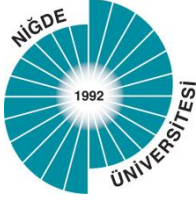


N. IRMAK, 2014



T.C.  
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

LİNEER REKÜRANSLARIN DİYAFONT ÜÇLÜSÜ

NURETTİN IRMAK

Aralık 2014

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



T.C.  
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

LİNEER REKÜRANSLARIN DİYAFONT ÜÇLÜSÜ

NURETTİN IRMAK

Doktora Tezi

Danışman  
Prof. Dr. Murat ALP

Aralık 2014

**Nurettin IRMAK** tarafından **Prof. Dr. Murat ALP** ve **Doç. Habil. Dr. Laszlo SZALAY** danışmanlığında hazırlanan “**Lineer Reküransların Diyafont Üçlüsü**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı**’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞCI



(Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Prof. Dr. Adnan TERCAN



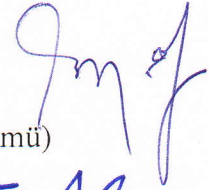
(Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN



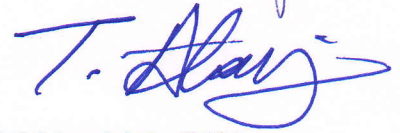
(Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Prof. Dr. Murat ALP



(Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY



(Abdullah Gül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Müh. Böl.)

**ONAY:**

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ....../...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun ....../...../20.... tarih ve ..... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

**Doç. Dr. Murat BARUT**  
**MÜDÜR**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Nurettin IRMAK

## ÖZET

### LİNEER REKÜRANSLARIN DİYAFONT ÜÇLÜSÜ

IRMAK, Nurettin

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Murat ALP  
İkinci Danışman : Doç. Habil. Dr. Laszlo SZALAY

Aralık 2014, 74 sayfa

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, lineer reküransların tanımı, ikinci mertebeden özel lineer reküranslar, diyafont m-lisinin tanımı ve konu ile ilgili literatür verilmiştir. İkinci bölümde, balans diyafont üçlüsü tanımlanıp, balans diyafont üçlüsünün olmadığı gösterilmiştir. Üçüncü bölümde,  $u_0 = 0$  ve  $u_1 = 1$  başlangıç koşulları altında,  $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$  lineer reküransını sağlayan dizinin diyafont üçlüsünün olmadığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde,  $k$  – periyodik dizilerin tanımı verilmiş ve dizi elemanları ile ilgili Binet formülleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü mertebeden pellans sayı dizisi tanımlanmış ve bu dizinin diyafont üçlüsünün olmadığı incelenmiştir. Son bölümde, yapılan çalışmaların literatüre katkıları ve bu konudaki önerileri verilmiştir.

*Anahtar Sözcükler:* lineer reküranslar, diyafont m-lisi, balans sayıları, pellans sayıları, Lucas dizisi.

## SUMMARY

### DIOPHANTINE TRIPLES OF LINEAR RECURRENCES

IRMAK, Nurettin

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Murat ALP

Co-Advisor : Assoc. Prof. Habil. Laszlo SZALAY

December 2014, 74 pages

This study consists of six sections. The definitions of linear recurrences and special second order linear recurrences, the definition of Diophantine  $m$ -tuples and the literature are given in the first section. In the second chapter, the definition of balancing Diophantine triples is presented and it is proven that there are no balancing Diophantine triples. In the third chapter, it is shown that there is no triple elements are in the sequence  $\{u_n\}$  such that  $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$  with initial conditions  $u_1 = 0$  and  $u_2 = 1$ . In the fourth chapter, the definition of  $k$ -periodic binary recurrence is given and its Binet type formula is obtained. The fourth order pellans sequence is defined and its diophantine triples is investigated in the fifth section. Finally, the supports to literature and suggestions are given in the sixth section.

*Keywords:* linear recurrences, diophantine  $m$ -tuples, balancing numbers, pellans numbers, Lucas sequence

## ÖN SÖZ

Bu doktora çalışmasında, lineer reküransların diyafont üçlüsü incelenmiştir. Öncelikle ikinci mertebeden lineer reküransların diyafont üçlüleri incelenmiş, ardında  $k$  – periyodik ikinci mertebeden lineer diziler yardımıyla dördüncü mertebeden pellans sayı dizileri tanımlanmış ve diyafont üçlüsü olup olmadığı incelenmiştir.

Doktora çalışmamın yürütülmesi esnasında, bana her türlü desteği sağlayan danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Murat ALP' e ve çalışmalarına yön veren, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen, ikinci danışmanım Sayın Doç. Dr. Habil. Laszlo SZALAY hocama ve doktora tez çalışmam esnasında tecrübelerinden faydalandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Tarık ATAY hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi, sadece bu çalışmam boyunca değil, tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babam Yakup IRMAK' a, annem Gülhan IRMAK' a ve hayat arkadaşım, eşim Hatice Esra IRMAK' a ithaf ediyorum.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
SUMMARY .....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ .....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	viii
SİMGE VE KISALTMALAR .....	ix
BÖLÜM I GİRİŞ .....	1
BÖLÜM II BALANS DİYAFONT ÜÇLÜSÜ .....	11
BÖLÜM III $u_n = A \cdot u_{n-1} - u_{n-2}$ TİPİNDEKİ LUCAS DİZİSİNİN DİYAFONT ÜÇLÜSÜ .....	25
BÖLÜM IV $k$ – PERİYODİK İKİNCİ MERTEBEDEN DİZİLER .....	39
4.1 İkinci Mertebeden İki Periyodik Reküranslar .....	44
BÖLÜM V PELLANS DİZİSİ VE DİYAFONT ÜÇLÜSÜ .....	46
5.1 Pellans Dizisi ve Özellikleri .....	46
BÖLÜM VI SONUÇLAR .....	67
KAYNAKLAR .....	69
ÖZGEÇMİŞ .....	72
TEZ ÇALIŞMASINDA ÜRETİLEN ESERLER .....	73

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1. Yavru ve olgun tavşanların aylara göre sayısı.....	2
Çizelge 1.2. Özel Horadam Dizileri.....	6
Çizelge 1.3. Özel $k$ . mertebeden diziler.....	7
Çizelge 5.1. $(k, l, z)$ değerleri I.....	65
Çizelge 5.2. $(k, l, z)$ değerleri II.....	66

## SİMGE VE KISALTMALAR

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\{B_n\}$	Balans sayı dizisi
$\{C_n\}$	Eş-balans sayı dizisi
$ebob(. , .)$	En büyük ortak bölen
$\{u_n\}$	Lucas dizisi
$\{v_n\}$	Eş-Lucas dizisi
$D(1) m$ -lisi	Diyafont $m$ -lisi
$\{F_n\}$	Fibonacci sayı dizisi
$\{L_n\}$	Lucas sayı dizisi
$\{P_n\}$	Pell sayı dizisi
$\{Q_n\}$	Eş-Pell sayı dizisi
$\mathbb{Z}[A]$	Katsayıları $\mathbb{Z}$ olan $A$ 'ya bağlı polinomlar kümesi
$u_n(A)$	$n \geq 2$ için, $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$ , $u_0 = 0$ ve $u_1 = 1$ eşitliğini sağlayan dizinin $n$ . terimi
$\{S_n\}$	Pellans sayı dizisi

# BÖLÜM I

## GİRİŞ

Bu bölümde, konu ile ilgili temel kavramlar, Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımı, üreteç fonksiyonu, binet tipi formül, çeşitli genelleştirilmeleri ve konuyla ilgili yapılan çalışmalar verilmiştir.

Sayılar teorisinde, önemli araştırma konularından biri sayıların karakterizasyonudur. Bu karakterizasyon sayıların birbirleriyle olan ilişkilerini, bağıntılarını incelemek demektir. Bu konuda verilebilecek en iyi örnek Fibonacci sayı dizisidir. Fibonacci sayı dizisi ikinci mertebeden bir indirgeme bağıntısıyla tanımlanır. Bu bağıntının tanımı ve bunla ilişkili olan diğer tanım ve uygulamalar bu bölümde verilmiştir.

### Tanım 1.1:

Dizinin her terimi önceki terimlerin bir fonksiyonu olarak tanımlanmış denkleme indirgeme bağıntısı denir (Nanda, 1985).

### Tanım 1.2:

$\{F_n\}$  Fibonacci sayı dizisini göstermek üzere,  $F_0 = 0$  ve  $F_1 = 1$  başlangıç koşulları altında,  $n \geq 2$  için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (1.1)$$

bağıntısını sağlayan sayılara Fibonacci sayıları denir (Koshy, 2001).

Fibonacci sayı dizisinin ilk birkaç terimi

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

sayılarıdır. Fibonacci sayıları 1202 yılında Fibonacci 'nin basılan *Liber Abaci* adlı kitabında, tavşanlarla ilgili aşağıdaki sorusundan ortaya çıkmıştır.

*“Kabul edelim ki, bir çifti erkek diğer çifti dişi olmak üzere iki çift yeni doğmuş tavşan var olsun.*

- 1- Her bir çift yavru tavşan 1 ay içinde olgunlaşıyor,
- 2- Her bir tavşan 1 ay içinde bir tavşan çifti doğuruyor,
- 3- Bu tavşanlar hiç ölmüyor.

şartları altında, 100. ay da kaç çift tavşan vardır?”

Bu problemde ele alınan düşünce tablo haline dönüştürüldüğünde

**Çizelge 1.1.** Yavru ve olgun tavşanların aylara göre sayısı

Çift sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	...
Yavru	0	1	1	2	3	5	8	...
Olgun	1	0	1	1	2	3	5	...
<b>Toplam</b>	1	1	2	3	5	8	13	...

elde edilir. Yukarıdaki tablodan da kolaylıkla görülebileceği gibi, tablonun toplam satırında verilen sayılar Fibonacci sayılarıdır.

Fibonacci ve diğer dizilerle ilgili özellikleri inceleyen en önemlilerden birisi François Edouard Anatole Lucas ‘dır. Lucas kendi ismiyle anılan Lucas dizisini ortaya atmıştır.

**Tanım 1.3:**

$\{L_n\}$  Lucas sayı dizisini göstermek üzere,  $L_0 = 2$  ve  $L_1 = 1$  başlangıç koşulları altında,  $n \geq 2$  için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (1.2)$$

bağıntısını sağlayan sayılara Lucas sayıları denir (Koshy, 2001).

Lucas sayısı dizisinin birkaç terimi şu şekildedir;

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18,...

Özel sayı dizileri arasındaki ilişkinin ne olduğunun araştırılması ve bu ilişkinin bulunması birçok bilim insanının araştırma konusunu oluşturmakla beraber sayılar

teorisinde iyi bir araştırma konusudur. Bu konuyla ilgili olarak en bilinen Fibonacci ve Lucas sayı dizileri arasındaki özellikler aşağıdaki gibidir:

- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$  (Cassini özelliği)
- $F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n+r+1} F_r^2$  (Catalan özelliği)
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$
- $F_n + L_n = 2F_{n+1}$
- $F_{n+m} = F_m L_n + F_n L_m$

Tez içerisindeki konu bütünlüğünü anlayabilmek için tez de sıklıkla kullanacağımız üreteç fonksiyon kavramı tezde önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle bu kavramı burada tanımlamak yerinde olacaktır.

**Tanım 1.4:**

Bir  $\{a_n\}$  dizisinin üreteç fonksiyonu  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  biçiminde verilir (Koshy, 2001).

Tanım 1.4 de ifade edilen üreteç fonksiyonları tanımında  $\{a_n\}$  dizisi yerine  $\{F_n\}$  dizisi alındığında,

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots + F_n x^n + \dots \tag{1.3}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir. Elde edilen üreteç fonksiyonun sırasıyla  $x$  ve  $x^2$  ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} x f(x) &= F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \dots + F_n x^{n+1} + \dots \\ x^2 f(x) &= F_0 x^2 + F_1 x^3 + F_2 x^4 + \dots + F_n x^{n+2} + \dots \end{aligned} \tag{1.4}$$

fonksiyonları elde edilir. (1.3) eşitliğinden (1.4) eşitliğini çıkartıldığında,

$$\begin{aligned} f(x) - x f(x) - x^2 f(x) &= F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 \\ &+ \dots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \dots \end{aligned} \tag{1.5}$$

fonksiyonu elde edilir. Eşitlik (1.5) de, Fibonacci sayı dizisinin başlangıç koşulları ve (1.1) indirgeme bağıntısı kullanılırsa,

$$f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = x$$

bulunur. Dolayısıyla Fibonacci sayı dizi için üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} \text{ olarak elde edilir.}$$

Benzer şekilde Lucas sayı dizilerinin indirgeme bağıntısı (1.2) ve başlangıç koşulları

$$L_0 = 2 \text{ ve } L_1 = 1 \text{ kullanılırsa, üreteç fonksiyonu } h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

olarak bulunur.

İndirgeme bağıntılarının çözümünde elde edilen terimlerin kapalı formu önemli olduğundan dolayı bu kapalı formun adlandırıldığı Binet formülü kavramı, aşağıdaki tanım ile verilir.

**Tanım 1.5:**

Bir indirgeme bağıntısı çözüldürken, dizinin  $n$ . teriminin kapalı formuna Binet formülü denir (Koshy, 2001).

Fibonacci sayı dizisinin indirgeme bağıntısı (1.1)' in karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ 'dır. Bu denklemin kökleri ise } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ olarak elde}$$

edilir. Elde edilen  $\alpha$  reel sayısı altın oran olarak bilinir (Koshy, 2001). Fibonacci sayı dizisinin her bir elemanı karakteristik denklemin köklerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğinden, bir  $n$  negatif olmayan tamsayısı için,

$$F_n = A \alpha^n + B \beta^n \tag{1.6}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte sırasıyla  $n=0$  ve  $n=1$  değerleri yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A\alpha + B\beta &= 1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi (1.7) nin katsayılar determinanı  $\beta - \alpha \neq 0$  olduğundan sistemin çözümü var ve tektir. Bu çözümler ise  $A = \frac{1}{\alpha - \beta}$  ve

$B = \frac{-1}{\alpha - \beta}$  olarak elde edilir. Bulunan bu değerler (1.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

Fibonacci sayı dizisinin elemanları için Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, Lucas dizisinin Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

İndirgeme dizileri arasında yapılan çalışmaların bir boyutu da, elde edilen özellikleri daha genel dizilere taşıyabilmektir. Bu konu ile ilgili en iyi bilinen Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin en genel hali olan ikinci mertebeden Horadam dizisidir. O halde burada Horadam dizisinin tanımını vermek yerinde olacaktır.

**Tanım 1.6:**

$H_0 = a$  ve  $H_1 = b$  başlangıç koşulları altında,  $n \geq 2$  ve  $a, b, P, Q \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,

$$H_n = PH_{n-1} - QH_{n-2} \tag{1.8}$$

bağıntısıyla elde edilen diziye Horadam dizisi denir (Horadam, 1965).

Horadam dizisinin Binet formülü,

$$H_n = \left( \frac{b-a\tau}{\sigma-\tau} \right) \sigma^n + \left( \frac{a\sigma-b}{\sigma-\tau} \right) \tau^n \quad (1.9)$$

biçiminde olup buradaki  $\sigma$  ve  $\tau$  sayıları  $x^2 - Px + Q = 0$  karakteristik denkleminin kökleridir.

Özel olarak  $a, b, P$  ve  $Q$  tamsayıları seçildiğinde karşılık gelen ve bilinen sayı dizileri şu şekildedir,

**Çizelge 1.2.** Özel Horadam Dizileri

$P$	$Q$	$a$	$b$	<i>Dizinin Gösterimi</i>	<i>Dizinin Adı</i>
$p$	$q$	0	1	$\{U_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi
$p$	$q$	2	$P$	$\{V_n\}$	Genelleştirilmiş Lucas Dizisi
1	-1	0	1	$\{F_n\}$	Fibonacci Dizisi
1	-1	2	1	$\{L_n\}$	Lucas Dizisi
2	-1	0	1	$\{P_n\}$	Pell Dizisi
2	-1	2	2	$\{p_n\}$	Pell-Lucas Dizisi
1	-2	0	1	$\{J_n\}$	Jakobsthal Dizisi
1	-2	2	1	$\{j_n\}$	Jakobsthal-Lucas Dizisi
6	1	0	1	$\{B_n\}$	Balans Dizisi

İndirgeme dizisinin mertebesinin genelleştirilmesi de başka bir genelleştirme yöntemidir. Yani  $k$ . mertebeden bir indirgeme dizisi

$$w_n = a_1 w_{n-1} + a_2 w_{n-2} + \dots + a_k w_{n-k} \quad (1.10)$$

olarak tanımlanır ve başlangıç koşulları da  $w_0, w_1, \dots, w_k$  biçimindedir.

Aşağıda verilen tabloda özel katsayı ve başlangıç koşulları altında bilinen diziler sunulmaktadır.

**Çizelge 1.3.** Özel  $k$ . mertebeden diziler

<i>Mertebesi</i>	<i>Başlangıç Koşulları</i>	<i>Katsayıları</i>	<i>Dizinin Adı</i>
3	0,0,1	1,1,1	Tribonacci Dizisi
3	3,0,2	0,1,1	Perrin Dizisi
3	1,1,1	0,1,1	Padovan Dizisi
4	0,0,0,1	1,1,1,1	Tetranacci Dizisi
$k$	$0, \dots, 0, 1$ ( $k-1$ tane sıfır)	$1, 1, \dots, 1$ ( $k$ tane 1)	$k$ - genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

Tamsayı çözümlerini bulmak için yapılan araştırmalar sonucu Diyafont denklemi kavramı geliştirilmiştir.

**Tanım 1.7:**

$f$  fonksiyonu  $n$  değişkene sahip olmak üzere,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.11)$$

denkleme değişkenlerinin tamsayı olması durumunda Diyafont denklemi denir (Dickson, 1999).

Diyafont denklemini çözerken genellikle tam sayı çözümleri aranır.  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{Z}^n$   $n$ -lisi (1.11) numaralı denklemi sağlıyorsa bu  $n$ -liye bir çözüm denir. Eğer (1.11) denklemi böyle bir çözüme sahipse bu durumda denkleme çözülebilir denir.

Diyafont denklemlerinin incelenmesi aşamalarında aşağıda verilen sorulara dikkat edilmelidir.

- 1- Denklem çözülebilir mi?
- 2- Çözülebilirse çözüm sayısı sonlu çoklukta mı yoksa sonsuz çoklukta mı?
- 3- Eğer çözülebilirse, çözümleri nasıldır, nelerdir?

Diyafont denklemlerinin çeşitleri vardır. Bu denklemlere örnek olarak Lineer diyafont denklemleri, Üstel diyafont denklemleri, Modüler forma sahip diyafont denklemleri, Pell denklemleri, Thue denklemleri, Diyafont  $m$ -lisi bilinen diyafont denklem çeşitleridir.

Diyafont denklem çeşitlerinden bahsettiğimiz Diyafont  $m$  –lisi de bu tez de önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle Diyafont  $m$  –lisi tanımını aşağıdaki biçimde tanımlanır.

**Tanım 1.8:**

$i \neq j$  olmak üzere  $1 \leq i, j \leq n$  için  $a_i a_j + 1 = x_{ij}^2$  olacak şekilde  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  kümesine diyafont  $m$ –lisi denir ve  $D(1)$  ile gösterilir (Diophantus, 1974).

Diyafont  $m$ – lisine ilk örnek Diophantus Alexandira tarafından,  $\left\{ \frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16} \right\}$

kümesi ilk rasyonel  $D(1)$  dördlüsü olarak bulunmuştur. Daha sonra Fermat (1891), ilk tamsayı dördlüsünü  $\{1, 3, 8, 120\}$  biçiminde elde etmiştir. Gerçekten de,

$$1 \cdot 3 + 1 = 2^2, \quad 1 \cdot 120 + 1 = 11^2$$

$$1 \cdot 8 + 1 = 3^2, \quad 3 \cdot 120 + 1 = 19^2$$

$$3 \cdot 8 + 1 = 5^2, \quad 8 \cdot 120 + 1 = 31^2$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$\{1, 3, 8, 120\}$  kümesinin bir genelleştirilmesine Euler (1972) tarafından şu şekilde elde edilmiştir.  $ab + 1 = r^2$  olmak üzere,  $\{a, b, a + b + 2r, 4r(r + a)(r + b)\}$  bir  $D(1)$

dördlüsüdür. Ayrıca Euler, beşinci rasyonel sayıyı  $\frac{777480}{8288641}$  olarak yukarıda verilen

kümeyle eklemiştir.

1999 yılında ilk pozitif rasyonel 6-lısı Gibbs (2006) tarafından aşağıdaki şekilde bulunmuştur,

$$\left\{ \frac{11}{192}, \frac{35}{192}, \frac{155}{27}, \frac{512}{27}, \frac{1235}{48}, \frac{180873}{16} \right\}.$$

Diyafont kümelerinin indirgenmiş sayı dizileri ile arasındaki bağıntı da şu şekilde ifade edilmiştir.

Hoggatt ve Bergum (1997),  $\{F_{2k}, F_{2k+2}, F_{2k+4}, 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}\}$  kümesinin bir diyafont dörtlüsü olduğunu göstermişler ve  $4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}$  elemanının tek olduğunu iddia etmişlerdir.

Dujella (1999), bu iddiayı ispatlamış ve  $\{F_{2k}, F_{2k+2}, F_{2k+4}, d\}$  bir diyafont dörtlüsü için  $d = 4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}$  olacağını göstermiştir.

Filipin, He ve Togbe (2010),  $\{F_{2k}, F_{2k+6}, 4F_{2k+4}, d\}$  kümesi bir  $D(4)$  olmak üzere,  $d = 4F_{2k+2}F_{2k+3}F_{2k+5}$  olacağını göstermişlerdir.

Benzer şekilde, Dujella ve Ramasamy (2005),  $\{F_{2k}, 5F_{2k}, 4F_{2k+2}, d\}$  kümesi bir  $D(4)$  olmak üzere,  $d = 4L_{2k}F_{4k+2}$  olacağını göstermişlerdir.

Luca ve Szalay (2008), lineer reküranslarla ilgili aşağıdaki problemi incelemişler ve

$$ab + 1 = F_x$$

$$ac + 1 = F_y$$

$$bc + 1 = F_z$$

sisteminin bir çözümünün olup olmadığını araştırmış ve bir  $(a, b, c)$  tamsayı üçlüsünün olmadığını göstermişlerdir.

Benzer şekilde Luca ve Szalay (2009), yukarıdaki problemi Lucas sayı dizisi için ele almış ve

$$ab + 1 = L_x$$

$$ac + 1 = L_y$$

$$bc + 1 = L_z$$

sistemini incelemişler. Sonuçta  $(a, b, c) = (1, 2, 3)$  üçlüsünün tek çözümü olduğunu ispatlamışlardır.

Yukarıdaki çalışmaların bir geneli olarak, Fuch, Luca ve Szalay (2008), dejenere olmayan  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  Lucas dizisi için

$$ab + 1 = u_x$$

$$ac + 1 = u_y$$

$$bc + 1 = u_z$$

sisteminin sonlu bir çözümünün var olup olmadığını incelemişler. Sonlu sayıda çözümünün var olması içinse  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $x^2 - rx - s = 0$  karakteristik denklemin çözümleri ve  $u_n = \gamma\alpha^n + \delta\beta^n$  olmak üzere,

(i)  $\delta\beta^z = \delta\beta^y = \delta\beta^x = 1$ . Bu durumda  $\gamma$  veya  $\alpha\gamma$  tamkare

(ii)  $\delta\beta^z = \delta\beta^y = 1$  ve  $\delta\beta^x = -1$ . Bu durumda  $x \in \{0, 1\}$

şartlarının sağlanması gerektiğini göstermişlerdir.

## BÖLÜM II

### BALANS DİYAFONT ÜÇLÜSÜ

Bu bölümde,  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  balans sayı dizisi olmak üzere,

$$ab + 1 = B_x$$

$$ac + 1 = B_y$$

$$bc + 1 = B_z$$

sisteminin çözümünün olmadığı gösterilmiştir. Bu çözümün olmadığını ispatlamak için balans sayılarının tanımını ve özelliklerini bulmamız gerektiğinden bu bölümde bu konulara detaylı olarak yer verilmiştir. Balans sayılarının bölünebilme özelliklerini kullanarak balans üçlüsünün olmadığını göstermek için bir teorem ifade edilmiştir. Teoremi ispatlamak için gerekli önermeler ispatlandıktan sonra teoremin ispatı verilmiştir.

#### Tanım 2.1:

$\{B_n\}_{n \geq 0}$  balans sayı dizi ve  $0 < a < b < c$  tamsayılar olmak üzere

$$ab + 1 = B_x$$

$$ac + 1 = B_y$$

$$bc + 1 = B_z$$

(2.1)

sistemini sağlayan  $(a, b, c)$  üçlüsüne Balans diyafont üçlüsü denir.

Balans sayılarının bölünebilme özellikleri kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

#### Teorem 2.2:

$(a, b, c)$  balans diyafont üçlüsü yoktur.

Teoremin ispatından önce Balans sayıları hakkında kısa bir kronoloji vermek doğru olacaktır.

Balans sayıları ilk olarak Finkelstein (1965) tarafından ortaya atılmıştır. Finkelstein bu

sayılara “nümerik merkezler” adını vermiştir. Daha sonra Ray (2009) ‘ ın “Balancing and Cobalancing Numbers” adlı doktora tezinde balans sayılarını;  $n$  bir pozitif tamsayı olmak üzere, her hangi bir  $r$  tamsayı için

$$1+2+\dots+n-1=(n+1)+(n+2)+\dots+(n+r) \quad (2.2)$$

denklemini sağlayacak şekildeki  $n$  sayısına  $n$ . balans sayıları biçiminde tanımlanmıştır. Denklem (2.2) deki  $r$  sayısına  $n$  balans sayısına karşılık gelen dengeleyici (balancer) sayı denir ve denklem (2.2) de toplam formülü kullanıldığı zaman

$$T_{n-1}+T_n=T_{n+r} \quad (2.3)$$

denklemini elde edilir. Burada  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$  ‘dir. Balans sayılarının çözümü, ardışık üçgensel sayıların toplamının tekrar üçgensel sayı olacak şekilde sayılardır. Bunu açıklamak için verilebilecek örnek: 2 dengeleyici sayısına karşılık gelen sayı 6 balans sayıdır. 14 dengeleyici sayısına karşılık gelen sayıda 35 balans sayıdır.

Ray (2009), bu sayıları  $B_0 = 0$  ve  $B_1 = 1$  başlangıç koşulları altında ve  $n \geq 2$  için aşağıdaki reküransı sağladığını göstermiştir.

$$B_n = 6 \cdot B_{n-1} - B_{n-2} \quad (2.4)$$

Denklem (2.4) te verilenlere göre, Balans sayı dizisinin birkaç terimi

0,1,6,35,204,1189,6930,40391,235416,...

biçimindedir. Balans sayılarının Binet tipi formülünü ise Behera ve Panda (1999)

$$B_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.5)$$

biçiminde vermişlerdir. Denklem (2.5)  $\alpha$  ve  $\beta$  sayıları  $x^2 - 6x + 1 = 0$  karakteristik polinomunun kökleridir. Bu ise  $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$  ve  $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$  olması demektir.

$\{C_n\}_{n \geq 0}$  dizisi balans sayı dizisinin eş (associate) dizisinin yarısını göstermek üzere, balans sayı dizisi ile aynı reküransı sağlar. Yani dizinin başlangıç koşulları  $C_0 = 1$  ve  $C_1 = 3$  olmak üzere

$$C_n = 6C_{n-1} - C_{n-2} \quad (2.6)$$

biçimindedir. Buna göre  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

1, 3, 17, 99, 577, 3363, 19601, 114243, 665857, ...

$\{C_n\}_{n \geq 0}$  dizisinin Binet tipi formülü ise

$$C_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} \quad (2.7)$$

biçimindedir.

Teorem 2.2 yi ispatlamamıza yardımcı olacak balans sayıları ve balans sayılarının eş dizileri ile kombinatoriyal özellikleri aşağıda ispatlarıyla beraber sunulmaktadır.

### Önerme 2.3:

$n$  ve  $m$  birer tamsayı olmak üzere, balans sayı dizisinin elemanları ve balans eş sayı dizisinin elemanları aşağıdaki özellikleri sağlar;

- a)  $B_n = 35B_{n-2} - 6B_{n-3}$
- b)  $n > m$  ise  $(B_n - B_m)(B_n + B_m) = B_{n-m}B_{n+m}$
- c)  $ebob(B_n, B_m) = B_{ebob(n,m)}$
- d)  $ebob(B_n, C_n) = 1$
- e)  $B_{n+m} = B_n C_{m+1} + C_n B_{m+1}$
- f)  $B_{2n+1} - 1 = 2B_n C_{n+1}$

**İspat:**

a) Balans sayılarının rekürans formülü (2.4) kullanılırsa

$$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2} = 6(6B_{n-2} - B_{n-3}) - B_{n-2} = 35B_{n-2} - 6B_{n-3}$$

elde edilir.

b) Balans sayıları için Binet formülünü yani denklem (2.5) kullanırsak

$$\begin{aligned} (B_n - B_m)(B_n + B_m) &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) - (\alpha^{2m} - \beta^{2m})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \left( \frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+m}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= B_{n-m} B_{n+m} \end{aligned}$$

elde edilir.

c)  $m > n$  olsun. Euclid algoritmasından  $i = 0, 1, \dots, n$  ve  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $q_i, r_j \in \mathbb{Z}$  vardır öyle ki aşağıdaki sistemi sağlar.

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 \\ n &= q_1r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_2r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1}r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0 \end{aligned}$$

Bu durumda  $\text{ebob}(m, n) = r_n$  dır. Balans sayıları için Binet formülü (2.5) kullanılırsa,

$$B_m = B_{nq_0+r_1} = B_{nq_0} B_{r_1+1} - B_{nq_0-1} B_{r_1} \text{ olduğu görülür. Bölünebilme özelliklerinden ve } B_n/B_{nq_0} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned}
ebob(B_m, B_n) &= ebob(B_{nd_0} B_{r_1+1} - B_{nd_0-1} B_{r_1}, B_n) \\
&= ebob(-B_{nd_0-1} B_{r_1}, B_n) \\
&= ebob(B_{r_1}, B_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla  $ebob(B_n, B_{r_1}) = ebob(B_{r_1}, B_{r_2}) = \dots = ebob(B_{r_{n-1}}, B_{r_n})$  elde edilir.

$ebob(B_{r_{n-1}}, B_{r_n}) = B_{r_n}$  olduğundan,  $ebob(B_m, B_n) = B_{ebob(m,n)}$  bulunur.

**d)**  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  balans dizisi ve eş dizisi olan  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  için Binet tipi formülleri (2.5) ve (2.6) kullanılırsa  $2C_n = B_{n+1} - B_{n-1}$  olduğu görülür.

$$ebob(B_n, C_n) = ebob\left(B_n, \frac{B_{n+1} - B_{n-1}}{2}\right)$$

elde edilir.  $B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$  olduğundan ve (c) şikkından,

$$\begin{aligned}
ebob(B_n, C_n) &= ebob(B_n, 3B_n - B_{n-1}) \\
&= ebob(B_n, B_{n-1}) \\
&= B_{ebob(n,n-1)} \\
&= B_1 = 1
\end{aligned}$$

bulunur.

**e)**  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  balans dizisi ve eş dizisi olan  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  için Binet tipi formülleri (2.5) ve (2.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
B_n C_m + B_m C_n &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^m + \beta^m) + \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^n + \beta^n) \\
&= \frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+m}}{\alpha - \beta} \\
&= B_{n+m}
\end{aligned}$$

elde edilir.

f) Bir önceki özellikle belirtilen benzer method ve yani balans sayı dizisi  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  ve eş dizisi  $\{C_n\}_{n \geq 0}$  dizisinin Binet formülleri (2.5) ve (2.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2B_n C_{n+1} &= 2 \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right) \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} + \left( \frac{(\alpha\beta)^n (\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} \right) \\
&= B_{2n+1} - 1
\end{aligned} \tag{2.8}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilir. Balans sayı dizisinin ve balans sayı eş dizisinin bazı elemanlarını içeren en büyük ortak bölen için üst sınırları veren ifadeler aşağıda ispatıyla birlikte verilmiştir.

#### Önerme 2.4:

$n \geq 2$  tamsayısı için

$$\text{ebob}(B_n - 1, B_{n-2} - 1) \leq 34 \tag{2.9}$$

biçimindedir.

#### İspat:

Önermenin ispatı için en büyük ortak bölen fonksiyonunun özelliklerini ve balans sayı dizisinin (2.4) özelliğini kullanalım.

Kabul edelim ki  $Q_1 = \text{ebob}(B_n - 1, B_{n-2} - 1)$  olsun.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \text{ebob}(B_n - 1, B_n - B_{n-2}) = \text{ebob}(B_n - 1, 6B_{n-1} - 2B_{n-2}) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_n - 1, 3B_{n-1} - B_{n-2}) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_{n-1}B_{n+1}, 3B_{n-1} - B_{n-2}) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_{n+1}, 3B_{n-1} - B_{n-2})\text{ebob}(B_{n-1}, 3B_{n-1} - B_{n-2}) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_{n-1}, B_{n-2})\text{ebob}(35B_{n-1} - 6B_{n-2}, 3B_{n-1} - B_{n-2}) \\
&= 2\text{ebob}(-B_{n-1} + 6B_{n-2}, 3B_{n-1} - B_{n-2}) \\
&= 2\text{ebob}(-B_{n-1} + 6B_{n-2}, 17B_{n-2}) \\
&\leq 34\text{ebob}(-B_{n-1} + 6B_{n-2}, B_{n-2}) \\
&\leq 34\text{ebob}(-B_{n-1}, B_{n-2}) = 34
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

### Önerme 2.5:

$n \geq 2$  tamsayı olsun. Bu durumda

$$\text{ebob}(B_{2n-3} - 1, B_n - 1) \leq 1190 \quad (2.10)$$

biçimindedir.

### İspat:

Kabul edelim ki  $Q_2 = \text{ebob}(B_{2n-3} - 1, B_n - 1)$  olsun. Önerme 2.3' ün (f) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \text{ebob}(2B_{n-2}C_{n-1}, B_n - 1) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_{n-2}, B_n - 1)\text{ebob}(C_{n-1}, B_n - 1) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_{n-2}, B_{n-1}B_{n+1})\text{ebob}(C_{n-1}, B_{n-1}B_{n+1}) \\
&\leq 2\text{ebob}(B_{n-2}, B_{n-1})\text{ebob}(B_{n-2}, B_{n+1})\text{ebob}(C_{n-1}, B_{n-1})\text{ebob}(C_{n-1}, B_{n+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\text{ebob}(C_{n-1}, B_{n+1}) &= \text{ebob}(C_{n-1}, B_{n-1}C_2 + C_{n-1}B_2) \\
&= \text{ebob}(C_{n-1}, 17B_{n-1}) \leq 17
\end{aligned}$$

özelliği ve Önerme 2.3' ün (c) ve (d) özellikleri kullanıldığında da

$$Q_2 < 2 \cdot 1 \cdot 35 \cdot 1 \cdot 17 = 1190$$

olduğu görülür.

Burada verilen teoremin ispatında kullanılacak olan Balans sayı dizisinin elemanları için alt ve üst sınır özelliklerini vermek yerinde olacaktır. Bunun için alt sınır ve üst sınırın bulunması ispatlarıyla birlikte aşağıda sunulmuştur.

### Önerme 2.6:

$u_0 \geq 3$  olsun.  $u \geq u_0$  olacak şekildeki tamsayılar için,

$$\alpha^{u-0.9831} < B_u < \alpha^{u-0.983} \quad (2.11)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada  $\alpha$  sayısı  $x^2 - 6x + 1 = 0$  karakteristik denkleminin köklerinin baskın köküdür.

### İspat:

Kabul edelim ki  $c_0 = 4\sqrt{2}$  olsun.  $x^2 - 6x + 1 = 0$  karakteristik denkleminin baskın kökü  $\alpha$  ve diğer kökü  $\beta$  olmak üzere,  $0 < \beta < 1 < \alpha$  'dır. Dolayısıyla

$$B_u \geq \frac{\alpha^u - \beta^{u_0}}{c_0} = \alpha^u \left( \frac{1 - \frac{\beta^{u_0}}{\alpha^u}}{c_0} \right) \geq \alpha^u \left( \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{u_0}}{c_0} \right) \geq \alpha^{u-0.9831}$$

eşitsizliği  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  balans sayı dizisi için alt sınır verir. Üst sınır ise

$$B_u \leq \frac{\alpha^u}{c_0} < \alpha^{u-0.983}$$

olarak elde edilir.

Son olarak (2.1) denklem sistemiyle ilgili özellik ispatlarıyla birlikte verildikten sonra Teorem (2.2) nin ispatı yapılacaktır.

### Önerme 2.7:

(2.1) denklem sisteminin çözümleri  $z \leq 2y - 1$  eşitsizliğini sağlar.

### İspat:

(2.1) denklem sisteminin son iki eşitliğinden

$$c / \text{ebob}(B_y - 1, B_z - 1) \quad (2.12)$$

elde edilir. (2.1) denklem sisteminden  $B_z = bc + 1 < c^2$  dir. Buradan  $\sqrt{B_z} < c$  elde edilir.

(2.12) özelliğinden ise  $c < B_y$  olduğundan  $\sqrt{B_z} < B_y$  olarak bulunur. Balans sayıları için verilen (2.11) eşitsizliği kullanıldığında,

$$\sqrt{\alpha^{z-0.9831}} < \sqrt{B_z} < B_y < \alpha^{y-0.983}$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikten ise

$$\alpha^{z-0.9831} < \alpha^{2y-0.983} \quad (2.13)$$

ifadesi elde edilir. Eşitsizlik (2.13) ten (2.1) denklem sistemi için  $z \leq 2y - 1$  bulunur.

Öncelikle ifadesini verdiğimiz ve ispatlamak için kullandığımız birçok özellikten sonra bu özelliklerin kullanılmasını da içeren teoremin ispatı burada verilmektedir.

### Teorem 2.2 in İspatı

$0 < a < b < c$  tamsayılar ve  $1 \cdot 2 + 1 \leq ab + 1 = B_x$  olduğundan dolayı  $2 \leq x$  'dir.  $0 < a < b < c$  olacak şekilde tamsayı olduğundan dolayı, denklem sisteminden  $x < y < z$  tamsayıları elde edilir. Kabul edelim ki  $z \leq 449$  olsun. Bu durumda  $2 \leq x < y < z \leq 449$  değerleri için (2.1) denklem sisteminin herhangi bir çözümünün olup olmadığını araştırmak için Mathematica programı kullanılmıştır. Mathematica programı yardımıyla

$$a = \sqrt{\frac{(B_x - 1)(B_y - 1)}{(B_z - 1)}}$$

ifadesinin bir tamsayı olup olmadığına bakmak gerekir. Bunun için kullanılan Mathematica hesaplamaları sonucunda (2.1) denklem sisteminin bir çözümünün olmadığı ortaya çıkmıştır

Şimdi kabul edelim ki  $z > 449$  ve  $Q = \text{ebob}(B_y - 1, B_z - 1)$  olsun. Önerme 2.7' nin ispatından  $\sqrt{B_z} < Q$  bulunur. Önerme 2.3' ün (a) şikkından dolayı da

$$\begin{aligned} Q &\leq \text{ebob}(B_{z-1}B_{z+1}, B_{y-1}B_{y+1}) \\ &\leq \text{ebob}(B_{z-1}, B_{y-1})\text{ebob}(B_{z-1}, B_{y+1})\text{ebob}(B_{z+1}, B_{y-1})\text{ebob}(B_{z+1}, B_{y+1}) \\ &= \prod_{i,j \in \{\pm 1\}} \text{ebob}(B_{z-i}, B_{y-j}) = \prod_{i,j \in \{\pm 1\}} B_{\text{ebob}(z-i, y-j)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

elde edilir. Buradan  $\text{ebob}(z-i, y-j) = \frac{z-i}{k_{ij}}$  ve  $k_{ij} \geq 8$  kabul edilirse (2.14)

eşitsizliğiyle balans sayı dizisi  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  için verilen (2.11) eşitsizliği birlikte kullanılırsa

$$\alpha^{\frac{z-0.9831}{2}} < \sqrt{B_z} < Q \leq \left(\frac{B_{z+1}}{8}\right)^2 \left(\frac{B_{z-1}}{8}\right)^2 < \alpha^{4\left(\frac{z+1}{8}-0.983\right)} \quad (2.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte  $\alpha$  'nin kuvvetleri karşılaştırıldığında,  $-\frac{0.9831}{2} < -3.432$  elde edilir ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla bir çelişki elde edilir.

Kabul edelim ki  $k_{ij} \leq 7$  olsun. Bu durumda  $\frac{z-i}{k} = \frac{y-j}{l}$  olacak şekilde  $k, l \leq 7$  aralarında asal  $k$  ve  $l$  sayıları vardır.  $k$  ve  $l$  nin durumlarına göre inceleme yapılırsa üç durum söz konudur. Bunlar:

1. Durum:  $l > k$
2. Durum:  $l = k$
3. Durum:  $l < k$

olması durumlarıdır. Bu durumları sırasıyla incelersek,

1.Durum:  $l > k$  ise,  $y - j > z - i$  'dir. (2.1) denklem sisteminde  $y < z$  olduğunda  $z = y + 1$  elde edilir.  $z = y + 1$  değeri  $Q = \text{ebob}(B_z - 1, B_y - 1)$  değerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q &= \text{ebob}(B_{y+1} - 1, B_y - 1) \leq \text{ebob}(B_y B_{y+2}, B_{y-1} B_{y+1}) \\ &\leq \text{ebob}(B_y, B_{y-1}) \text{ebob}(B_y, B_{y+1}) \text{ebob}(B_{y+2}, B_{y-1}) \text{ebob}(B_{y+2}, B_{y+1}) \\ &\leq B_3 = 35 \end{aligned}$$

elde edilir.  $\sqrt{B_z} < Q$  olduğundan

$$\alpha^{\frac{z-0.9831}{2}} < \sqrt{B_z} < Q \leq B_3 = 35 \quad (2.16)$$

biçiminde bulunur. Eşitsizlik (2.16) çözüldüğünde  $z < 5.1$  elde edilir. Bu ise  $z > 449$  olması durumu ile çelişir.

2.Durum:  $k = l = 1$  ise  $z - i = y - j$  olur.  $y < z$  olduğundan  $z = y + 2$  elde edilir. Bu değer,  $Q = \text{ebob}(B_z - 1, B_y - 1)$  ifadesinde yerine yazılır ve (2.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\alpha^{\frac{z-0.9831}{2}} < Q = \text{ebob}(B_{y+2} - 1, B_y - 1) \leq 34$$

olur. İşlem sonucunda  $z < 4.99$  bulunur. Bu ise  $z > 449$  olması ile çelişir.

3.Durum:  $l < k$  ve  $3 \leq k$  ise  $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)$  ve  $(1, 1)$  durumları söz konusudur.

Söz konusu durumlardan bir tanesini  $(i, j)$  biçiminde seçelim. Kalan üç durum için bir

$(i_0, j_0)$  çifti oluşturalım. Bu durumda  $(i_0, j_0) \neq (i, j)$  dir. O halde

$$y - j_0 = \frac{l}{k}(z - i) + j - j_0 = \frac{lz - li + kj - kj_0}{k} \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada  $\text{ebob}(y - j_0, z - i_0)$  ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\text{ebob}(z-i_0, y-j_0) &= \text{ebob}\left(z-i_0, \frac{lz-li+kj-kj_0}{k}\right) \\
&\leq \text{ebob}(lz-li_0, lz-li+kj-kj_0) \\
&= \text{ebob}(lz-li_0, li_0-li+kj-kj_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifade de  $li_0-li+kj-kj_0$  ifadesi asla sıfır olmaz. Gerçekten, kabul edelim ki  $li_0-li+kj-kj_0=0$  olsun. Bu durumda  $l(i_0-i)=k(j_0-j)$  elde edilir. Bu ise  $\text{ebob}(k,l)=1$  olmasıyla çelişir. Dolayısıyla  $li_0-li+kj-kj_0 \neq 0$  dır. Böylece  $\text{ebob}(z-i_0, y-j_0)$  için elde edilen üst sınır

$$\begin{aligned}
\text{ebob}(z-i_0, y-j_0) &\leq \text{ebob}(lz-li_0, li_0-li+kj-kj_0) \\
&\leq |li_0-li+kj-kj_0| \leq 2(k+l) \leq 26
\end{aligned}$$

biçimindedir. Balans sayı dizisi  $\{B_n\}_{n \geq 0}$  elemanları için bulunan üst ve alt sınırlar kullanıldığında,

$$\alpha^{\frac{z-0.9831}{2}} < B_{\frac{z+1}{3}} B_{26}^3 < \alpha^{\frac{z+1}{3}-0.983} \left(\alpha^{25.017}\right)^3 \quad (2.18)$$

bulunur.  $\alpha$  nin kuvvetleri karşılaştırıldığında  $z < 449.4$  bulunacağından bu durum  $z > 449$  olmasıyla çelişir.

Kabul edelim ki  $k=k_{ij}=2$  olsun. Bu durumda  $l < k$  olduğundan dolayı  $l=1$  bulunur. O halde  $(i, j)$  'nin dört farklı durumu söz konusudur. Bunlar:

- $(i, j) = (1, 1)$  durumu
- $(i, j) = (1, -1)$  durumu
- $(i, j) = (-1, 1)$  durumu
- $(i, j) = (-1, -1)$  durumu

Bu durumları sırasıyla incelersek  $(i, j) = (1, 1)$  olsun. Bu durumda  $\text{ebob}(z-1, y-1) = \frac{z-1}{2}$  olup  $z = 2y-1$  bulunur. Bu değer (2.1) denklem sisteminde yerine konursa,

$$\begin{aligned}
ab+1 &= B_x \\
ac+1 &= B_y \\
bc+1 &= B_{2y-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemdeki son denklem ikinci denkleme bölündüğünde  $0 < a < b < c$  olduğundan

$$\frac{B_{2y-1}}{B_y} = \frac{bc+1}{ac+1} < \frac{b}{a}$$

elde edilir. Burada  $B_{2y-1}$  ve  $B_y$  elemanları için alt sınırlar (2.11) eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{B_{2y-1}}{B_y} > \frac{\alpha^{2y-1-0.9831}}{\alpha^{y-0.983}} = \alpha^{y-1.001}$$

olur. Bu veriler kullanılırsa  $a \cdot \alpha^{y-1.001} < b$  elde edilir. Burada her iki tarafı  $a$  ile çarpılırsa,

$$a^2 \alpha^{y-1.001} \leq ab = B_x - 1 < B_x < \alpha^{x-0.983}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafı,  $\alpha^{y-1.001}$  ile bölümünden  $a^2 < \alpha^{x-y+0.018} \leq \alpha^{-0.982} < 0.2$  bulunur. Elde edilen sonuç  $a$  'nın tamsayı olmasıyla çelişir.

$(i, j) = (1, -1)$  olsun.  $ebob\left(\frac{z-1}{2}, y+1\right) = \frac{z-1}{2}$  olduğundan  $z = 2y+3$  elde edilir. Bu

ise  $z \leq 2y-1$  olmasıyla çelişir.

Benzer şekilde  $(i, j) = (-1, -1)$  ise  $z \leq 2y-1$  olmasıyla çelişir.

Eğer  $(i, j) = (-1, 1)$  ise  $z = 2y-3$  bulunur. Bu değeri  $Q$  ifadesinde yerine yazıp (2.10) eşitsizliği kullanırsa

$$\alpha^{\frac{z-0.9831}{2}} < \sqrt{B_z} < c \leq ebob(B_{2y-3} - 1, B_y - 1) \leq 1190$$

elde edilir. Buradan  $z \leq 9$  bulunur. Bu ifade de  $z > 449$  olmasıyla çelişir.

Böylece, teoremin ispatı verilen tüm özelliklerin kullanılmasıyla ve Mathematica yardımıyla tamamlanmış olur.

### BÖLÜM III

#### $u_n = A \cdot u_{n-1} - u_{n-2}$ TİPİNDEKİ LUCAS DİZİSİNİN DİYAFONT ÜÇLÜSÜ

Bu bölümde bir önceki bölümde verilenlerin bir genelleştirilmesi verilmiştir. Bu genelleştirilme de  $u_0 = 0$  ve  $u_1 = 1$  başlangıç koşulları altında  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin,  $n \geq 2$  için  $u_n = A \cdot u_{n-1} - u_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  rekürans bağıntısının tanımlanması durumunda aşağıda verilen denklem sisteminin çözümünün olmadığı gösterilmiştir.

$$ab + 1 = u_x$$

$$ac + 1 = u_y$$

$$bc + 1 = u_z$$

Buna ek  $A = 6$  alınması durumunda bir önceki bölümde verilen sonuçların aynen elde edildiği tespit edilmiştir.

$A$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisini  $u_0 = 0$  ve  $u_1 = 1$  başlangıç koşulları altında  $n \geq 2$  için  $u_n = A \cdot u_{n-1} - u_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlayalım.

Tanımlanan  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  dizisinin Binet tipi formülü

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  sayıları  $x^2 - Ax + 1 = 0$  karakteristik denkleminin kökleri, yani  $\alpha = \left( A + \sqrt{A^2 - 4} \right) / 2$  ve  $\beta = \left( A - \sqrt{A^2 - 4} \right) / 2$  'dir. Bu durumda  $A$  'nın değerlerine göre kökler hakkında sonuçlar verilebilir. Yani  $A \geq 2$  ise, bu durumda karakteristik denklemin kökleri  $\alpha$  ve  $\beta$  sayıları reel sayılardır ve çakışıktır.  $A \geq 3$  bir tamsayı ise, bu durumda  $\alpha > 1$  ve  $\beta \in (0, 1)$  olmak üzere  $\alpha > \beta$  biçimindeki reel sayılardır.  $A$  sayısı arttıkça  $\alpha$  sayısı artan  $\beta$  sayısı azalandır.

$v_0 = 2$  ve  $v_1 = 1$  başlangıç koşulları altında  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizinin eş (associate) dizisi  $\{v_n\}_{n \geq 0}$ ,  $n \geq 2$  için  $v_n = A \cdot v_{n-1} - v_{n-2}$  rekürans bağıntısı ile tanımlanır.  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  eş dizisinin Binet tipi formülü

$$v_n = \alpha^n + \beta^n \quad (3.2)$$

biçimindedir.

Bu konu hakkında elde edilen orijinal sonuç aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

**Teorem 3.1:**

$A \neq 2$  bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} ab + 1 &= u_x \\ ac + 1 &= u_y \\ bc + 1 &= u_z \end{aligned} \quad (3.3)$$

$1 \leq a < b < c$  olacak şekilde bir  $\{a, b, c\}$  tamsayı üçlüsü yoktur.

Teoremin ispatından önce ispatta kullanılacak bazı tanımları ve özellikleri burada verilecektir.

Teorem 3.1' de  $A = 1$  alınırsa,  $\{u_n\}$  sayı dizisi

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots$$

olacak şekilde bir periyodik diziye dönüşür. Kolayca görülebileceği üzere bu dizinin (3.3) denklem sistemini sağlayan bir  $\{a, b, c\}$  üçlüsü yoktur.

Eğer  $A = 2$  alınırsa bu durumda  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisi doğal sayılar dizisine dönüşür ki bu durumda da herhangi bir  $\{a, b, c\}$  üçlüsü (3.3) denklem sistemini sağlayacaktır.

Dolayısıyla  $A \geq 3$  kabul edebilir. Bu teoremin ispatı için  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  ve  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  dizilerini içeren bazı kombinatoriyal özellikler ve bu dizileri içeren en büyük ortak bölen fonksiyonları için üst sınırları veren özellikleri burada vermek yerinde olacaktır.

### Önerme 3.2:

$n$  ve  $m$  herhangi negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  ve  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  dizilerini içeren bazı kombinatoriyal özellikleri

- a)  $ebob(u_n, u_m) = u_{ebob(n, m)}$
- b)  $ebob(u_n, v_m) = 1, 2$  veya  $v_{ebob(n, m)}$  'dır. Özel olarak  $ebob(u_n, v_n) = 1$  veya  $2$  'dir.
- c)  $(u_n - 1)(u_n + 1) = u_{n-1}u_{n+1}$
- d)  $u_{2n+1} - 1 = u_n v_{n+1}$
- e)  $2u_{n+m} = u_n v_m + v_n u_m$

biçimindedir.

### İspat:

- a) Bu özellik Carmichael (1913-1914) 'ın çalışmasında genel Lucas dizisinin  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  'nin farklı iki elemanı için bu özellik verilmiştir.
- b) Benzer şekilde Carmichael (1913-1914) 'ın çalışmasında bu özellik verilmiştir.
- c)  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  dizinin Binet formülü (3.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 (u_n - 1)(u_n + 1) &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - 1 \right) \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 1 \right) \\
 &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 - 1 \\
 &= \left( \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \left( \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \\
 &= u_{n-1} u_{n+1}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

d)  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  ve  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  dizisi için verilen (3.1) ve (3.2) Binet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_n v_{n+1} &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} - (\alpha\beta)^n = u_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

e)  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  ve  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  dizisi için verilen (3.1) ve (3.2) Binet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_n v_m + u_m v_n &= \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^m + \beta^m) + \left( \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^n + \beta^n) \\ &= 2 \left( \frac{\alpha^{n+m} - \beta^{n+m}}{\alpha - \beta} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

İkinci bölümdeki verilen sıraya göre  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  ve  $\{v_n\}_{n \geq 0}$  dizileri için üst ve alt sınırları verelim.

### Önerme 3.3:

Kabul edelim ki  $A \geq 3$  olsun.  $n \geq 3$  için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\alpha^{n-1} < u_n < \alpha^{n-0.983} \quad (3.4)$$

ve

$$\alpha^n < v_n < \alpha^{n+0.004} . \quad (3.5)$$

dır.

### İspat:

$\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisi için verilen (3.1) Binet formülü kullanılırsa

$$\alpha^{n-1} < \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = u_n = \frac{\alpha^n}{\alpha - \beta} \left( 1 - \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^n \right) < \alpha^{n - \log_\alpha(\alpha - \beta)} \quad (3.6)$$

bulunur. Şimdi  $\alpha > 1$  için  $f(\alpha) = \log_\alpha \left( \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\log(\alpha^2 - 1)}{\log \alpha} - 1$  fonksiyonunun artan bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$f'(\alpha) = \frac{2\alpha^2 \log \alpha - (\alpha^2 - 1) \log(\alpha^2 - 1)}{\alpha(\alpha^2 - 1)(\log \alpha)^2}$$

elde edilir.  $(\alpha^2 - 1) \log(\alpha^2 - 1) < (\alpha^2 - 1) \log \alpha^2 < 2\alpha^2 \log \alpha$  olduğundan  $f'(\alpha) > 0$  'dir. Dolayısıyla  $f(\alpha)$  fonksiyonu artandır.  $-f(\alpha)$  fonksiyonu azalan olduğundan  $-f(\alpha)$  fonksiyonu maksimum değerini  $A = 3$  noktasında alır. Bu değer için  $\alpha = (3 + \sqrt{5})/2$  dir. Dolayısıyla  $u_n < \alpha^{n-0.83}$  elde edilir.

$v_n = \alpha^n + \beta^n$  olduğundan aşikâr olarak  $\alpha^n < v_n$  'dir.

$$v_n \leq \alpha^n \left( 1 + \frac{1}{\alpha^6} \right) < 1.0032 \cdot \alpha^n < \alpha^{n+0.004}$$

benzer şekilde elde edilir.

### Önerme 3.4:

$A \geq 3$  olmak üzere

$$\log_\alpha \left( 2(A^2 - 2) \right) < 3.1 \quad (3.7)$$

dir.

### İspat:

$g(\alpha) = \frac{\log(\alpha + 1/\alpha)}{\log \alpha} = \log_{\alpha} A$  ve  $h(\alpha) = \log_{\alpha} 2$  olsun.  $\alpha > 1$  iken  $g(\alpha)$  ve  $h(\alpha)$

fonksiyonları azalandır. Gerçekten  $g'(\alpha) = -\frac{\log A}{(\log \alpha)^2} < 0$  ve  $h'(\alpha) = -\frac{\log 2}{(\log \alpha)^2} < 0$ ,

dir. Dolayısıyla  $g(\alpha)$  ve  $h(\alpha)$  fonksiyonları maksimum değerlerini  $A = 3$  noktasında alır. Bu değer için  $\alpha = (3 + \sqrt{5})/2$  'dir.

$$\log_{\alpha}(A^2 - 2) < 2 \log_{\alpha} A = 2g(\alpha) < 2.284$$

ve

$$\log_{\alpha} 2 < 0.721$$

olduğundan

$$\log_{\alpha}(2(A^2 - 2)) = \log_{\alpha} 2 + \log_{\alpha}(A^2 - 2) < \log_{\alpha} 2 + 2 \log_{\alpha} A < 3.1$$

elde edilir.

### Önerme 3.5:

$n \geq 3$  ve  $A \geq 3$  olacak şekilde tamsayılar olmak üzere

$$ebob(u_n - 1, u_{n-2} - 1) \leq 2(A^2 - 2) \quad (3.8)$$

dir.

### İspat:

Kabul edelim ki  $g = ebob(u_n - 1, u_{n-2} - 1)$  olsun. Önerme 3.2 'nin (a) ve (c) şıkları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g &= \text{ebob}(u_n - 1, u_n - u_{n-2}) \leq \text{ebob}(u_{n-1}u_{n+1}, u_n - u_{n-2}) \\
&\leq \text{ebob}(u_{n-1}, Au_{n-1} - 2u_{n-2}) \text{ebob}(u_{n+1}, 2u_n - Au_{n-1}) \\
&\leq 2\text{ebob}(u_{n+1}, (2 - A^2)u_n + Au_{n+1}) \leq 2(A^2 - 2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

### Önerme 3.6:

Herhangi  $n \geq 2$  pozitif tamsayısı için

$$\text{ebob}(u_{2n-3} - 1, u_n - 1) < \alpha^{5.7} \quad (3.9)$$

dir.

### İspat:

Önceki önerme ile benzer şekilde  $g = \text{ebob}(u_{2n-3} - 1, u_n - 1)$  alınırsa Önerme 3.2 'nin (d) şıkkı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g &= \text{ebob}(u_{n-2}v_{n-1}, u_{n-1}u_{n+1}) \\
&\leq \text{ebob}(u_{n-2}, u_{n-1}) \text{ebob}(u_{n-2}, u_{n+1}) \text{ebob}(v_{n-1}, u_{n-1}) \text{ebob}(v_{n-1}, u_{n+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 3.2 'nin (e) şıkkı  $2u_{n+1} = u_{n-1}v_2 + v_{n-1}u_2$  özelliği kullanılırsa

$$g \leq 2u_3 \text{ebob}(v_{n-1}, u_{n-1}v_2 + u_2v_{n-1}) \leq 4u_3v_2 < \alpha^{5.7}$$

bulunur.

### Önerme 3.7:

Herhangi  $n \geq 2$  tamsayısı için

$$\text{ebob}(u_{2n-2} - 1, u_n - 1) < \alpha^{6.4} \quad (3.10)$$

dir.

**İspat:**

$g = \text{ebob}(u_{2n-2} - 1, u_n - 1)$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g &= \text{ebob}(u_{2n-1}u_{2n-3}, u_{n-1}u_{n+1}) \\ &\leq \text{ebob}(u_{2n-1}, u_{n-1})\text{ebob}(u_{2n-1}, u_{n+1})\text{ebob}(u_{2n-3}, u_{n-1})\text{ebob}(u_{2n-3}, u_{n+1}) \\ &\leq u_1^2 u_3 u_5 < \alpha^{6.4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Denklem sistemi (3.3) için aşağıdaki önermeyi verelim.

**Önerme 3.8:**

Denklem sistemi (3.3) için  $z \leq 2y - 1$  eşitsizliği doğrudur.

**İspat:**

Denklem sistemi (3.3) son iki eşitliğinden,  $c/\text{ebob}(u_y - 1, u_z - 1)$  elde edilir.

$u_z = bc + 1 < c^2$  olduğundan  $\sqrt{u_z} < c$  bulunur.  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisi için elde edilen üst ve alt sınırlar (3.4) da kullanılırsa

$$\sqrt{\alpha^{z-1}} < \sqrt{u_z} < c < u_y < \alpha^{y-0.83}$$

eşitsizliğinden  $z < 2y - 0.66$  bulunur. Bu eşitsizlik de  $z \leq 2y - 1$  olduğunu gösterir.

**Teorem 3.1 in İspatı:**

Kabul edelim ki  $A \geq 3$  olsun.  $1 \leq a < b < c$  sayıları (3.3) denklem sistemini sağlasın.  $1 \cdot 2 + 1 \leq ab + 1 = u_x$  olduğundan  $2 \leq x$  elde edilir. İspatı iki ana gruba ayırarak yapabiliriz. Bu gruplar  $z \leq 138$  ve  $z > 138$  durumlarıdır. İlk olarak  $z \leq 8$  durumunu inceleyelim.

**1.**  $z \leq 138$  olsun.

$z \leq 138$  için  $A$  katsayısının sınırlı olduğunu gösterelim. Bu durum için aşağıdaki önerme ispatıyla birlikte verilmiştir.

### Önerme:

Denklem sistemi (3.3) için  $z \leq 138$  için bir çözümünü mevcutsa  $A \leq A_0$  olup  $A$  tamsayısı sınırlıdır.

### İspat:

$\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisi  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  başlangıç koşulları altında  $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$  rekürans bağılantısı sağladığından  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin elemanları  $A$  'ya bağlı  $der(u_n(A)) = n - 1$  olacak şekilde bir monik polinomdur. Buna göre  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin birkaç terimi şu şekildedir.  $u_0 = 0$  ve  $u_1 = 1$  olmak üzere

$$u_2(A) = A, \quad u_3(A) = A^2 - 1, \quad u_4(A) = A^3 - 2A, \quad \dots$$

biçimindedir.  $2 \leq x < y < z \leq 138$  ve  $1 \leq a < b < c$  sayıları (3.3) denklem sistemini sağlıyorsa

$$a = \sqrt{\frac{(u_x(A) - 1)(u_y(A) - 1)}{u_z(A) - 1}}$$

sayısı tam sayı olmak zorundadır.  $u_z(A)$  bir monik polinom olduğundan dolayı polinom bölümünden  $der(r(A)) < der(u_z(A))$  olacak şekilde tek bir  $q(A) \in \mathbb{Z}[A]$  ve  $r(A) \in \mathbb{Z}[A]$  polinomları

$$(u_x(A) - 1)(u_y(A) - 1) = q(A)(u_z(A) - 1) + r(A)$$

olacak şekilde mevcuttur.  $2 \leq x < y < z \leq 138$  için Mathematica programı yardımıyla yapılan incelemede  $r(A)$  kalan polinomu sıfırdan farklı olarak elde edilmiştir. Bu ise

$$\frac{(u_x(A)-1)(u_y(A)-1)}{u_z(A)-1} = q(A) + \frac{r(A)}{u_z(A)-1} \quad (3.11)$$

olması demektir.  $2 \leq x < y < z \leq 138$  aralığı için, Mathematica programı kullanılarak  $A \geq 3$  durumunda  $r(A) = 0$  olacak şekilde bir  $A$  tamsayısının olmadığı belirlenmiştir. (3.11) eşitliğinin sağ tarafında  $r(A)/(u_z(A)-1)$  hiçbir zaman sıfır olmayacaktır.

Herhangi bir  $A$  tamsayısı için (3.11) eşitliğinin sol tarafı bir tamsayı ise,  $q(A) \in \mathbb{N}$  olduğundan dolayı

$$\frac{r(A)}{u_z(A)-1}$$

ifadesi de bu  $A$  sayısı için bir tamsayı olmak zorundadır. Ancak  $der(r(A)) < der(u_z(A))$  olduğundan

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{r(A)}{u_z(A)-1} = 0$$

olacaktır. Bu da  $A$  tamsayısının çok büyük olamayacağını göstermektedir. Dolayısıyla  $|r(A)| > u_z(A) - 1$  olmak zorundadır. Bu ise  $A$  'nın sınırlı olduğunu yani herhangi pozitif  $A_0$  için  $A \leq A_0$  olduğunu gösterir. Bu üst sınır  $A_0$  ve  $2 \leq x < y < z \leq 138$  aralığı için Mathematica programı ile çalışılırsa,  $A_0 = 2$  olduğu elde edilir.

2. Şimdi  $z > 138$  durumunu inceleyelim.

$P = \text{ebob}(u_z - 1, u_y - 1)$  olmak üzere Önerme 3.2 'nin (a) ve (c) şıkları kullanılırsa

$$\begin{aligned} P &= \text{ebob}(u_{z-1}u_{z+1}, u_{y-1}u_{y+1}) \\ &\leq \prod_{i,j \in \{\pm 1\}} \text{ebob}(u_{z-i}, u_{y-j}) = \prod_{i,j \in \{\pm 1\}} u_{\text{ebob}(z-i, y-j)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. Herhangi bir  $t_{ij}$  pozitif tamsayısı için  $ebob(z-i, y-j) = \frac{z-i}{t_{ij}}$  ve  $t_{ij} \geq 8$

olsun. Eşitsizlik (3.4) kullanılırsa

$$\alpha^{\frac{z-1}{2}} < \sqrt{u_z} < c \leq P \leq u_{\frac{z-1}{8}}^2 u_{\frac{z+1}{8}}^2 < \alpha^{4\left(\frac{z+1}{8}-0.83\right)}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte  $\alpha$  nın kuvvetleri karşılaştırıldığında  $-0.5 < -2.82$  sonucu elde edilir. Bu ise açık olarak bir çelişkidir.

$t_{ij} \leq 7$  olmak üzere  $k$  verilen  $t_{ij}$  sayısını gösterebilir ve  $ebob(k, l) = 1$  olacak şekilde,

$$\frac{z-i}{k} = \frac{y-j}{l}$$

olduğunu kabul edelim. Yine üç durumda inceleme yapma gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu durumlar  $l > k$ ,  $l = k$  ve  $l < k$  dir.

Buna göre ilk durum  $l > k$  ise yukarıdaki eşitsizlikten  $z-i < y-j$  olur. Denklem sisteminden  $y < z$  olduğundan  $z = y+1$  elde edilir. Bu değer yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} P &= ebob(u_y - 1, u_{y+1} - 1) \leq ebob(u_{y+1} u_{y-1}, u_y u_{y+2}) \\ &\leq ebob(u_{y-1}, u_{y+2}) \leq u_3 < \alpha^{2.2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir.  $\alpha^{\frac{z-1}{2}} < P$  olduğundan  $\alpha^{\frac{z-1}{2}} < \alpha^{2.2}$  eşitsizliğinden  $z < 5.4$  elde edilir. Bu da  $z > 138$  olmasıyla çelişir.

İkinci durum  $k = l$  ise,  $z-i = y-j$  ve  $y < z$  olduğundan  $z = y+2$  elde edilir. Bu değer yerine yazılır ve eşitsizlik (3.8) kullanılırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1}{2}} < \sqrt{u_z} < c \leq P = ebob(u_z - 1, u_{z-2} - 1) < 2(A^2 - 2)$$

elde edilir. Eşitsizlik (3.7) kullanıldığında

$$z < 2\log_{\alpha} \left( 2(A^2 - 2) \right) + 1 < 7.2$$

elde edilir. Bu ise  $z > 138$  olmasıyla çelişir.

Üçüncü  $l < k$  durumunda, olsun. Bu durumda  $2 \leq k/l$  durumunu inceleyelim. Buna göre

$$z = \frac{k}{l}(y - j) + i \geq 2(y - 1) - 1 = 2y - 3$$

bulunur. (3.3) denklem sistemi  $z \leq 2y - 1$  eşitsizliğini sağladığından burada da incelenmek üzere üç durum söz konusudur.

**I.**  $z = 2y - 1$  ise

$$\alpha^{y-1.17} = \frac{\alpha^{2y-2}}{\alpha^{y-0.83}} < \frac{u_{2y-1}}{u_y} = \frac{bc+1}{ac+1} < \frac{b}{a}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliği  $a^2$  sayısı ile çarptığımız zaman

$$a^2 \alpha^{y-1.17} < ab = u_x - 1 < u_x < \alpha^{x-0.83}$$

Eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı  $\alpha^{y-1.17}$  ile bölünürse  $a^2 < \alpha^{x-y+0.34} \leq \alpha^{-0.66} < 1$  elde edilir ki bu da  $1 < a$  olmasıyla çelişir.

**II.**  $z = 2y - 2$  ise ve bu değer yerine yazılıp (3.10) eşitsizliği kullanırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1}{2}} < P = \text{ebob}(u_y - 1, u_{2y-2} - 1) < \alpha^{6.4}$$

elde edilir. Bu da  $z > 138$  olmasıyla çelişir.

**III.**  $z = 2y - 3$  ise ve bu değer yerine yazılıp (3.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\alpha^{\frac{z-1}{2}} < P = \text{ebob}(u_y - 1, u_{2y-3} - 1) < \alpha^{5.7}$$

elde edilir ki bu da benzer şekilde bir çelişkidir.

Son olarak  $k/l < 2$  olsun. Bu şart  $k \geq 3$  olmasını gerektirir. Gerçekten  $l \geq 1$  ve  $k/l < 2$  olduğundan  $k \geq 3$  'dür.  $(i, j)$  çiftinden farklı olarak bir  $(i_0, j_0)$  çifti alalım. Yani  $(i, j) \neq (i_0, j_0)$  olacak şekilde bir  $(i_0, j_0)$  çiftini alındığında

$$z - i_0 = \frac{k}{l}(y - j_0) + i - i_0$$

elde edilir.  $P_0 = \text{ebob}(z - i_0, y - j_0)$  olmak üzere,  $P_0$  için bir üst sınırı bulalım.

$$\begin{aligned} P_0 &= \text{ebob}\left(\frac{k}{l}(y - j) + i - i_0, y - i_0\right) \\ &\leq \text{ebob}(k(y - j) + l(i - i_0), k(y - i_0)) \\ &\leq |k(j_0 - j) + l(i - i_0)| \end{aligned}$$

bulunur.  $(i, j) \neq (i_0, j_0)$  olduğundan  $i = i_0, j \neq j_0$ ,  $i \neq i_0, j = j_0$  ve  $i \neq i_0, j \neq j_0$  olacak şekilde üç durum söz konusudur. Her bir durum için üst sınırlar sırasıyla  $2k$ ,  $2l$  ve  $2(k + l)$  olarak elde edilir. (3.12) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1}{2}} \leq P &= \text{ebob}(u_y - 1, u_z - 1) < \prod_{i, j \in \{\pm 1\}} u_{\text{ebob}(z-i, y-j)} \\ &\leq \alpha^{\frac{z+1}{k} + 2(k+l) + 2k + 2l - 4 \cdot 0.83} \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir.  $t_{ij} = k \leq 7$  ve  $\text{ebob}(k, l) = 1$  olacak şekildeki  $k$  ve  $l$  sayı çiftleri de şu şekilde elde edilirler.

$$(k, l) = (3, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6)$$

Bu değerler (3.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,  $z$  için üst sınırlar

$$z < 105.1, 101.8, 98, 111.3, 124.1, 115.8, 127, 138.2$$

olacak şekilde bulunur. Bu da açık olarak  $z > 138$  olmasıyla çelişir. Böylelikle Teorem 3.1 'in ispatı tamamlanmış olur.

## BÖLÜM IV

### $k$ – PERİYODİK İKİNCİ MERTEBEDEN DİZİLER

Bu tezde yapılan bir başka çalışmada  $k$ –periyodik ikinci mertebeden dizilerin incelenmesidir. Bu diziler bu bölümde detaylı bir şekilde sunulmuştur. Bu dizilerin bir uygulaması olan ikinci mertebeden iki periyodik reküranslar yine bu bölümde sunulmuştur. Binet tipi formül elde edilmiştir.

$a, b, c, d$  ve  $q_0, q_1$  kompleks sayılar olmak üzere, iki periyodik ikinci mertebeden dizinin tanımını ilk olarak Edson ve Yayenie (2009) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$q_n = \begin{cases} a \cdot q_{n-1} + b \cdot q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \\ c \cdot q_{n-1} + d \cdot q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.1)$$

Edson ve Yayenie (2009) yukarıdaki iki periyodik diziyi tanımlamakla beraber bu dizinin  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 1$  ve  $b = d = 1$  özel değerleri altında üreteç fonksiyonunu

$$F(x) = \frac{x(1+ax-x^2)}{1-(ab+2)x^2+x^4}$$

biçiminde ve Binet tipi formülünü de  $\alpha = \frac{ab + \sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2}$ ,  $\beta = \frac{ab - \sqrt{(ab)^2 + 4ab}}{2}$

ve  $\xi(m) = m - 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$  olmak üzere

$$q_m = \left( \frac{a^{1-\xi(m)}}{(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right) \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$$

biçiminde bulmuşlardır.

Yayenie (2011), yukarıdaki çalışmaların bir adım geliştirilmesi olarak  $b$  ve  $d$  katsayılarını keyfi alarak, üreteç fonksiyonunu

$$H(x) = \frac{x(1+ax-cx^2)}{1-(ab+c+d)x^2+cd \cdot x^4},$$

Binet tipi formülünü de

$$q_m = \frac{a^{1-\xi(m)}}{(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \left( \frac{\alpha^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (\alpha+d-c)^{m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} - \beta^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (\beta+d-c)^{m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{\alpha-\beta} \right)$$

olacak şekilde elde etmiştir.

Cooper (2010) tarafından  $k$  – periyodik ikinci mertebeden lineer reküransın tanımı ilk olarak şu şekilde tanımlamıştır,

$$q_n = \begin{cases} a_0 \cdot q_{n-1} + b_0 \cdot q_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod{k} \\ a_1 \cdot q_{n-1} + b_1 \cdot q_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod{k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k-1} \cdot q_{n-1} + b_{k-1} \cdot q_{n-2}, & n \equiv k-1 \pmod{k} \end{cases} \quad (4.2)$$

ve  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin  $q_n = A_k q_{n-k} + B_k q_{n-2k}$  eşitliğini sağlayan  $2k$ . mertebeden bir reküransı sağladığını göstermiştir. Bununla birlikte  $A_k$  ve  $B_k$  katsayılarının nasıl elde edileceğini de aynı çalışmada göstermiştir.

Edson vd. (2011), denklem sistemi (4.2) de ikinci katsayıları  $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 1$  olarak ve başlangıç koşullarını da  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 1$  olarak üreteç fonksiyonunu, herhangi bir  $A$  sayısı için

$$G(x) = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} q_r x^r + \sum_{r=0}^{k-1} (q_{k+r} - A q_r) x^{k+r}}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}}$$

biçiminde ve Binet tipi formülünü de

$$q_{km+r} = (-1)^{k(m+1)} \left[ \left( \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) q_{k+r} - \left( \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} \right) q_r \right]$$

olarak elde etmiştir.

Bu bölümde verilen çalışmaların en genel halini de sunmak için lineer reküransların temel teoremi olarak bilinen teoreme ihtiyaç vardır. Bu bilinen teorem aşağıdaki gibi ifade edilir.

**Teorem 4.1:**

$\{G_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisi  $A_k \neq 0$  olmak üzere,  $G_n = A_1 G_{n-1} + A_2 G_{n-2} + \dots + A_k G_{n-k}$  reküransını sağlasın ve karakteristik polinom  $g(x) = x^k - A_1 x^{k-1} - \dots - A_k$  'in farklı kökleri  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  olsun. Rasyonel sayıların bir genişlemesi  $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_t, A_1, \dots, A_k, G_0, \dots, G_{k-1})$  olsun ve  $g(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \dots (x - \alpha_t)^{e_t}$  formunda olsun. Bu durumda derecesi  $e_i$  ( $i = 1, \dots, t$ ) 'den küçük tek türlü  $g_i(x) \in K[x]$  polinomları

$$G_n = g_1(n)\alpha_1^n + \dots + g_t(n)\alpha_t^n$$

olacak şekilde mevcuttur.

$k \geq 2$  bir tamsayı,  $q_0, q_1$  ve  $a_i, b_i$  ( $i = 0, \dots, k-1$ ) kompleks sayılar ve  $|q_0| + |q_1| \neq 0$ ,  $b_0 b_1 \dots b_{k-1} \neq 0$  olsun. Denklem sistemi (4.2)

$$q_n = A_k q_{n-k} - (-1)^k b_0 b_1 \dots b_{k-1} q_{n-2k} \quad (4.3)$$

reküransını sağlar.  $D = A_k^2 - 4(-1)^k b_0 b_1 \dots b_{k-1}$  ve

$$p_k(x) = x^2 - A_k x + (-1)^k b_0 b_1 \dots b_{k-1}$$

(4.3) lineer reküransının  $z^{2k} - A_k z^k + (-1)^k b_0 b_1 \dots b_{k-1}$  karakteristik polinomunda  $z^k = x$  konulmuş halini gösterebiliriz.  $p_k(x)$  karakteristik polinomunun kökleri

$$\kappa = \frac{A_k + \sqrt{D}}{2} \text{ ve } \mu = \frac{A_k - \sqrt{D}}{2}$$

olsun.  $D$  sayısı sıfıra eşit yada farklı olabileceğinden iki farklı durumda inceleme yapılabilir.

$D \neq 0$  ise,  $\kappa$  ve  $\mu$  sayıları birbirinden farklıdır.  $x = z^k$  olduğu için  $z^k = \kappa$  ve  $z^k = \mu$  bulunur.  $z^k = \kappa$  denkleminin kökleri,  $r = 0, 1, \dots, k-1$  için  $z_r^k = e^{\frac{2\pi i r}{k}} \kappa^{\frac{1}{k}}$  dir.  $z^k = \mu$  denkleminin kökleri ise,  $r = 0, 1, \dots, k-1$  için  $z_r^k = e^{\frac{2\pi i r}{k}} \mu^{\frac{1}{k}}$  olarak elde edilir.  $\{q_n\}$  sayı dizisinin her terimi elde edilen köklerin lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğinden ve lineer reküranslar için verilen temel teorem kullanılırsa,  $\kappa_j$  ve  $\mu_j$  kompleks sayıları bulunabilir öyle ki

$$q_n = \sum_{j=1}^k \kappa_j \varepsilon^{(j-1)n} \kappa^{n/k} + \sum_{j=1}^k \mu_j \varepsilon^{(j-1)n} \mu^{n/k} \quad (4.4)$$

'dır. Burada  $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$  olarak elde edilebilir. (4.4) denkleminde  $n$  yerine sırasıyla  $0, 1, \dots, 2k-1$  koyarak  $\kappa_j$  ve  $\mu_j$  katsayıları kolaylıkla bulunur. Daha kısa olarak (4.4) formülünde herhangi negatif olmayan  $t$  değerini yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} q_{t+k} &= \sum_{j=1}^k \kappa_j \varepsilon^{(j-1)(t-k)} \kappa^{(t+k)/k} + \sum_{j=1}^k \mu_j \varepsilon^{(j-1)(t+k)} \mu^{(t+k)/k} \\ &= \kappa K_t + \mu M_t \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} K_t + M_t &= q_t \\ \kappa K_t + \mu M_t &= q_{t+k} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı  $\mu - \kappa$  'dır.  $\mu$  ve  $\kappa$  birbirinden farklı olduğundan dolayı  $\mu - \kappa \neq 0$  'dır. Dolayısıyla denklem sisteminin tek çözümü vardır. Cramer metodu kullanılarak bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$K_t = \frac{q_{t+k} - \mu q_t}{\kappa - \mu}$$

ve

$$M_t = -\frac{q_{t+k} - \kappa q_t}{\kappa - \mu}$$

çözümleri elde edilir.

Bu ise,  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisi için Binet tipi formülünü veren teoremi ispatlar.

**Teorem 4.2:**

$D \neq 0$  ise,  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin Binet tipi formülü şu şekildedir,

$$q_n = \frac{q_{k+(n \bmod k)} - \mu q_{n \bmod k}}{\kappa - \mu} \kappa^{\lfloor n/k \rfloor} - \frac{q_{k+(n \bmod k)} - \kappa q_{n \bmod k}}{\kappa - \mu} \mu^{\lfloor n/k \rfloor}.$$

dır.

İkinci durumda  $D = 0$  ise  $\kappa$  ve  $\mu$  kökleri çakışiktır ve  $A_k/2$  'ye eşittir. Lineer reküransların temel teoremi kullanılırsa,  $j = 1, \dots, k$  için  $u_j$  ve  $v_j$  kompleks sayıları

$$q_n = \sum_{j=1}^k (u_j n + v_j) \varepsilon^{(j-1)n} \kappa^{n/k} = nU_n + V_n \quad (4.6)$$

biçiminde mevcuttur. Burada  $U_n = \sum_{j=1}^k u_j \varepsilon^{(j-1)n} \kappa^{n/k}$  ve  $V_n = \sum_{j=1}^k v_j \varepsilon^{(j-1)n} \kappa^{n/k}$  'dir. Herhangi

bir  $t$  ve  $t+k$  için  $q_t = tU_t + V_t$  ve  $q_{t+k} = \kappa((t+k)U_t + V_t)$  eşitliklerini sağlar.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} tU_t + V_t &= q_t \\ \kappa(t+k)U_t + \kappa V_t &= q_{t+k} \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde katsayılar matrisinin determinanı  $\kappa k$  olduğundan sıfırdan farklıdır dolayısıyla tek çözüm vardır ve

$$U_t = \frac{q_{t+k} - \kappa q_t}{\kappa k}$$

ve

$$V_t = -\frac{tq_{t+k} - (t+k)\kappa q_t}{\kappa k}$$

çözümleri elde edilir. Bunun sonucu olarak da aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

### **Teorem 4.3:**

Eğer  $D = 0$  ise,  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin Binet tipi formülü şu şekildedir

$$q_n = \frac{1}{k} (wn + v) \kappa^{\lfloor n/k \rfloor - 1}$$

biçiminde elde edilir. Burada istenen değerler  $w = q_{k+(n \bmod k)} - \kappa q_{n \bmod k}$

$v = -(n \bmod k)q_{k+\bmod k} + (k + (n \bmod k))\kappa q_{n \bmod k}$  'dir.

### **4.1 İkinci Mertebeden İki Periyodik Reküranslar**

Edson ve Yayenie (2009) tarafından ilk olarak

$$q_n = \begin{cases} a \cdot q_{n-1} + b \cdot q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \\ c \cdot q_{n-1} + d \cdot q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmıştır.  $bd \neq 0$  ve  $|q_0| + |q_1| \neq 0$  olmak üzere  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  dördüncü mertebeden aşağıdaki reküransı sağlar.

$$q_n = (ac + b + d)q_{n-2} - bd \cdot q_{n-4}$$

$D = (ac + b + d)^2 - 4bd$  ve  $p_2(x) = x^2 - (ac + b + d)x + bd$  polinomunun kökleri

$$\kappa = \frac{ac + b + d + \sqrt{D}}{2}$$

ve

$$\mu = \frac{ac + b + d - \sqrt{D}}{2}$$

olsun.

Bu durumda  $D \neq 0$  ve  $n$  çift olmak üzere  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin Binet tipi formülü

$$q_n = \frac{q_2 - \mu q_0}{\kappa - \mu} \kappa^{\lfloor n/2 \rfloor} - \frac{q_2 - \kappa q_0}{\kappa - \mu} \mu^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

olarak bulunur.  $n$  tek ise,  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin Binet tipi formülü

$$q_n = \frac{q_3 - \mu q_1}{\kappa - \mu} \kappa^{\lfloor n/2 \rfloor} - \frac{q_3 - \kappa q_1}{\kappa - \mu} \mu^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

olarak elde edilir.

$D = 0$  ise,  $\kappa = \mu = (ac + b + d)/2$  olur ve  $\{q_n\}_{n \geq 0}$  sayı dizisinin Binet tipi formülü de

$$q_n = \frac{1}{2} (wn + v) \kappa^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$$

biçimindedir. Burada  $w = a^{1-\xi(n)} (\kappa - b)^{\xi(n)} q_1 + (b - \kappa)^{1-\xi(n)} (bc)^{\xi(n)} q_0$  ve

$v = \xi(n) (\kappa + b) q_1 + (-1)^{\xi(n)} (2\kappa)^{1-\xi(n)} (bc)^{\xi(n)} q_0$  'dır.

## BÖLÜM V

### PELLANS DİZİSİ VE DİYAFONT ÜÇLÜSÜ

Lineer reküransların diyafont üçlüsü konusunda, çalışma alanlarından biri de denklem sisteminin sağ tarafındaki dizinin mertebesini arttırmaktır. İkinci mertebeden dizilerin çarpımları ile ilgili birçok kombinatoriyal özellikler olmasına karşılık, yüksek dereceden dizilerin ikinci mertebeden dizilere ait kombinatoriyal özelliklere sahip değildir. Kombinatoriyal özelliklere sahip olup yüksek mertebeden indirgeme dizisine sahip olan bir dizi önceki bölümde anlatılan iki-periyodik ikinci merteden dizilerdir.

Bu bölümde (4.1) denklem sisteminde uygun katsayı seçilerek, dördüncü mertebeden pellans sayıları dizisi tanımlanmış, bu dizi ile ilgili bazı kombinatoriyal özellikler verilmiştir. Ardından bu dizinin diyafont üçlüsü incelenmiştir. .

#### Tanım 5.1:

Pellans dizisi başlangıç koşulları  $S_0 = 0$  ,  $S_1 = 1$  ,  $S_2 = 1$  ve  $S_3 = 5$  olmak üzere,  $n \geq 4$  için

$$S_n = 6S_{n-2} - S_{n-4} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Pellans sayı dizisinin birkaç terimi şu şekildedir.

0, 1, 1, 5, 6, 29, 35, ... .

#### 5.1 Pellans Dizisi ve Özellikleri

$\{R_n\}_{n \geq 0}$  dizisini  $R_0 = 0$  ve  $R_1 = 1$  başlangıç koşulları altında

$$R_n = \begin{cases} R_{n-1} + R_{n-2} & , n \text{ tek iken} \\ 4R_{n-1} + R_{n-2} & , n \text{ çift iken} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bölüm 4.1 ' den  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  dizisi  $R_0 = 0$  ,  $R_1 = 1$  ,  $R_2 = 1$  ve  $R_3 = 5$  olmak üzere,

$$R_n = 6R_{n-2} - R_{n-4}$$

bağıntısını sağlar. Dolayısıyla tanımlanan  $\{R_n\}_{n \geq 0}$  dizisi  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  dizisi ile aynı dizidir. Binet-tipi formülü de şu şekildedir,

$$S_n = \frac{S_{2+(n \bmod 2)} - \mu S_{(n \bmod 2)}}{\kappa - \mu} \kappa^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \frac{S_{2+(n \bmod 2)} - \kappa S_{(n \bmod 2)}}{\kappa - \mu} \mu^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \quad (5.2)$$

Bu formülde  $\kappa$  ve  $\mu$  sayıları  $x^2 - 6x + 1 = 0$  karakteristik denklemin kökleridir. Pellans sayı dizisi, Pell ve balans sayı dizileri arasındaki bazı özellikler aşağıdaki önermede ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

### Önerme 5.2:

$m$  ve  $n$  pozitif tamsayılar olmak üzere, aşağıdaki özellikler doğrudur,

- a)  $S_{2n} = B_n$  ,  $S_{2n+1} = P_{2n+1}$
- b)  $\text{ebob}(S_n, S_m) = S_{\text{ebob}(n,m)}$  'dir.
- c)  $P_{2n+1} - 1 = \begin{cases} P_n Q_{n+1}, & n \text{ çift ise} \\ P_{n+1} Q_n, & n \text{ tek ise} \end{cases}$  ve  $P_{2n} - 2 = \begin{cases} P_{n+1} Q_{n-1}, & n \text{ çift ise} \\ P_{n-1} Q_{n+1}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$
- d)  $2B_n = P_{2n} = P_n Q_n$
- e)  $B_{2n+1} - 1 = B_n C_{n+1}$
- f)  $n$  tek tamsayı olmak üzere,  $B_n - 1 = \frac{1}{2} P_{n-1} Q_{n+1}$  'dir.

### İspat:

(a) (5.2) formülünü kullanarak pellans sayı dizisinin indisinin çift olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \frac{S_2 - \mu S_0}{\kappa - \mu} \kappa^n - \frac{S_2 - \kappa S_0}{\kappa - \mu} \mu^n \\
&= \frac{\kappa^n - \mu^n}{\kappa - \mu} = B_n
\end{aligned}$$

dır. Pellans dizisinin indisi tek ise,

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} &= \frac{S_3 - \mu S_1}{\kappa - \mu} \kappa^n - \frac{S_3 - \kappa S_1}{\kappa - \mu} \mu^n \\
&= \frac{5 - \mu}{\kappa - \mu} \kappa^n - \frac{5 - \kappa}{\kappa - \mu} \mu^n \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} = P_{2n+1}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  sayıları  $x^2 - 2x - 1 = 0$  denkleminin kökleridir.

Pellans sayı dizisinin elemanları, Lucas sayı dizinin özel elemanları olduğundan dolayı (b) özelliği sağlar.

(c)  $\{P_n\}$  ve  $\{Q_n\}$  dizileri için Binet tipi formülleri kullanarak  $n$  'nin çift olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
P_n Q_{n+1} &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\
&= P_{2n+1} + (-1)^{n+1} = P_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

bulunur.  $n$  tek tamsayı olması durumunda ise benzer yolla ispat yapılır

Kalan şıkları göstermek için  $\{P_n\}$ ,  $\{Q_n\}$ ,  $\{B_n\}$ ,  $\{C_n\}$  sayı dizilerinin Binet tipi formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
2B_n &= 2 \frac{\kappa^n - \tau^n}{\kappa - \tau} = 2 \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha^2 - \beta^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} = P_{2n} \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (\alpha^n + \beta^n) \\
&= P_n Q_n
\end{aligned}$$

biçiminde olduğu,

$$\begin{aligned}
B_n C_{n+1} &= \frac{\kappa^n - \tau^n}{\kappa - \tau} (\kappa^{n+1} + \tau^{n+1}) \\
&= \frac{\kappa^{2n+1} - \tau^{2n+1}}{\kappa - \tau} - 1 \\
&= B_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

şeklinde olduğu ve  $n$  tek ise,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} P_{n-1} Q_{n+1} &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2(\alpha - \beta)} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{(-1)^n}{2(\alpha - \beta)} \\
&= \frac{\kappa^n - \tau^n}{\kappa - \tau} + (-1)^n \\
&= B_n - 1
\end{aligned}$$

biçiminde olduğu görülür.

Şimdi  $\{P_n\}$ ,  $\{Q_n\}$ ,  $\{B_n\}$  sayı dizileri için alt ve üst sınırları vermek yerinde olacaktır.

### Önerme 5.3:

$n \geq 3$  bir tamsayı olmak üzere  $\{P_n\}$ ,  $\{Q_n\}$ ,  $\{B_n\}$  dizilerine ait özellikler doğrudur.

$$\begin{aligned}
\alpha^{n-1.19} &< P_n < \alpha^{n-1.16} \\
\alpha^{n-0.1} &< Q_n < \alpha^{n+0.1} \\
\alpha^{2n-1.97} &< B_n < \alpha^{2n-1.96}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

**İspat:**

$$P_n \geq \frac{\alpha^n - |\beta^3|}{\alpha - \beta} \geq \alpha^n \frac{1 - \left(\frac{|\beta|}{\alpha}\right)^3}{\alpha - \beta} \geq \alpha^{n-1.19}$$

olduğundan yukarıdaki ifade Pell sayı dizisi için alt sınırı verir. Benzer şekilde üst sınırı da

$$P_n \leq \frac{\alpha^n + |\beta^3|}{\alpha - \beta} \leq \alpha^n \frac{1 + \left(\frac{|\beta|}{\alpha}\right)^3}{\alpha - \beta} \leq \alpha^{n-1.16}$$

biçiminde bulabiliriz. Benzer ispat yöntemi kullanılarak,  $\{Q_n\}$  sayı dizisi içinde alt ve üst sınır bulunur. Balans sayı dizisi için verilen alt ve üst sınırlar Bölüm II de verilmiştir.

Bu konu ile ilgili temel teorem aşağıda verilmiştir.

**Teorem 5.4:**

$\{S_n\}$  Pellans sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{aligned} ab + 1 &= S_x \\ ac + 1 &= S_y \\ bc + 1 &= S_z \end{aligned} \tag{5.4}$$

denklem sistemini sağlayan bir  $0 < a < b < c$  tamsayı üçlüsü yoktur.

**İspatı:**

$0 < a < b < c$  olduğundan,  $1 \cdot 2 + 1 \leq ab + 1 = S_x$  dir. Böylece  $3 \leq x < y < z$  bulunur. Bu ispatı dört ana başlık altında inceleyerek yapacağımızdan dört başlık aşağıda detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

**I. y ve z çift ise**

Eğer  $x$  çift pozitif tamsayı olması durumu Bölüm II de, Pellans sayı dizilerinin elemanları balans sayı dizisinin elemanlarına denk gelmesinden dolayı incelenmiştir.  $x$  tek ise, Bölüm 2 de  $k=2$  ve  $l=1$  durumu hariç ispat ağırlıklı olarak  $y$  ve  $z$  değişkenlerine bağlı olduğundan, ispat yolu değişmez. Bölüm 2 de  $k=2$  ve  $l=1$  durumunda  $S_x = P_{2x-1}$  alınırsa, ispatı benzer şekilde yapabilir.

## II. $y$ ve $z$ tek ise

$y$  ve  $z$  tek olduğunda, Pellans sayı dizinin elemanları Pell sayı dizisine dönüşeceğinden  $y$  ve  $z$  arasındaki bağıntıyı açıklığa kavuşturmak gerekir. Bunun için bu bağıntıyı veren ifade önerme olarak verilmiş ve ispatlanmıştır.

### Önerme 5.5:

$0 < a < b < c$  tamsayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} ab + 1 &= S_x \\ ac + 1 &= P_y \\ bc + 1 &= P_z \end{aligned} \tag{5.5}$$

sistemi  $z \leq 2y - 2$  eşitsizliğini sağlar.

### İspat:

Yukarıdaki sistemin son iki eşitsizliği ele alınırsa,

$$\sqrt{P_z} < c < P_y$$

elde edilir. Pell sayı dizisi için verilen üst ve alt sınırlar kullanılırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} < \sqrt{P_z} < c < P_y < \alpha^{y-1.16}$$

bulunur ki bu da  $z \leq 2y - 2$  eşitsizliğini sağlar.

Kabul edelim ki  $q_1 = \text{ebob}(S_y - 1, S_z - 1)$  olsun.  $y$  ve  $z$  tek tamsayı olduğundan pellans sayı dizisinin elemanları pell sayı dizisine dönüşür. Önerme 5.2 kullanılırsa,  $i, j \in \{\pm 1\}$  olmak üzere,

$$q_1 = \text{ebob}(P_y - 1, P_z - 1) = \text{ebob}\left(\frac{P_{y-i} Q_{y+i}}{2}, \frac{P_{z-j} Q_{z+j}}{2}\right) \\ \leq P_{\text{ebob}\left(\frac{y-i}{2}, \frac{z-j}{2}\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y-i}{2}, \frac{z+j}{2}\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+i}{2}, \frac{z-j}{2}\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+i}{2}, \frac{z+j}{2}\right)}$$

elde edilir.  $\mu_1, \mu_2 \in \{\pm 1\}$  ve  $t \geq 5$  için,  $\text{ebob}\left(\frac{z + \mu_1 j}{2}, \frac{y + \mu_2 i}{2}\right) = \frac{z + \mu_1 j}{2t}$  olsun.  $c/q_1$  olduğundan,

$$\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} < \sqrt{P_z} < c \leq q_1 < \alpha^{\frac{z+1}{10} - 1.16 + 2\frac{z-1}{10} + 0.2 + \frac{z+1}{10} + 0.1}$$

bulunur.  $\alpha$  sayılarının kuvvetlerini karşılaştırdığımız zaman,  $-0.595 < -0.86$  bulunup bu ise mümkün olmadığından bir çelişki elde ederiz. Dolayısıyla  $t \leq 4$  'dür.  $\text{ebob}(k, l) = 1$  olacak şekildeki  $k$  ve  $l$  pozitif tamsayılar için,

$$\frac{z + \mu_1 i}{2k} = \frac{y + \mu_2 j}{2l} \quad (5.6)$$

olsun.

İlk olarak  $l > k$  olmak üzere (5.6) eşitliği ile birlikte  $y < z$  eşitsizliği kullanılırsa,  $z = y + 1$  elde edilir.  $y$  ve  $z$  tamsayıları tek olduğundan bu durum mümkün değildir.

İkinci olarak  $k = l$  olmak üzere (5.6) eşitliği kullanılırsa,  $z = y + 2$  bulunur. Önerme 5.2 kullanılırsa,  $i \in \{\pm 1\}$  için

$$P_z - 1 = \frac{P_{z+i} Q_{z-i}}{2} \quad \text{ve} \quad P_{z-2} - 1 = \frac{P_{z-2-i} Q_{z-2+i}}{2}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki  $z \equiv 3 \pmod{4}$  olsun. Önerme 5.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{ebob}(P_z - 1, P_{z-2} - 1) = \text{ebob}\left(P_{\frac{z+1}{2}} Q_{\frac{z-1}{2}}, P_{\frac{z-3}{2}} Q_{\frac{z-1}{2}}\right) \\ &= P_{\text{ebob}\left(\frac{z+1}{2}, \frac{z-3}{2}\right)} Q_{\frac{z-1}{2}} \\ &= P_2 Q_{\frac{z-1}{2}} = 2Q_{\frac{z-1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur.  $c/q_1$  ve  $q_1 = 2Q_{\frac{z-1}{2}}$  olduğundan,  $c/Q_{\frac{z-1}{2}}$  veya  $c/2Q_{\frac{z-1}{2}}$  'dir. Eğer  $c/Q_{\frac{z-1}{2}}$  ise, bölünebilme özelliği kullanılırsa,  $Q_{\frac{z-1}{2}} = cc_1$  olmak üzere bir  $c_1 \in \mathbb{Z}^+$  bulunabilir.

Dolayısıyla,

$$c_1 \alpha^{\frac{z-1.19}{2}} < c_1 \sqrt{P_z} < Q_z < \alpha^{\frac{z-1}{2}+0.1}$$

olduğu görülür ve  $c_1 < \alpha^{0.19} < 1.2$  elde edilir. Kolayca görülür ki  $c_1 \in \mathbb{Z}^+$  olduğundan sadece  $c_1 = 1$  durumu mümkündür.  $c_1 = 1$  ise  $c = Q_{\frac{z-1}{2}}$  elde edilir. Bu değer (5.5) denklem sisteminde yerine yazılırsa,  $a = P_{\frac{z-3}{2}}$  ve  $b = P_{\frac{z+1}{2}}$  bulunur. Bu değerler tekrar (5.5) sisteminin ilk denkleminde yerine yazılırsa

$$ab + 1 = P_{\frac{z-3}{2}} P_{\frac{z+1}{2}} + 1 = P_{\frac{z-1}{2}}^2 = S_x$$

elde edilir. Eğer  $x$  tek ve Önerme 5.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^{x-1.19} < \alpha^{z-3.32} &\Rightarrow 2.13 < z - x \\ \alpha^{z-3.38} < \alpha^{x-1.16} &\Rightarrow z - x < 2.2 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir.  $x$  ve  $z$  birer tamsayı olduğundan  $2.13 < z - x < 2.22$  olması imkansızdır. Benzer şekilde  $x$  çift ise,  $1.35 < z - x < 1.4$  elde edilir ki bu da mümkün değildir.

$c/2Q_{\frac{z-1}{2}}$  ise,  $2Q_{\frac{z-1}{2}} = cc_2$  olacak şekilde bir  $c_2 \in \mathbb{Z}^+$  vardır.  $c_2 < \frac{2Q_{\frac{z-1}{2}}}{\sqrt{P_z}} < 2\alpha^{0.2} < 2.4$  ve

$c_2 \in \mathbb{Z}^+$  olduğundan  $c_1 = 1$  veya  $c_1 = 2$  olabilir.  $c_2 = 2$  ise,  $c = Q_{\frac{z-1}{2}}$  olduğundan dolayı

yukarıdaki durum elde edilir.  $c_2 = 1$  ise,  $a = P_{\frac{z-3}{2}}/2$  ve  $b = P_{\frac{z+1}{2}}/2$  bulunur. Dolayısıyla

(5.5) sisteminde bulunan değerler yerine yazılırsa,  $P_{\frac{z-1}{2}}^2 + 5 = 4S_x$  elde edilir.  $x$  tek ise,

$S_x = P_x$  olduğundan,  $3.48 < z - x < 3.8$  edilir. Bu durum mümkün değildir. Benzer şekilde,  $x$  çift ise  $S_x = B_{\frac{x}{2}}$  olduğundan,  $2.7 < z - x < 3$  bulunur ki bu da mümkün değildir.

Kabul edelim ki  $z \equiv 1 \pmod{4}$  olsun.

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{ebob}(P_z - 1, P_{z-2} - 1) = \text{ebob}\left(P_{\frac{z-1}{2}}Q_{\frac{z+1}{2}}, P_{\frac{z-1}{2}}Q_{\frac{z-3}{2}}\right) \\ &= Q_{\text{ebob}\left(\frac{z-1}{2}, \frac{z-3}{2}\right)} P_{\frac{z-1}{2}} = Q_1 P_{\frac{z-1}{2}} = 2P_{\frac{z-1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $c/q_1$  olduğundan, iki durum söz konusudur.  $c/P_{\frac{z-1}{2}}$  ise,  $P_{\frac{z-1}{2}} = cc_3$  olacak

şekilde bir  $c_3 \in \mathbb{Z}^+$  vardır.  $P_{\frac{z-1}{2}} < \sqrt{P_z}$  olduğundan,  $c_3 < \frac{P_{\frac{z-1}{2}}}{\sqrt{P_z}} < 1$  bulunur ki bu durum

mümkün değildir.  $c/2P_{\frac{z-1}{2}}$  ise,  $2P_{\frac{z-1}{2}} = cc_4$  olacak şekilde bir  $c_4 \in \mathbb{Z}^+$  vardır.

Dolayısıyla  $c_4\sqrt{P_z} < 2P_{\frac{z-1}{2}}$  elde edilir. Her iki tarafı  $\sqrt{P_z}$  ile bölersek, o halde

$$c_4 < \frac{2P_{\frac{z-1}{2}}}{\sqrt{P_z}} < \alpha^{-0.27} < 0.79 \text{ bulunur ki bu da } c_4 \text{ 'ün pozitif tamsayı olmasıyla çelişir.}$$

$\frac{k}{l} \geq 2$  olacak şekilde  $k > l$  olsun. (5.6) denkleminde,

$$z = \frac{k}{l}(y + \mu_2 i) - \mu_1 j \geq 2y - 3$$

elde edilir. Önerme 5.5' den  $z \leq 2y - 2$  olduğundan, iki durum vardır. Bunlar  $z = 2y - 3$  ve  $z = 2y - 2$  durumlarıdır.  $y$  ve  $z$  pozitif tek tamsayılar olduğundan dolayı,  $z = 2y - 2$  durumu mümkün değildir. Önerme 5.2' den dolayı

$$q_1 = \text{ebob}(P_{2y-3} - 1, P_y - 1) = \text{ebob}(P_{y-1}Q_{y-2}, P_y - 1)$$

elde edilir.  $y$  pozitif tamsayısının durumuna göre iki durumda inceleme yapmak söz konudur.

Kabul edelim ki  $y \equiv 1 \pmod{4}$  olsun.  $\sqrt{P_z} < c < q_1$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.18}{2}} < q_1 &= \text{ebob}(P_{y-1}Q_{y-2}, P_y - 1) = \text{ebob}\left(P_{y-1}Q_{y-2}, P_{\frac{y-1}{2}}Q_{\frac{y+1}{2}}\right) \\ &\leq \text{ebob}\left(P_{y-1}, P_{\frac{y-1}{2}}\right) \text{ebob}\left(P_{y-1}, Q_{\frac{y+1}{2}}\right) \text{ebob}\left(Q_{y-2}, P_{\frac{y-1}{2}}\right) \text{ebob}\left(Q_{y-2}, Q_{\frac{y+1}{2}}\right) \\ &\leq P_{\frac{y-1}{2}}Q_1Q_2Q_3 < \alpha^{\frac{z+1}{4}+5.14} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırıldığında,  $z < 24$  bulunur.

Kabul edelim ki  $y \equiv 3 \pmod{4}$  olsun Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.18}{2}} < q_1 &= \text{ebob}(P_{y-1}Q_{y-2}, P_y - 1) = \text{ebob}\left(P_{y-1}Q_{y-2}, P_{\frac{y+1}{2}}Q_{\frac{y-1}{2}}\right) \tag{5.7} \\ &\leq \text{ebob}\left(P_{y-1}, P_{\frac{y+1}{2}}\right) \text{ebob}\left(P_{y-1}, Q_{\frac{y-1}{2}}\right) \text{ebob}\left(Q_{y-2}, P_{\frac{y+1}{2}}\right) \text{ebob}\left(Q_{y-2}, Q_{\frac{y-1}{2}}\right) \\ &\leq Q_{\frac{y-1}{2}}Q_1P_2Q_3 < \alpha^{\frac{z+1}{4}+5.14} \end{aligned}$$

bulunur.  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırıldığında, benzer şekilde  $z < 24$  bulunur.

$k > l$  için  $\frac{k}{l} < 2$  durumunu inceleyelim. Bu durum,  $ebob(k,l)=1$  ve  $k > l$  olduğundan,  $k \geq 3$  olmasını gerektirir.  $(\mu_1, \mu_2) \neq (\mu'_1, \mu'_2)$  olacak şekilde bir  $(\mu'_1, \mu'_2)$  çifti seçelim. (5.6) eşitliği kullanılırsa,

$$z + \mu'_1 j = \frac{k}{l}(y + \mu_2 i) - \mu_1 j + \mu'_1 j$$

'dir.  $q_1^{(0)}$  için bir üst sınır hesabı yapacağımızdan dolayı  $q_1^{(0)} = ebob\left(\frac{z + \mu'_1 j}{2}, \frac{y + \mu_2 i}{2}\right)$  olsun.

$$\begin{aligned} q_1^{(0)} &= \frac{1}{2} ebob(z + \mu'_1 j, y + \mu_2 i) \\ &= \frac{1}{2} ebob\left(\frac{k}{l}(y + \mu_2 i) - \mu_1 j + \mu'_1 j, y + \mu_2 i\right) \\ &= \frac{1}{2} ebob\left(k(y + \mu_2 i) - l(\mu_1 j - \mu'_1 j), k(y + \mu_2 i)\right) \\ &\leq |k + l| \end{aligned}$$

üst sınırı elde edilir.  $2 \leq l < k \leq 4$  ve  $ebob(k,l)=1$  ve  $\frac{k}{l} < 2$  olduğundan sadece  $(k,l) = (4,3), (3,2)$  değerleri olasıdır. Bu değerler, yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.18}{2}} &< \sqrt{P_z} < ebob(P_z - 1, P_y - 1) \\ &\leq \alpha^{\frac{z+1}{4} + 3(7+0.1) - 1.16} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırılırsa,  $z < 84$  olduğu görülür.

Bu bölümde  $z$  'nin en büyük üst sınırını 84 bulunmuştur. Şimdi  $y$  ve  $z$  pozitif tamsayıları için  $y$  'nin çift,  $z$  'nin de çift olduğunu kabul edelim.

### III. $y$ çift ve $z$ tek ise

$y$  çift ve  $z$  tek pozitif tamsayılar olduğundan, (5.4) denklem sisteminde  $S_z = P_z$  ve  $S_y = B_{\frac{y}{2}}$  olur.  $y$  ve  $z$  arasındaki ilişkiyi veren önerme aşağıda ispatıyla birlikte verilmiştir.

**Önerme 5.6:**

$0 < a < b < c$  tamsayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} ab + 1 &= S_x \\ ac + 1 &= B_{\frac{y}{2}} \\ bc + 1 &= P_z \end{aligned} \tag{5.8}$$

denklem sistemi  $z \leq 2y - 3$  eşitsizliğini sağlar.

**İspat:**

(5.8) denklem sisteminin son iki eşitliğinden,

$$\sqrt{P_z} < c < B_{\frac{y}{2}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Önerme 5.3 elde edilen balans ve Pell sayı dizileri verilen alt ve üst sınırları kullanılırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} < \sqrt{P_z} < c < B_{\frac{y}{2}} < \alpha^{y-1.96}$$

bulunur.  $\alpha$  'nın kuvvetlerini karşılaştırıldığında,  $z \leq 2y - 3$  elde edilir.

Kabul edelim ki  $q_2 = \text{ebob}\left(B_{\frac{y}{2}} - 1, P_z - 1\right)$  olsun. (5.8) denklem sisteminden

$$\sqrt{P_z} < q_2 = \text{ebob}\left(B_{\frac{y}{2}} - 1, P_z - 1\right)$$

elde edilir. Önerme 5.2 'nin özellikleri kullanılırsa,  $i \in \{\pm 1\}$  için,

$$\begin{aligned}
q_2 &= \text{ebob} \left( B_{\frac{y}{2}} - 1, P_z - 1 \right) \leq \text{ebob} \left( B_{\frac{y}{2}-1}, B_{\frac{y}{2}+1}, P_{\frac{z-i}{2}}, Q_{\frac{z+i}{2}} \right) \\
&\leq \text{ebob} \left( B_{\frac{y}{2}-1}, P_{\frac{z-i}{2}} \right) \text{ebob} \left( B_{\frac{y}{2}-1}, Q_{\frac{z+i}{2}} \right) \text{ebob} \left( B_{\frac{y}{2}+1}, P_{\frac{z-i}{2}} \right) \text{ebob} \left( B_{\frac{y}{2}+1}, Q_{\frac{z+i}{2}} \right) \\
&\leq \text{ebob} \left( \frac{1}{2} P_{y-2}, P_{\frac{z-i}{2}} \right) \text{ebob} \left( \frac{1}{2} P_{y-2}, Q_{\frac{z+i}{2}} \right) \text{ebob} \left( \frac{1}{2} P_{y+2}, P_{\frac{z-i}{2}} \right) \text{ebob} \left( \frac{1}{2} P_{y+2}, Q_{\frac{z+i}{2}} \right) \\
&\leq \prod_{j \in \{\pm 2\}} P_{\text{ebob} \left( y+j, \frac{z-i}{2} \right)} Q_{\text{ebob} \left( y-j, \frac{z+i}{2} \right)}
\end{aligned}$$

bulunur.  $\eta_1, \eta_2, i \in \{\pm 1\}^3$  ve  $j \in \{\pm 2\}$  için  $\text{ebob} \left( y + \eta_1 j, \frac{z + \eta_2 i}{2} \right) = \frac{z + \eta_2 i}{2t}$  olmak üzere

$t \geq 4$  olsun. Önerme 5.3' ün özellikleri kullanılırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} < \alpha^{\frac{z-1}{8} - 1.16 + \frac{z+1}{8} - 1.16 + \frac{z-1}{8} + 0.1 + \frac{z+1}{8} + 0.1} = \alpha^{\frac{z}{2} - 2.12}$$

elde edilir.  $\alpha$  'nın kuvvetlerini karşılaştırıldığında,  $-1.18 < -4.24$  elde edilir bu ise mümkün olamaz. Dolayısıyla  $t \geq 4$  durumu mümkün olmayacaktır.

$t = 3$  olmak üzere  $\text{ebob} \left( y + \eta_1 j, \frac{z + \eta_2 i}{2} \right) = \frac{z + \eta_2 i}{6}$  olduğundan dört durum söz

konusudur. Bunlar,  $y + \eta_1 j = \frac{z + \eta_2 i}{6}$ ,  $y + \eta_1 j = \frac{z + \eta_2 i}{3}$ ,  $\frac{y + \eta_1 j}{2} = \frac{z + \eta_2 i}{3}$  ve

$\frac{y + \eta_1 j}{5} = \frac{z + \eta_2 i}{6}$  'dır. Birinci durum  $y + \eta_1 j = \frac{z + \eta_2 i}{6}$  ise Önerme 5.6 kullanıldığında,

$z = 6y + 6\eta_1 j - \eta_2 i \leq 2y - 3$  bulunur Dolayısıyla,  $4y \leq 10$  bulunur ki  $z \leq 3$  olması

demektir. İkinci durum  $y + \eta_1 j = \frac{z + \eta_2 i}{3}$  ise,  $z = 3y + 3\eta_1 j - \eta_2 i$  'dır.  $z \leq 2y - 3$

olduğundan,  $y \leq 4$  bulunur. Bu ise  $z \leq 5$  olmasını gerektirir. Üçüncü durum

$\frac{y + \eta_1 j}{2} = \frac{z + \eta_2 i}{3}$  olsun.  $z = 3t - \eta_2 i$  ve  $y = 2t - \eta_1 j$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
q_2 &< P_{\text{ebob} \left( 2t - \eta_1 j - 2, \frac{3t - \eta_2 i - i}{2} \right)} Q_{\text{ebob} \left( 2t - \eta_1 j - 2, \frac{3t - \eta_2 i + i}{2} \right)} \\
&\quad \times P_{\text{ebob} \left( 2t - \eta_1 j + 2, \frac{3t - \eta_2 i - i}{2} \right)} Q_{\text{ebob} \left( 2t - \eta_1 j + 2, \frac{3t - \eta_2 i + i}{2} \right)} \\
&< \alpha^{2(16-1.16)+16+0.1+\frac{z+1}{3}+0.1}
\end{aligned}$$

bulunur.  $\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} < q_2$  olacağından,  $z < 280.53$  elde edilir. Benzer biçimde dördüncü durum  $\frac{y+\eta_1 j}{5} = \frac{z+\eta_2 i}{6}$  için üst sınır 150 olarak elde edilir.

$t=2$  olması durumunda  $ebob\left(y+\eta_1 j, \frac{z+\eta_2 i}{2}\right) = \frac{z+\eta_2 i}{4}$  eşitliğinden iki durum söz konusudur. Bunlar  $\frac{y+\eta_1 j}{3} = \frac{z+\eta_2 i}{4}$  ve  $y+\eta_1 j = \frac{z+\eta_2 i}{4}$  dir. Birinci durum  $\frac{y+\eta_1 j}{3} = \frac{z+\eta_2 i}{4}$  için üst sınır 126.9 olarak elde edilir. İkinci durum  $y+\eta_1 j = \frac{z+\eta_2 i}{4}$  için  $z = 4y + 4\eta_1 j - \eta_2 i \leq 2y - 3$  olduğundan  $z \leq 3$  olması gerekliliği açıktır.

$t=1$  olması durumunda  $z = 2(y+\eta_1 j) - \eta_2 i$  eşitliği için tek durum söz konusudur.  $2y - 5 \leq z \leq 2y - 3$  ve  $z$  tek pozitif tamsayı olduğundan, iki durum söz konusu olacaktır. Bunlar  $z = 2y - 3$  ve  $z = 2y - 5$  'dir. Birinci durum  $z = 2y - 3$  için (5.8) denklem sisteminde üçüncü eşitliği ikinci eşitliğe bölersek,

$$\alpha^{y-2.25} < \frac{P_{2y-3}}{\frac{P_y}{2}} = \frac{bc+1}{ac+1} < \frac{b}{a}$$

elde edilir. Her iki tarafı  $a^2$  ile çarpıldığında,

$$a^2 \alpha^{y-2.25} < ab < S_x$$

bulunur.

$x$  çift pozitif tamsayı ise,

$$a^2 \alpha^{y-2.25} < S_x = B_{\frac{x}{2}} < \alpha^{x-1.96}$$

elde edilir her iki taraf  $\alpha^{y-2.25}$  ile bölünürse,  $a^2 < \alpha^{x-1.96-y+2.25} \leq \alpha^{-0.72} < 0.6$  bulunur bu ise  $a$  'nın pozitif tamsayı olması ile çelişir.

$x$  tek pozitif tamsayı ise,

$$a^2 \alpha^{y-2.25} < S_x = P_x < \alpha^{x-1.16}$$

bulunur. Her iki tarafı  $\alpha^{y-2.25}$  ile bölünürse,  $a^2 < \alpha^{x-y-1.16+2.25} < \alpha^{0.08} < 1.1$  elde edilir. Tek olasılık  $a=1$  olmasıdır. Bu değer, (5.8) denklem sisteminde yerine yazılırsa,  $b = P_x - 1$ ,  $c = \frac{P_y}{2} - 1$  ve  $(P_x - 1) \left( \frac{P_y}{2} - 1 \right) = P_{2y-3} - 1$  elde edilir. Pell sayıları için elde edilen alt ve üst sınırlar kullanılırsa,

$$\alpha^{y-2.18} < P_x - 1 = \frac{P_{2y-3} - 1}{\frac{P_y}{2} - 1} < \alpha^{y-1.8}$$

ve

$$\alpha^{x-1.28} < P_x - 1 = \frac{P_{2y-3} - 1}{\frac{P_y}{2} - 1} < \alpha^{x-1.16}$$

olduğundan  $0.52 < y - x < 1.02$  elde edilir. Bu ise eşitsizliğin çözümünün  $y = x + 1$  olması demektir.  $(P_x - 1) \left( \frac{P_y}{2} - 1 \right) = P_{2y-3} - 1$  denkleminde  $y = x + 1$  yerine yazılırsa

$$(P_x - 1) \left( \frac{P_{x+1}}{2} - 1 \right) = P_{2x-1} - 1 \quad \text{bulunur ki } \forall x \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } (P_x - 1) \left( \frac{P_{x+1}}{2} - 1 \right) < P_{2x-1} - 1$$

olduğundan bu mümkün değildir. İkinci durum  $z = 2y - 5$  için benzer yol kullanılır. Yeni tekrarlar yapmamak için bu durumu incelemiyoruz.

Bu durumda  $z$  için üst sınır 280 olarak elde edilmiştir.

#### IV. $y$ tek ve $z$ çift ise

Bu durumda  $y$  ve  $z$  arasındaki bağıntıyı veren bir önerme aşağıda ispatı ile birlikte verilmiştir

**Önerme 5.7:**

$0 < a < b < c$  tamsayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} ab + 1 &= S_x \\ ac + 1 &= P_y \\ bc + 1 &= B_{\frac{z}{2}} \end{aligned} \tag{5.9}$$

denklem sistemi  $z \leq 2y - 1$  eşitsizliğini sağlar.

**İspat:**

(5.9) denklem sisteminden

$$\sqrt{B_{\frac{z}{2}}} < c < P_y$$

elde edilir. Pell ve balans sayıları için bulunan alt ve üst sınırlar kullanılırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1.97}{2}} < \sqrt{B_{\frac{z}{2}}} < c < P_y < \alpha^{y-1.16}$$

bulunur.  $\alpha$  'nın kuvvetlerinden,  $z \leq 2y - 1$  elde edilir.

$y$  tek ve  $z$  çift pozitif tamsayılar olduğundan,  $S_y = P_y$  ve  $S_z = B_{\frac{z}{2}}$  olur.

$q_3 = \text{ebob} \left( P_y - 1, B_{\frac{z}{2}} - 1 \right)$  olmak üzere Önerme 5.2' nin özellikleri kullanılırsa,  $i \in \{\pm 1\}$

için

$$\begin{aligned}
q_3 &\leq \text{ebob} \left( P_{\frac{y-i}{2}}, Q_{\frac{y+i}{2}}, B_{\frac{z-1}{2}}, B_{\frac{z+1}{2}} \right) \\
&\leq \text{ebob} \left( P_{\frac{y-i}{2}}, B_{\frac{z-1}{2}} \right) \text{ebob} \left( P_{\frac{y-i}{2}}, B_{\frac{z+1}{2}} \right) \text{ebob} \left( Q_{\frac{y-i}{2}}, B_{\frac{z-1}{2}} \right) \text{ebob} \left( Q_{\frac{y+i}{2}}, B_{\frac{z+1}{2}} \right) \\
&\leq \text{ebob} \left( P_{\frac{y-i}{2}}, P_{\frac{z-2}{2}} \right) \text{ebob} \left( P_{\frac{y-i}{2}}, P_{\frac{z+2}{2}} \right) \text{ebob} \left( Q_{\frac{y-i}{2}}, P_{\frac{z-2}{2}} \right) \text{ebob} \left( Q_{\frac{y-i}{2}}, P_{\frac{z+2}{2}} \right) \\
&\leq \prod_{j \in \{\pm 2\}} P_{\text{ebob} \left( \frac{y-i}{2}, z+j \right)} Q_{\text{ebob} \left( \frac{y+i}{2}, z-j \right)}
\end{aligned}$$

bulunur.  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$  için,  $\text{ebob} \left( \frac{y + \varepsilon_1 i}{2}, z + \varepsilon_2 j \right) = \frac{z + \varepsilon_2 j}{w}$  olmak üzere  $w \geq 8$  olsun.

(5.9) denklem sistemi ve pell, balans sayı dizileri için elde edilen alt ve üst sınırlar kullanılırsa,

$$\alpha^{\frac{z-1.97}{2}} < \sqrt{B_{\frac{z}{2}}} < c \leq \alpha^{\left(\frac{z-j-1.16}{8}\right) + \left(\frac{z+j-1.16}{8}\right) + \left(\frac{z-j+0.1}{8}\right) + \left(\frac{z+j+0.1}{8}\right)}$$

eşitsizliği elde edilir.  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırıldığında,  $-0.99 < -2.12$  elde edilir ki bu ise mümkün değildir.  $w \leq 7$ ,  $k$  ve  $l$ ,  $\text{ebob}(k, l) = 1$  olacak şekilde pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$\frac{y + \varepsilon_1 i}{2k} = \frac{z + \varepsilon_2 j}{l} \tag{5.10}$$

olsun.

$k \geq l$  ise,  $y < z$  olduğundan dolayı,

$$y + \varepsilon_2 j < z + \varepsilon_2 j \leq \frac{y + \varepsilon_1 i}{2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten  $y \leq 5$  bulunur.  $z \leq 2y - 1$  olduğundan dolayı  $z \leq 9$  bulunur.

$k < l$  olsun. İlk olarak  $2 \leq \frac{l}{2k}$  durumunu inceleyelim. (5.10) eşitliğinden,

$$z = \frac{l}{2k} (y + \varepsilon_1 i) - \varepsilon_2 j \geq 2(y-1) - 2 = 2y - 4$$

bulunur.  $z$  pozitif çift tamsayı olduğundan dolayı,  $2y - 4 \leq z \leq 2y - 1$  eşitsizliğinden sadece  $z = 2y - 4$  ve  $z = 2y - 2$  mümkündür.

$z = 2y - 4$  ise,  $i \in \{\pm 1\}$  için, Önerme 5.2 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.97}{2}} &< \text{ebob}(P_y - 1, B_{y-2} - 1) \\ &< \text{ebob}\left(P_{\frac{y-i}{2}} Q_{\frac{y+i}{2}}, \frac{1}{2} P_{y-3} Q_{y-1}\right) \\ &< P_{\text{ebob}\left(\frac{y-i}{2}, y-3\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y-i}{2}, y-1\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+i}{2}, y-3\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+i}{2}, y-1\right)} \end{aligned}$$

bulunur.

$i = 1$  ise,

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.97}{2}} &= \alpha^{\frac{2y-5.97}{2}} \\ &\leq P_{\text{ebob}\left(\frac{y-1}{2}, y-3\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y-1}{2}, y-1\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+1}{2}, y-3\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+1}{2}, y-1\right)} \\ &\leq P_2 Q_{\frac{y-1}{2}} Q_4 Q_2 < \alpha^{\frac{y}{2}+6.64} \end{aligned}$$

elde edilir.

$i = -1$  ise,

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.97}{2}} &= \alpha^{\frac{2y-5.97}{2}} \\ &\leq P_{\text{ebob}\left(\frac{y+1}{2}, y-3\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y+1}{2}, y-1\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y-1}{2}, y-3\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y-1}{2}, y-1\right)} \\ &\leq P_2 Q_2 Q_4 Q_{\frac{y-1}{2}} < \alpha^{\frac{y}{2}+6.64} \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki durumda da  $y \leq 20$  ve dolayısıyla  $z \leq 36$  bulunur.

$z = 2y - 2$  durumu için

$$\begin{aligned}\alpha^{\frac{z-1.97}{2}} &= \alpha^{\frac{2y-3.97}{2}} < \prod_{j \in \{\pm 2\}} P_{\text{ebob}\left(\frac{y-i}{2}, 2y-2+j\right)} Q_{\text{ebob}\left(\frac{y-i}{2}, 2y-2-j\right)} \\ &\leq P_6 P_4 Q_6 Q_4 \leq \alpha^{17.88}\end{aligned}$$

bulunur ki,  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırıldığında  $z \leq 37$  elde edilir.

$k < l$  için  $2 \leq \frac{l}{2k}$  durumunu inceleyelim. Bu durumda,  $l \geq 2$  'dür. Kabul edelim ki

$l = 2$  olsun.  $k < l$  olduğundan dolayı  $k = 1$  elde edilir.  $y < z$  olduğundan,

$$\frac{y + \varepsilon_1 i}{2} = \frac{z + \varepsilon_2 j}{2} \text{ eşitliğinden } z = y + 1 \text{ bulunur.}$$

Eğer  $y \equiv 1 \pmod{4}$  ise  $z \equiv 2 \pmod{4}$  dür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} &< c < q_3 = \text{ebob}\left(P_y - 1, \frac{P_z}{2} - 1\right) \\ &< \text{ebob}\left(P_y - 1, P_{y+1} - 2\right) \\ &= \text{ebob}\left(\frac{P_{y-1} Q_{y+1}}{2}, \frac{P_{y+1-2} Q_{y+1+2}}{2}\right) \\ &= \frac{P_{y-1} Q_1}{2}\end{aligned}$$

bulunur.  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırılırsa,  $-0.19 < -0.62$  bulunur ki bu mümkün değildir.

Eğer  $y \equiv 3 \pmod{4}$  ise  $z \equiv 0 \pmod{4}$  dür. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\alpha^{\frac{z-1.19}{2}} &< c < q_3 = \text{ebob}\left(P_y - 1, \frac{P_z}{2} - 1\right) \tag{5.11} \\ &< \text{ebob}\left(P_y - 1, P_{y+1} - 2\right) \\ &= \text{ebob}\left(\frac{P_{y+1} Q_{y-1}}{2}, \frac{P_{y+1+2} Q_{y+1-2}}{2}\right) \\ &= \frac{Q_{y-1} P_1}{2}\end{aligned}$$

bulunur ki  $\alpha$  'nın kuvvetleri karşılaştırıldığında  $z = y + 1$  olduğu için  $-0.19 < -0.8$  elde edilir. Bu ise bir çelişki demektir.

Kabul edelim ki  $l \geq 3$  olsun.  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  çiftinden farklı bir  $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$  çiftini ele alalım. (5.10) eşitliğinden,

$$z + \varepsilon'_2 j = \frac{l}{2k} (y + \varepsilon_1 i) - \varepsilon_2 j + \varepsilon'_2 j$$

elde edilir.  $q_3^{(0)} = \text{ebob} \left( \frac{y + \varepsilon'_1 i}{2}, z + \varepsilon'_2 j \right)$  olsun.  $q_3^{(0)}$  için bir üst sınır bulalım.

$$\begin{aligned} q_3^{(0)} &= \text{ebob} \left( \frac{y + \varepsilon'_1 i}{2}, z + \varepsilon'_2 j \right) = \text{ebob} \left( \frac{y + \varepsilon'_1 i}{2}, \frac{l}{2k} (y + \varepsilon_1 i) - \varepsilon_2 j + \varepsilon'_2 j \right) \\ &\leq \text{ebob} \left( l(y + \varepsilon'_1 i), l(y + \varepsilon_1 i) - 2k(\varepsilon_2 j - \varepsilon'_2 j) \right) \\ &\leq \left| l(\varepsilon'_1 i - \varepsilon_1 i) - 2k(\varepsilon_2 j - \varepsilon'_2 j) \right| \end{aligned}$$

bulunur.  $\varepsilon'_1 \neq \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon'_2 \neq \varepsilon_2$  ve  $\varepsilon'_1 \neq \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon'_2 = \varepsilon_2$  ve  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon'_2 \neq \varepsilon_2$  olduğundan,  $q_3^{(0)}$  için üst sınır

$$q_3^{(0)} \leq 2(2k + l)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{z-1.97}{2}} < q_3 &= \text{ebob} \left( P_y - 1, B_{\frac{z}{2}} - 1 \right) \\ &\leq \prod_{j \in \{\pm 2\}} P_{\text{ebob} \left( \frac{y-i}{2}, z+j \right)} Q_{\text{ebob} \left( \frac{y+i}{2}, z-j \right)} < \alpha^{\frac{z+2}{l} + 2(2k+l) + 0.2 - 2.32} \end{aligned}$$

elde edilir.  $\frac{l}{2k} < 2$  eşitsizliğini sağlayan  $k$  ve  $l$  sayıları ve bunlara karşılık gelen  $z$  için üst sınırlar şu şekildedir.

**Çizelge 5.1.**  $(k, l, z)$  değerleri- I

$k$	1	2	3	2	3	4
$l$	3	3	4	5	5	5
$z$	57.19	81.19	77.46	57.55	70.89	84.22

**Çizelge 5.1.**  $(k, l, z)$  değerleri- II

$k$	5	2	3	4	5	6
$l$	6	7	7	7	7	7
$z$	93.6	59.23	70.43	81.63	92.83	104.43

Dolayısıyla,  $z$  için en büyük üst sınır 280 olarak elde edilir.

$3 \leq x < y < z \leq 280$  aralığında (5.4) denklem sisteminin bir  $\{a, b, c\}$  tamsayı üçlüsünün olup olmadığı araştırıldığında, böyle bir  $\{a, b, c\}$  üçlüsünün olmadığı görülmüştür.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

## BÖLÜM VI

### SONUÇLAR

Diyafont  $m$ - lisi çalışma alanında, son yıllarda (6.1) denklem sisteminin çeşitli özel sayı dizileri çözmek için çalışmalar yapılmıştır.

$$ab+1 = q_x \quad (6.1)$$

$$ac+1 = q_y$$

$$bc+1 = q_z$$

Buradaki  $\{q_n\}$  dizisi keyfi mertebeli ve keyfi başlangıç koşulları altındadır. İlk olarak  $\{q_n\}$  sayı dizileri yerine Fibonacci ve Lucas sayı dizileri alınmıştır. Yapılan bu çalışmalarda Fibonacci diyafont üçlüsünün olmadığı ve yalnızca  $\{1,2,3\}$  üçlüsünün Lucas diyafont üçlüsü olduğu gösterilmiştir.

Bu tezde, ilk olarak  $\{q_n\}$  dizisi yerine balans sayı dizisi alınmıştır ve denklem sistemi (6.1)'i sağlayan herhangi bir  $\{a,b,c\}$  üçlüsünün olmadığı gösterilmiştir. Balans sayı dizisinin alınmasının sebebi ise 2009 yılında tanımlanmış bir sayı dizisi olup, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi birçok kombinatoriyal özelliklerinin henüz incelenmemiş olmasıdır.

İkinci olarak,  $u_0 = 0$  ve  $u_1 = 1$  başlangıç koşulları altında,  $A \geq 3$  tamsayısı ve  $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$  dizisi için,  $ab+1$ ,  $ac+1$  ve  $bc+1$  sayılarının  $\{u_n\}$  sayı dizisinin elemanları olacak şekilde bir  $\{a,b,c\}$  üçlüsünün olmadığı gösterilmiştir. Tanımlanan  $\{u_n\}$  sayı dizisinde, Fibonacci, Lucas ve balans sayı dizileri dışında farklı olarak bir  $A$  parametresi mevcuttur. Yapılan çalışmada  $A$  parametrisinin sınırlı olduğu ve  $A \leq 2$  olduğu gösterilmiştir. Bu anlamda, literatüre teorik olarak bir katkı sağlanmıştır.

Üçüncü olarak,  $k$ - periyodik sayı dizileri tanımlanmış ve bu sayı dizileri kullanılarak dördüncü mertebeden Pellans sayı dizisi tanımlanmıştır. Tanımlanan sayı dizisinin kombinatoriyal özellikleri incelendikten sonra, diyafont üçlüsü araştırılmış ve bir diyafont üçlüsü olmadığı gösterilmiştir.

Bu araştırma alanında, dördüncü mertebeden dizi alınarak yapılan çalışma olduğundan, literatüre katkı sağlanmıştır.

Bu konu ile ele alınabilecek bir çalışma  $\{q_n\}$  sayı dizisi yerine, Tribonacci sayı dizisinin alınmasıdır. Fakat, Tribonacci sayı dizisi bölünebilme ve çarpımsal olarak kombinatoriyal özelliklere sahip olmadığından, tezde izlenen metot uygulanamamıştır.

## KAYNAKLAR

Alp, M., Irmak, N. and Szalay, L., “Balancing Diophantine Triples”, *Acta Univ. Sapientiae Mathematica*, 4 (1), 11-19, 2012.

Alp, M., Irmak, N. and Szalay, L., “Two periodic ternary recurrence and their binet formula”, *Acta Math. Univ. Comeniana*, 81(2), 227-232, 2012.

Behera, A., and Panda, G.K., “On the square roots of triangular numbers”, *Fibonacci Quarterly*, 37 , 98 – 105, 1999.

Carmichael, R.D., “On the Numeric Factors of the Arithmetic Forms  $\alpha^n \pm \beta^n$ ”, *The Annals of Mathematics*, Second Series 15 (1/4), 30-48, 1913-1914.

Cohn, J.H.E., “On square Fibonacci numbers”, *J. London Math. Soc.*, 39, 537-540, 1964.

Cooper, C., “An identity for period  $k$  second order linear recurrence systems”, *Cong. Numer.*, 200, 95-106, 2010.

Dickson, L. E., History of the theory of numbers volume II Diophantine Analysis, *AMC Chelsea Publishing*, 1999.

Diophantus, A., Arithmetics and book of polygonal numbers, *Nauka*, Moscow, 1974.

Dujella, A., “A proof of the Hoggatt Bergum Conjecture”, *Proc. Amer. Soc.* 127, 1999-2005, 1999.

Dujella, A., “There are finitely many Diophantine quintuples”, *J. Reine Angrew. Math.*, 566, 183-214, 2004.

Dujella A. and Ramasamy, A.M.S., “Fibonacci numbers and sets with the property  $D(4)$ ”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 12, 401-412, 2005.

Edson, M. Lewis, S. and Yayenie, O., “The  $k$ –periodic Fibonacci sequence and extended Binet’s formula”, *Integers*, 11, Paper A32, 2011.

Edson, M. and Yayenie, O., "A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet formula", *Integers*, 9, 639-654, 2009.

Euler, L., Elements of Algebra, *Springer*, New York, 1972.

Fermat, P., "Observations sur Diophante", *Oeuvres de Fermat*, Vol. 1, 303, 1891.

Filipini, A., He, B. And Togbe, A., "On the  $D(4)$  triple  $\{F_{2k}, F_{2k+6}, 4F_{2k+2}\}$ ", *Fibonacci Quarterly*, 48, 219-227, 2010.

Fuch, C., Luca, F. and Szalay, L., "Diophantine triples with values in binary recurrences", *Ann. Scuola Norm. Pisa. Cl. Sci.*, III (5), 579-608, 2008.

Gibbs, P., "Some rational diophantine sextuples", *Glas. Math. Ser. III*, 41, 195-203, 2006.

Hoggatt, V. E. and Bergum, G. E., "A problem of Fermat and Fibonacci sequence", *Fibonacci Quarterly*, 15, 323-330, 1977.

Horadam, A.F., "Basic properties of a certain generalized sequences of numbers", *Fibonacci Quarterly*, 3.2, 161-176, 1965.

Irmak, N., Szalay, L., "Diophantine triples and Reduced Quadruples with the Lucas sequence of recurrence  $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$ ", *Glasnik Matematikci*, 49 (2), 303-312, 2014.

Irmak, N., Szalay, L., "On  $k$  - periodic binary recurrence", *Annales Mathematicae et Informaticae* 40, 25-35, 2012.

Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications, *Wiley-Interscience*, New York, 2001.

Luca, F. and Szalay, L., "Fibonacci Diophantine Triples", *Glasnik Math.*, 43 (63), 253-264, 2008.

Luca, F. and Szalay, L., "Lucas Diophantine Triples", *Integers*, 9, 441-457, s. 12-20, 2009.

Nanda, S., Number Theory, *Allied Publishers*, 1985.

Ray, P.K., Balancing and Cobalancing Numbers, PhD. thesis, *Rourkela*, India, 2009.

Yayenie, O., “A note on generalized Fibonacci sequence”, *Appl. Math. Comp.*, 217, 5603-5611, 2011.

## ÖZGEÇMİŞ

Nurettin IRMAK 28.03.1985 tarihinde Bitlis'in ilçesi olan Mutki de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2003 yılında kayıt yaptırdığı Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında onur listesine girerek mezun oldu. 2007-2008 Güz döneminde Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine ve 22.01.2008 tarihinde Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı tarihlerde yüksek lisans eğitimine Niğde Üniversitesi'nde devam etti ve 2010 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2011 yılında doktora eğitimine başlayan Nurettin IRMAK, o tarihten itibaren doktora eğitimine devam etmekte ve araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Bilim dalındaki ilgi alanı sayılar teorisi, lineer reküranslar ve özel diyafont denklemleridir.

## TEZ ÇALIŞMASINDA ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından, 5 (beş) adet uluslararası makale ile 2 (iki) adet ulusal ve 1 (bir) adet uluslararası bildiri üretilmiştir. Bu üretilen çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Alp, M., Irmak, N. and Szalay, L., “Balancing Diophantine Triples”, *ActaUniv. Sapientiae Mathematica*, 4 (1), 11-19, 2012.

Irmak, N., Szalay, L., “On  $k$  – periodic binary recurrence”, *Annales Mathematicae et Informaticae* 40, 25–35, 2012.

Alp, M., Irmak, N. and Szalay, L., “Two periodic ternary recurrence and their binet formula”, *Acta Math. Univ. Comeniana*, 81(2), 227-232, 2012.

Irmak, N., Szalay, L., “Diophantine triples and Reduced Quadruples with the Lucas sequence of recurrence  $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$ ”, *Glasnik Matematikci*, 49 (2), 303-312, 2014.

Irmak, N., Alp, M., “Pellans sequence and its diophantine triples”, incelemede.

Irmak, N., Alp, M., “Özel Lucas dizisi için indirgenmiş diyafont dörtlüsü”, **9. Ankara Matematik Günleri**, 12-13 Haziran, 2014.

Irmak, N., Alp, M., “Balans diyafont üçlüsü”, **25. Ulusal Matematik Sempozyumu**, 12-13 Haziran, 2014.

Irmak, N., Szalay, L., ”On  $k$  –periodic linear recurrences”, **15. International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications**, 25-30 June, 2012.

