olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin hem soft semi-açık hem de soft B-küme olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: Uyarı 4.5.2. ve Uyarı 4.5.3.'ten açıktır.

$\Longleftarrow$: (F, E) soft B-küme olduğundan $(F, E) = (G, E) \sqcap (H, E)$ öyle ki (G, E) soft açık küme ve $int\big(cl(H, E)\big) = int(H, E)$. (F, E) soft semi-açık olduğundan,

$(F, E) \sqsubseteq cl\big(int(F, E)\big) = cl\Big(int\big((G, E) \sqcap (H, E)\big)\Big) = cl\big(int(G, E) \sqcap int(H, E)\big)$
$\sqsubseteq cl(int(G, E)) \sqcap cl(int(H, E))$
elde ederiz. Buradan,
$(F, E) = (G, E) \sqcap (H, E) = \big((G, E) \sqcap (H, E)\big) \sqcap (G, E)$
$\sqsubseteq \Big(cl(G, E) \sqcap cl\big(int(H, E)\big)\Big) \sqcap (G, E) = \big(cl(G, E) \sqcap (G, E)\big) \sqcap cl\big(int(H, E)\big)$
$= (G, E) \sqcap cl(int(H, E))$.

$(H, E) \sqsubseteq cl(int(H, E))$ olduğundan (H, E) soft semi-açıktır. Ayrıca, $int\big(cl(H, E)\big) \sqsubseteq int(H, E) \sqsubseteq (H, E)$ olduğundan (H, E) soft semi-kapalıdır. Böylece (H, E) soft semi-regüler olup (F, E) bir soft AB-kümedir.

Teorem 4.5.3. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (F,E) soft kümesinin X'de soft açık küme olması için gerek ve yeter koşul (F,E)'nin hem soft pre-açık hem de soft AB-küme olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: İspat açıktır.

$\Longleftarrow$: Her soft AB-küme, soft B-küme olduğundan $(F,E)=(G,E)\sqcap(H,E)$ öyle ki (G,E) soft açık ve $int(cl(H,E))=int(H,E)$. (F,E) soft pre-açık olduğundan,

$(F,E)\sqsubseteq int\big(cl(F,E)\big)=int\Big(cl\big((G,E)\sqcap(H,E)\big)\Big)\sqsubseteq int(cl(G,E)\sqcap cl(H,E))$

$=int\big(cl(G,E)\big)\sqcap int\big(cl(H,E)\big)=int(cl(G,E))\sqcap int(H,E)$

elde ederiz. Buradan,

$(F,E)=(G,E)\sqcap(H,E)=\big((G,E)\sqcap(H,E)\big)\sqcap(G,E)$

$\sqsubseteq\Big(int\big(cl(G,E)\big)\sqcap int(H,E)\Big)\sqcap(G,E)$

$=\big(int\big(cl(G,E)\big)\sqcap(G,E)\big)\sqcap int(H,E)$

$=(G,E)\sqcap int(H,E)$.

Dikkat edelim ki, $(F,E)=(G,E)\sqcap(H,E)\sqsupseteq(G,E)\sqcap int(H,E)$ olup $(F,E)=(G,E)\sqcap int(H,E)$ dir. Buradan, (F,E)'nin soft açık olduğunu elde ederiz.

Tanım 4.5.3. (X,τ,E) soft topolojik uzay olsun. (G,E) soft α-açık ve (H,E) soft semi-regüler küme olmak üzere $(F,E)=(G,E)\sqcap(H,E)$ ise (F,E) soft kümesi X'de soft αAB-küme olarak adlandırılır.

Örnek 4.5.6. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.5.1.'deki τ soft topolojisini ve $(G,E)=\{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_1,x_2\})\}$ soft kümesini ele alalım. Açıktır ki (G,E), X'de soft αAB-kümedir fakat soft α-açık değildir.

Örnek 4.5.7. $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ve $E=\{e_1,e_2\}$ olsun. Örnek 4.5.5.'teki τ soft topolojisini ve $(G,E)=\{(e_1,\{x_2,x_3,x_4\}),(e_2,\{x_2,x_3,x_4\})\}$ soft kümesini ele alalım. Açıktır ki (G,E), X'de soft αAB-kümedir fakat soft semi-regüler küme değildir.

Teorem 4.5.4. (X,τ,E) soft topolojik uzayındaki her soft AB-küme, soft αAB-kümedir.

İspat. Her soft açık küme, soft α-açık olduğundan ispat açıktır.

Örnek 4.5.8. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.5.5.'teki τ soft topolojisini ve $(G, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\})\}$ soft kümesini ele alalım. Açıktır ki (G, E), X'de soft αAB-kümedir fakat soft AB-küme değildir.

Aşağıdaki örnekler, soft B-küme ile soft αAB-kümenin birbirinden bağımsız olduğunu gösterir.

Örnek 4.5.9. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olsun. Örnek 4.5.1.'deki τ soft topolojisini ve $(H, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_1\})\}$ soft kümesini ele alalım. Açıktır ki (H, E), X'de soft B-kümedir fakat soft αAB-küme değildir.

Örnek 4.5.10. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F, E)\}$, X üzerinde

$$(F, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$$

şeklinde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun. Bu durumda, (X, τ, E) bir soft topolojik uzaydır.

X üzerinde $(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2\})\}$ soft kümesi verilsin. Açıktır ki (G, E), soft αAB-kümedir fakat soft B-küme değildir.

Sonuç 4.5.1. (X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. (F, E) soft kümesinin X'de soft açık küme olması için gerek ve yeter koşul (F, E)'nin hem soft pre-açık hem de soft αAB-küme olmasıdır.

İspat. Teorem 4.5.3.'ten ispat açıktır.

(X, τ, E) soft topolojik uzay olsun. X'deki (F, E) soft kümesi için aşağıdaki gerektirmeler elde edilir:

	Soft açık küme		→	Soft α-açık küme	
	↓			↙	↘
	Soft A-küme		→	Soft semi-açık küme	Soft pre-açık küme
	↓		↗		
	Soft AB-küme				
↙		↘			
Soft αAB-küme		Soft B-küme			
		↓			
		Soft C-küme			

BÖLÜM V

YENİ SOFT SÜREKLİLİK DAĞILIMLARI

5.1 Soft A-Süreklilik ve Soft B-Süreklilik

Tanım 5.1.1. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümler olsun. Eğer her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K)$, X'de soft A-küme ise $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ fonksiyonu soft A-sürekli olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.2. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümler olsun. Eğer her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K)$, X'de soft B-küme ise $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ fonksiyonu soft B-sürekli olarak adlandırılır.

Örnek 5.1.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olsun ve Örnek 4.3.1.'deki $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), \ldots, (F_{11}, E)\}$ soft topolojisini ele alalım.

$\vartheta = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$, Y üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(H, K) = \{(k_1, \{y_1, y_2\}), (k_2, \{y_1\})\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylardır. $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$

$u(x_1) = u(x_4) = \{y_3\}$, $u(x_2) = \{y_2\}$, $u(x_3) = \{y_1\}$ ve $p(e_1) = \{k_1\}$, $p(e_2) = \{k_2\}$

şeklinde tanımlanan dönüşümler olmak üzere $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, (H, K), Y'de soft açıktır ve Örnek 4.3.1. gereği $f_{pu}^{-1}(H, K) = (G, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_3\})\}$, X'de soft A-kümedir. Bu nedenle, f_{pu} bir soft A-sürekli fonksiyondur.

Örnek 5.1.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olsun ve Örnek 4.3.1.'deki $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), \dots, (F_{11}, E)\}$ soft topolojisini ele alalım. $\vartheta = \{\Phi, \tilde{Y}, (G, K)\}$, Y üzerinde

$(G, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_3\})\}$

şeklinde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun. Bu durumda, (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylardır. $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$u(x_1) = u(x_3) = \{y_2\}$, $u(x_2) = \{y_1\}$, $u(x_4) = \{y_3\}$ ve $p(e_1) = \{k_2\}$, $p(e_2) = \{k_1\}$.

$f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, (G, K), Y'de soft açıktır ve Örnek 4.3.6. gereği $f_{pu}^{-1}(G, K) = (H, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \{x_2\})\}$, X'de soft B-kümedir. Bu nedenle, f_{pu} bir soft B-sürekli fonksiyondur.

Uyarı 5.1.1. Her soft sürekli fonksiyon soft A-süreklidir ve her soft A-sürekli fonksiyon soft semi-süreklidir.

İspat. Teorem 4.3.1. ve Teorem 4.3.2.'den direkt elde edilir.

Uyarı 5.1.2. Her soft sürekli fonksiyon soft B-süreklidir.

İspat. Teorem 4.3.9.'un direkt sonucudur.

Teorem 5.1.1. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her soft A-sürekli fonksiyon soft B-süreklidir.

İspat. Teorem 4.3.11'den elde edilir.

Teorem 4.3.3. gereğince, soft sürekliliğin aşağıdaki dağılımı elde edilir.

Teorem 5.1.2. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f_{pu}'nun soft sürekli olması için gerek ve yeter koşul hem soft α-sürekli hem de soft A-sürekli olmasıdır.

Sonuç 5.1.1. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f_{pu}'nun soft sürekli olması için gerek ve yeter koşul hem soft pre-sürekli hem de soft A-sürekli olmasıdır.

Sonuç 5.1.2. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f_{pu}, hem soft pre-sürekli hem de soft A-sürekli ise soft α-süreklidir.

Açıktır ki; Sonuç 5.1.1., Teorem 5.1.2.'nin bir genelleştirmesidir. Sonuç 5.1.2. de, Uyarı 2.7.1. ve Uyarı 5.1.1.'den direkt görülür.

Teorem 4.3.12. gereğince, soft sürekliliğin aşağıdaki dağılımı elde edilir.

Teorem 5.1.3. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f_{pu}'nun soft sürekli olması için gerek ve yeter koşul hem soft pre-sürekli hem de soft B-sürekli olmasıdır.

5.2 Soft C-Süreklilik

Tanım 5.2.1. (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylar ve $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümler olsun. Eğer her $(G, K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G, K)$, X'de soft C-küme ise $f_{pu}: SS(X, E) \longrightarrow SS(Y, K)$ fonksiyonu soft C-sürekli olarak adlandırılır.

Örnek 5.2.1. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olsun ve Örnek 4.4.2.'deki $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$ soft topolojisini ele alalım. $\vartheta = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$, Y üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft topolojik yapı olsun:

$(H, K) = \{(k_1, \{y_1\}), (k_2, \{y_1, y_3\})\}$.

Bu durumda, (X, τ, E) ve (Y, ϑ, K) soft topolojik uzaylardır. $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$

$u(x_1) = \{y_3\}, u(x_2) = \{y_2\}, u(x_3) = \{y_1\}$ ve $p(e_1) = \{k_1\}, p(e_2) = \{k_2\}$

şeklinde tanımlanan dönüşümler olmak üzere $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, (H,K), Y'de soft açıktır ve Örnek 4.4.8. gereği $f_{pu}^{-1}(H,K) = (G,E) = \{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1,x_3\})\}$, X'de soft C-kümedir. Bu nedenle, f_{pu} bir soft C-sürekli fonksiyondur.

Teorem 5.2.1. Her soft B-sürekli fonksiyon, soft C-süreklidir.

İspat. İspatı, Teorem 4.4.7.'den kolayca elde edilir.

Teorem 5.2.2. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f_{pu}'nun soft sürekli olması için gerek ve yeter koşul hem soft α-sürekli hem de soft C-sürekli olmasıdır.

İspat. Teorem 4.4.6. ve Teorem 4.4.8.'in direkt sonucudur.

5.3 Soft AB-Süreklilik ve Soft αAB-Süreklilik

Tanım 5.3.1. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümler olsun. Eğer her $(G,K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G,K)$, X'de soft AB-küme ise $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ fonksiyonu soft AB-sürekli olarak adlandırılır.

Tanım 5.3.2. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $u: X \longrightarrow Y$ ve $p: E \longrightarrow K$ dönüşümler olsun. Eğer her $(G,K) \in SOS(Y)$ için $f_{pu}^{-1}(G,K)$, X'de soft αAB-küme ise $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ fonksiyonu soft αAB-sürekli olarak adlandırılır.

Teorem 4.5.2., Teorem 4.5.3. ve Sonuç 4.5.1.'den direkt bazı sonuçlar elde ederiz: Teorem 5.3.1.; soft AB-sürekli fonksiyonlar ile soft sürekliliğin diğer zayıf çeşitleriyle arasındaki ilişkileri verir. Teorem 5.3.2.; soft AB-süreklilik ile soft αAB-süreklilik arasındaki ilişkiyi gösterir. Teorem 5.3.3.; soft AB-sürekliliğin bir dağılımını verir. Ayrıca, Teorem 5.3.4. ve Sonuç 5.3.1.; soft sürekliliğin birer dağılımını verir.

Teorem 5.3.1. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

i. Her soft A-sürekli fonksiyon soft AB-süreklidir.
ii. Her soft AB-sürekli fonksiyon soft B-süreklidir.
iii. Her soft AB-sürekli fonksiyon soft semi-süreklidir.

Teorem 5.3.2. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her soft AB-sürekli fonksiyon soft αAB-süreklidir.

Örnek 5.3.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $K = \{k_1, k_2\}$ olsun. Örnek 4.3.1.'deki $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), \dots, (F_{11}, E)\}$ soft topolojisini ve Örnek 5.1.1.'deki $\vartheta = \{\Phi, \tilde{Y}, (H, K)\}$ soft topolojisi ile $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu takdirde f_{pu} soft A-sürekli olduğundan soft AB-süreklidir ve dolayısıyla soft αAB-süreklidir.

Teorem 5.3.3. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f_{pu}'nun soft AB-sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul hem soft semi-sürekli hem de soft B-sürekli olmasıdır.

Teorem 5.3.4. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f_{pu}'nun soft sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul hem soft pre-sürekli hem de soft AB-sürekli olmasıdır.

Sonuç 5.3.1. (X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar ve $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f_{pu}'nun soft sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul hem soft pre-sürekli hem de soft αAB-sürekli olmasıdır.

(X,τ,E) ve (Y,ϑ,K) soft topolojik uzaylar olsun. $f_{pu}: SS(X,E) \longrightarrow SS(Y,K)$ fonksiyonu için aşağıdaki gerektirmeler elde edilir:

Soft sürekli $\rightarrow$ Soft α-sürekli

$\downarrow$ $\swarrow$ $\searrow$

Soft A-sürekli $\rightarrow$ Soft semi-sürekli Soft pre-sürekli

$\downarrow$ $\nearrow$

Soft AB-sürekli

$\swarrow$ $\searrow$

Soft αAB-sürekli Soft B-sürekli

$\downarrow$

Soft C-sürekli

BÖLÜM VI

ZAYIF SOFT YAPILAR ÜZERİNE

6.1 Zayıf Soft Yapılar

Tanım 6.1.1. (Zakari vd., 2016) $\widetilde{w}$, X üzerindeki soft kümelerin bir ailesi olsun. Eğer $\Phi \in \widetilde{w}$ ise $\widetilde{w}$, X üzerinde zayıf soft yapı olarak adlandırılır.

$(X, \widetilde{w}, E)$ üçlüsü, X üzerinde zayıf soft uzay olarak adlandırılır.

Tanım 6.1.2. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay olsun. Bu takdirde, $\widetilde{w}$'nın elemanları X'de soft $\widetilde{w}$-açık olarak adlandırılır. (F, E) soft kümesinin relatif tümleyeni $(F, E)^c$, $\widetilde{w}$'ya ait ise (F, E), X'de soft $\widetilde{w}$-kapalı kümedir.

Tanım 6.1.3. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Bu takdirde $i_{\widetilde{w}}(F, E)$, (F, E)'nin kapsadığı tüm soft $\widetilde{w}$-açık kümelerin birleşimi olarak adlandırılır.

Tanım 6.1.4. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Bu takdirde $c_{\widetilde{w}}(F, E)$, (F, E)'yi içeren tüm soft $\widetilde{w}$-kapalı kümelerin kesişimi olarak adlandırılır.

Teorem 6.1.1. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), (G, E); X üzerinde soft kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq (F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(F, E)$,
ii. $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ise $i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}(G, E)$ ve $c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(G, E)$,
iii. $i_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $c_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E) = c_{\widetilde{w}}(F, E)$,
iv. $i_{\widetilde{w}}(F, E)^c = (c_{\widetilde{w}}(F, E))^c$ ve $c_{\widetilde{w}}(F, E)^c = (i_{\widetilde{w}}(F, E))^c$.

Teorem 6.1.2. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay, (F, E), X üzerinde bir soft küme ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde, $x \in i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in (H, E)$ olacak şekilde $(H, E) \sqsubseteq (F, E)$ soft $\widetilde{w}$-açık kümesinin var olmasıdır.

Teorem 6.1.3. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay, (F, E), X üzerinde bir soft küme ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde, $x \in c_{\widetilde{w}}(F, E)$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in (H, E) \in \widetilde{w}$ olmak üzere $(H, E) \sqcap (F, E) \neq \Phi$ olmasıdır.

Önerme 6.1.1. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay olsun. Eğer $(F, E) \in \widetilde{w}$ ise $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve (F, E) soft $\widetilde{w}$-kapalı ise $(F, E) = c_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir.

Önerme 6.1.2. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Bu takdirde, $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) = c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur.

İspat. Teorem 6.1.1. gereğince, $i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$. Buradan $i_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur. Ayrıca $i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$. Buradan $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) = c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur. Böylece, $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) = c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ elde edilir.

Benzer yolla, $i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E)$ olduğu gösterilir.

Teorem 6.1.4. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), (G, E); X üzerinde soft kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}\big((F, E) \sqcup (G, E)\big)$,
ii. $i_{\widetilde{w}}\big((F, E) \sqcap (G, E)\big) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcap i_{\widetilde{w}}(G, E)$.

İspat. İspat açıktır.

Uyarı 6.1.1. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay olsun. Aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere X üzerindeki (F, E) ve (G, E) soft kümeleri için $c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G, E) = c_{\widetilde{w}}\big((F, E) \sqcup (G, E)\big)$ ve $i_{\widetilde{w}}\big((F, E) \sqcap (G, E)\big) = i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcap i_{\widetilde{w}}(G, E)$ eşitlikleri sağlanmaz.

Örnek 6.1.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\widetilde{w} = \{\Phi, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir zayıf soft yapı olsun:

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_3, x_4\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_4, x_5\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_3, x_5\})\}$.

Bu durumda, $(X, \widetilde{w}, E)$ bir zayıf soft uzaydır.

(G_1, E) ve (G_2, E), X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iki soft küme olsun:

$(G_1, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3, x_5\})\}$,
$(G_2, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_4, x_5\})\}$.

Bu takdirde,

$i_{\widetilde{w}}(G_1, E) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_3, x_5\})\}$,
$i_{\widetilde{w}}(G_2, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_4, x_5\})\}$

ve böylece $i_{\widetilde{w}}(G_1, E) \sqcap i_{\widetilde{w}}(G_2, E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_5\})\}$. $(G_1, E) \sqcap (G_2, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_5\})\}$ olduğundan $i_{\widetilde{w}}\big((G_1, E) \sqcap (G_2, E)\big) = \Phi$ elde edilir. Böylece $i_{\widetilde{w}}(G_1, E) \sqcap i_{\widetilde{w}}(G_2, E) \neq i_{\widetilde{w}}\big((G_1, E) \sqcap (G_2, E)\big)$ olduğu görülür.

(H_1, E) ve (H_2, E), X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iki soft küme olsun:

$(H_1, E) = \{(e_1, \{x_4, x_5\}), (e_2, \{x_2\})\}$,
$(H_2, E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$.

Bu takdirde,

$c_{\widetilde{w}}(H_1, E) = \{(e_1, \{x_4, x_5\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$c_{\widetilde{w}}(H_2, E) = \{(e_1, \{x_2, x_4, x_5\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_5\})\}$

ve böylece $c_{\widetilde{w}}(H_1,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(H_2,E) = \{(e_1,\{x_2,x_4,x_5\}),(e_2,\{x_1,x_2,x_5\})\}$. $(H_1,E) \sqcup (H_2,E) = \{(e_1,\{x_2,x_4,x_5\}),(e_2,\{x_1,x_2,x_5\})\}$ olduğundan $c_{\widetilde{w}}\big((H_1,E) \sqcup (H_2,E)\big) = \widetilde{X}$ elde edilir. Böylece $c_{\widetilde{w}}(H_1,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(H_2,E) \neq c_{\widetilde{w}}\big((H_1,E) \sqcup (H_2,E)\big)$ olduğu görülür.

Teorem 6.1.5. $\widetilde{w}$, sonlu kesişim altında kapalı olmak üzere $(X,\widetilde{w},E)$ zayıf soft uzay ve (F,E), (G,E); X üzerinde soft kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $c_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G,E) = c_{\widetilde{w}}\big((F,E) \sqcup (G,E)\big)$,
ii. $i_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcap i_{\widetilde{w}}(G,E) = i_{\widetilde{w}}\big((F,E) \sqcap (G,E)\big)$.

İspat. i. Teorem 6.1.4. gereğince, $c_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}\big((F,E) \sqcup (G,E)\big)$ dir. Varsayalım ki $x \notin c_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G,E)$ olsun. Bu durumda $x \notin c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ve $x \notin c_{\widetilde{w}}(G,E)$ olur. Buradan $(H,E) \sqcap (F,E) = \Phi$ ve $(K,E) \sqcap (G,E) = \Phi$ olacak şekilde x'i içeren (H,E), $(K,E) \in \widetilde{w}$ soft kümeleri vardır. $x \in (H,E) \sqcap (K,E) \in \widetilde{w}$ öyle ki $\big((H,E) \sqcap (K,E)\big) \sqcap \big((F,E) \sqcup (G,E)\big) = \Big(\big((H,E) \sqcap (K,E)\big) \sqcap (F,E)\Big) \sqcup$
$\Big(\big((H,E) \sqcap (K,E)\big) \sqcap (G,E)\Big) \sqsubseteq \big((H,E) \sqcap (F,E)\big) \sqcup \big((K,E) \sqcap (G,E)\big) = \Phi$
ve böylece $x \notin c_{\widetilde{w}}\big((F,E) \sqcup (G,E)\big)$. Buradan $c_{\widetilde{w}}\big((F,E) \sqcup (G,E)\big) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G,E)$ ve böylece $c_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G,E) = c_{\widetilde{w}}\big((F,E) \sqcup (G,E)\big)$ elde edilir.

ii. İspatı, i.'e benzer şekilde yapılır.

6.2 $\boldsymbol{\alpha(\widetilde{w})}$, $\boldsymbol{\sigma(\widetilde{w})}$, $\boldsymbol{\pi(\widetilde{w})}$, $\boldsymbol{\rho(\widetilde{w})}$, $\boldsymbol{\beta(\widetilde{w})}$ ve $\boldsymbol{r(\widetilde{w})}$ Soft Yapıları

Tanım 6.2.1. $(X,\widetilde{w},E)$ zayıf soft uzay ve (F,E), X üzerinde soft küme olsun. Bu takdirde,

i. $(F,E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)$ ise (F,E), X'de soft α-$\widetilde{w}$-açık küme,
ii. $(F,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)$ ise (F,E), X'de soft σ-$\widetilde{w}$-açık küme,
iii. $(F,E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ise (F,E), X'de soft π-$\widetilde{w}$-açık küme,
iv. $(F,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E) \sqcup i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ise (F,E), X'de soft ρ-$\widetilde{w}$-açık küme,
v. $(F,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ise (F,E), X'de soft β-$\widetilde{w}$-açık küme,
vi. $(F,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ise (F,E), X'de soft r-$\widetilde{w}$-açık küme

olarak adlandırılır.

Bütün soft α-$\widetilde{w}$-açık (σ-$\widetilde{w}$-açık, π-$\widetilde{w}$-açık, ρ-$\widetilde{w}$-açık, β-$\widetilde{w}$-açık, r-$\widetilde{w}$-açık) kümelerin ailesi sırasıyla $\alpha(\widetilde{w})$, $\sigma(\widetilde{w})$, $\pi(\widetilde{w})$, $\rho(\widetilde{w})$, $\beta(\widetilde{w})$ ve $r(\widetilde{w})$ ile gösterilir.

Teorem 6.2.1. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay olsun. Bu takdirde $\widetilde{w} \sqsubseteq \alpha(\widetilde{w}) \sqsubseteq \sigma(\widetilde{w}) \sqsubseteq \rho(\widetilde{w}) \sqsubseteq \beta(\widetilde{w})$ ve $\alpha(\widetilde{w}) \sqsubseteq \pi(\widetilde{w}) \sqsubseteq \rho(\widetilde{w})$.

İspat. $(F, E) \in \widetilde{w}$ olsun. Önerme 6.1.1.'den $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve Teorem 6.1.1.'den $i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir. Böylece $(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur. (F, E) soft $\widetilde{w}$-açık olduğundan, $(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir. Böylece $(F, E) \in \alpha(\widetilde{w})$ elde edilir.

Benzer olarak, Teorem 6.1.1.'den $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir. $(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olduğundan $(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur. Böylece $\alpha(\widetilde{w}) \sqsubseteq \sigma(\widetilde{w})$. Açıktır ki, $(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ise $(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcup i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ olup $\sigma(\widetilde{w}) \sqsubseteq \rho(\widetilde{w})$ bulunur.

Teorem 6.1.1. gereğince $c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir. Buradan $c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcup i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ elde edilir. Böylece $\rho(\widetilde{w}) \sqsubseteq \beta(\widetilde{w})$ olur.

Benzer olarak, Teorem 6.1.1.'den $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir, böylece $\alpha(\widetilde{w}) \sqsubseteq \pi(\widetilde{w})$. Ayrıca $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcup i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve böylece $\pi(\widetilde{w}) \sqsubseteq \rho(\widetilde{w})$ elde edilir.

Teorem 6.2.2. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde soft küme olsun. Bu takdirde $(F, E) \in r(\widetilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul $(F, E) \in \alpha(\widetilde{w})$ ve $(F, E)^c \in \beta(\widetilde{w})$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: $(F, E) \in r(\widetilde{w})$ olsun. Böylece $(F, E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E)$ elde edilir. Teorem 6.1.1. gereğince $i_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F, E) = (F, E)$. $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ elde edilir. Buradan $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur. Böylece $(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $(F, E) \in \alpha(\widetilde{w})$ bulunur.

Diğer taraftan, $(F,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ olduğundan $(F,E)^c = (i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E))^c$. Teorem 6.1.1.'den $(F,E)^c = c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)^c$ ve $c_{\widetilde{w}}(F,E)^c = c_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)^c$ dir. Teorem 6.1.1. gereğince $c_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)^c = c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)^c = (F,E)^c$ elde edilir.

Ayrıca $c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)^c \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)^c$ dir. Bu ise $(F,E)^c = c_{\widetilde{w}}(F,E)^c = c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)^c$ $\sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)^c$ olmasını gerektirir. Böylece $(F,E)^c \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)^c$ ve $(F,E)^c \in \beta(\widetilde{w})$ olur.

$\Leftarrow$: $(F,E) \in \alpha(\widetilde{w})$ ve $(F,E)^c \in \beta(\widetilde{w})$ olsun. Yani $(F,E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)$ ve $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E) \sqsubseteq (F,E)$. Böylece $(F,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}i_{\widetilde{w}}(F,E)$ ve Önerme 6.1.2.'den $(F,E) \in r(\widetilde{w})$ elde edilir.

Teorem 6.2.3. $(X,\widetilde{w},E)$ zayıf soft uzay ve (F,E), X üzerinde soft küme olsun. Bu takdirde $(F,E) \in r(\widetilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) \in \pi(\widetilde{w})$ ve $(F,E)^c \in \sigma(\widetilde{w})$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: $(F,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ olduğu gerçeğinden açıktır.

$\Leftarrow$: $(F,E) \in \pi(\widetilde{w})$ ve $(F,E)^c \in \sigma(\widetilde{w})$ olsun. $(F,E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ve $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E) \sqsubseteq (F,E)$ elde edilir. Böylece $(F,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ ve $(F,E) \in r(\widetilde{w})$ bulunur.

Teorem 6.2.4. $(X,\widetilde{w},E)$ zayıf soft uzay ve (F,E), X üzerinde soft küme olsun. Bu takdirde $(F,E) \in \pi(\widetilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve $c_{\widetilde{w}}(F,E) = c_{\widetilde{w}}(G,E)$ olacak şekilde $(G,E) \in r(\widetilde{w})$ soft kümesinin var olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$: $(F,E) \in \pi(\widetilde{w})$ olsun. Böylece $(F,E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ elde edilir. Eğer $(G,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$ alırsak, Önerme 6.1.2.'den $(G,E) \in r(\widetilde{w})$ bulunur ve ayrıca $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve $c_{\widetilde{w}}(F,E) = c_{\widetilde{w}}(G,E)$ dir.

$\Leftarrow$: $(F,E) \sqsubseteq (G,E)$ ve $c_{\widetilde{w}}(F,E) = c_{\widetilde{w}}(G,E)$ olmak üzere $(G,E) \in r(\widetilde{w})$ olsun. Teorem 6.1.1. gereğince $i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E) = i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(G,E) = (G,E)$ ve böylece $(F,E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}c_{\widetilde{w}}(F,E)$. Böylece $(F,E) \in \pi(\widetilde{w})$ elde edilir.

Teorem 6.2.5. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde soft küme olsun. Eğer (F, E) soft $\widetilde{w}$-açık ve soft $\widetilde{w}$-kapalı ise $(F, E) \in \alpha(\widetilde{w})$ ve $(F, E)^c \in \pi(\widetilde{w})$ dir.

İspat. (F, E) soft $\widetilde{w}$-açık ve soft $\widetilde{w}$-kapalı olsun. Önerme 6.1.1. gereğince $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $(F, E) = c_{\widetilde{w}}(F, E)$ dir. Buradan $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ elde edilir. Teorem 6.1.1.'den $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E) = i_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olur. Böylece, $(F, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olduğundan $(F, E) \in \alpha(\widetilde{w})$. Diğer taraftan, $(F, E) = i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $(F, E) = c_{\widetilde{w}}(F, E)$ olduğundan Teorem 6.1.1. gereğince $(F, E)^c = (i_{\widetilde{w}}(F, E))^c = c_{\widetilde{w}}(F, E)^c$ ve $(F, E)^c = (c_{\widetilde{w}}(F, E))^c = i_{\widetilde{w}}(F, E)^c$ olur. Teorem 6.1.1. gereğince $(F, E)^c = i_{\widetilde{w}}(F, E)^c = i_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)^c \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E)^c$ bulunur. Böylece $(F, E)^c \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E)^c$ ve $(F, E)^c \in \pi(\widetilde{w})$ elde edilir.

Aşağıdaki örnek, Teorem 6.2.5.'in tersinin genellikle doğru olmadığını gösterir.

Örnek 6.2.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\widetilde{w} = \{\Phi, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E),$ $(F_4, E)\}$, X üzerinde

$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$,
$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$,
$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_3, x_4\})\}$,
$(F_4, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1\})\}$

şeklinde tanımlanan bir zayıf soft yapı olsun. Bu durumda $(X, \widetilde{w}, E)$ bir zayıf soft uzaydır. (G, E), X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir soft küme olsun:

$(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3, x_4\})\}$.

Bu takdirde $i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(G, E) = \widetilde{X}$. $(G, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(G, E)$ olduğundan $(G, E) \in \alpha(\widetilde{w})$ olur. Ayrıca $i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(G, E)^c = \widetilde{X}$ dır. $(G, E)^c \sqsubseteq i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(G, E)^c$ olduğundan $(G, E)^c \in \pi(\widetilde{w})$ elde edilir. Fakat (G, E), ne soft $\widetilde{w}$-açık ne de soft $\widetilde{w}$-kapalıdır.

Teorem 6.2.6. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Bu takdirde $(G, E) \sqsubseteq (F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(G, E)$ olacak şekilde (G, E) soft $\widetilde{w}$-açık kümesi varsa $(F, E) \in \sigma(\widetilde{w})$ dır.

İspat. $(G, E) \sqsubseteq (F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(G, E)$ olmak üzere (G, E) soft $\widetilde{w}$-açık küme olsun. $(G, E) \sqsubseteq (F, E)$ olduğundan $i_{\widetilde{w}}(G, E) = (G, E) \sqsubseteq i_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve Teorem 6.1.1. gereğince $c_{\widetilde{w}}(G, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ bulunur. Böylece $(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F, E)$ olup $(F, E) \in \sigma(\widetilde{w})$ elde edilir.

Teorem 6.2.7. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay olsun. Eğer $(F, E) \sqsubseteq (G, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $(F, E) \in \beta(\widetilde{w})$ ise $(G, E) \in \beta(\widetilde{w})$ dır.

İspat. $(F, E) \sqsubseteq (G, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(F, E)$ ve $(F, E) \in \beta(\widetilde{w})$ olsun. Bu takdirde $(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E)$ elde edilir. $(G, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(F, E)$ olduğundan Teorem 6.1.1. gereğince, $(G, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E) = c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(G, E)$ olur. Böylece $(G, E) \in \beta(\widetilde{w})$ elde edilir.

Tanım 6.2.2. (Zakari vd., 2016) $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde soft küme olsun. Eğer $c_{\widetilde{w}}(F, E) = \widetilde{X}$ ise (F, E), $\widetilde{w}$-yoğun soft küme olarak adlandırılır.

Teorem 6.2.8. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (F, E), X üzerinde soft küme olsun. Eğer $(F, E) \in \pi(\widetilde{w})$ ise (F, E); $(G, E) \in r(\widetilde{w})$ soft kümesi ve (H, E) $\widetilde{w}$-yoğun soft kümesinin kesişimidir.

İspat. $(F, E) \in \pi(\widetilde{w})$ olsun. Teorem 6.2.4. gereğince, $(F, E) \sqsubseteq (G, E)$ ve $c_{\widetilde{w}}(F, E) = c_{\widetilde{w}}(G, E)$ olacak şekilde bir $(G, E) \in r(\widetilde{w})$ vardır. Eğer $(H, E) = (F, E) \sqcup (G, E)^c$ alırsak, Teorem 6.1.4.'ten $c_{\widetilde{w}}((G, E) \sqcup (G, E)^c) = \widetilde{X} \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(G, E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G, E)^c = c_{\widetilde{w}}(F, E) \sqcup c_{\widetilde{w}}(G, E)^c \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}((F, E) \sqcup (G, E)^c) = c_{\widetilde{w}}(H, E)$ elde edilir. Böylece (H, E) bir $\widetilde{w}$-yoğun soft kümedir ve $(F, E) = (G, E) \sqcap (H, E)$ dir.

Teorem 6.2.9. $(X, \widetilde{w}, E)$ zayıf soft uzay ve (H, E), X üzerinde soft küme olsun. Eğer $(H, E) \in \beta(\widetilde{w})$ ise $(F, E) \in \sigma(\widetilde{w})$ ve (G, E), $\widetilde{w}$-yoğun soft küme olmak üzere $(H, E) = (F, E) \sqcap (G, E)$ dir.

İspat. $(H,E) \in \beta(\widetilde{w})$ olsun. Bu takdirde $(H,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E)$ dir. Teorem 6.1.1. gereğince, $c_{\widetilde{w}}(H,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E) = c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E)$. Dahası, $i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}}(H,E)$ ve buradan $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E) = c_{\widetilde{w}}(H,E)$ bulunur Böylece $c_{\widetilde{w}}(H,E) = c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E)$ dir. Bu, $(F,E) = c_{\widetilde{w}}(H,E) \in \sigma(\widetilde{w})$ olmasını gerektirir. Eğer $(G,E) = (H,E) \sqcup (c_{\widetilde{w}}(H,E))^c$ alırsak, (G,E) $\widetilde{w}$-yoğun soft kümedir ve $(H,E) = (F,E) \sqcap (G,E)$ dir.

Aşağıdaki örnek, Teorem 6.2.9.'un tersinin genellikle doğru olmadığını gösterir.

Örnek 6.2.2. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\widetilde{w} = \{\Phi, (F_1,E), (F_2,E), (F_3,E), (F_4,E), (F_5,E), (F_6,E), (F_7,E)\}$, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir zayıf soft yapı olsun:

$(F_1,E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(F_2,E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$,
$(F_3,E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_4,E) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$,
$(F_5,E) = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, X)\}$,
$(F_6,E) = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(F_7,E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}$.

Bu durumda, $(X, \widetilde{w}, E)$ bir zayıf soft uzaydır. (F,E) ve (G,E), X üzerinde

$(F,E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$,
$(G,E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$.

şeklinde tanımlanan iki soft küme olsun. Bu durumda, $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F,E) = \widetilde{X}$ olur. $(F,E) \sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}}(F,E)$ olduğundan $(F,E) \in \sigma(\widetilde{w})$ dır. Ayrıca, $c_{\widetilde{w}}(G,E) = \widetilde{X}$ olduğundan (G,E), $\widetilde{w}$-yoğun soft kümedir. $(F,E) \sqcap (G,E) = (H,E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_2\})\}$ bulunur. $c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E) = \Phi$ olduğundan $(H,E) \not\sqsubseteq c_{\widetilde{w}} i_{\widetilde{w}} c_{\widetilde{w}}(H,E)$ elde edilir. Bu nedenle $(H,E) \notin \beta(\widetilde{w})$ dır.

BÖLÜM VII

PROSTAT KANSER RİSKİ TEŞHİSİ İÇİN ÇOK KRİTERLİ KARAR VERME YÖNTEMLERİ İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Prostat kanseri, erkeklerde ölümle sonuçlanan ikinci kanser türüdür. Kalıtsallık, yaş, kandaki prostat spesifik antijen (PSA) miktarı gibi çeşitli nedenlere bağlıdır. PSA, prostat tarafından üretilen bir madde olduğundan ilk teşhiste hastalar için çok önemli bir faktördür (Catolona vd., 1998; Shin Egawa vd., 1997; Van Cangh vd., 1996). İyi bilinir ki, prostat kanseri ne kadar erken teşhis edilirse, hastanın tamamen tedavi olabilme ihtimali o kadar yüksektir. Prostat kanserinin kesin teşhisi biyopsi ile mümkündür. PSA testinin sonuçları, rektal muayene ve transeksüel bulgular, biyopsinin gerekli olup olmadığına karar vermede doktora yardımcıdırlar (Metlin vd., 1991; Nguyen ve Kreinovich, 2001; Seker vd., 2003). Ayrıca, PSA ve serbest prostat spesifik antijen (fPSA) seviyesi, hastanın yaşı ve prostat hacmi verileri, doktora kanser riski hakkında fikir verebilir. Fakat prostat kanserinin belirtilerine benzer durumlar yaşayan hastalara direkt biyopsi uygulanmamalıdır. Çünkü bu belirtiler iyi huylu prostat büyümesi ya da idrar yolu enfeksiyonu gibi durumlarda da görülebilir. Ayrıca, her tıbbi tetkik ve girişim hem hastanın kendisine hem de ailesine değişik yönlerden külfet getirir (fiziksel, ruhsal ve ekonomik). Bu nedenle, biyopsi işlemi uygulanacak hastaları belirlemede kullanılan yöntemlerin son karar üzerinde etkili olan kriterleri dikkate alması gereklidir. Bu, etkin sonuca ulaşılması açısından hayati önem taşımaktadır.

7.1 Çok Kriterli Grup Karar Verme Yöntemi

Feng (2011) soft rough kümeleri, çok kriterli grup karar verme problemine uygulamıştır. Feng (2011)'in verdiği soft rough küme tabanlı karar verme yöntemi aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

U bir başlangıç evreni ve $A \subseteq E$ parametrelerin boştan farklı bir kümesi olsun.

Adım 1: Orijinal soft küme $G = (F, A)$ girilir.

Adım 2: T uzman grubunun ilk değerlendirme sonuçları kullanılarak, değerlendirme soft kümesi $G_1 = (V, T)$ oluşturulur.

Adım 3: Soft rough yaklaşımlar hesaplanır ve $G_{1\_} = (V_{\_}, T)$ ve $G_1^{-} = (V^{-}, T)$ soft kümeleri elde edilir.

Adım 4: $G_1 = (V, T)$, $G_{1\_} = (V_{\_}, T)$ ve $G_1^{-} = (V^{-}, T)$ soft kümelerine karşılık gelen μ_{G_1}, $\mu_{G_{1\_}}$ ve $\mu_{G_1^{-}}$ fuzzy kümeleri hesaplanır.

Adım 5: μ_{G_1}, $\mu_{G_{1\_}}$ ve $\mu_{G_1^{-}}$ fuzzy kümeleri kullanılarak $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesi oluşturulur.

Adım 6: R ağırlık vektörü girilir ve her $u_k \in U$ alternatifinin ağırlıklı değerlendirme değerleri hesaplanır. Ağırlıklı değerlendirme değerlerine göre tüm alternatifler sıralanır. En çok tercih edilen alternatif olarak en büyük ağırlıklı değerlendirme değerine sahip olan nesnelerin herhangi biri seçilebilir.

7.2 Fuzzy TOPSIS Yöntemi

Tanım 7.2.1. (Kaufmann ve Gupta, 1985)
i. U evreni üzerindeki $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul a, $b \in U$ için $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\mu_{\tilde{A}}(\alpha a + \beta b) \geq \mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{A}}(b)$ olmasıdır.
ii. Eğer $\mu_{\tilde{A}}(a_i) = 1$ olacak şekilde bir $a_i \in U$ varsa U evreni üzerindeki $\tilde{A}$ fuzzy kümesi normal fuzzy küme olarak adlandırılır.
iii. Bir fuzzy sayı U evreninin hem konveks hem de normal olan bir fuzzy alt kümesidir.

$\tilde{n}$ üçgen fuzzy sayısı (a, b, c) üçlüsü ile tanımlanabilir. $\mu_{\tilde{n}}(x)$ üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır (Kaufmann ve Gupta, 1985):

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \tag{7.1}$$

$\tilde{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ve $\tilde{n} = (n_1, n_2, n_3)$ üçgen fuzzy sayılar olsun. Bu durumda $\tilde{m}$ ve $\tilde{n}$'nın toplam ve çarpımı aşağıdaki şekildedir (Kaufmann ve Gupta, 1985):

$$\tilde{m} \oplus \tilde{n} = (m_1, m_2, m_3) \oplus (n_1, n_2, n_3) = (m_1 + n_1, m_2 + n_2, m_3 + n_3) \quad (7.2)$$

ve

$$\tilde{m} \otimes \tilde{n} = (m_1, m_2, m_3) \otimes (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, m_3 \times n_3) \quad (7.3)$$

Tanım 7.2.2. (Buckley, 1985) Eğer $\tilde{D}$'da en azından bir giriş fuzzy sayı ise $\tilde{D}$, fuzzy matris olarak adlandırılır.

Tanım 7.2.3. (Zadeh, 1975) Dilsel değişken, değerleri dilsel terimler olan bir değişkendir.

Dilsel değişken kavramı, oldukça karmaşık durumları bilinen niceliksel ifadelerle mantıklı şekilde ifade etmede çok faydalıdır (Zadeh, 1975).

Tanım 7.2.4. (Chen, 2000) $\tilde{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ve $\tilde{n} = (n_1, n_2, n_3)$ üçgen fuzzy sayılar olmak üzere bunlar arasındaki uzaklığın Vertex metodu ile hesaplanışı

$$d(\tilde{m}, \tilde{n}) = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 + (m_3 - n_3)^2\right]} \quad (7.4)$$

biçimindedir.

Hwang ve Yoon (1981) tarafından verilen TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) yöntemi, çok kriterli karar verme yöntemlerinden biridir. TOPSIS yönteminin temel prensibi, pozitif ideal çözüme en yakın uzaklığa ve negatif ideal çözüme en fazla uzaklığa sahip olan alternatifi seçmektir. Bu uzaklıkların karşılaştırılması ile tercih sıralaması yapılır. Chen (2000), TOPSIS (Hwang ve Yoon, 1981) yöntemini fuzzy alanına genişletmek için sistematik bir yaklaşım vermiştir.

İnsan yargıları genelde belirsizdir ve sayısal değerlerle ifade etmek mümkün olmayabilir. Daha gerçekçi bir yaklaşım, sayısal değerler yerine dilsel değerlerin kullanılması ile olabilir. Diğer bir ifadeyle, problemdeki karar kriterlerinin önem düzeyleri dilsel değişkenlerle ifade edilebilir. Fuzzy TOPSIS yöntemi, hem nitel hem de nicel karar kriterlerinin kriter değerleriyle ilgilenen esnek bir yapıya sahip fuzzy ortamlarda grup kararı vermeye yardımcı olan bir yöntemdir. Yöntemin uygulanabilmesi için karar vericilere, karar kriterlerine ve alternatiflere ihtiyaç duyulur. Karar vericiler, karar kriterleri ve alternatiflerle ilgili düşüncelerini sözel olarak ifade eder. Fuzzy TOPSIS yönteminin temelinde, karar vericilerin alternatifleri değerlendirirken kullandıkları karar kriterlerinin farklı ağırlıklara sahip olabilmesi yer alır. Fuzzy TOPSIS yöntemi yardımıyla karar vericilerin karar kriterleri ve alternatifler hakkındaki değerlendirmeleri üçgen veya bulanık sayılara dönüştürülerek, her bir alternatifin yakınlık katsayısı hesaplanır. Hesaplanan yakınlık katsayıları yardımıyla alternatifler sıralanır. Yöntem, alternatiflerin değerlendirilmesinde ortaya çıkan sübjektifliğin grup kararı vermede ortaya çıkardığı sorunları ortadan kaldırmakta ve daha doğru kararlar verme imkanı sağlamaktadır (Ecer, 2007).

Fuzzy TOPSIS yöntemi, dilsel belirsizliğin olduğu ve grup kararı vermeyi gerektiren problemlerin çözümünde oldukça kullanışlıdır. Karar vericiler, karar kriterlerinin önem düzeyini ve bu karar kriterlerine göre her bir alternatifi değerlendirirler. Fuzzy TOPSIS yönteminde, çeşitli araştırmacılar tarafından önerilen karar kriterlerinin değerlendirilmesinde kullanılan dilsel değerler ve üçgen bulanık sayı karşılıkları, alternatiflerin değerlendirilmesinde kullanılan dilsel değerler ve üçgen fuzzy sayı olarak karşılıkları aşağıda verilmiştir (Paksoy vd., 2013).

Çizelge 7.2.1. Kriterlerin önem ağırlıkları için dilsel değişkenler ve fuzzy karşılığı

Çok düşük (ÇD)	$(0, 0, 0.2)$
Düşük (D)	$(0, 0.2, 0.4)$
Orta (O)	$(0.3, 0.5, 0.7)$
Yüksek (Y)	$(0.8, 0.8, 1)$
Çok yüksek (ÇY)	$(0.8, 1, 1)$

Çizelge 7.2.2. Değerlendirmeler için dilsel değişkenler ve fuzzy karşılığı

Çok düşük (ÇD)	$(0, 0, 2)$
Düşük (D)	$(0, 2, 4)$
Orta (O)	$(3, 5, 7)$
Yüksek (Y)	$(6, 8, 10)$
Çok yüksek (ÇY)	$(8, 10, 10)$

Fuzzy TOPSIS yöntemi algoritmasına ait adımlar aşağıda verilmiştir (Paksoy vd., 2013).

Adım 1: $\tilde{x}_{ij}^{K} = i.$ alternatifin kriter değerini göstermek üzere, K tane karar vericiden oluşan bir grupta, alternatiflerin kriter değerleri,

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{K}[\tilde{x}_{ij}^{1} + \tilde{x}_{ij}^{2} + \cdots + \tilde{x}_{ij}^{K}] \tag{7.5}$$

eşitliğinden hesaplanır.

Adım 2: $\widetilde{w}_{j}^{K} = j.$ karar kriterinin önem ağırlığını göstermek üzere, K tane karar vericiden oluşan bir grupta karar kriterlerinin önem ağırlıkları,

$$\widetilde{w}_{j} = \frac{1}{K}[\widetilde{w}_{j}^{1} + \widetilde{w}_{j}^{2} + \cdots + \widetilde{w}_{j}^{K}] \tag{7.6}$$

eşitliği kullanılarak hesaplanır. Bir fuzzy çok kriterli karar verme probleminin matris olarak gösterimi,

$$\tilde{P} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} K_1 & K_2 & \dots & K_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \dots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad \tilde{Q} = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \dots, \widetilde{w}_n]$$

biçimindedir.

Burada $\tilde{x}_{ij}$ $(\forall i, j)$ ve $\tilde{w}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ dilsel değişkenler olmak üzere A_1, A_2, …, A_m alternatifleri; K_1, K_2, …, K_n karar kriterleri; $\tilde{x}_{ij} = K_j$ kriterine göre A_i alternatifinin fuzzy kriter değerini ve $\tilde{w}_j = K_j$ kriterinin fuzzy önem ağırlığını göstermektedir.

Bu dilsel değişkenler $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ ve $\tilde{w}_j = (a_{j1}, b_{j2}, c_{j3})$ şeklinde üçgen bulanık sayılar ile ifade edilebilmektedir. $\tilde{P}$ matrisine fuzzy karar matrisi, $\tilde{Q}$ matrisine ise fuzzy ağırlıklar matrisi adı verilir.

Adım 3: Fuzzy karar matrisinden elde edilen normalize edilmiş karar matrisi,

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n} \tag{7.7}$$

olarak ifade edilir. Burada $\tilde{r}_{ij}$,

$$\tilde{r}_{ij} = (\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*}), j \in B, c_j^* = \max_i c_{ij} \tag{7.8}$$

eşitliğinden hesaplanmaktadır. B fayda kriter kümesini, C ise maliyet kriterini göstermektedir. Normalize edilmiş fuzzy karar matrisi, karar kriterinin fayda kriteri olması durumunda her sütundaki elemanların, bu sütundaki elemanların üçüncü bileşenleri bazında en büyük değere bölünmesiyle elde edilir. Normalizasyon işlemi, normalize edilmiş üçgen bulanık sayıların [0,1] aralığında olması özelliğini korur.

Adım 4: Her bir karar kriterinin farklı ağırlıkları göz önünde bulundurularak ağırlıklı normalize edilmiş fuzzy karar matrisi,

$$\tilde{V} = [\tilde{V}_{ij}]_{m \times n} \tag{7.9}$$

şeklinde oluşturulur. Burada,

$$\tilde{V}_{ij} = \tilde{r}_{ij} \times \tilde{w}_j \tag{7.10}$$

eşitliğinden hesaplanır. Ağırlıklı normalize edilmiş fuzzy karar matrisi, normalize edilmiş fuzzy karar matrisi ile fuzzy ağırlıklar matrisinin çarpımıyla elde edilen matristir. Ağırlıklı normalize edilmiş fuzzy karar matrisine göre $\forall i, j$ için $\tilde{V}_{ij}$'nin elemanları normalize edilmiş üçgen fuzzy sayılarıdır ve $[0,1]$ aralığında yer alırlar.

Adım 5: Fuzzy pozitif ideal çözüm,

$$A^* = (\tilde{V}_1^*, \tilde{V}_2^*, \dots, \tilde{V}_n^*) \tag{7.11}$$

ve fuzzy negatif ideal çözüm,

$$A^- = (\tilde{V}_1^-, \tilde{V}_2^-, \dots, \tilde{V}_n^-) \tag{7.12}$$

olarak tanımlanır. Burada, $\tilde{v}_j^* = (1, 1, 1)$ ve $\tilde{v}_j^- = (0, 0, 0)$' dır. Karar kriteri sayısı kadar $(1, 1, 1)$ ve $(0, 0, 0)$ vardır. Her bir alternatifin fuzzy pozitif ve negatif ideal çözümlerden olan uzaklıkları sırasıyla,

$$d_i^* = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*), i = 1, 2, \dots, m \tag{7.13}$$

ve

$$d_i^- = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), i = 1, 2, \dots, m \tag{7.14}$$

eşitliklerinden hesaplanır. Burada $d(.,.)$ iki fuzzy sayı arasındaki uzaklığı göstermekte ve Vertex metodu yardımıyla hesaplanmaktadır.

İki üçgen fuzzy sayı $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere bu sayılar arasındaki uzaklığın Vertex metodu ile hesaplanışı,

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sqrt{\frac{1}{3}[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2]} \tag{7.15}$$

biçimindedir.

Adım 6: Yakınlık katsayısı,

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^* + d_i^-}, i = 1, 2, \dots, m \tag{7.16}$$

eşitliğinden hesaplanır. Yakınlık katsayıları 0 ile 1 arasında bir değer alır ve yakınlık katsayısı ile alternatiflerin sıralaması yapılır. Yakınlık katsayısının büyük olması alternatifin karar vericiler tarafından tercih edilmesinin bir göstergesi olarak tanımlanabilir.

7.3 Prostat Kanser Riski Teşhisi için Soft Örtü Yaklaşımların Bir Uygulaması

Feng (2011), çok kriterli grup karar verme problemlerinde soft rough yaklaşımların bir uygulamasını vermiştir ve yöntemi, daha güvenilir biçimde en uygun nesneyi seçmek için imkan tanımıştır. Bu bölümde, prostat kanser riski teşhisi için Feng (2011)'in yönteminde II. tip soft örtü yaklaşımları kullanılmış ve hastaların PSA, prostat hacmi (PV) ve yaş verileri kullanılarak prostat kanser riski olan hastalara biyopsi uygulanıp uygulanmaması hakkında uygun bir seçim yapmak amaçlanmıştır. İsteğimiz, hastanın biyopsiye ihtiyacı olup olmadığını belirlemede uzman doktora yardımcı olmaktır.

Veri olarak, Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesine prostat şikayeti ile gelen 56 hasta seçilmiştir.

Çizelge 7.3.1. Bazı hastaların PSA, PV ve $yaş$ değerleri

U	PSA	PV	$Yaş$
u_5	100	44	58
u_{10}	7,9	41	54
u_{15}	38	23	59
u_{20}	90	55	67
u_{25}	100	62	60
u_{30}	50	40	80
u_{35}	6,04	33	58
u_{40}	100	47	75
u_{45}	11,5	50	65
u_{50}	100	46	83
u_{55}	15	55	71

Adım 1: $U = \{u_k : k = 1, \dots, 56\}$ evren ve $A = \{PSA, PV, Yaş\}$ parametre kümesi olsun. Şimdi, evrenin parametrelenmiş alt kümelerini elde edelim. Doktorun önerisiyle kandaki PSA değeri 38 ve üstü, yaşı 54 ve üstü ve de prostat hacmi (PV) 20 ve üstü olan hastalar seçilir. U üzerinde, hastaların PSA, PV ve $Yaş$ değerlerine bağlı olan $G = (F, A)$ soft kümesi üretilir. $G = (F, A)$ örtü soft küme olduğundan, $S = (U, C_G)$ soft örtü yaklaşım uzayıdır. Aşağıdakileri düşünelim:

$F(PSA) = \{u_4, u_5, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}, u_{19}, u_{20}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{28}, u_{30}, u_{31}, u_{33}, u_{37}, u_{38}, u_{40}, u_{43}, u_{46}, u_{50}, u_{52}, u_{54}, u_{56}\}$

$F(Yaş) = \{u_1, \dots, u_{20}, u_{22}, \dots, u_{40}, u_{43}, \dots, u_{56}\}$

$F(PV) = \{u_1, \dots, u_{56}\}$

Çizelge 7.3.2. Soft kümenin tablosal sunumu

u_k	PSA	PV	$Yaş$
u_5	1	1	1
u_{10}	0	1	1
u_{15}	1	1	1
u_{20}	1	1	1
u_{25}	1	1	1
u_{30}	1	1	1
u_{35}	0	1	1
u_{40}	1	1	1
u_{45}	0	1	1
u_{50}	1	1	1
u_{55}	0	1	1

Adım 2: $T = \{T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}\}$; PSA, PV ve $Yaş$ parametrelerine göre hastaları değerlendirecek olan uzman doktor grubu olsun. T uzman grubunun sonuçlarının ilk değerlendirmesi kullanılarak U üzerinde $G_1 = (V, T)$ soft kümesi üretilir. Her uzman $U = \{u_k: k = 1, \ldots, 56\}$'daki bütün kişileri incelemeye ihtiyaç duyar ve onun değerlendirme sonucu olarak sadece "en uygun alternatifi" belirtmesi rica edilecektir. Böylece her uzmanın ilk değerlendirme sonucu, veri olarak prostat şikayeti ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesine gelen 56 hastanın alt kümeleridir. Kolaylık için, $T = \{T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}\}$'deki bu uzmanların değerlendirmelerinin aynı öneme sahip olduğu varsayılır.

$$X_{d_1} = V(T_{d_1}) = \{u_4, u_5, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}, u_{19}, u_{20}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{28}, \ldots, u_{56}\}$$
$$X_{d_2} = V(T_{d_2}) = \{u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, \ldots, u_{56}\}$$
$$X_{d_3} = V(T_{d_3}) = \{u_1, \ldots, u_8, u_{11}, \ldots, u_{16}, u_{19}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}, \ldots, u_{56}\}$$

Adım 3: Burada, grup karar verme sürecini desteklemek için soft örtü tabanlı rough kümelerin nasıl kullanıldığı gösterilir. Soft yaklaşım uzayına göre uzman T_{d_i}'nin ilk değerlendirme sonucu X_{d_i}'nin soft rough yaklaşımlarını düşünelim.

Soft örtü yaklaşım uzayı olarak $S = (U, C_G)$ seçilir. (2.16) ve (2.17)'deki II. tip soft örtü yaklaşımları kullanılarak, U üzerinde $G_{1\_} = (V_\_, T)$ ve $G_1^- = (V^-, T)$ soft kümeleri elde edilir:

$$V_\_ : T \longrightarrow P(U), V_\_(T_{d_i}) = S_\_(X_{d_i}), i = 1,2,3 \tag{7.17}$$

$$V^- : T \longrightarrow P(U), V^-(T_{d_i}) = S_2^-(X_{d_i}), i = 1,2,3 \tag{7.18}$$

$G_{1\_}$ soft kümesi, T uzman doktor grubunun yüksek güvenilirlikli değerlendirme sonucunu verirken, G_1^- soft kümesi, düşük güvenilirlikli değerlendirme sonucu olarak görülebilir.

$G_{1\_}$ ve G_1^- soft kümelerini elde etmek için, üç uzman doktorun ilk değerlendirme sonuçlarının soft örtü alt ve üst yaklaşımları elde edilir.

$$V_\_(T_{d_1}) = S_\_(X_{d_1}) = F(PSA)$$
$$V_\_(T_{d_2}) = S_\_(X_{d_2}) = \emptyset$$
$$V_\_(T_{d_3}) = S_\_(X_{d_3}) = F(PSA)$$
$$V^-(T_{d_1}) = S_2^-(X_{d_1}) = F(PSA) \cup F(Yaş) = F(Yaş)$$
$$V^-(T_{d_2}) = S_2^-(X_{d_2}) = F(PSA) \cup F(Yaş) \cup F(PV) = F(PV) = U$$
$$V^-(T_{d_3}) = S_2^-(X_{d_3}) = F(PSA) \cup F(Yaş) = F(Yaş)$$

Adım 4: Uzman doktorların değerlendirme sonuçları, fuzzy kümeler açısından formülleştirilebilir. $X \subseteq U$ için, X'in karakteristik fonksiyonu χ_X ile gösterilir. $G_1 = (V, T)$ soft kümesine bağlı olarak, U'da μ_{G_1} fuzzy kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\mu_{G_1} : U \longrightarrow [0,1], u_k \longrightarrow \mu_{G_1}(u_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \chi_{V(T_{d_i})}(u_k) \tag{7.19}$$

Benzer olarak, $\mu_{G_{1\_}}$ ve $\mu_{G_1^-}$ fuzzy kümeleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\mu_{G_{1\_}} : U \longrightarrow [0,1], u_k \longrightarrow \mu_{G_{1\_}}(u_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \chi_{V_\_(T_{d_i})}(u_k) \tag{7.20}$$

$\mu_{G_1^-}: U \longrightarrow [0,1], u_k \longrightarrow \mu_{G_1^-}(u_k) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \chi_{V^-\left(T_{d_i}\right)}(u_k)$ (7.21)

öyle ki $V_-\left(T_{d_i}\right) = S_-(X_{d_i}), V^-\left(T_{d_i}\right) = S_2^-(X_{d_i})$ ve $k = 1, \dots, 56;\ i = 1, 2, 3.$

$G_{1\_} \subseteq G_1 \subseteq G_1^-$ olduğundan, $\mu_{G_{1\_}} \subseteq \mu_{G_1} \subseteq \mu_{G_1^-}$ olduğunu görmek kolaydır. $\mu_{G_{1\_}}$, μ_{G_1} ve $\mu_{G_1^-}$ fuzzy kümeleri sırasıyla "yüksek risk altında olan hastalar", "orta risk altında olan hastalar" ve "düşük risk altında olan hastalar" gibi bazı belirsiz kavramlar olarak yorumlanabilir.

Yukarıda elde edilen üyeliklerden, bu yolla $\mu_{G_{1\_}}$, μ_{G_1} ve $\mu_{G_1^-}$ fuzzy kümeleri elde edilir. Örneğin, ilk hasta için aşağıdaki fuzzy kümeler bulunur:

$\mu_{G_{1\_}}(1) = 0;\ \mu_{G_1}(1) = \frac{1}{3};\ \mu_{G_1^-}(1) = 1.$

Çizelge 7.3.3. Bazı hastaların üyeliklerinin tablosal sunumu

u_k	$\mu_{G_1^-}$	μ_{G_1}	$\mu_{G_{1\_}}$
u_5	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{10}	1	$\frac{1}{3}$	0
u_{15}	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{20}	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{25}	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{30}	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{35}	1	$\frac{1}{3}$	0
u_{40}	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{45}	1	$\frac{2}{3}$	0
u_{50}	1	1	$\frac{2}{3}$
u_{55}	1	$\frac{2}{3}$	0

Adım 5: $C = \{D, O, Y\}$ parametrelerin kümesi olsun öyle ki D, O ve Y sırasıyla "düşük risk altında", "orta risk altında" ve "yüksek risk altında" olmayı göstersin. Şimdi, U üzerinde $G_F = (\alpha, C)$ fuzzy soft kümesi tanımlanabilir öyle ki $\alpha(D) = \mu_{G_1^-}$, $\alpha(O) = \mu_{G_1}$ ve $\alpha(Y) = \mu_{G_{1\_}}$ olmak üzere $\alpha: C \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ şeklindedir.

Adım 6: $r_D + r_O + r_Y = 1$ olmak üzere $R = (r_D, r_O, r_Y)$ ağırlık vektörü verilsin,

$$v(u_k) = r_L \cdot \alpha(D)(u_k) + r_M \cdot \alpha(O)(u_k) + r_H \cdot \alpha(Y)(u_k) \tag{7.22}$$

$u_k \in U$ $(k = 1, \ldots, 56)$ alternatifinin ağırlıklı değerlendirme değeri olarak adlandırılır. Varsayalım ki, $R = (0.25, 0.5, 0.25)$ ağırlık vektörü olsun.

Çizelge 7.3.4. Bazı hastaların ağırlıklı değerlendirme değerleri

u_k	D	O	Y	$v(u_k)$
u_5	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{10}	1	$\frac{1}{3}$	0	0,41
u_{15}	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{20}	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{25}	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{30}	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{35}	1	$\frac{1}{3}$	0	0,41
u_{40}	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{45}	1	$\frac{2}{3}$	0	0,58
u_{50}	1	1	$\frac{2}{3}$	0,91
u_{55}	1	$\frac{2}{3}$	0	0,58

Son olarak, en yüksek kanser riskli hasta olarak $v(u_p) = maksimum\{v(u_k): k = 1, \dots, 56\}$ olmak üzere u_p hastası seçilir. Ağırlıklı değerlendirme değerlerine göre bütün alternatifler sıralandığında, en yüksek kanser riski olarak en büyük ağırlıklı değerlendirme değerine sahip olan hastalar seçilebilir.

Sonuçlar aşağıdaki şekildedir:

$$u_5 = u_8 = u_{12} = u_{13} = u_{15} = u_{16} = u_{19} = u_{20} = u_{23} = u_{25} = u_{27} = u_{28} = u_{30} = u_{31} = u_{33} = u_{37} = u_{38} = u_{40} = u_{43} = u_{46} = u_{50} = u_{52} = u_{54} = 0{,}91 > u_4 = u_{29} = u_{56} = 0{,}75 > u_2 = u_3 = u_6 = u_7 = u_{11} = u_{14} = u_{22} = u_{24} = u_{34} = u_{36} = u_{39} = u_{44} = u_{45} = u_{47} = u_{48} = u_{51} = u_{55} = 0{,}58 > u_1 = u_9 = u_{10} = u_{18} = u_{26} = u_{35} = u_{49} = u_{53} = 0{,}41 > u_{17} = u_{21} = u_{32} = u_{41} = u_{42} = 0{,}25$$

6. Adımda, bütün hastalar için ağırlıklı değerlendirme değerlerinin $\{0.91, 0.75, 0.58, 0.41, 0.25\}$ kümesi elde edildi. Bu değerler kullanılarak ve uzman doktorların önerileri ışığında aşağıdaki kurallar elde edilir.

Kural 1: Eğer bir hasta ağırlıklı değerlendirme değeri olarak 0.91'e sahipse, bu hasta çok yüksek derecede kanser riski altındadır.

Kural 2: Eğer bir hasta ağırlıklı değerlendirme değeri olarak 0.75'e sahipse, bu hasta yüksek derecede kanser riski altındadır.

Kural 3: Eğer bir hasta ağırlıklı değerlendirme değeri olarak 0.58'e sahipse, bu hasta orta derecede kanser riski altındadır.

Kural 4: Eğer bir hasta ağırlıklı değerlendirme değeri olarak 0.41'e sahipse, bu hasta düşük derecede kanser riski altındadır.

Kural 5: Eğer bir hasta ağırlıklı değerlendirme değeri olarak 0.25'e sahipse, bu hasta çok düşük derecede kanser riski altındadır.

Bu durumda, kural kümeleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$R_1 = \{u_5, u_8, u_{12}, u_{13}, u_{15}, u_{16}, u_{19}, u_{20}, u_{23}, u_{25}, u_{27}, u_{28}, u_{30}, u_{31}, u_{33}, u_{37}, u_{38}, u_{40},$
$u_{43}, u_{46}, u_{50}, u_{52}, u_{54}\}$
$R_2 = \{u_4, u_{29}, u_{56}\}$
$R_3 = \{u_2, u_3, u_6, u_7, u_{11}, u_{14}, u_{22}, u_{24}, u_{34}, u_{36}, u_{39}, u_{44}, u_{45}, u_{47}, u_{48}, u_{51}, u_{55}\}$
$R_4 = \{u_1, u_9, u_{10}, u_{18}, u_{26}, u_{35}, u_{49}, u_{53}\}$
$R_5 = \{u_{17}, u_{21}, u_{32}, u_{41}, u_{42}\}$

Bu bölümde, Feng (2011)'in çok kriterli grup karar verme yönteminden esinlenerek prostat kanser riskinin teşhisi için bir tahmin sistemi tasarlanmıştır. Bu yöntemde biyopsi, çok yüksek ve yüksek derecede kanser riski altında olan hastalara uygulanmalıdır. Orta derecede risk altında olan hastalar için biyopsi gereksizdir fakat bunlar uzman bir doktorun gözetimi altında olmalıdırlar. Düşük ve çok düşük derecede prostat kanser riski altındaki hastalar için biyopsi de, doktor takibi de gereksizdir. Bu nedenle biyopsi, R_1 ve R_2 kümelerindeki hastalar için gereklidir. Yani bizim sistemimizde 26 hastaya biyopsi uygulanmalıdır. Fakat tıp fakültesinde 56 hastaya birden biyopsi uygulanmış ve bunlardan sadece 23'ünün kanser olduğu görülmüştür. Bizim amacımız, hastaya biyopsinin gerekli olup olmadığına karar vermede doktora yardımcı olmaktır.

7.4 Prostat Kanserinin Tıbbi Teşhisi için Karşılaştırmalı Bir Çalışma

Bu bölümde, hastaların PSA, $fPSA$, $Hacim$ (PV) ve $Yaş$ verileri kullanılarak biyopsi uygulanması için en uygun seçeneğin elde edilmesi amaçlanmıştır. Veri olarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Tıp Fakültesi'ne prostat şikayeti ile gelen 78 hasta seçilmiştir.

Çizelge 7.4.1. Bazı hastaların PSA, $fPSA$, PV ve $yaş$ değerleri

U	PSA	$fPSA$	PV	$Yaş$
u_{15}	81	21	43	68
u_{30}	27	7	28	51
u_{45}	82	22	24	75
u_{60}	96	23	32	65
u_{75}	83	20	47	75

YÖNTEM 1: Feng (2011)'in yönteminin 3. adımında (2.14) ve (2.15)'deki I. tip soft örtü yaklaşımları kullanılarak bir çok kriterli grup karar verme yöntemi verilmiştir (Yüksel vd., 2014). $U = \{u_k : k = 1, \dots, 78\}$ evren kümesi, $E = \{PSA, fPSA, PV, Yaş\}$ belirtilerin kümesi ve $T = \{T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}\}$ belirtilere göre hastaları değerlendiren uzman doktor grubu olsun. T'deki uzmanların değerlendirmelerinin aynı öneme sahip olduğu varsayılır. Yüksel vd. (2014) tarafından yapılan çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$u_1 = u_4 = u_6 = u_7 = u_9 = u_{11} = u_{13} = u_{15} = u_{16} = u_{18} = u_{20} = u_{22} = u_{23} = u_{25}$$
$$= u_{26} = u_{28} = u_{29} = u_{31} = u_{33} = u_{34} = u_{36} = u_{37} = u_{39} = u_{40} = u_{42} = u_{43} = u_{45}$$
$$= u_{46} = u_{47} = u_{48} = u_{49} = u_{52} = u_{53} = u_{55} = u_{56} = u_{58} = u_{60} = u_{62} = u_{64} = u_{66}$$

$= u_{68} = u_{70} = u_{72} = u_{73} = u_{75} = u_{77} = 0{,}83 > u_{41} = u_{51} = 0.75 > u_{19} = u_{74}$
$= 0.67 > u_2 = u_{78} = 0.58 > u_{63} = u_{71} = 0.50 > u_3 = u_8 = u_{17} = u_{24} = u_{54} = u_{67}$
$= u_{76} = 0.42 > u_5 = u_{10} = u_{12} = u_{14} = u_{21} = u_{27} = u_{32} = u_{35} = u_{38} = u_{44} = u_{50}$
$= u_{61} = u_{65} = u_{69} = 0{,}25 > u_{30} = u_{57} = u_{59} = 0$

8 farklı ağırlıklı değerlendirme değeri bulunmuş ve hastaların bu değerlerinin aritmetik ortalaması 0.64 elde edilmiştir. Bu değer de göz önünde bulundurularak uzman doktorların önerileri ışığında biyopsi işleminin uygulanması gereken hastaların kümesi B_1 aşağıda verilmiştir.

$B_1 = \{u_1, u_4, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{13}, u_{15}, u_{16}, u_{18}, u_{19}, u_{20}, u_{22}, u_{23}, u_{25}, u_{26}, u_{28}, u_{29}, u_{31},$
$u_{33}, u_{34}, u_{36}, u_{37}, u_{39}, u_{40}, u_{41}, u_{42}, u_{43}, u_{45}, u_{46}, u_{47}, u_{48}, u_{49}, u_{51}, u_{52}, u_{53}, u_{55}, u_{56}, u_{58},$
$u_{60}, u_{62}, u_{64}, u_{66}, u_{68}, u_{70}, u_{72}, u_{73}, u_{74}, u_{75}, u_{77}\}$

YÖNTEM 2: Chen (2000), TOPSIS yöntemini fuzzy alanına genişletmek için sistematik bir yaklaşım vermiştir. Biz bu yöntemi, prostat kanser riski olan hastalara biyopsi uygulanıp uygulanmaması konusunda en uygun seçimi yapmak amacıyla bir tıp probleminde kullandık. $U = \{u_k : k = 1, \dots, 78\}$ hastaların kümesi olsun.

Adım 1: Alanında uzman 3 doktordan karar verici grup oluşturulur ve kriterler olarak hastalık belirtileri tanımlanır. Doktorların $D = \{D_1, D_2, D_3\}$ kümesini ve belirtilerin $S = \{s_1 = PSA, s_2 = fPSA, s_3 = Hacim\ (PV), s_4 = Yaş\}$ kümesini düşünelim.

Adım 2: Çizelge 7.2.1. ve Çizelge 7.2.2.'deki dilsel değişkenler kullanılarak her bir doktora göre belirtilerin önem ağırlıkları ve belirtilere göre hastaların değerlendirmeleri belirlenir.

Çizelge 7.4.2. Belirtilerin önem ağırlıkları

	D_1	D_2	D_3
PSA	(0.9,1,1)	(0.5,0.7,0.9)	(0.5,0.7,0.9)
$fPSA$	(0.5,0.7,0.9)	(0.9,1,1)	(0.3,0.5,0.7)
PV	(0.3,0.5,0.7)	(0.5,0.7,0.9)	(0.9,1,1)
$Yaş$	(0.5,.07,.09)	(0.3,0.5,0.7)	(0.3,0.5,0.7)

Çizelge 7.4.3. Bütün belirtiler altında bazı hastaların değerlendirmeleri

Belirtiler	Hastalar	Doktorlar		
		D_1	D_2	D_3
PSA	u_{15}	(8,10,10)	(6,8,10)	(6,8,10)
	u_{30}	(0,2,4)	(0,0,2)	(0,0,2)
	u_{45}	(8,10,10)	(6,8,10)	(6,8,10)
	u_{60}	(9,10,10)	(8,10,10)	(8,10,10)
	u_{75}	(8,10,10)	(6,8,10)	(6,8,10)
$fPSA$	u_{15}	(8,10,10)	(9,10,10)	(6,8,10)
	u_{30}	(0,0,2)	(0,2,4)	(0,0,2)
	u_{45}	(8,10,10)	(9,10,10)	(6,8,10)
	u_{60}	(8,10,10)	(9,10,10)	(8,10,10)
	u_{75}	(8,10,10)	(9,10,10)	(6,8,10)
PV	u_{15}	(3,5,7)	(6,8,10)	(8,10,10)
	u_{30}	(0,2,4)	(3,5,7)	(6,8,10)
	u_{45}	(0,2,4)	(3,5,7)	(6,8,10)
	u_{60}	(0,2,4)	(3,5,7)	(6,8,10)
	u_{75}	(3,5,7)	(6,8,10)	(8,10,10)
$Yaş$	u_{15}	(8,10,10)	(6,8,10)	(6,8,10)
	u_{30}	(0,2,4)	(0,0,2)	(0,0,2)
	u_{45}	(9,10,10)	(8,10,10)	(8,10,10)
	u_{60}	(8,10,10)	(6,8,10)	(6,8,10)
	u_{75}	(9,10,10)	(8,10,10)	(8,10,10)

Adım 3: Hasta-belirti matrisi olarak adlandırılan $\tilde{P} = [\tilde{p}_{ij}]_{78\times 4}$ fuzzy karar matrisi oluşturulur öyle ki $\tilde{p} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ bir üçgen fuzzy sayıdır. Örneğin; $s_1 = PSA$ belirtisi altında u_{15} hastasının $\tilde{p}_{15,1}$ değeri Çizelge 7.4.3.'ten şu şekilde hesaplanır:

$$\tilde{p}_{15,1} = \frac{1}{3}[(8,10,10) + (6,8,10) + (6,8,10)] = (6.67,8.67,10).$$

Diğer hastaların $\tilde{p}_{ij}$ değerleri de benzer şekilde bulunur ve $\tilde{P}$ matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\tilde{P} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ u_{15} \\ \vdots \\ u_{30} \\ \vdots \\ u_{45} \\ \vdots \\ u_{60} \\ \vdots \\ u_{75} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{cccc} PSA & fPSA & PV & Yaş \\ \left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6.67,8.67,10) & (7.67,9.33,10) & (5.67,7.67,9) & (6.67,8.67,10) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0,0.67,2.67) & (0,0.67,2.67) & (3,5,7) & (0,0.67,2.67) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6.67,8.67,10) & (7.67,9.33,10) & (3,5,7) & (8.33,10,10) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (8.33,10,10) & (8.33,10,10) & (3,5,7) & (6.67,8.67,10) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6.67,8.67,10) & (7.67,9.33,10) & (5.67,7.67,9) & (8.33,10,10) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right] \end{array}$$

Adım 4: Belirti-ağırlık matrisi olarak adlandırılan $\tilde{Q}$ fuzzy ağırlıklar matrisi oluşturulur. Örneğin; $\widetilde{w}_1$ değeri Çizelge 7.4.2.'den aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\widetilde{w}_1 = \frac{1}{3}[(0.9,1,1) + (0.5,0.7,0.9) + (0.5,0.7,0.9)] = (0.63,0.8,0.93).$$

$$\tilde{Q} = \begin{array}{c} \\ PSA \\ fPSA \\ PV \\ Yaş \end{array} \begin{array}{c} \widetilde{W} \\ \left[\begin{array}{c} (0.63,0.8,0.93) \\ (0.57,0.73,0.87) \\ (0.57,0.73,0.87) \\ (0.37,0.57,0.77) \end{array}\right] \end{array}$$

Adım 5: $\tilde{P}$ matrisinin her sütunundaki elemanların, bu sütundaki elemanların üçüncü bileşenleri bazında en büyük değere bölünmesiyle normalize edilmiş hasta-belirti matrisi $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{78\times 4}$ elde edilir. (PSA sütunu için $maksimum(c_{ij}) = 10$, $fPSA$ sütunu için $maksimum(c_{ij}) = 10$, PV sütunu için $maksimum(c_{ij}) = 10$, $Yaş$ sütunu için $maksimum(c_{ij}) = 10$ dur.) Örneğin; $s_1 = PSA$ belirtisi altında u_{15} hastasının $\tilde{r}_{15,1}$ değeri

$$\tilde{r}_{15,1} = \left(\frac{6.67}{10}, \frac{8.67}{10}, \frac{10}{10}\right) = (0.667,0.867,1)$$

şeklinde hesaplanır.

$$\tilde{R} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ u_{15} \\ \vdots \\ u_{30} \\ \vdots \\ u_{45} \\ \vdots \\ u_{60} \\ \vdots \\ u_{75} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} PSA & fPSA & PV & Ya\c{s} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.667,0.867,1) & (0.767,0.933,1) & (0.567,0.767,0.9) & (0.667,0.867,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0,0.067,0.267) & (0,0.067,0.267) & (0.3,0.5,0.7) & (0,0.067,0.267) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.667,0.867,1) & (0.767,0.933,1) & (0.3,0.5,0.7) & (0.833,1,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.833,1,1) & (0.833,1,1) & (0.3,0.5,0.7) & (0.667,0.867,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.667,0.867,1) & (0.767,0.933,1) & (0.567,0.767,0.9) & (0.833,1,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Adım 6: Ağırlıklı normalize edilmiş hasta-belirti matrisi $\tilde{V}$ oluşturulur. Örneğin; $\tilde{v}_{15,1}$ değeri

$$\tilde{v}_{15,1} = \tilde{r}_{15,1} \cdot \tilde{w}_1 = (0.667,0.867,1) \cdot (0.63,0.8,0.93) = (0.42,0.694,0.93)$$

şeklinde bulunur.

$$\tilde{V} = \begin{array}{c} \\ \vdots \\ u_{15} \\ \vdots \\ u_{30} \\ \vdots \\ u_{45} \\ \vdots \\ u_{60} \\ \vdots \\ u_{75} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} PSA & fPSA & PV & Ya\c{s} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.42,0.694,0.93) & (0.437,0.681,0.87) & (0.323,0.56,0.783) & (0.247,0.494,0.77) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0,0.054,0.248) & (0,0.049,0.232) & (0.171,0.365,0.609) & (0,0.038,0.206) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.42,0.694,0.93) & (0.437,0.681,0.87) & (0.171,0.365,0.609) & (0.308,0.57,0.77) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.525,0.8,0.93) & (0.475,0.73,0.87) & (0.171,0.365,0.609) & (0.247,0.494,0.77) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0.42,0.694,0.93) & (0.437,0.681,0.87) & (0.323,0.56,0.783) & (0.308,0.57,0.77) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

Adım 7: Fuzzy pozitif ideal çözüm $A^* = [(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)]$ ve fuzzy negatif ideal çözüm $A^- = [(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0),(0,0,0)]$ şeklinde tanımlanır.

Adım 8: Her bir hastanın fuzzy pozitif ve negatif ideal çözümlerden olan uzaklıkları hesaplanır. Örneğin; d_{15}^* ve d_{15}^- aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$d_{15}^{*} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(1-0.42)^2+(1-0.694)^2+(1-0.93)^2\right]} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[(1-0.437)^2+(1-0.681)^2+(1-0.87)^2\right]} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[(1-0.323)^2+(1-0.56)^2+(1-0.783)^2\right]} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[(1-0.247)^2+(1-0.494)^2+(1-0.77)^2\right]} = 1.785$$

ve

$$d_{15}^{-} = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0-0.42)^2+(0-0.694)^2+(0-0.93)^2\right]} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0-0.437)^2+(0-0.681)^2+(0-0.87)^2\right]} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0-0.323)^2+(0-0.56)^2+(0-0.783)^2\right]} + \sqrt{\frac{1}{3}\left[(0-0.247)^2+(0-0.494)^2+(0-0.77)^2\right]} = 2.533\,.$$

Çizelge 7.4.4. Bazı hastaların uzaklık ölçümleri

	d^{*}	d^{-}
u_{15}	1.785	2.533
u_{30}	3.478	0.826
u_{45}	1.894	2.402
u_{60}	1.832	2.451
u_{75}	1.632	2.567

Adım 9: Her hastanın yakınlık katsayısı hesaplanır. Örneğin; u_{15} hastasının yakınlık katsayısı CC_{15} şu şekilde hesaplanır:

$$CC_{15} = \frac{d_{15}^{-}}{d_{15}^{*}+d_{15}^{-}} = 0.587.$$

Çizelge 7.4.5. Bazı hastaların yakınlık katsayıları

	CC_i
u_{15}	0.587
u_{30}	0.192
u_{45}	0.559
u_{60}	0.572
u_{75}	0.611

Yakınlık katsayılarına göre 78 hastanın derecelendirme sırası aşağıdaki şekildedir:

$$u_{43} = u_{52} = 0.646 > u_{72} = 0.642 > u_{29} = 0.634 > u_{70} = 0.623 > u_{13} = 0.622$$
$$> u_{55} = 0.621 > u_{40} = 0.614 > u_{75} = 0.611 > u_{36} = 0.605 > u_{11} = 0.603 > u_{42}$$
$$= 0.599 > u_{16} = u_{28} = 0.597 > u_{15} = 0.587 > u_{23} = u_{64} = 0.583 > u_{25} = u_{26}$$
$$= u_{33} = 0.581 > u_{48} = 0.575 > u_{58} = u_{60} = u_{68} = 0.572 > u_{53} = 0.561 > u_{73}$$
$$= 0.560 > u_{45} = 0.559 > u_{66} = 0.556 > u_7 = 0.550 > u_{20} = 0.543 > u_{39} = u_{46}$$
$$= 0.536 > u_{37} = 0.535 > u_{18} = 0.530 > u_{34} = 0.523 > u_{31} = 0.520 > u_{74}$$
$$= 0.519 > u_{22} = 0.498 > u_{77} = 0.497 > u_9 = u_{56} = 0.495 > u_6 = u_{47} = 0.487$$
$$> u_1 = u_4 = u_{49} = u_{62} = u_{63} = 0.486 > u_{78} = 0.479 > u_{35} = 0.466 > u_{32} = u_{51}$$
$$= u_{76} = 0.457 > u_{19} = u_{71} = 0.448 > u_2 = u_{24} = 0.438 > u_{41} = 0.436 > u_8$$
$$= u_{17} = 0.434 > u_{54} = 0.428 > u_{10} = 0.404 > u_{21} = u_{61} = u_{67} = 0.369 > u_3$$
$$= u_{65} = 0.363 > u_5 = 0.339 > u_{14} = 0.324 > u_{27} = 0.265 > u_{44} = 0.264 > u_{12}$$
$$= u_{50} = u_{69} = 0.261 > u_{57} = 0.235 > u_{38} = 0.225 > u_{30} = 0.192 > u_{59} = 0.187$$

54 farklı yakınlık katsayısı değeri bulunmuş ve hastaların bu değerlerinin aritmetik ortalaması 0.472 elde edilmiştir. Bu değer de göz önünde bulundurularak uzman doktorların önerileri ışığında biyopsi işleminin uygulanması gereken hastaların kümesi B_2 aşağıda verilmiştir.

$$B_2 = \{u_{43}, u_{52}, u_{72}, u_{29}, u_{70}, u_{13}, u_{55}, u_{40}, u_{75}, u_{36}, u_{11}, u_{42}, u_{16}, u_{28}, u_{15}, u_{23}, u_{64}, u_{25},$$
$$u_{26}, u_{33}, u_{48}, u_{58}, u_{60}, u_{68}, u_{53}, u_{73}, u_{45}, u_{66}, u_7, u_{20}, u_{39}, u_{46}, u_{37}, u_{18}, u_{34}, u_{31}, u_{74}, u_{22},$$
$$u_{77}, u_9, u_{56}, u_6, u_{47}, u_1, u_4, u_{49}, u_{62}, u_{63}, u_{78}\}$$

Bu bölümde; hastaların değerlendirilmesi için; birden fazla kriter (hastalık belirtisi) ve karar vericiye dayalı değerlendirmeleri gerektiren ve son yıllarda sıkça kullanılan çok kriterli karar verme yöntemlerinden, çok kriterli grup karar verme ve fuzzy TOPSIS yöntemleri kullanılarak biyopsi kararı için farklı yaklaşımlar sergilenmeye çalışılmıştır. Hastaların değerlendirilmesi için; prostat spesifik antijen (PSA), serbest prostat spesifik antijen (fPSA), prostat hacmi (PV) ve yaş olmak üzere 4 hastalık belirtisi ve karar vericiler olarak 3 uzman doktor belirlenmiştir.

Çok kriterli grup karar verme ve fuzzy TOPSIS yöntemleriyle elde edilen sonuçlar birbirine çok yakındır. Biyopsi işleminin uygulanması gereken hasta sayısı çok kriterli grup karar verme yöntemine göre 50 ve fuzzy TOPSIS yöntemine göre 49'dur. Her iki grupta ortak olan 47 hasta vardır ve bunlardan 44'ü Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesi'nde yapılan biyopsi sonucunda kanser teşhisi konulan hastalardır. Yani, her iki yöntemde de başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Bu durumda, ilk olarak aklımıza "Hangi yöntem daha uygundur?" sorusu gelmektedir. Biz fuzzy TOPSIS yönteminin daha avantajlı olduğunu düşünüyoruz. Çünkü hasta sayısının az olmasının yanında hastalar arasında bir sıralama yapılabilmektedir. Böylece ilk olarak biyopsi uygulanması gereken hastaları tahmin edebiliriz. Fakat çok kriterli grup karar verme yönteminde böyle bir avantaja sahip değiliz.

BÖLÜM VIII

SONUÇLAR

Bu çalışmada problemler beş ayrı bölüm altında ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, soft topolojik uzaylarda soft komşuluk özellikleri çalışılmış ve soft süzgeç tanımı verilip bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca soft süzgeç yardımıyla soft topoloji kurulmuştur.

Dördüncü bölümde, soft genelleştirilmiş kapalı (açık) küme, soft regüler açık (kapalı) küme, soft regüler genelleştirilmiş kapalı (açık) küme, soft A-küme, soft t-küme, soft B-küme, soft α^*-küme, soft C-küme, soft AB-küme ve soft αAB-küme kavramları ve bunların temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu soft kümeler arasındaki ilişkiler ters örnekler yardımıyla araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, soft A-sürekli, soft B-sürekli, soft C-sürekli, soft AB-sürekli ve soft αAB-sürekli fonksiyon tanımları ile bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca soft sürekliliğin çeşitli dağılımları elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, Zakari vd. (2016) tarafından verilen zayıf soft yapı kavramı üzerine çalışılmaya devam edilmiş ve $\alpha(\widetilde{w})$, $\pi(\widetilde{w})$, $\sigma(\widetilde{w})$, $\beta(\widetilde{w})$, $\rho(\widetilde{w})$, $r(\widetilde{w})$ yapıları ile özellikleri çalışılmıştır.

Yedinci bölümde, prostat kanseri teşhisi için çok kiterli karar verme yöntemlerinde nümerik örnekler verilmiştir. İlk olarak, Feng (2011)'in çok kriterli grup karar verme yönteminde verileri Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesi'nden alınan 56 hasta için bir uygulama sunulmuştur. Daha sonra, yine Necmettin Erbakan Üniversitesi Meram Tıp Fakültesi'nden alınan 78 hastanın verileri hem Feng (2011)'in yöntemine hem de Chen (2000)'in Fuzzy TOPSIS yöntemine uygulanıp sonuçları tartışılmıştır.

Bu çalışmanın sonucunda şu öneriler verilebilir. Bundan sonraki dönemlerde, soft topolojik uzaylarda yeni soft küme ve soft süreklilik çeşitleri çalışılıp var olanlarla aralarındaki ilişkiler ve de soft sürekliliğin farklı dağılımları incelenebilir. Zayıf soft yapılardan daha genel olan genelleştirilmiş zayıf soft yapılar tanımlanıp burada ayırma aksiyomları araştırılabilir. Ayrıca, prostat kanserinin teşhisi için çok kriterli karar verme yöntemleriyle farklı tahmin sistemleri oluşturulabilir ve bu çalışmada mevcut olanlarla karşılaştırılıp doktorlara yardımcı olmak amacıyla sonucu en uygun olanı seçilebilir.

KAYNAKLAR

Akdağ, M. and Özkan, A., "Soft α-open sets and soft α-continuous functions", ***Abstract and Applied Analysis***, Article ID 891341, 7 pages, 2014.

Aktaş, H. and Çağman, N., "Soft sets and soft groups", ***Information Sciences*** 77, 2726-2735, 2007.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W. and Shabir, M., "On some new operations in soft set theory", ***Computers & Mathematics with Applications*** 57(9), 1547-1553, 2009.

Arockiarani, I. and Arokialancy, A., "Generalized soft gβ-closed sets and soft gsβ-closed sets in soft topological spaces", ***International Journal of Mathematical Archive*** 4(2), 1-7, 2013.

Aygünoğlu, A. and Aygün, H., "Some notes on soft topological spaces", ***Neural Comput. Appl.*** 21(1), 113-119, 2012.

Benecchi, L., "Neuro-fuzzy system for prostate cancer diagnosis", ***Urology*** 68(2), 357-361, 2006.

Bryniarski, E., "A calculus of rough sets of the first order", ***Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*** 36, 71-77, 1989.

Buckley, J.J., "Fuzzy hierarchical analysis", ***Fuzzy Sets and Systems*** 17, 233-247, 1985.

Catolona, W.J., Partin, A.W., Slawin, K.M., Brawer, M.K., Flanigan, R.C., Patel, A. et al., "Use of the percentage of free prostatespecific antigen to enhance differentiation of prostate cancer from benign prostatic disease: A prospective multicenter clinical trial", ***Journal of American Medical Association*** 279, 1542-1547, 1998.

Chen-Tung, C., “Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment”, ***Fuzzy Sets and Systems*** 114, 1-9, 2000.

Chen, B., “Soft semi-open sets and related properties in soft topological spaces”, ***Applied Mathematics & Information Sciences*** 7(1), 287-294, 2013.

Çağman, N. and Enginoğlu, S., “Soft set theory and uni-int decision making”, ***Eur. J. Oper. Res.*** 207, 848-855, 2010.

Çağman, N., Karataş, S. and Enginoğlu, S., “Soft topology”, ***Comput. Math. Appl.*** 62, 351-358, 2011.

Ecer, F., Fuzzy TOPSIS metoduyla insan kaynağı seçiminde adayların değerlemesi ve bir uygulama, Yayınlanmamış Doktora Tezi, ***Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Afyon, 2007.

Feng, F., Jun, Y.B. and Zhao, X., “Soft semirings”, ***Comput. Math. Appl.*** 56(10), 2621-2628, 2008.

Feng, F., Li, C., Davvaz, B. and Ali, M.I., “Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach”, ***Soft Computing*** 14(9), 899-911, 2010.

Feng, F., Liu, X., Violeta, F.L. and Young, J.B., “Soft sets and soft rough sets”, ***Inform. Sci.*** 181, 1125-1137, 2011.

Feng, F., “Soft rough sets applied to multicriteria group decision making”, ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*** 2(1), 69-80, 2011.

Ge, X. and Yang, S., “Investigations on some operations of soft sets”, ***World Academy of Science, Engineering and Technology*** 5(3), 869-872, 2011.

Ge, X., Li, Z. and Ge, Y., “Topological spaces and soft sets”, ***Journal of Computational Analysis and Applications*** 13(5), 881-885, 2011.

Güzel Ergül, Z., Yüksel, Ş. and Tozlu, N., "On soft generalized preregular closed and open sets in soft topological spaces", ***Applied Mathematical Sciences*** 8(158), 7875-7884, 2014.

Hussain, S. and Ahmad, B., "Some properties of soft topological spaces", ***Comput. Math. Appl.*** 62, 4058-4067, 2011.

Hwang, C.L. and Yoon, K., Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications, ***Springer***, Berlin Heidelberg, 1981.

Kandil, A., Tantawy, O.A.E., El-Sheikh, S.A. and Abd El-latif, A.M., "γ-operation and decompositions of some forms of soft continuity in soft topological spaces", ***Ann. Fuzzy Math. Inform.*** 7(2), 181-196, 2014.

Kannan, K., "Soft Generalized Closed Sets in Soft Topological Spaces", ***Journal of Theoretical and Appl. Inform. Technology*** 37(1), 17-21, 2012.

Kaufmann, A. and Gupta, M.M., "Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications", ***Van Nostrand Reinhold***, New York, 1985.

Keles, A., Hasiloglu, A.S., Keles, A. and Aksoy, Y., "Neuro-fuzzy classification of prostate cancer using NEFCLASS-J", ***Computers in Biology and Medicine*** 37, 1617-1628, 2007.

Kharal, A. and Ahmad, B., "Mappings on soft classes", ***New Mathematics and Natural Computation*** 7(3), 471-481, 2011.

Mahanta, J. and Das, P.K., "On soft topological space via semi-open and semi-closed soft sets", ***Cornell University Library*** arXiv:1203.4133, 2012.

Maji, P.K., Biswas, R. and Roy, A.R., "Fuzzy soft sets", ***J. Fuzzy Math.*** 9(3), 589–602, 2001.

Maji, P.K., Roy, A.R. and Biswas, R., “An application of soft sets in a decision making problem”, ***Comput. Math. Appl.*** 44, 1077-1083, 2002.

Maji, P.K., Biswas, R. and Roy, A.R., “Soft Set Theory”, ***Comput. Math. Appl.*** 45, 555-562, 2003.

Majumdar, M. and Samanta, S.K., “Similarity measure of soft set”, ***New Math. Nat. Comput.*** 4(1), 1-12, 2008.

Metlin, C., Lee, F. and Drago, J., “The American Cancer Society National prostate cancer detection, project: Findings on the detection of early prostate cancer in 2425 men”, ***Cancer*** 67, 2949-2958, 1991.

Min, W.K., “A note on soft topological spaces”, ***Comput. Math. Appl.*** 62, 3524-3528, 2011.

Molodtsov, D., “Soft set theory-first results”, ***Comput. Math. Appl.*** 37, 19-31, 1999.

Molodtsov, D., The theory of soft sets, ***URSS Publishers***, Moscow, 2004.

Nguyen, H.P. and Kreinovich, V., “Fuzzy logic and its applications in medicine”, ***International Journal of Medical Informatics*** 62, 165-173, 2001.

Paksoy, T., Yapıcı Pehlivan, N. ve Özceylan, E., Bulanık Küme Teorisi, ***Hazar Matbaacılık***, Ankara, 2013.

Pawlak, Z., “Rough sets”, ***Int. J. Comput. Inf. Sci.*** 11, 341-356, 1982.

Pawlak, Z. and Skowron, A., Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence, ***John Wiley and Sons***, New York, 1994.

Pawlak, Z. and Skowron, A., “Rudiments of rough sets”, ***Inf. Sci.*** 177, 3-27, 2007.

Pazar Varol, B. and Aygün, H., “On soft Hausdorff spaces”, ***Ann. Fuzzy Math. Inform.*** 5(1), 15-24, 2013.

Pomykala, J.A., “Approximation operations in approximation space”, ***Bulletin of the Polish Academy of Sci. Math.*** 35(9-10), 653-662, 1987.

Rong, W., “The countabilities of soft topological spaces”, ***World Academy of Science, Engineering and Technology*** 6(8),952-955, 2012.

Sai, B.V.S.T. and Srinivasa Kumer, V., “On Soft Semi-Separability”, ***Int. Journal of Math. Analysis*** 7(54), 2663-2669, 2013.

Saritas, I., Allahverdi, N. and Sert, U., “A fuzzy expert system design for diagnosis of prostate cancer”, ***International Conference on Computer Systems and Technologies-CompSysTech 2003***, Sofia, Bulgaria, s. 345-351, 19-20 June, 2003.

Saritas, I., Ozkan, I.A. and Sert, U., “Prognasis of prostate cancer by artficial neural networks”, ***Expert Systems with Applications*** 37, 6646-6650, 2010.

Seker, H., Odetayo, M., Petrovic, D. and Naguib, R.N.G., “A fuzzy logic based method for prognostic decision making breast and prostate cancers”, ***IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*** 7, 114-122, 2003.

Shabir, M. and Naz, M., “On soft topological spaces”, ***Comput. Math. Appl.*** 61, 1786-1799, 2011.

Shin Egawa, M.D., ShipehiroSoh, M.D., Makoto Ohiri, M.D. Toyoaki Uchida, M.D., Kazuo Gohji, M.D., Akio Fujii, M.D. et al., “The ritio of free to total serum prostate specific antigen and its use in differential diagnosis of prostate carcinoma in Japan”, ***Cancer*** 79, 90-98, 1997.

Simsekler, T. and Yuksel, S., “Fuzzy Soft Topological Spaces”, ***Ann. Fuzzy Math. Inform.*** 5(1), 87-96, 2013.

Tozlu, N., Rough küme teorisinde topolojik yapılar, Yüksek Lisans Tezi, ***Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Konya, 2013.

Tozlu, N., Yuksel, S. and Dizman (Simsekler), T., "A Topological Approach to Soft Covering Approximation Space", ***International Journal of Mathematics Trends and Technology*** 29(1), 33-38, 2016.

Ural, G.F., Bulanık doğrusal programlama metodu kullanılarak bir sanayi kuruluşunda üretim planlama çalışmasının gerçekleştirilmesi, Yüksek Lisans Tezi, ***Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü***, Kocaeli, 2006.

Van Cangh, P.J., De Nayer, P., De Visches, L., Sauvage, P., Tombal, B., Lorge, F. et al., "Free to total prostate-specific antigen (PSA) ratio is superior to total PSA in differentiating benign prostate hypertrophy from prostate cancer", ***The prostate*** 29, 30-34, 1996.

Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Tozlu, N., "On Soft Compactness and Soft Seperation Axioms", ***2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications***, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, s. 375, 26-29 August, 2013.

Yuksel, S., Dizman, T., Yıldızdan, G. and Set, U., "Application of soft sets to diagnose the prostate cancer risk", ***J. Inequal. Appl.*** 229, 2013.

Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Güven, Z., "Soft Connected Spaces", ***International J. of Pure & Engg. Mathematics*** 2(3), 121-134, 2014.

Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z. and Tozlu, N., "Soft Covering Based Rough Sets and Their Application", ***The Scientific World Journal*** 2014, Article ID 970893, 9 pages, http:\\dx.doi:10.1155/2014/970893, 2014.

Zadeh, L.A., "Fuzzy sets", ***Inf. Control*** 8, 338-353, 1965.

Zadeh, L.A., "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", ***Inform. Sci.*** 8, 199-249, 1975.

Zakari, A.H., Ghareeb, A. and Omran, S., “On soft weak structures”, ***Soft Computing*** DOI 10.1007/s00500-016-2136-8, 2016.

Zhu, W. and Wang, F., “Reduction and axiomization of covering generalized rough sets”, ***Inform. Sci.*** 152(1), 217-230, 2003.

Zhu, W., “Topological approaches to covering rough sets”, ***Inform. Sci.*** 177, 1499-1508, 2007.

Zhu, W., “Relationship among basic concepts in covering based rough sets”, ***Inform. Sci.*** 179, 2478-2486, 2009.

Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W.K. and Atmaca, S., “Remarks on soft topological spaces”, ***Ann. Fuzzy Math. Inf.*** 3(2), 171-185, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

Naime Tozlu 20.05.1986 tarihinde İzmir'in Ödemiş ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini İzmir'de tamamlayıp 2006 yılında Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümü'ne girmeye hak kazandı. 2010 yılında buradan mezun olup 2010-2011 Öğretim yılında yüksek lisans ve pedagojik formasyon eğitimine başladı. Mayıs 2011'de pedagojik formasyon eğitimini Selçuk Üniversitesi'nde tamamladı. Aralık 2011'de Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı ve Haziran 2013'te yüksek lisans eğitimini Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda tamamlayıp Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmakta ve doktora eğitimine devam etmektedir.

TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından, 8 (sekiz) adet uluslararası makale ile 1 (bir) adet ulusal, 2 (iki) adet uluslararası bildiri ve 1 (bir) adet proje üretilmiştir. Bu üretilen çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., "On Soft Generalized Closed Sets in Soft Topological Spaces", ***Journal of Theoretical and Applied Information Technology*** 55(2), 273-279, 2013.

Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., "Soft Filter", ***Mathematical Sciences*** 8:119, DOI 10.1007/s40096-014-0119-4, 2014.

Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Güzel Ergül, Z., "Soft Regular Generalized Closed Sets in Soft Topological Spaces", ***International Journal of Mathematical Analysis*** 8(8), 355-367, 2014.

Tozlu, N., Yüksel, Ş. and Güzel Ergül, Z., "Soft C-sets and a Decomposition of Soft Continuity in Soft Topological Spaces", ***International Journal of Mathematics Trends and Technology*** 16(1), 58-69, 2014.

Yüksel, Ş., Tozlu, N. and Dizman, T.H., "An Application of Multicriteria Group Decision Making by Soft Covering Based Rough Sets", ***Filomat*** 29(1), 209-219, 2015.

Tozlu, N. and Yüksel, Ş., "Soft A-sets and Soft B-sets in Soft Topological Spaces", ***Mathematical Sciences and Applications E-Notes*** 5(2), 17-25, 2017.

Güzel Ergül, Z. and Tozlu, N., "Decompositions of soft continuity and soft AB-continuity", ***Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*** 14(5), 463-474, 2017.

Tozlu, N., Güzel Ergül, Z., Yüksel, Ş. and Kader, S., "A Note on Weak Soft Structures", ***International Journal of Mathematics Trends and Technology*** 44(3), 115-120, 2017.

Tozlu, N. ve Yüksel, Ş., "Örtü Tabanlı Soft Rough Kümeler", ***XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu***, Niğde Üniversitesi, Niğde, s. 59-60, 5-8 Eylül, 2012.

Tozlu, N., Yüksel, Ş. and Güzel Ergül, Z., "Soft Filter", ***2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications***, Sarajevo, Bosnia and Herzegouina, s. 369, 26-29 August, 2013.

Güzel Ergül, Z. and Tozlu, N., "Soft AB-Sets and Soft αAB-Sets in Soft Topological Spaces", ***6th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications***, Budapest, Hungary, s. 288-289, 15-18 August, 2017.

Arş. Gör. Dr. Zehra Güzel Ergül (Yürütücü) ve Arş. Gör. Naime TOZLU (Yardımcı Araştırmacı), "Soft Topolojik Uzaylar Üzerine", FEF.A3.16.020 [D6], Bütçe:7000TL, Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, 25 Mart 2016 – 14 Aralık 2017.