

Z. UÇAR, 2013



T.C.
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri ve
Global Davranışları

ZELİHA UÇAR

EYLÜL 2013

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE
GLOBAL DAVRANIŞLARI

ZELİHA UÇAR

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN

EYLÜL 2013

Zeliha UÇAR tarafından Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN danışmanlığında hazırlanan "FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE GLOBAL DAVRANIŞLARI" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Başkan : Doç. Dr. Tuncay CANDAN (Niğde Üniversitesi)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK (Selçuk Üniversitesi)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN (Niğde Üniversitesi)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/....../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/....../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

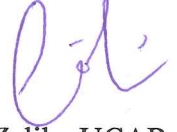
...../...../20...

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Zeliha UÇAR

ÖZET

FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE GLOBAL DAVRANIŞLARI

UÇAR, Zeliha
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN

Eylül 2013, 81 Sayfa

Bu yüksek lisans çalışmasında, ilk olarak x_0, y_0 negatif olmayan keyfi başlangıç

şartları, a, b, d ve e pozitif sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}$, $y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n}$, $n = 0, 1, \dots$

şeklindeki iki boyutlu fark denklem sistemi ele alınmış, sistemin pozitif denge noktaları için bazı asimptotik sonuçlar elde edilerek sistemin çözümlerinin global asimptotik davranışları incelenmiştir. İkinci olarak x_0, y_0, z_0 negatif olmayan keyfi başlangıç şartları ve $a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$ pozitif sayılar olmak üzere

$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}$, $y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}$, $z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}$, $n = 0, 1, \dots$ şeklindeki üç boyutlu fark

denkleminin parametrelerinin farklı değerleri için bazı asimptotik sonuçlarına ve bu sistemin çözümlerinin global asimptotik davranışlarına yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Fark Denklemleri, Asimptotik davranış, Global çekimler, Monotonluk

SUMMARY

SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATION AND THEIR GLOBAL BEHAVIORS

UÇAR, Zeliha

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Professor. Dr. Durmuş DAĞHAN

September 2013, 81 pages

In this MSc thesis, first of all we have investigated the global asymptotic behavior of the solutions of the system of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n}, n = 0, 1, \dots \text{ where the parameters } a, b, d \text{ and } e \text{ are the}$$

positive numbers and the initial conditions x_0, y_0 are the arbitrary nonnegative numbers. We have obtained some asymptotic results for the positive equilibrium of this system. Secondly, we have studied the global asymptotic behavior of the solutions of the system of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, n = 0, 1, \dots \text{ where the parameters}$$

a, b, c, d, e, f are the positive real numbers and the initial conditions x_0, y_0, z_0 are the arbitrary nonnegative numbers. We have found some asymptotic results for the positive equilibrium of this system for the different values of the parameters.

Keywords: Difference equations, Asymptotic behavior, Global attractivity, Monotone.

ÖN SÖZ

Bu yüksek lisans çalışmasında, iki ve üç boyutlu kesirli fark denklem sistemlerinin çözümleri ve global davranışları ele alınmıştır. İlk olarak, iki boyutta x_0, y_0 negatif olmayan keyfi başlangıç şartları, a, b, d ve e pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n}, n = 0, 1, \dots$$
 şeklindeki fark denklem sisteminin pozitif denge

noktaları için bazı asimptotik sonuçlar elde edilerek sistemin çözümlerinin global asimptotik davranışları incelenmiştir. İkinci olarak, x_0, y_0, z_0 negatif olmayan keyfi başlangıç şartları $a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$ pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, n = 0, 1, \dots$$
 şeklindeki üç boyutlu fark

denkleminin parametrelerinin farklı değerleri için bazı asimptotik sonuçlarına ve bu sistemin çözümlerinin global asimptotik davranışlarına yer verilmiştir.

Bu yüksek lisans çalışmaları sırasında sabırla ve itina ile bana danışmanlık yapan saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN'a saygılarımı sunar ve teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGE VE KISALTMALAR.....	ix
BÖLÜM I GİRİŞ.	1
BÖLÜM II GENEL KAVRAMLAR	3
2.1 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Çözümleri.....	5
2.1.1 Birbirinden farklı reel köklerin olması durumu.....	5
2.1.2 Köklerin birbirine eşit olması durumu.....	6
2.1.3 Köklerin kompleks olması durumu.....	6
2.2 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümleri.....	6
2.2.1 Belirsiz katsayılar yöntemi.....	7
2.2.2 Parametrelerin değişimi yöntemi.....	7
2.2.3 İleri fark operatörü yardımıyla genel çözüm hesabı.....	10
2.2.4 Z – Dönüşümü metodu.....	11
2.3 Homojen Olmayan Fark Denklemleri İçin Örnekler.....	12
2.4 Lineer Olmayan Fark Denklemleri.....	16
2.5 Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemi.....	18
2.6 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklem Sistemi.....	19
BÖLÜM III İKİ BOYUTLU LİNEER KESİRLİ FARK DENKLEM SİSTEMLERİN ASİMPOTİK DAVRANIŞI.....	23
3.1 Giriş.....	23
3.2 Denge Noktası.....	25
3.3 Lineerleştirilebilir Kararlılık Analizi.....	26
3.4 Global Çekim Sonuçları.....	28
BÖLÜM IV ÜÇ BOYUTLU LİNEER KESİRLİ FARK DENKLEM SİSTEMLERİN GLOBAL DAVRANIŞI	44
4.1 Giriş.....	44
4.2 Denge Noktası.....	44

4.3 Lineerleştirilebilir Kararlılık Analizi.....	49
4.4 Global Çekim Sonuçları.....	63
4.5 Çözüm Aralığı.....	67
BÖLÜM V SONUÇLAR.....	77
KAYNAKLAR.....	78
ÖZ GEÇMİŞ.....	81

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
E	Kaydırma operatörü
I	Birim operatör
Δ	İleri fark operatörü
$y^{(c)}(m)$	Homojen denklemin genel çözümü
$y^{(p)}(m)$	Homojen olmayan denklemin özel çözümü
\bar{x}	Denge noktası
$\Phi(m)$	Esas matris
$R(\Delta)$	İleri fark operatörünün 3. veya daha yüksek mertebeden terimlerini kapsayan operatör
J	$J \subseteq I$ şeklinde tanımlanan değişmez aralık
$\Delta C(m)$	$\Delta C(m) = C(m+1) - C(m)$
$W(m)$	Wandermonde matrisi
J_T	Jakobiyen matrisi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Diferansiyel denklemlerle fiziksel olayların bir matematiksel modeli sürekli değişim oranları arasındaki denklemler olarak ifade edilmektedirken, 20. yüzyılın başlarında radyasyon miktarı ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Süreklilik halleriyle verilen diferansiyel denklemlerin yerine, bu denklemlere benzer olan fark denklemleri ayırık zamanlarda meydana gelen olayları formüle eden bağıntılar olarak ortaya çıkmıştır. Yani fark denklemleri türev içeren denklemlerin sadece tamsayılarla tanımlanmış şeklidir demek hiç de yanlış olmayacaktır. Böylece, fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmıştır.

Son yıllarda uygulamalı matematiğin oldukça ilgi gören bir dalı haline gelen fark denklemleri, uygulamalı matematikçilerin ve uygulamalı bilimcilerin ilgisini büyük ölçüde çekmeyi başarmıştır. Uygulamalı matematiğin bu dalı, mühendislik, fen bilimleri, ekonomi, tıp, sosyal bilimler ve teknik bilimler gibi bir çok alanda uygulama sahası bulmaktadır. Daha da açılacak olursa örneğin, ekonomide arz talep denklemlerini oluşturmada, işsizlik oranı hesabında, hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etme gibi konularda kullanılmaktadır (Kır ve Bolat, 2006; Şekerci, 2008).

Fark denklemlerinin mevcut uygulama alanlarına bir örnek ise, bu tez kapsamında ele alınan iki ve üç farklı türün rekabete dayalı popülasyonlardaki değişimlerin incelenmesi olarak verilebilir.

Bu tezde yapılan çalışmalar beş ana bölümde sunulmuştur. Birinci bölümde konuya kısa bir giriş yapılarak, fark denklemlerinin uygulama alanlarından bahsedilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, fark denklemleri için literatürde mevcut olan tanım, teorem ve örnekler sunulmuştur. Üçüncü bölümde, x_0, y_0 keyfi negatif olmayan başlangıç şartları, a, b, d ve e parametreleri pozitif sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklindeki ikinci mertebeden bir fark denklem sistemine ait denge noktasına, bu denge noktalarının global çekim sonuçlarına, monoton dönüşüm tekniğine, kararlılığına ve

sistemin pozitif denge noktalarındaki bazı asimptotik davranışlarına ilişkin sonuçlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise, benzer problem $a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$ parametreler ve x_0, y_0, z_0 keyfi negatif olmayan reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, n = 0, 1, \dots$$

üç boyutlu fark denklem sistemi ele alınmış ve bu sisteme ait denge noktasına, sistemin bu denge noktasındaki lokal ve global asimptotik kararlılığına ve parametrelerin farklı değerleri için sistemin pozitif denge noktalarındaki bazı global çekim sonuçlarına yer verilmiştir. Son bölüm ise çalışmanın sonuçları için ayrılmıştır.

BÖLÜM II

GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $\Delta y(m) = y(m+h) - y(m)$ şeklinde tanımlı Δ operatörüne ileri fark operatörü denir (Agarwal, 2000).

Tanım 2.2. $Ey(m) = y(m+1)$ şeklinde tanımlanan E operatörüne kaydırma operatörü denir (Agarwal, 2000).

Tanım 2.3. $Iy(m) = y(m)$ şeklinde tanımlanan I sembolü ile gösterilen operatöre birim operatör denir (Agarwal, 2000).

Teorem 2.1. Δ, E ve I operatörleri arasında,

$$\Delta y(m) = Ey(m) - Iy(m)$$

bağıntısı vardır (Agarwal, 2000).

Tanım 2.4. n bağımsız, y de bağımlı değişken olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), \dots, E^n(y), \dots$ gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir (Agarwal, 2000; Elaydi, 1995; Rugh, 1996). Birinci, ikinci ve n . mertebeden fark denklemleri sırasıyla aşağıdaki formlarda verilir.

$$y(m) + a_1 y(m+1) = f(m) \tag{2.1a}$$

$$y(m-1) + a_1 y(m) + a_2 y(m+1) = g(m) \tag{2.1b}$$

$$y(m+n) + a_1 y(m+n-1) + \dots + a_{n-1} y(m+1) + a_n y(m) = h(m) \tag{2.1c}$$

Tanım 2.5. Bağımlı değişkenin birinci dereceden olduğu fark denklemine lineer, aksi halde lineer olmayan fark denklemi denir (Agarwal, 2000; Elaydi, 1995; Rugh, 1996).

Tanım 2.6. $a_n \neq 0$ ve $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ keyfi sabitler olmak üzere (2.1c) denkleminde $h(m) \neq 0$ oluyorsa denkleme homojen (Akın ve Bulgak, 1998), $h(m) = 0$ durumunda ise denkleme homojen olmayan fark denklemi denir (Elaydi, 1999).

Tanım 2.7. (2.1c) denkleminde $a_n \neq 0, i=1, 2, \dots, n$ olmak üzere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ katsayıları sabit ise denkleme sabit katsayılı, eğer katsayılar bağımsız değişkenin

fonksiyonları ise denkleme değişken katsayılı fark denklemini denir (Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.8. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ve a_1, a_2, \dots, a_n reel sayılar, $[t_0, t_1]$ aralığında $t_0 \leq j \leq t_1$, n . mertebeden sabit katsayılı, lineer ve homojen fark denklemini

$$y(m+n) + a_1 y(m+n-1) + \dots + a_{n-1} y(m+1) + a_n y(m) = 0 \quad (2.2)$$

olmak üzere;

$$y(j) = \alpha_1, y(j+1) = \alpha_2, \dots, y(j+n-1) = \alpha_n$$

şartı ile birlikte verilen probleme fark Cauchy problemi denir (Akın ve Bulgak, 1998).

Teorem 2.2. I reel sayılardaki herhangi bir alt aralık, $f : I \times I \rightarrow I$ diferansiyellenebilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü vardır (Agarwal, 2000; Elaydi, 1995; Rugh, 1996)

Teorem 2.3. $[t_0, t_1]$ aralığında $t_0 \leq j \leq t_1$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 'ler reel sayılar olmak üzere;

$$y(m+n) + a_1 y(m+n-1) + \dots + a_{n-1} y(m+1) + a_n y(m) = 0$$

ve

$$y(j) = \alpha_1, y(j+1) = \alpha_2, \dots, y(j+n-1) = \alpha_n$$

fark Cauchy probleminin çözümü vardır ve tektir (Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.9. $y(m) = \lambda^m$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^m \neq 0$) n . mertebeden homojen bir fark denkleminin çözümü olsun. Bu çözüm (2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

biçiminde elde edilen denkleme (2.2) homojen denkleminin karakteristik denklemini denir (Elaydi, 1999).

Tanım 2.10. $\{y(m)\}$ bir dizi ve $m < 0$ için $y(m) = 0$ olsun.

$$Z(y(m)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y(m)}{z^m}$$

şeklinde tanımlı ifadeye Z – dönüşümü denir (Mickens, 1990).

Tanım 2.11. $c_n \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$ keyfi sabitler, $y^{(1)}(m), y^{(2)}(m), \dots, y^{(n)}(m)$ ’ler ise (2.2) denkleminin n tane çözümü olsun. Bu durumda

$$y(m) = c_1 y^{(1)}(m) + c_2 y^{(2)}(m) + \dots + c_n y^{(n)}(m)$$

ifadesi de (2.2) denkleminin bir çözümüdür. Bu çözüme üst üste ekleme ya da süper pozisyon kuralı denir (Elaydi, 1999).

Tanım 2.12. $y_1(m), y_2(m), \dots, y_n(m)$ ’ ler n . mertebeden bir fark denkleminin çözümleri olmak üzere;

$$C(m) = \det \begin{bmatrix} y_1(m) & y_2(m) & \dots & y_n(m) \\ y_1(m+1) & y_2(m+1) & \dots & y_n(m+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1(m+n-1) & y_2(m+n-1) & \dots & y_n(m+n-1) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $C(m)$ determinantına bu çözümlere ait casoration denir (Elaydi, 1999). Eğer, $C(m) \neq 0$ ise fark denkleminin $y_1(m), y_2(m), \dots, y_n(m)$ çözümlerine lineer bağımsızdır denir (Mickens, 1990).

2.1 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Çözümleri

$$a_n y(m) + a_{n-1} y(m+1) + \dots + a_1 y(m+n-1) + y(m+n) = 0$$

şeklinde verilen n . mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denkleminin genel çözümü bu denkleme ait karakteristik denklemin köklerinin durumlarına göre aşağıdaki şekillerde verilir.

2.1.1 Birbirinden farklı reel köklerin olması durumu

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ve c_1, c_2, \dots, c_n reel sabitler olmak üzere (2.2) homojen denklemini,

$$y(m) = c_1 \lambda_1^m + c_2 \lambda_2^m + \dots + c_n \lambda_n^m$$

biçiminde genel çözüme sahiptir (Akın ve Bulgak, 1998).

2.1.2 Köklerin birbirine eşit olması durumu

(2.2) denkleminde ait karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ ise c_1, c_2, \dots, c_n keyfi sabitler olmak üzere (2.2) denklemi,

$$y(m) = c_1 \lambda^m + c_2 m \lambda^m + \dots + c_n m^{n-1} \lambda^m$$

biçiminde genel çözüme sahiptir (Elaydi, 1999).

2.1.3 Köklerin kompleks olması durumu

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 'ler reel sabitler olmak üzere (2.2) denkleminde ait karakteristik denkleminin kökleri kompleks $\alpha_j + i\gamma_j$ $j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ ise kökler ikiye eşleniktir. Yani $\alpha_j + i\gamma_j$ karakteristik denklemin bir kökü ise $\alpha_j - i\gamma_j$ de karakteristik denklemin bir köküdür.

i) İkişerli eşlenik kökler farklı ise genel çözüm;

$$y(m) = c_1 \lambda_1^m + c_2 \lambda_2^m + \dots + c_n \lambda_n^m ,$$

ii) İkişerli eşlenik kökler eşit ise genel çözüm;

$$\begin{aligned} y(m) &= (c_1 \lambda^m + c_2 m \lambda^m + \dots + c_n m^{n-1} \lambda^m) \cos(m\alpha + \gamma) \\ &= (c_1 + c_2 + \dots + c_n m^{n-1}) \lambda^m \cos(m\alpha + \gamma) \end{aligned}$$

şeklindedir (Elaydi, 1999).

2.2 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemlerinin Çözümleri

Sabit katsayılı, lineer homojen olmayan fark denklemlerinin genel çözümü, homojen kısmın genel çözümü ile homojen olmayan denklemin sağlayan özel çözümünün toplamı şeklinde verilir.

Teorem 2.4. Homojen olmayan (2.1c) denkleminin genel çözümü bu denkleme ait

homojen kısmın genel çözümü $y^{(c)}(m)$ ile bu denkleme ait homojen olmayan denklemin özel çözümü $y^{(p)}(m)$ 'nin toplamıdır. Yani homojen olmayan denklemin genel çözümü,

$$y(m) = y^{(p)}(m) + y^{(c)}(m)$$

şeklinde yazılır (Mickens, 1990).

2.2.1 Belirsiz katsayılar yöntemi

c_1, c_2, \dots, c_n ve f_1, f_2, \dots, f_n ' ler belirlenmesi gereken sabitler ve t, z reel sayılar olmak üzere, sabit katsayılı lineer homojen olmayan (2.1c) denkleminin özel çözümü $y^{(p)}(m)$, $h(m)$ fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki şekilde çözüm önerileri ile verilir (Elaydi, 1999).

$$1) h(m) = t^m, \quad y^{(p)}(m) = c_1 t^m$$

$$2) h(m) = m^n, \quad y^{(p)}(m) = c_0 + c_1 m + \dots + c_n m^n$$

$$3) h(m) = m^n t^m, \quad y^{(p)}(m) = c_0 t^m + c_1 m t^m + \dots + c_n m^n t^m$$

$$4) h(m) = \begin{cases} \sin zm, \\ \cos zm \end{cases} \quad y^{(p)}(m) = c_1 \sin zm + c_2 \cos zm$$

$$5) h(m) = \begin{cases} t^m \sin zm, \\ t^m \cos zm \end{cases} \quad y^{(p)}(m) = (c_1 \sin zm + c_2 \cos zm) t^m$$

$$6) h(m) = \begin{cases} t^m m^n \sin zm, \\ t^m m^n \cos zm \end{cases} \quad y^{(p)}(m) = \begin{cases} (c_1 + c_2 m + \dots + c_n m^n) t^m \sin zm + \\ (f_1 + f_2 m + \dots + f_n m^n) t^m \cos zm \end{cases}$$

2.2.2 Parametrelerin değişimi yöntemi

(2.2) denkleminin N tane lineer bağımsız çözümü, $p_1(m), p_2(m), \dots, p_N(m)$ ise bu denklemin genel çözümü,

$$y(m) = C_1(m) p_1(m) + C_2(m) p_2(m) + \dots + C_N(m) p_N(m)$$

şeklindedir. $C_1(m), C_2(m), \dots, C_N(m)$ belirsiz dizileri için Δ ileri fark operatörü ile bağlı

bir sistem için

$$\begin{aligned} y(m+1) &= C_1(m+1)p_1(m+1) + C_2(m+1)p_2(m+1) + \dots + C_N(m+1)p_N(m+1) \\ &= C_1(m)p_1(m+1) + C_2(m)p_2(m+1) + \dots + C_N(m)p_N(m+1) \\ &\quad + [C_1(m+1) - C_1(m)]p_1(m+1) + [C_2(m+1) - C_2(m)]p_2(m+1) + \dots + \\ &\quad [C_N(m+1) - C_N(m)]p_N(m+1) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\Delta C(m) = C(m+1) - C(m)$ olduğundan

$\Delta C_1(m)p_1(m+1) + \Delta C_2(m)p_2(m+1) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+1) = 0$ olduğu kabul edilirse

$y(m+1) = C_1(m)p_1(m+1) + C_2(m)p_2(m+1) + \dots + C_N(m)p_N(m+1)$ şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $y(m+2)$ için

$$\begin{aligned} y(m+2) &= C_1(m+1)p_1(m+2) + C_2(m+1)p_2(m+2) + \dots + C_N(m+1)p_N(m+2) \\ &= C_1(m)p_1(m+2) + C_2(m)p_2(m+2) + \dots + C_N(m)p_N(m+2) \\ &\quad + \Delta C_1(m)p_1(m+2) + \Delta C_2(m)p_2(m+2) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+2) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\Delta C_1(m)p_1(m+2) + \Delta C_2(m)p_2(m+2) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+2) = 0$ kabul edilirse

$$y(m+2) = C_1(m+1)p_1(m+2) + C_2(m+1)p_2(m+2) + \dots + C_N(m+1)p_N(m+2)$$

yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse sırasıyla $y(m+3), y(m+4), \dots, y(m+N)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta C_1(m)p_1(m+i) + \Delta C_2(m)p_2(m+i) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+i) = 0, \quad i = 3, 4, \dots, N-1$$

elde edilir. $y(m+N)$ için

$$y(m+N) = C_1(m+1)p_1(m+N) + C_2(m+1)p_2(m+N) + \dots + C_N(m+1)p_N(m+N)$$

$$= C_1(m)p_1(m+N) + C_2(m)p_2(m+N) + \dots + C_N(m)p_N(m+N)$$

$$+ \Delta C_1(m)p_1(m+N) + \Delta C_2(m)p_2(m+N) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+N)$$

olur.

$$\Delta C_1(m)p_1(m+N) + \Delta C_2(m)p_2(m+N) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+N) = f(m) \text{ kabulü altında}$$

$$y(m+N) = C_1(m)p_1(m+N) + C_2(m)p_2(m+N) + \dots + C_N(m)p_N(m+N)$$

şeklinde yazılır. Eğer,

$$\Delta C_i(m) = C_i(m+1) - C_i(m), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\Delta C_1(m)p_1(m+i) + \Delta C_2(m)p_2(m+i) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+i) = 0 \quad (2.4)$$

$$\Delta C_1(m)p_1(m+N) + \Delta C_2(m)p_2(m+N) + \dots + \Delta C_N(m)p_N(m+N) = f(m)$$

denklemleri sağlıyorsa

$$y(m+N) = C_1(m)p_1(m+N) + C_2(m)p_2(m+N) + \dots + C_N(m)p_N(m+N)$$

denklemleri (2.2) denkleminin bir kısmi çözümü olur (Akın ve Bulgak, 1998). $p_1(m)$, $p_2(m)$, ..., $p_N(m)$ fonksiyonları (2.2) sisteminin lineer bağımsız çözümleri olduğundan

$$W(m+1) = \begin{pmatrix} p_1(m+1) & p_2(m+1) & \dots & p_{N-1}(m+1) & p_N(m+1) \\ p_1(m+2) & p_2(m+2) & \dots & p_{N-1}(m+2) & p_N(m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1(m+N-1) & p_2(m+N-1) & \dots & p_{N-1}(m+N-1) & p_N(m+N-1) \\ p_1(m+N) & p_2(m+N) & \dots & p_{N-1}(m+N) & p_N(m+N) \end{pmatrix}$$

bu denklemin esas matrisi olur.

$$C(m) = \begin{pmatrix} C_1(m) \\ C_2(m) \\ \vdots \\ C_{N-1}(m) \\ C_N(m) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad F(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(n) \end{pmatrix}$$

olmak üzere (2.3) denklem sistemi,

$$W(m+1)\Delta C(m) = F(m) \quad \text{veya} \quad W(m+1)[C(m+1) - C(m)] = F(m)$$

şeklinde yazılabilir.

$$C(m+1) - C(m) = W^{-1}(m+1)F(m)$$

olur. Dolayısıyla $C(0) = 0$ alınırsa $C(m) = \sum_{j=0}^{m-1} W^{-1}(j+1)F(j)$ istenilen parametre değeri

olur. Dolayısıyla

$$y(m) = C_1(m)p_1(m) + C_2(m)p_2(m) + \dots + C_N(m)p_N(m)$$

$$= [p_1(m), p_2(m), \dots, p_N(m)]C(m)$$

olur. Burada $[p_1(m), p_2(m), \dots, p_N(m)]$, $W(m)$ esas matrisinin birinci sütunudur ve bu sebeple kısmi çözümü,

$$y(m) = (W(m) \sum_{j=0}^{n-1} W^{-1}(j+1)F(j)) = (\sum_{j=0}^{n-1} W(m-j-1)W^{-1}(0)F(j))$$

olarak yazılabilir. Bu formül (2.3) sistemine benzerdir. Dolayısıyla parametreler yöntemi ile esas matris ile hesaplama yöntemi aynı çözümü verirler (Akın ve Bulgak, 1998).

2.2.3 İleri fark operatörü yardımıyla genel çözüm hesabı

E kaydırma operatörü, Δ ileri fark operatörü olmak üzere $E = I + \Delta$ dır. (2.1) denklemi

$$L(E)y(m) = h(m) \quad \text{veya} \quad L(I + \Delta)y(m) = h(m)$$

biçiminde yazılır. Eğer, $[L(I + \Delta)]^{-1}$ hesaplanırsa genel çözüm;

$$y^{(p)}(m) = [L(I + \Delta)]^{-1} f(m)$$

formunda verilir (Akın ve Bulgak, 1998).

2.2.4 Z – Dönüşümü metodu

(2.2) denklemine Z – dönüşümü uygulanırsa, a_1, a_2, \dots, a_n ve $b_0, b_1, b_2, \dots, b_j$ sabitler ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere $F(z)$ fonksiyonu,

$$F(z) = \frac{b_0 z^j + b_1 z^{j-1} + \dots + b_j}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

şeklinde elde edilir. (2.1c) ile verilen homojen olmayan denkleme Z – dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{i=0}^n a_i y(m+n-i) = h(m), \quad a_0 = 1$$

elde edilir. Z – dönüşümünün lineerliğinden,

$$Z(y(m+n-i)) = z^{n-i} F(z) - \sum_{t=0}^{n-i-1} y(t) z^{n-i-t}$$

yazılabilir. Böylece $F(z) = Z(y(m))$ olup, $h(m)$ fonksiyonu $G(z) = Z(h(m))$ şeklinde

tanımlanır ve (2.1.c) homojen olmayan fark denkleminin Z – dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(z^{n-i} F(z) - \sum_{t=0}^{n-i-1} y(t) z^{n-i-t} \right) = G(z) \text{ elde edilir. Böylece}$$

$$F(z) = \frac{G(z) + \sum_{i=0}^n a_i \sum_{t=0}^{n-i-1} y(t) z^{n-i-t}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}, \quad a_0 = 1$$

şeklinde elde edilen dönüşümünün hangi diziye ait olduğu bulunursa fark denkleminin çözümü elde edilmiş olur (Mickens, 1990).

2.3 Çözümlü Örnekler

Örnek 2.1: $y(m+2) - 4y(m+1) + 3y(m) = m2^m$ (2.5)

şeklinde verilen 2. mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan lineer fark denkleminin genel çözümünü belirsiz katsayılar yöntemiyle elde edelim.

Çözüm: Bu denklemin genel çözümü $y(m) = y^{(c)}(m) + y^{(p)}(m)$ şeklindedir. Bu denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

şeklinde olup, denklemin kökleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 3$ olur. O halde homojen kısmın genel çözümü;

$$y^{(c)}(m) = c_1 + c_2(3)^m$$

elde edilir. $h(m) = m2^m$ olduğundan özel çözüm;

$$y^{(p)}(m) = b_1 2^m + b_2 m 2^m$$

şeklinde aranır. Bu özel çözüm (2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$b_1 2^{m+2} + b_2(m+2)2^{m+2} - 4b_1 2^{m+1} - 4b_2(m+1)2^{m+1} + 3(b_1 2^m + b_2 m 2^m) = m 2^m$$

Bu eşitlikten,

$$-b_1 2^m - b_2 m 2^m = m 2^m$$

elde edilir. Buradan $b_1 = 0$ ve $b_2 = -1$ olur. Dolayısıyla özel çözüm;

$$y^{(p)}(m) = -m 2^m$$

olur. Buradan homojen olmayan lineer denklemin genel çözümü,

$$y(m) = c_1 + c_2 3^m - m 2^m$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.2: $y(m+2) + y(m+1) - 6y(m) = m$

denkleminin genel çözümünü parametrelerin değişim yöntemini kullanarak elde edelim.

Çözüm: Bu denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ olup $\lambda_1 = -3$ ve $\lambda_2 = 2$ dir. Yani $y_1(m) = (-3)^m$ ve $y_2(m) = 2^m$ dir. Dolayısıyla homojen olmayan denklemin genel çözümü,

$$y^{(c)}(m) = c_1(-3)^m + c_2 2^m$$

şeklinde elde edilir. Homojen kısmın genel çözümünü elde edelim. Önce esas matrisi bulalım. Esas matris,

$$\phi(m) = \begin{pmatrix} y_1(m) & y_2(m) \\ y_1(m+1) & y_2(m+1) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, $\phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ esas matrisi elde edilir. $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ vektörü

$\phi(0) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ denkleminin bir çözümü olsun.

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= 0 \\ -3\beta_1 + 2\beta_2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{1}{5} \text{ ve } \beta_2 = \frac{1}{5} \text{ olur.}$$

$$y(m) = \sum_{j=0}^{m-1} [\beta_1 q_1(m-j-1) + \beta_2 q_2(m-j-1) + \dots + \beta_N q_N(m-j-1)] f(j)$$

kısmi çözümünden yararlanarak

$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{j=0}^{m-1} [-3\beta_1 + \beta_2 2^{m-j-1}] j \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{5} [-3 + 2^{m-j-1}] j \\ &= -\frac{3m(m-1)}{10} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{5} 2^{m-j-1} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece homojen olmayan denklemin genel çözümü,

$$y(m) = c_1(-3)^m + c_2 2^m - \frac{3m(m-1)}{10} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{5} 2^{m-j-1}$$

olur.

Örnek 2.3: $y(m+2) + 5y(m+1) + 4y(m) = 3m^2 - 4m + 6$

denkleminin genel çözümünü ileri fark operatörünü kullanarak elde edelim.

Çözüm: Denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ olup, denklemin kökleri $\lambda = -1$ ve $\lambda = -4$ olarak elde edilir. Bu durumda homojen denklemin genel çözümü,

$$y^{(c)}(m) = c_1(-1)^m + c_2(-4)^m$$

olur. Homojen olmayan denklemin çözümü için E operatörünü kullanırsak,

$$E^2 + 5E + 4I = 3m^2 - 4m + 6$$

olur. $E = I + \Delta$ olduğundan

$$((I + \Delta)^2 + 5(I + \Delta) + 4I)y(m) = 3m^2 - 4m + 6$$

veya

$$(\Delta^2 + 7\Delta + 10I)y(m) = 3m^2 - 4m + 6$$

olur. Böylece homojen olmayan denklemin genel çözümü,

$$y^{(p)}(m) = [\Delta^2 + 7\Delta + 10I]^{-1}[3m^2 - 4m + 6]$$

veya

$$y^{(p)}(m) = \frac{1}{10} \left[I + \frac{1}{10}(\Delta^2 + 7\Delta) \right]^{-1} [3m^2 - 4m + 6]$$

olur.

$$\left[I + \frac{1}{10}(\Delta^2 + 7\Delta) \right]^{-1} = I - \frac{1}{10}(\Delta^2 + 7\Delta) + \left[\frac{1}{10}(\Delta^2 + 7\Delta) \right]^2 - \dots$$

$$= I - \frac{7}{10} \Delta + \frac{39\Delta^2}{100} + R(\Delta)$$

yazılabilir. Burada $R(\Delta)$ ileri fark operatörünün 3. ve daha yüksek mertebeli terimlerini kapsayan bir operatördür. Dolayısıyla genel çözüm;

$$y^{(p)}(m) = \frac{1}{10} \left[I - \frac{7}{10} \Delta + \frac{39\Delta^2}{100} + R(\Delta) \right] [3m^2 - 4m + 6] \quad (2.6)$$

şeklinde olur.

$$\Delta 1 = 0, \quad \Delta(m) = (m+1) - m, \quad \Delta^2(m) = 0, \quad \Delta(m^2) = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1, \quad \Delta^2(m^2) = 2$$

ve $\Delta^3(m^2) = 0$ eşitlikleri (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$y^{(p)}(m) = \frac{1}{10} \left[3m^2 - 4m + 6 - \frac{7}{10} (3(2m+1) - 4) + \frac{39}{100} 100 \right]$$

elde edilir. Böylece

$$y^{(p)}(m) = 0.3m^2 - 0.82m + 4,57$$

sonucuna varılır. Denklemin genel çözümü ise,

$$y(m) = c_1(-1)^m + c_2(-4)^m + 0.3m^2 - 0.82m + 4,57$$

olarak bulunur.

Örnek 2.4: $y(m+2) + 3y(m+1) + 2y(m) = 2^m$

şeklinde verilen lineer homojen olmayan ikinci mertebeden fark denkleminin genel çözümünü Z - dönüşümü metodunu kullanarak bulalım.

Çözüm : $G(z) = Z(2^m) = \frac{z}{z-2}$ olacağından

$$\left[z^2 F(z) - z^2 y(0) - zy(1) \right] + 3 \left[zF(z) - zy(0) \right] + 2F(z) = G(z)$$

olur. Böylece $F(z) = \frac{\frac{z}{z-2} + y(0)z^2 + (3y(0) + y(1))z}{z^2 + 3z + 2}$ elde edilir. Yani

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{y(0)(z+3)}{(z+1)(z+2)} + \frac{y(1)}{(z+1)(z+2)} + \frac{1}{(z-2)(z+1)(z+2)}$$

olup payda eşitlenip her bir toplam ifadesi düzenlenirse

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$\frac{z+3}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$\frac{1}{(z-2)(z+1)(z+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{z+2} - \frac{1}{12} \frac{1}{z-2}$$

elde edilip yerine yazılırsa

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{3y(1)+6y(0)+1}{3(z+1)} - \frac{4y(1)+4y(0)+1}{4(z+2)} - \frac{1}{12} \frac{1}{z-2}$$

olur. Dolayısıyla genel çözüm;

$$y(m) = \frac{1}{3}[3y(1)+6y(0)+1](-1)^m - \frac{1}{4}[4y(1)+4y(0)+1](-2)^m - \frac{1}{12}2^m$$

şeklinde elde edilir.

2.4 Lineer Olmayan Fark Denklemleri

Bu bölümde, lineer olmayan denklemlerin bazı dönüşümlerle lineer hale getirildiği denklemler ele alınmıştır.

i) p ve q keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(m+1)y(m) + py(m+1) + qy(m) = 0 \quad (2.7)$$

şeklindeki fark denklemini için $z(m) = \frac{1}{y(m)}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{1}{z(m+1)z(m)} + p \frac{1}{z(m+1)} + q \frac{1}{z(m)} = 0$$

olur. Gerekli düzenleme ile

$$qz(m+1) + pz(m) + 1 = 0 \quad (2.8)$$

şeklinde sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi elde edilir. (2.7) denkleminin homojen kısmının karakteristik denklemi $q\lambda + p = 0$ olduğundan genel çözümü,

$$z^{(c)}(m) = c_1 \left(-\frac{p}{q} \right)^m$$

olup, homojen olmayan kısmın genel çözümü ise,

$$z^{(p)}(m) = -\frac{1}{p+q}$$

şeklindedir. Böylece genel çözüm;

$$z^{(p)}(m) = c_1 \left(-\frac{p}{q} \right)^m - \frac{1}{p+q}$$

biçiminde elde edilir. Sonuçta, (2.7) denkleminin genel çözümü,

$$y(m) = \frac{1}{z(m)} = \frac{1}{c_1 \left(\frac{-p}{q} \right)^m - \frac{1}{p+q}}$$

şeklinde elde edilir (Elaydi, 1999).

ii) (2.7) denkleminin homojen olmayan durum için, p ve q keyfi sabitler ve $r(m)$, m 'ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$y(m+1)y(m) + py(m+1) + qy(m) = r(m)$$

denklemini için $y(m) = \frac{z(m+1)}{z(m)} - p$ dönüşümü uygulanırsa

$z(m+2) + (q-p)z(m+1) - (r(m) + pq)z(m) = 0$ şeklindeki lineer fark denklemi elde edilir (Elaydi, 1999).

$$\text{iii) } f\left(\frac{y(m+1)}{y(m)}, m\right) = 0 \text{ şeklindeki denklemleri lineerleştirebilmek için } z(m) = \frac{y(m+1)}{y(m)}$$

dönüşümü yapılır (Elaydi, 1999).

$$\text{iv) } (y(m+n))^{t_1} (y(m+n-1))^{t_2} \dots (y(m))^{t_{n+1}} = r(m) \quad (2.9)$$

denklemini için $z(m) = \ln y(m)$ dönüşümü kullanılarak lineer olmayan (2.9) denklemini

$$t_1 z(m+n) + t_2 z(m+n-1) + \dots + t_{n+1} z(m) = \ln r(m)$$

şeklindeki sabit katsayılı lineer denklemine dönüştürülür ve $y(m) = e^{z(m)}$ ters dönüşümü ile (2.9) denkleminin genel çözümü elde edilir (Elaydi, 1999).

2.5 Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklem Sistemi

$a \in R$ ve $\{x(n)\}$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere;

$$x(n+1) = a x(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir fark denklemdir. N bilinmeyenli sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi,

$$x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1N}x_N(n)$$

$$x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2N}x_N(n)$$

.....

$$x_N(n+1) = a_{N1}x_1(n) + a_{N2}x_2(n) + \dots + a_{NN}x_N(n)$$

şeklinde yazılır (Akın ve Bulgak, 1998).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{pmatrix} \text{ olmak üzere fark denklem sistemi}$$

$x(n+1) = Ax(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ şeklinde yazılabilir (Akın ve Bulgak, 1998).

Örnek 2.5: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ve $x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}$ olmak üzere fark denklem sistemi

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(n) + x_2(n) \\ 2x_1(n) + 3x_2(n) + x_3(n) \\ 4x_1(n) - 2x_2(n) \end{pmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_1(n+1) = -x_1(n) + x_2(n)$$

$$x_2(n+1) = 2x_1(n) + 3x_2(n) + x_3(n)$$

$$x_3(n+1) = 4x_1(n) - 2x_2(n)$$

şeklinde elde edilir.

2.6 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklem Sistemi

$$x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1N}x_N(n) + f_1(n)$$

$$x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \dots + a_{2N}x_N(n) + f_2(n)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

.....

$$x_N(n+1) = a_{N1}x_1(n) + a_{N2}x_2(n) + \dots + a_{NN}x_N(n) + f_N(n)$$

şeklinde verilsin. Bu denklem sistemi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_N(n) \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad F(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \vdots \\ f_N(n) \end{pmatrix}$$

a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$) reel sayılar $x_j(n)$, $f_j(n)$ ($j = 1, 2, \dots, N$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) kısaca

$$x(n+1) = Ax(n) + F(n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

şeklinde yazılır (Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.13. \bar{x} noktası, $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$ şartını sağlıyorsa \bar{x} noktasına f 'nin denge noktası denir. $\forall n \geq 0$ için \bar{x} , f 'nin sabit noktası ise $x_n = \bar{x}$ dir (Agarwal, 2000; Elaydi, 1995; Rugh, 1996).

Tanım 2.14. \bar{x} , (2.3) denkleminin bir denge noktası olmak üzere bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin her bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ çözümlerinin tamamı bu denge noktasından büyük, eşit ve $x_{L-1} < \bar{x}$, $x_{M+1} < \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, \dots, x_M\}$ kümesine pozitif yarı dönme denir (Şekerci, 2008).

Tanım 2.15. \bar{x} 'e (2.3) denkleminin pozitif bir denge noktasıdır denir eğer, (2.3) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi \bar{x} denge noktasına eşit ya da \bar{x} denge noktasından büyük bütün terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $m \leq \infty$ olur ve burada ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} < \bar{x}$ veya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ dir (Akın ve Bulgak, 1998).

Tanım 2.16. \bar{x} , (2.3) denkleminin denge noktası olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in I$ olmak üzere $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktasına kararlıdır denir. Kararlı olmayan \bar{x} denge noktasına kararsızdır denir (Elaydi, 1995; Rugh, 1996; Yang vd., 2004).

Tanım 2.17. \bar{x} denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \mathcal{G}$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{G} > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktasına, lokal asimptotik kararlıdır denir (Elaydi, 1995; Rugh, 1996; Yang vd., 2004).

Tanım 2.18. $\forall x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise \bar{x} denge noktasına çekim noktası denir (Elaydi, 1995; Rugh, 1996; Yang vd., 2004).

Tanım 2.19. Kararlı ve çekim noktası olan \bar{x} denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir (Elaydi, 1995; Rugh, 1996; Yang vd., 2004).

Tanım 2.20. Bir fark denkleminin denge noktasındaki kısmi türevleri ile oluşturulan yeni denkleme bu fark denkleminin karakteristik denklemi denir.

İkinci mertebeden

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) = f(u, v)$$

denkleminin karakteristik denklemi;

$$z_{n+1} - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} z_n - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v} z_{n-1} = 0$$

şeklindedir. $r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u}$ ve $s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}$ şeklinde tanımlanırsa

$$y_{n+1} - ry_n - sy_{n-1} = 0 \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla bu denklemin karakteristik denklemi;

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \quad (2.11)$$

şeklindedir. Üçüncü mertebeden

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = f(u, v, w)$$

denklemini için

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial u}, \quad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial v} \quad \text{ve} \quad t = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere;

$$y_{n+1} - ry_n - sy_{n-1} - ty_{n-2} = 0 \quad (2.12)$$

şeklindeki denklem elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.5. i) Eğer (2.11) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçükse ise \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,

ii) (2.11) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,

iii) (2.11) denkleminin her iki kökünün mutlak değerce 1 den büyük olması için gerek ve yeter şart $|s| > 1$ ve $|r| < |1-s|$ olmasıdır. Bu durumda \bar{x} denge noktası repellerdir,

iv) (2.11) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise bu durumda \bar{x} denge noktası kararsızdır,

vi) (2.11) denkleminin köklerinden birinin mutlak değerce 1'den küçük ve diğerinin mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şart $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1-s|$ olmasıdır. Bu durumda, \bar{x} denge noktası kararsızdır denir (Chatterje vd., 2003).

Teorem 2.6. i) Eğer (2.13) karakteristik denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,

ii) Eğer(2.13) karakteristik denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise \bar{x} denge noktası kararsızdır,

iii) (2.13) karakteristik denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r+1| < 1-s$, $|r-3t| < 3+s$ ve $t^2 - s - rt < 1$ olmasıdır. Bu durumda \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Chatterje vd., 2003).

Tanım 2.21. $\forall n$ için $K \leq x_n \leq L$ olacak şekilde $\{x_n\}$, $n = -1, 0, \dots$ dizisinde K ve L pozitif sayıları varsa $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır (Elaydi, 1995).

Teorem 2.7. $p, q, \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \{1, 2, \dots\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-m} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için yeter ve gerek şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır (Elaydi, 1995).

BÖLÜM III

İKİ BOYUTLU LİNEER KESİRLİ FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ASİMPOTOTİK DAVRANIŞLARI

3.1 GİRİŞ

x_0, y_0 keyfi negatif olmayan başlangıç şartları, a, b, d ve e parametreleri pozitif sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

şeklindeki fark denklem sistemi olsun (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003). Lineer olmayan (3.1) fark denklem sistemi rekabete dayalı iki farklı popülasyon olarak gösterilebilir. x_n ve y_n faz değişkenleri n . kuşaktaki popülasyon boyutunu göstermek üzere $\{(x_n, y_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ dizisi popülasyonun nasıl geliştiğini gösterir. Bu iki popülasyon arasındaki rekabet, her bir popülasyon için değişim fonksiyonu diğer popülasyon büyüklüklerinin birinin azalan fonksiyon olduğu şeklinde ifade edilir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003). Benzer tip problemler, Hassell ve Comins (1976), Franke ve Yakubu (1991), Franke ve Yakubu (1992) tarafından çalışılmıştır. Clark ve Kulenovic (2002), Clark vd. (2003)' de bir popülasyonun sınırsız büyümesini sağlayan benzer bir rekabet modeli aşağıdaki denklem ile tartışılmıştır.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{e + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Açıktır ki, (3.2) denklemini (3.1) denkleminde $a = d = 0$ şartına karşılık gelmektedir. Bu bölümdeki asıl amaç, (3.2) denklem sisteminin çözümlerinin global davranışları üzerinde a ve d parametrelerinin etkilerini incelemektir. a ve d parametrelerinin (3.2) sisteminin global çözümleri için kararlı bir etkisi gösterilecektir. Bu ise (3.1) sisteminin tek bir pozitif denge noktasının a ve d 'nin belli değerleri için sistemin bütün pozitif çözümlerinin genel çekim noktası haline gelmesi demektir. (3.1) ve (3.2) ile verilen sistemlerden daha genel bir fark denklem sistemi,

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + cx_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n + fy_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

şeklinde verilmiş ve Kulenovic ve Nurkanovic (2002)' de incelenmiştir. Kulenovic ve Ladas (2002)' de ise daha basit bir rasyonel fark denklemi,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \quad (3.4)$$

şeklinde ele alınmış ve detaylı analizler yapılmıştır.

Bu bölümde, (3.1) ile verilen fark denklem sistemi ele alınacak ve çözümlerin global asimptotik kararlılığı incelenecektir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003).

Şimdi, bu bölümde kullanılacak değişmez dikdörtgensel bölge kavramını verelim.

$$\mathfrak{R} = [L_1, U_1] \times [L_2, U_2] ;$$

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

(3.5) sisteminin değişmez bir dikdörtgen bölgesi olmak üzere, eğer çözümlerin tek bir (x_N, y_N) noktası \mathfrak{R} bölgesinde ise çözümlerin sonraki tüm terimleri de \mathfrak{R} ' ye aittir.

Başka bir ifadeyle $(x_N, y_N) \in \mathfrak{R}$ olmak üzere bazı $N \geq 0$ ve $n > N$ için $(x_n, y_n) \in \mathfrak{R}$ oluyorsa \mathfrak{R} , (3.5) sistemi için değişmez bir dikdörtgensel bölgedir. Benzer tanımlama $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ kümesi içinde yapılabilmektedir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003).

Değişmez aralıklar metodu

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

ile verilen ikinci mertebe fark denklemlerinin yakınsaklığında ve global çekimlerinde geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

Bu kısımda (3.5) sisteminin periyodik ve denge noktasının kararlılığı için, (3.5)' de verilen f ve g fonksiyonlarının sürekli diferansiyellenebilir, her $n \geq 0$ için mevcut olan çözümlerin varlığı kabul edilecektir. Aşağıda ispatsız olarak verilecek teorem değişmez dikdörtgensel bölgedeki yakınsaklık sonuçları için kullanılacaktır (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003).

Teorem 3.1. $[a, b]$ ve $[c, d]$ reel sayılarda aralıklar ve

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow [a, b], \quad g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow [c, d]$$

ise aşağıdaki şartları sağlayan sürekli fonksiyonlar olsun.

a) $[a,b] \times [c,d]$ aralığında $f(x,y)$, x noktasında artan ve y noktasında azalandır, $g(x,y)$, x noktasında azalan ve y noktasında artandır.

b) Eğer $(m,M,m',M') \in ([a,b] \times [c,d])^2$, $m \leq m'$, $M \leq M'$,

$$m = f(m, M'), \quad m' = f(m', M),$$

$$M = g(m', M), \quad M' = g(m, M'),$$

sisteminin bir çözümüdür, $m = m'$ ve $M = M'$ dir. Böylece $[a,b] \times [c,d]$ aralığındaki her (x_n, y_n) noktasına sahip (3.5) sisteminin her çözümü (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasına yakınsaktır.

3.2 Denge Noktası

(3.1) sistemine ait (\bar{x}, \bar{y}) denge noktası

$$\bar{x} = \frac{a + \bar{x}}{b + \bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{d + \bar{y}}{e + \bar{x}} \quad (3.7)$$

şeklinde olup, buradan

$$\bar{x} = \frac{a + \bar{x}}{b + \bar{y}} \Rightarrow \bar{x}(b + \bar{y}) = a + \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \bar{y} = a + (1-b)\bar{x}$$

ve

$$\bar{y} = \frac{d + \bar{y}}{e + \bar{x}} \Rightarrow \bar{y}(e + \bar{x}) = d + \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \bar{y} = d + (1-e)\bar{y}$$

ifadeleri kullanılırsa

$$\bar{x} \bar{y} = a + (1-b)\bar{x} = d + (1-e)\bar{y} \quad (3.8)$$

elde edilir. Böylece (\bar{x}, \bar{y}) denge noktası,

$$y = \frac{a}{x} + 1 - b, \quad x = \frac{d}{y} + 1 - e \quad (3.9)$$

eğrilerinin arakesitidir. Bazı durumlarda (3.1) sistemi, örneğin $a=0$ ve $d=0$ olduğu, koordinat eksenlerine ait olan denge noktaları bulunabilir. Önceden de bahsedildiği gibi $a=d=0$ durumu Clarck ve Kulenovic (2002), Clarck ve Kulenovic (2003)'de incelenmiştir. Bu yüzden $a>0$ ve $d>0$ olarak kabul edilecektir. Bu durumda ise (3.1) sisteminin $E=(\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktasının varlığı için şartlar aşağıda verilmiştir.

Durum 3.1. $b>1, e>1,$

Durum 3.2. $b=1, e>1, a<d,$

Durum 3.3. $b>1, e=1, a>d,$

Durum 3.4. $b<1, e<1,$

Durum 3.5. $b=1, e<1, a>d,$

Durum 3.6. $b<1, e=1, d>a.$

Durum 3.1-6 ile verilen şartların sağlandığını basit hesaplamalarla görmek mümkünse de bu kısımda bu hesaplamaları vermeyeceğiz. Ancak bir sonraki bölümde üçlü sistem için şartların sağlandığı ayrıntılı biçimde gösterilecektir.

3.3 Lineer Kararlılık Analizi

(3.1) sistemi

$$f(x, y) = \frac{a+x}{b+y}, \quad g(x, y) = \frac{d+y}{e+x} \quad (3.10)$$

durumunda (3.5) genel sisteminin özel bir durumudur. $T(x, y) = \left(\frac{a+x}{b+y}, \frac{d+y}{e+x} \right)$

şeklinde tanımlanan dönüşümün $E = (\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J_T(E) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{x}^2(b+\bar{y})}{(a+\bar{x})^2} & -\frac{\bar{x}^2}{a+\bar{x}} \\ -\frac{\bar{y}^2}{d+\bar{y}} & \frac{\bar{y}^2(e+\bar{x})}{(d+\bar{y})^2} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinindedir. Jakobiyen matrisin karakteristik denklemini;

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde olup,

$$p = \frac{\bar{x}^2(b + \bar{y})}{(a + \bar{x})^2} + \frac{\bar{y}^2(e + \bar{x})}{(d + \bar{y})^2} \quad (3.13)$$

$$q = -\frac{\bar{x}^2\bar{y}^2(b + \bar{y})(e + \bar{x})}{(a + \bar{x})^2(d + \bar{y})^2} + \frac{\bar{x}^2\bar{y}^2}{(a + \bar{x})(d + \bar{y})}$$

ile verilir. $E = (\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$|\lambda_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow |p| < 1 - q < 2 \quad (3.14)$$

dir. Burada, ya

$$\min\{0, 1 - (b + \bar{y})(e + \bar{x})\} < \bar{x}\bar{y} < (b + \bar{y} - 1)(e + \bar{x} - 1) \quad (3.15)$$

ya da

$$\bar{x}\bar{y} < \sqrt{ad} \quad (3.16)$$

şartlarından biri sağlanabilir. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2. a) Eğer (3.16) şartı sağlanırsa, (3.1) sistemine ait $E = (\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b) Eğer,

$$\sqrt{ad} < \bar{x}\bar{y} < \sqrt{4\bar{x}\bar{y} + 2a\bar{y} + 2d\bar{x} + ad} \quad (3.17)$$

şartı sağlanırsa, (3.1) sistemine ait $E = (\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktası semer noktasıdır.

c) Eğer,

$$\bar{x}\bar{y} > \sqrt{4\bar{x}\bar{y} + 2a\bar{y} + 2d\bar{x} + ad} \quad (3.18)$$

şartı sağlanırsa (3.1) sistemine ait $E = (\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktası repellerdir.

d) Eğer,

$$\bar{x} \bar{y} = \sqrt{4\bar{x} \bar{y} + 2a \bar{y} + 2d \bar{x} + ad}, \quad (3.19)$$

$$\bar{x} \bar{y} = \sqrt{ad}$$

şartlarından en az bir tanesi sağlanırsa (3.1) sistemine ait $E = (\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktası non-hiperboliktir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003).

3.4 Global Çekim Sonuçları

(3.1) sistemi

$$f(x, y) = \frac{a+x}{b+y}, \quad g(x, y) = \frac{d+y}{e+x} \quad (3.20)$$

olduğu her yerde

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

formunda da gösterilir. (3.1) sistemi için $[k, K]$ şeklinde değişmez bir aralık olsun. $f(x, y)$ fonksiyonu x noktasında artan, y de azalan ve $g(x, y)$ fonksiyonu x noktasında azalan, y noktasında artandır. Böylece

$$k \leq \frac{a+k}{b+K} = f(k, K) \leq x_{n+1} = f(x_n, y_n) \leq f(K, k) = \frac{a+K}{b+k} \leq K, \quad (3.22)$$

$$k \leq \frac{d+k}{e+K} = g(K, k) \leq y_{n+1} = g(x_n, y_n) \leq g(k, K) = \frac{d+K}{e+k} \leq K, \quad (3.23)$$

olup (3.22)' nin sağ ve sol eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} k \leq \frac{a+k}{b+K} &\Rightarrow k(b+K) \leq a+k \Rightarrow kb+kK \leq a+k \\ &\Rightarrow kK \leq a+k(1-b) \end{aligned} \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \frac{a+K}{b+k} \leq K &\Rightarrow a+K \leq K(b+k) \Rightarrow a+K \leq Kb+kK \\ &\Rightarrow a+K(1-b) \leq kK \end{aligned} \quad (3.24b)$$

(3.24a) ve (3.24b) den

$$a + K(1-b) \leq kK \leq a + K(1-b) \quad (3.25)$$

elde edilir. Benzer düzenleme (3.23) eşitsizliği için uygulanırsa

$$\begin{aligned} k \leq \frac{d+k}{e+K} &\Rightarrow k(e+K) \leq d+k \Rightarrow ke+kK \leq d+k \\ &\Rightarrow kK \leq d+k(1-e) \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d+K}{e+k} \leq K &\Rightarrow d+K \leq K(e+k) \Rightarrow d+K \leq Ke+kK \\ &\Rightarrow d+K(1-e) \leq kK \end{aligned} \quad (3.26b)$$

(3.26a) ve (3.26b) den

$$d + K(1-e) \leq kK \leq d + K(1-e) \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.25) ve (3.27) şartları

$$b \geq 1, \quad e \geq 1 \quad (3.28)$$

için sağlanır.

Durum 3.1. ($b > 1, e > 1$) olma durumunda (3.1) sistemi tek bir $E = (\bar{x}, \bar{y})$ pozitif denge noktasına sahiptir, yani lokal asimptotik kararlıdır (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003)

$$\bar{x} \bar{y} < (b + \bar{y} - 1)(e + \bar{x} - 1) \Leftrightarrow (b-1)(e-1) + (b-1)\bar{x} + (e-1)\bar{y} > 0, \quad (3.29)$$

$$1 - (b + \bar{y})(e + \bar{x}) < \bar{x} \bar{y} \Leftrightarrow 2\bar{x} \bar{y} + b\bar{x} + e\bar{y} + (be-1) > 0$$

şartı daima sağlanır. (3.25) ve (3.27) eşitsizliklerinde $k = 0$ alınırsa

$$K \geq \frac{a}{b-1}, \quad K \geq \frac{d}{e-1} \quad (3.30)$$

şartı sağlanır. Böylece

$$K \geq \max \left\{ \frac{a}{b-1}, \frac{d}{e-1} \right\} \quad (3.31)$$

elde edilir.

Teorem 3.3. $b > 1$ ve $e > 1$ olsun. $[0, K] \times [0, K]$ dikdörtgensel bir bölge ve K ise, (3.31) şartını sağlasın, bu durumda $E = (\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Herhangi bir (x_0, y_0) başlangıç değeri için (3.31)' i sağlayan K seçilebilir ve $x_0, y_0 \in [0, K]$ dir. Teorem (3.1)' in b şartından

$$m = \frac{a+m}{b+M'}, \quad m' = \frac{a+m'}{b+M'} \quad (3.32)$$

$$M = \frac{d+M}{e+m'}, \quad M' = \frac{d+M'}{e+m}$$

dir. Buradan (3.32)' de ilk eşitlikle ilgili gerekli düzenleme yapılırsa

$$m = \frac{a+m}{b+M'} \Rightarrow m(b+M') = a+m$$

$$\Rightarrow mM' = a+m(1-b) \quad (3.33a)$$

$$m' = \frac{a+m'}{b+M} \Rightarrow m'(b+M) = a+m'$$

$$\Rightarrow m'M = a+m(1-b) \quad (3.33b)$$

olup, (3.33a) ve (3.33b)' den

$$(m'-m)(b-1) = mM' - m'M \quad (3.34)$$

elde edilir. Yine (3.32)' de ikinci eşitlikte benzer düzenleme yapılırsa

$$M = \frac{d+M}{e+m'} \Rightarrow M(e+m') = d+M$$

$$\Rightarrow m'M = d+M(1-e) \quad (3.35a)$$

$$M' = \frac{d+M'}{e+m} \Rightarrow M'(e+m) = d+M'$$

$$\Rightarrow mM' = d + M'(1-e) \quad (3.35b)$$

ve (3.35a) ve (3.35)' den

$$(M' - M)(e-1) = m'M - mM' \quad (3.36)$$

elde edilir. Eğer $b \geq 1$ ise (3.34)

$$mM' \geq m'M \quad (3.37)$$

şartını sağlar. Eğer $e \geq 1$ şartı kabul edilirse o zaman (3.36), $M' = M$ şartını sağlar. Bu durumda $m' = m$ şartı da sağlanır. Böylece Durum 3.1 ve Durum 3.6 dan (3.1) sisteminin tek bir pozitif denge noktası vardır.

Burada

$$\bar{x} \leq \frac{a}{b-1}, \quad \bar{y} \leq \frac{d}{e-1} \quad (3.38)$$

olup,

$$\bar{x} \bar{y} \leq \max \left\{ \frac{a}{b-1}, \frac{d}{e-1} \right\} \leq K \quad (3.39)$$

elde edilir. Böylece $E = (\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası $[k, K]$ değişmez bölgesine aittir.

Durum 3.2. ($b=1, e > 1, a < d$). Bu durumda (3.1) sistemi

$E = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a(e-1)}{d-a}, \frac{d-a}{e-1} \right)$ şeklinde tek bir pozitif denge noktasına sahiptir ve

$$\bar{x} \bar{y} = a = \sqrt{a} \sqrt{a} < \sqrt{a} \sqrt{d} = \sqrt{ad} \quad (3.40)$$

olmak üzere lokal asimptotik kararlıdır. (3.25) ve (3.27) eşitsizlikleri sırasıyla

$$a \leq kK \leq a \Rightarrow kK = a \quad (3.41)$$

$$d + (1-e)K \leq a \leq d + (1-e)k \Rightarrow K \geq \frac{d-a}{e-1} \geq k$$

eşitsizliklerini sağlar. Böylece

$$0 < k = \frac{a}{K} \leq \frac{a(e-1)}{d-a}, \quad k^2 < a < K^2 \Rightarrow k < \sqrt{a} < K \quad (3.42)$$

dir. $E = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a(e-1)}{d-a}, \frac{d-a}{e-1} \right) \in [k, K] \times [k, K]$ olduğu dikkate alınır,

$$K \geq \max \left\{ \frac{a(e-1)}{d-a}, \frac{d-a}{e-1} \right\}, \quad 0 < k \leq \min \left\{ \frac{a(e-1)}{d-a}, \frac{d-a}{e-1} \right\} \quad (3.43)$$

$$kK = a, \quad k < K$$

sonucuna varılır.

Teorem 3.4. $d > a$, $b=1$, $e > 1$ olsun. $[k, K] \times [k, K]$ dikdörtgenel bir bölge olmak üzere k ve K (3.43) şartını sağlasın. Bu durumda $E = (\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası global asimptotik kararlıdır (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003).

İspat. Herhangi bir (x_0, y_0) başlangıç şartı için (3.43) şartını sağlayan k ve K seçilebilir. Öyleyse $n=1, 2, \dots$ $x_n, y_n \in [k, K]$ dir.

Durum 3.3. ($b > 1$, $e=1$, $a > d$) Bu durumda (3.1) sisteminin

$$E = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a(e-1)}{d-a}, \frac{d-a}{e-1} \right)$$

şeklinde tek bir pozitif denge noktası vardır ve

$$\bar{x} \bar{y} = d = \sqrt{d} \sqrt{d} < \sqrt{a} \sqrt{d} = \sqrt{ad} \quad (3.44)$$

olmak üzere lokal asimptotik kararlıdır. (3.25) ve (3.27) şartları sırasıyla

$$d \leq kK \leq d \Rightarrow kK = d \quad (3.45)$$

$$a + (1-b)K \leq d \leq a + (1-b)k \Rightarrow K \geq \frac{a-d}{b-1} \geq k$$

(3.45)'i sağlar. Böylece,

$$0 < k = \frac{d}{K} \leq \frac{d(b-1)}{a-d}, \quad k^2 < d < K^2 \Rightarrow k < \sqrt{d} < K. \quad (3.46)$$

olur. Burada $E = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a-d}{b-1}, \frac{d(b-1)}{a-d} \right) \in [k, K] \times [k, K]$ olduğu dikkate alınır,

$$K \geq \max \left\{ \frac{a-d}{b-1}, \frac{d(b-1)}{a-d} \right\}, \quad 0 < k \leq \min \left\{ \frac{a-d}{b-1}, \frac{d(b-1)}{a-d} \right\} \quad (3.47)$$

$$kK = d, \quad k < K.$$

sonucuna varılır.

Teorem 3.5. $a > d, b > 1, e = 1$ olsun. $[k, K] \times [k, K]$ dikdörtgeni olmak üzere k ve K , (3.47) ile verilen şartları sağlasın. $E = (\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Herhangi bir (x_0, y_0) başlangıç şartı için (3.47) şartını sağlayan k ve K seçilebilir. Öyleyse $x_n, y_n \in [k, K]$ $n = 1, 2, \dots$ dir.

Durum 3.1-3 için (3.1) sisteminin dikdörtgensel aralığının belirlenebildiğini gördük. Ancak her durumda sistemler için dikdörtgensel bölgelerin belirlenmesi mümkün değildir. Bu tür durumlarda Clark ve Kulenovic (2003) ve Kulenovic ve Nurkanovic (2003)' de yapıldığı gibi monoton dönüşüm tekniği denilen bir teknik kullanılmaktadır. Şimdi bu tekniği verelim (Kulenovic ve Nurkanovic, 2003).

Tanım 3.1. (Monoton Dönüşüm Tekniği)

Verilen fark denklem sistemi,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{n+1} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n \quad (3.48)$$

formunda yazılabilir. T dönüşümü

$$T: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a+x}{b+y} \\ \frac{d+y}{e+x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer \mathbb{R}^2 de kısmi bir mertebeden tanımlanırsa T dönüşümü monoton olarak gösterilebilir. Öyleyse pozitif koni kısmi mertebede dördüncü çeyrek dairededir. Özellikle $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ için $v_1 \leq w_1$ ve $w_2 \leq v_2$ ise $v \leq w$

ve $v, w \in \mathbb{R}_+^2$ olmak üzere $v \leq w$ ve $w \leq v$ olduğu söylenir. Aynı zamanda noktalar arası eşitse eğer $v \leq w$ ve $v \neq w$ ise $v < w$ olarak tanımlanabilir. Eğer $v_1 < w_1$ ve $w_2 < v_2$ ise $v \ll w$ olarak tanımlanabilir. Eğer $\forall v, w \in \text{Int}\mathbb{R}^2$ için $v < w$ iken $f(v) \ll f(w)$ olursa dönüşümü daha güçlü monotondur. Açık bir şekilde, düzenlilik, güçlü bir monoton dönüşümün iterasyonu altında değişmez bir aralıktır. $x, y \in \text{Int}\mathbb{R}_+^2$ için T 'nin türevinin

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

şeklindeki sabit işaretleri $J(x, y)$ Jakobiyen matristen elde edilir. \mathbb{R}^2 'nin dışbükey ve değer teoremi (Clark ve Kulenovic, 2003) deki gibi T nin monoton olduğu gösterilebilir. Her bir $v \in \mathbb{R}_+^2$ için saat yönünün tersi yöndeki sayılar ve v noktası temel alınmış dört çeyrekli bölge $Q_i(v)$ $i = 1, \dots, 4$ şeklinde tanımlanabilir. Örneğin:

$Q_1(v) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : v_1 \leq x, v_2 \leq y\}$. Aşağıdaki önerme bir monoton dönüşüm sisteminin çözümlerinin monoton karakteri olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.

1) T dönüşümü monoton artan ve

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \leq T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.52)$$

dır.

2) T dönüşümü monoton artan ve

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \geq T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

olsun. O zaman

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.54)$$

olur. Burada (3.52) eşitsizliği

$$x_n \leq x_{n+1}, \quad y_n \geq y_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.55)$$

ifadesine eşittir. Yani $\{x_n\}$ artandır ve $\{y_n\}$ azalandır. (3.54) eşitsizliği

$$x_n \geq x_{n+1}, \quad y_n \leq y_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.56)$$

şeklindeki ifadeye eşittir. Yani $\{x_n\}$ azalandır ve $\{y_n\}$ artandır. (3.1) sisteminin $E = (\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası için (3.17) şartı semer noktasıdır ve Teorem (3.2)' de verildiği gibi

$$0 < (b + \bar{y} - 1)(e + \bar{x} - 1) < \bar{x} \bar{y} < (e + \bar{x} + 1)(b + \bar{y} + 1) \quad (3.57)$$

şartına eşittir.

Durum 3.4. ($b < 1, e < 1$) Bu durumda (3.1) sisteminin

$$1 - e < \bar{x} < \frac{d}{1-b} + 1 - e \quad (3.58)$$

$$1 - b < \bar{y} < \frac{a}{1-e} + 1 - b$$

şeklinde verilen $E = (\bar{x}, \bar{y})$ tek bir pozitif denge noktasına sahiptir. Bu denge noktası (3.57)'yi sağlar ve bir semer noktasıdır. Aslında (3.57)'deki ilk eşitsizlik

$$\bar{x} \bar{y} > (b + \bar{y} - 1)(e + \bar{x} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (1-b)\bar{x} + (1-e)\bar{y} - (1-b)(1-e) > 0 \quad (3.59)$$

$$\Leftrightarrow (1-b)(\bar{x} - 1 + e) + (1-e)\bar{y} > 0$$

ifadesini verir ve $b < 1$ ve $e < 1$ durumunda sağlanır. Benzer şekilde (3.57)'nin sağ tarafındaki eşitsizliğinde

$$\bar{x}\bar{y} < (b + \bar{y} + 1)(e + \bar{x} + 1) \Leftrightarrow (b + 1)(e + \bar{x} + 1) + (e + 1)\bar{y} > 0 \quad (3.60)$$

şeklinde olup, Önerme 3.1. uygulanırsa (3.51) şartı

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a + x_0}{b + y_0} \\ \frac{d + y_0}{e + x_0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \leq \frac{a + x_0}{b + y_0} \\ \frac{d + y_0}{e + x_0} \leq y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \leq \frac{a}{x_0} + 1 - b \\ x_0 \geq \frac{d}{y_0} + 1 - e \end{cases} \quad (3.61)$$

ifadesini sağlar. Böylece, $x_0 \geq \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve $y_0 \leq \frac{a}{x_0} + 1 - b$ ise $\{x_n\}$ artan $\{y_n\}$ azalandır.

Eğer, $x_0 > \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve $y_0 < \frac{a}{x_0} + 1 - b$ ise $\{x_n\}$ artan, $\{y_n\}$ azalandır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad (3.62)$$

aksi takdirde, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0$ olur. Bu ise (3.1) sisteminin $E = (\bar{x}, \bar{y})$

noktasından farklı olarak ilk çeyrekte bir denge noktasına sahip olduğunu gösterir.

Önerme (3.1) uygulanırsa, (3.53) şartı,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a + x_0}{b + y_0} \\ \frac{d + y_0}{e + x_0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \geq \frac{a + x_0}{b + y_0} \\ \frac{d + y_0}{e + x_0} \geq y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \geq \frac{a}{x_0} + 1 - b \\ x_0 \leq \frac{d}{y_0} + 1 - e \end{cases} \quad (3.63)$$

ifadesini verir. Bu durumda $\{x_n\}$ azalan ve $\{y_n\}$ artandır. Ayrıca, $x_0 = \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve

$y_0 = \frac{a}{x_0} + 1 - b$ olduğu açıktır. Eğer, $x_0 < \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve $y_0 > \frac{a}{x_0} + 1 - b$ ise $\{x_n\}$

azalan ve $\{y_n\}$ artandır. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty. \quad (3.64)$$

(3.1) sistemi ilk çeyrekte denge noktasına sahiptir. S_1 ve S_2 kümelerini aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$S_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{d}{x+e-1} \leq y \leq \frac{a}{x} + 1 - b \right\} \quad (3.65)$$

$$S_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{a}{y+b-1} \leq x \leq \frac{d}{y} + 1 - e \right\} \quad (3.66)$$

olur. Burada

$$\phi_1(x) = \frac{d}{x+e-1}, \quad \phi_2(x) = \frac{a}{x} + 1 - b \quad (3.67a)$$

$$\psi_1(y) = \frac{a}{y+b-1}, \quad \psi_2(y) = \frac{d}{y} + 1 - e \quad (3.67b)$$

seçilirse, $x > \bar{x}$, $y > \bar{y} : \phi_i(x) \in Q_4(E)$ için $\psi_i(y) \in Q_2(E)$ ($i=1,2$) olup $(x,y) \in S_1$ için $x > \bar{x} : \phi_1(x) < y < \phi_2(x) < \bar{y}$ ve $(x,y) \in S_2$ için $y > \bar{y} : \psi_1(y) < x < \psi_2(y) < \bar{x}$ dir. Sonuç olarak $S_1 \subset Q_4(E)$ ve $S_2 \subset Q_2(E)$ dir.

Teorem 3.6. S_1 ve S_2 değişmez kümelerdir.

İspat. S_1 in değişmez bir küme olduğunu ispatlamak için

$$(x_0, y_0) \in S_1 \Rightarrow (x_n, y_n) \in S_1, \quad n=1,2,\dots \quad (3.68)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. S_1 ' in tanımından,

$$(x_0, y_0) \in S_1 \Leftrightarrow d + (1-e)y_0 \leq x_0 y_0 \leq a + (1-b)x_0 \quad (3.69)$$

olur.

$$d + (1-e)y_1 \leq x_1 y_1 \leq a + (1-b)x_1 \quad (3.70)$$

olduğunu ispatı için ilk eşitsizlikte

$$d + (1-e)y_1 \leq x_1 y_1$$

$$\Leftrightarrow d + (1-e) \frac{d + y_0}{e + x_0} \leq \frac{a + x_0}{b + y_0} \cdot \frac{d + y_0}{e + x_0}$$

(3.71)

$$\Leftrightarrow (b + y_0)(d + (1-e)y_0 - x_0 y_0) + x_0(b + y_0)(d + y_0) \leq (a + x_0)(d + y_0)$$

$$\Leftrightarrow (b + y_0)(d + (1-e)y_0 - x_0 y_0) - (d + y_0)(a + (1-b)x_0 - x_0 y_0) \leq 0$$

(3.69)' dan son eşitsizlik sağlanır.

$$a + (1-b)x_1 \geq x_1 y_1$$

$$\Leftrightarrow a + (1-b) \frac{a + x_0}{b + y_0} \leq \frac{a + x_0}{b + y_0} \cdot \frac{d + y_0}{e + x_0}$$

(3.72)

$$\Leftrightarrow (e + x_0)(a + (1-b)x_0 - x_0 y_0) + y_0(a + x_0)(e + x_0) \geq (a + x_0)(d + y_0)$$

$$\Leftrightarrow (e + x_0)(a + (1-b)x_0 - x_0 y_0) - (a + x_0)(d + (1-e)y_0 - x_0 y_0) \geq 0$$

(3.69)'dan son eşitsizlik sağlanır. S_2 ' nin değişmez bir küme olduğu benzer şekilde ispatlanır. Şu ana kadar S_1 ve S_2 ' nin T dönüşümü altında değişmez olduğu ispatlandı. S_1 / E deki, her yörünge $(\infty, 0)$ da çekime sahiptir. S_2 / E deki her yörünge $(0, \infty)$ da çekicidir. Diğer bir deyişle $(\infty, 0)$ daki çekim nokta havzası Kulenovic ve Nurkanovic, (2005) ve Hess (1991)' de $\beta((\infty, 0))$ şeklinde gösterilip S_1 / E , $\beta((\infty, 0)) \supseteq S_1 / E$ içerirken S_2 / E , $\beta((0, \infty)) \supseteq S_2 / E$ içerir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.7. Kabul edelim ki $b < 1$ ve $e < 1$ olsun.

1) (3.65)' deki gibi tanımlanan S_1 kümesi (3.1)' in değişmez kümesidir ve (3.1)' in

$\{(x_n, y_n)\}$ şeklindeki her çözümü $(x_0, y_0) \in S_1 / E$ başlangıç şartıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad \beta((\infty, 0)) \supseteq S_1 / E \quad (3.73)$$

sağlar.

2) (3.66)' da tanımlanan S_2 kümesi (3.1) sisteminin değişmez bir kümesidir.(3.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü $(x_0, y_0) \in S_2 / E$ başlangıç şartıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \quad \beta((0, \infty)) \supseteq S_2 / E \quad (3.74)$$

sağlar.

Durum 3.5. ($b=1, e < 1, a > d$) Bu durumda (3.1)sisteminin $E = \left(\frac{a(1-b)}{a-d}, \frac{a-d}{1-e} \right)$

şeklinde tek bir pozitif noktası vardır. Bu denge noktası (3.17) şartını sağlar ve bu yüzden semer noktasıdır. Aslında, (3.17)' deki ilk eşitlikten,

$$\bar{x} \bar{y} = a = \sqrt{a} \sqrt{a} > \sqrt{a} \sqrt{d} = \sqrt{ad} \quad (3.75)$$

elde edilir. (3.17) ile verilen denklemin ikinci eşitliğinden,

$$\bar{x}^2 \bar{y}^2 < 4\bar{x} \bar{y} + 2a \bar{y} + 2d \bar{x} + ad$$

$$\Leftrightarrow a < 4 + 2 \frac{a-d}{1-e} + 2d \frac{1-e}{a-d} + d$$

$$\Leftrightarrow a(1-e)(a-d) < 4(1-e)(a-d) + 2(a-d)^2 + 2d(1-e)^2 + d(1-e)(a-d) \quad (3.76)$$

$$\Leftrightarrow (1-e)(a-d)^2 - 4(1-e)(a-d) < 2(a-d)^2 + 2d(1-e)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-d)^2(1+e) + 2d(1-e)^2 + 4(1-e)(a-d) > 0$$

ifadesi daima sağlanır. Şimdi Önerme (3.1)'e (3.51) şartı uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+x_0}{1+y_0} \\ \frac{d+y_0}{e+x_0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \leq \frac{a+x_0}{1+y_0} \\ \frac{d+y_0}{e+x_0} \leq y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \leq \frac{a}{x_0} \\ x_0 \geq \frac{d}{y_0} + 1 - e \end{cases} \quad (3.77)$$

$x_0 \geq \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve $y_0 \leq \frac{a}{x_0}$ olduğu durumda $\{x_n\}$ artan ve $\{y_n\}$ azalandır.

$x_0 > \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve $y_0 < \frac{a}{x_0}$ olduğu durumda ise $\{x_n\}$ artan ve $\{y_n\}$ azalandır.

Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad (3.78)$$

olup, aksi takdirde yani $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0$ ise (3.1) sistemi $\{(x_n, y_n)\}$ nin limit noktası olarak başka bir denge noktasına sahiptir. Önerme (3.1)' in (3.53) şartını gerektirir.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+x_0}{1+y_0} \\ \frac{d+y_0}{e+x_0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \geq \frac{a+x_0}{1+y_0} \\ \frac{d+y_0}{e+x_0} \geq y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \geq \frac{a}{x_0} \\ x_0 \leq \frac{d}{y_0} + 1 - e \end{cases} \quad (3.79)$$

Böylece $\{x_n\}$ artan ve $\{y_n\}$ azalandır. $x_0 = \frac{d}{y_0} + 1 - e$ ve $y_0 = \frac{a}{x_0}$ aşıkardır. $x_0 < \frac{d}{y_0} + 1 - e$

ve $y_0 > \frac{a}{x_0}$ olduğu durumda ise $\{x_n\}$ azalan ve $\{y_n\}$ artandır. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \quad (3.80)$$

aksi takdirde (3.1) sistemi $E = \left(\frac{a(1-b)}{a-d}, \frac{a-d}{1-e} \right)$ denge noktasından farklı olarak başka

bir denge noktasına sahiptir. O_1 ve O_2 kümelerini aşağıdaki gibi tanımlanır

$$O_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{d}{x+1-e} \leq y \leq \frac{a}{x} \right\} \quad (3.81)$$

$$O_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{a}{y} \leq x \leq \frac{d}{y} + 1 - e \right\} \quad (3.82)$$

ve

$$\phi_3(x) = \frac{d}{x+e-1}, \quad \phi_4(x) = \frac{a}{x}, \quad \psi_3(y) = \frac{a}{y}, \quad \psi_4(y) = \frac{d}{y} + 1 - e, \quad (3.83)$$

seçilirse $x > \bar{x}$ için $y > \bar{y} : \phi_i(x) \in Q_4(x), \psi_i(y) \in Q_2(E) (i=3,4)$ ve $(x, y) \in O_1$ için

$x > \bar{x} : \phi_3(x) < y < \phi_4(x) < \bar{y}$ ve $(x, y) \in O_2$ için $y > \bar{y} : \psi_3(y) < x < \psi_4(y) < \bar{x}$ dir.

Sonuç olarak, $O_1 \subset Q_4(E)$ ve $O_2 \subset Q_2(E)$ dir.

Önerme (3.1)'den T dönüşümü altında O_1 ve O_2 kümelerinin değişmez olduğu gösterilebilir. Ek olarak O_1/E deki her yörünge $(\infty, 0)$ aralığında çekicidir. O_2/E de $(0, \infty)$ aralığına çekicidir. Diğer bir deyişle $(\infty, 0)$ 'ın çekim noktası $O_1/E, \beta((\infty, 0)) \supseteq O_1/E$ barındırır. $(\infty, 0)$ ın çekim noktası $\beta((0, \infty))$, $O_2/E, \beta((0, \infty)) \supseteq O_2/E$ içerir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.8. Kabul edelim ki $b=1, e < 1, a > d$ olsun.

1) (3.81)' deki gibi tanımlanan O_1 kümesi , (3.1) sisteminin bir değişmezdir ve (3.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü $(x_0, y_0) \in O_1/E$ başlangıç şartıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad \beta((\infty, 0)) \supseteq O_1/E \quad (3.84)$$

sağlar.

2) (3.82)' deki gibi tanımlanan O_2 kümesi, (3.1) sisteminin bir değişmezdir ve (3.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü $(x_0, y_0) \in O_2/E$ başlangıç şartıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \quad \beta((0, \infty)) \supseteq O_2/E \quad (3.85)$$

sağlar.

Durum 3.6. ($b < 1, e = 1, a < d$) Bu durumda (3.1) sisteminin $E = \left(\frac{d-a}{1-b}, \frac{d(1-b)}{d-a} \right)$

şeklinde bir tek pozitif denge noktası vardır. Bu denge noktası (3.17) şartını sağlar ve bu yüzden semer noktasıdır. Aslında (3.17)' deki ilk eşitsizlikten

$$\bar{x} \bar{y} = d = \sqrt{d} \sqrt{d} > \sqrt{a} \sqrt{d} = \sqrt{ad} \quad (3.86)$$

olup yine ikinci eşitlikten

$$\bar{x}^2 \bar{y}^2 < 4\bar{x} \bar{y} + 2a \bar{y} + 2d \bar{x} + ad$$

$$\Leftrightarrow d < 4 + 2 \frac{d-a}{1-b} + 2a \frac{1-b}{d-a} + a$$

$$\Leftrightarrow d(1-b)(d-a) < 4(1-b)(d-a) + 2(d-a)^2 + 2a(1-b)^2 + a(1-b)(d-a) \quad (3.87)$$

$$\Leftrightarrow (1-b)(d-a)^2 - 4(1-b)(d-a) < 2(d-a)^2 + 2a(1-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (d-a)^2(1+b) + 2a(1-b)^2 + 4(1-b)(d-a) > 0$$

sonucuna varılır. Önerme (3.1)' i kullanarak Durum 3.1 ve Durum 3.2 deki gibi sonuçlar elde edilir. P_1 ve P_2 kümeleri aşağıdaki gibidir.

$$P_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{d}{x} \leq y \leq \frac{a}{x} + 1 - b \right\} \quad (3.88)$$

$$P_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{a}{y+b-1} \leq x \leq \frac{d}{y} \right\} \quad (3.89)$$

$$\phi_5(x) = \frac{d}{x}, \quad \phi_6(x) = \frac{a}{x} + 1 - b, \quad \psi_5(y) = \frac{a}{y+b-1}, \quad \psi_6(y) = \frac{d}{y} \quad (3.90)$$

$x > \bar{x}$ için $y > \bar{y} : \phi_i(x) \in Q_4(E)$, $\psi_i(y) \in Q_2(E)$ ($i=5,6$) ve $(x, y) \in P_1$ için

$x > \bar{x} : \phi_5(x) < y < \phi_6(x) < \bar{y}$ ve $(x, y) \in P_2$ için $y > \bar{y} : \psi_5(y) < x < \psi_6(y) < \bar{x}$ dir.

Sonuç olarak $P_1 \subset Q_4(E)$ ve $P_2 \subset Q_2(E)$ dir.

Önerme (3.1)'den T dönüşümü altında P_1 ve P_2 kümelerinin değişmez olduğu gösterilebilir. Ek olarak P_1/E deki her yörünge $(\infty, 0)$ aralığında çekicidir. P_2/E de $(0, \infty)$ aralığına çekicidir. Diğer bir deyişle $(\infty, 0)$ ' ın çekim noktası P_1/E , $\beta((\infty, 0)) \supseteq P_1/E$ barındırır. $(\infty, 0)$ ' ın çekim noktası $\beta((0, \infty))$, P_2/E , $\beta((0, \infty)) \supseteq P_2/E$ içerir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9. Kabul edelim ki $b < 1$, $e = 1$, $a < d$ olsun.

1) (3.88)' deki gibi tanımlanan P_1 kümesi , (3.1) sisteminin bir değişmezidir ve (3.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü $(x_0, y_0) \in P_1 / E$ başlangıç şartını sağlar.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad \beta((\infty, 0)) \supseteq P_1 / E \quad (3.91)$$

2) (3.89)' daki gibi tanımlanan P_2 kümesi, (3.1) sisteminin bir değişmezidir ve (3.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n)\}$ çözümü $(x_0, y_0) \in P_2 / E$ başlangıç şartıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \quad \beta((0, \infty)) \supseteq P_2 / E \quad (3.92)$$

sağlar.

BÖLÜM IV

ÜÇ BOYUTLU LİNEER KESİRLİ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN

GLOBAL DAVRANIŞI

4.1 GİRİŞ

$a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$ aralığındaki parametreler ve x_0, y_0, z_0 başlangıç şartları keyfi negatif olmayan reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

şeklinde bir fark denklem sistemi olsun (Kulenovic ve Nurkanovic, 2002). Lineer olmayan (4.1) fark denklem sistemi rekabete dayalı üç farklı popülasyon olarak gösterilebilir. x_n, y_n, z_n faz değişkenleri sırasıyla A, B ve C türlerinin n . kuşaktaki popülasyon boyutunu göstermek üzere $\{(x_n, y_n, z_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ dizisi popülasyonun nasıl geliştiğini gösterir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2002). Bu üç popülasyon arasındaki rekabet, her bir popülasyon için değişim fonksiyonu diğer popülasyon büyüklüklerinin birinin azalan fonksiyon olduğu şeklinde ifade edilir. Bu örnekteki rekabet, B türünün büyüklüğündeki artış A türünün büyüklüğündeki azalışa, A türünün büyüklüğündeki artış C türünün büyüklüğündeki azalışa ve C türünün büyüklüğündeki artış B türünün büyüklüğündeki azalışa karşılık gelir. Böylece (4.1) sistemi bazı türlerin periyodik rekabetini örnekler. Benzer sistemler için literatürde mevcut olan çalışmalar yine önceki bölümde verilmiştir. Daha fazla kaynak için Hess (1991), Selgrade ve Ziehe (1987) ve Smith (1998)'e bakılabilir.

Roeger ve Allen (2004) ve Roeger (2004)' de üç boyutlu sistemler üzerine çalışılmış ama global çekim sonuçları ispat edilmemiştir. Bu bölümde, (4.1) denklemi ile verilen sistem ele alınacak global davranışı incelenecektir.

4.2 Denge Noktası

(4.1) ile verilen denklem sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktaları aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\bar{x} = \frac{a + \bar{x}}{b + \bar{y}}, \quad \bar{y} = \frac{c + \bar{y}}{d + \bar{z}}, \quad \bar{z} = \frac{e + \bar{z}}{f + \bar{x}}$$

Verilen bu noktalar (4.1) denklem sistemini sağlar. Burada $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$, $\bar{z} \neq 0$ olup, yukarıda verilen birinci ifadede içler dışlar çarpımı yapılırsa $\bar{x}(b + \bar{y}) = a + \bar{x}$ elde edilir. Daha sonra, benzer ifadeler ortak paranteze alınır

$$\bar{x}\bar{y} = a + \bar{x}(1 - b)$$

olur. Her iki taraf \bar{x} ile bölünürse

$$\bar{y} = \frac{a}{\bar{x}} + (1 - b)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $\bar{y} = \frac{c + \bar{y}}{d + \bar{z}}$ ve $\bar{z} = \frac{e + \bar{z}}{f + \bar{x}}$ ifadeleri için aynı

işlemler yapılırsa sırasıyla $\bar{z} = \frac{c}{\bar{y}} + (1 - d)$ ve $\bar{x} = \frac{e}{\bar{z}} + (1 - f)$ elde edilir. Bu durumda

$\bar{x} = \frac{e}{\bar{z}} + (1 - f)$ ve $\bar{z} = \frac{c}{\bar{y}} + (1 - d)$ ifadeleri birlikte kullanılırsa

$$\bar{x} = \frac{e}{\frac{c}{\bar{y}} + (1 - d)} + (1 - f) \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{e\bar{y}}{c + \bar{y}(1 - d)} + (1 - f) \Leftrightarrow \bar{x} - (1 - f) = \frac{e\bar{y}}{c + (1 - d)\bar{y}}$$

elde edilir ki $\bar{y} = \frac{a}{\bar{x}} + (1 - b)$ ifadesi ile birlikte ele alınırsa

$$\bar{x} - (1 - f) = \frac{e\left(\frac{a}{\bar{x}} + (1 - b)\right)}{c + (1 - d)\left(\frac{a}{\bar{x}} + (1 - b)\right)}$$

olur. Bu ifadede içler dışlar çarpımı yapılır

$$\left[\bar{x} - (1 - f)\right] \left\{c + (1 - d)\left(\frac{a}{\bar{x}} + (1 - b)\right)\right\} = e\left(\frac{a}{\bar{x}} + (1 - b)\right)$$

ve her iki taraf \bar{x} ile çarpılırsa

$$\left[\bar{x} - (1 - f)\right] \left\{c\bar{x} + (1 - d)(a + \bar{x}(1 - b))\right\} = e(a + (1 - b)\bar{x})$$

elde edilir. Son ifade daha da açık olarak

$$\begin{bmatrix} c\bar{x}^2 + (1-d)a\bar{x} + (1-b)(1-d)\bar{x}^2 - (1-f)c\bar{x} - (1-d)(1-f)a \\ -(1-b)(1-d)(1-f)\bar{x} \end{bmatrix} = ea + e(1-b)\bar{x}$$

şeklinde yazılır. Küçük bir düzenleme aşağıdaki şekilde yapılırsa

$$\begin{bmatrix} [c + (1-b)(1-d)]\bar{x}^2 \\ + [(1-d)a - (1-f)c - (1-b)(1-d)(1-f) - (1-b)e]\bar{x} \\ -a[e + (1-d)(1-f)] \end{bmatrix} = 0$$

denklemini elde edilir. Burada

$$A = c + (1-b)(1-d),$$

$$B = (1-d)a - (1-f)c - (1-b)(1-d)(1-f) - (1-b)e,$$

$$C = -a[e + (1-d)(1-f)]$$

olarak seçilirse

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{4.2}$$

şeklinde ikinci derece denklem elde edilir. \bar{x} denge noktası (4.2) denklemini sağlar. (4.2) denkleminin diskriminantı $\Delta = B^2 - 4AC$ olup, A, B, C katsayıları yerlerine yazılırsa

$$\Delta = [(1-d)a - (1-f)c - (1-d)(1-b)(1-f) - (1-b)e]^2 - 4[c + (1-b)(1-d)][-a(e + (1-d)(1-b))]$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \Delta = & [(1-d)a - (1-f)c - (1-b)((1-d)(1-f) + e)a]^2 \\ & - 4[c + (1-b)(1-d)][-a(e + (1-d)(1-f))] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler sonucunda

$$\Delta = a^2(1-d)^2 + c^2(1-f)^2 + (1-b)^2[(1-d)(1-f) + e]^2 + 2ac(1-d)(1-f) \\ + 2a(1-b)(1-d)^2(1-f) + 2ae(1-b)(1-d) + 2c(1-b)(1-f)[(1-d)(1-f) + e] + 4ace$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Delta = [(1-d)a - (1-f)c - (1-b)((1-d)(1-f) + e)a]^2 + 4ace > 0$$

elde edilir. (4.2) ile verilen denklemin kökleri ise aşağıdaki şekilde verilir.

$$x_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

Bu kısımda, (4.2) denkleminin köklerinden birinin pozitif olduğu durumdaki denge noktasını (pozitif denge noktası) ele alınacaktır. (4.2) kuadratik denkleminde $\Delta > 0$ olması için yeter ve gerek şart

$$\frac{C}{A} = \frac{-a[e + (1-d)(1-f)]}{c + (1-d)(1-f)}$$

olmak üzere $\frac{C}{A} < 0$ olmasıdır. Yani kökler çarpımının sıfırdan küçük olmasıdır. Bu durumda ise

$$\frac{-a[e + (1-d)(1-f)]}{c + (1-d)(1-f)} < 0$$

olur. $a > 0$ olduğundan

$$\frac{e + (1-d)(1-f)}{c + (1-d)(1-f)} > 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. Eğer,

$$b, d, f \in [1, \infty) \text{ veya } b, d, f \in (0, 1) \quad (4.4)$$

ise (4.3) denklemi ile verilen şart sağlanır. Benzer şekilde, \bar{y} ve \bar{z} için pozitif bir çözüme sahip olan (4.1) sistemi (4.4) şartını sağlar. Yani (4.1) denklemi ile verilensisteminin tek bir pozitif denge noktası vardır. Böylece tek bir pozitif denge

noktasına sahip olan (4.1) sistemi aşağıdaki şartları sağlar (Kulenovic ve Nurkanovic, 2005).

Durum 4.1. $b > 1, d > 1, f > 1$:

$$\left. \begin{array}{l} 1-d < 0 \\ 1-f < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1-d)(1-f) > 0 \quad \text{ve} \quad \left. \begin{array}{l} 1-b < 0 \\ 1-d < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1-d)(1-b) > 0$$

olup, (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.2. i) $b = 1, d > 1, f > 1$:

$$1-b = 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-b) > 0$$

ile (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.2. ii) $d = 1, b > 1, f > 1$:

$$1-d = 0, \quad (1-d)(1-b) = 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-f) = 0$$

için (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.2. iii) $f = 1, b > 1, d > 1$:

$$1-f = 0, \quad (1-f)(1-d) = 0 \quad \text{ve} \quad (1-b)(1-d) > 0$$

ile (4.3) denkleminin sağlandığı görülür.

Durum 4.3. i) $b = d = 1, f > 1$:

$$(1-d)(1-b) = 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-f) = 0$$

olduğundan (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.3. ii) $d = f = 1, b > 1$:

$$1-d = 0 \quad \text{ve} \quad 1-f = 0$$

$$(1-d)(1-b) = 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-f) = 0$$

olup, (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.3. iii) $b = f = 1, d > 1$:

$$(1-d)(1-b) = 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-f) = 0$$

için (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.4. $b = d = f = 1$:

$$1-b = 0, 1-d = 0 \quad \text{ve} \quad 1-f = 0$$

$$(1-b)(1-d) = 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-f) = 0$$

ile (4.3) denklemi sağlanır.

Durum 4.5. $b < 1, d < 1, f < 1$:

$$1-b > 0, 1-d > 0 \quad \text{ve} \quad 1-f > 0$$

$$(1-b)(1-d) > 0 \quad \text{ve} \quad (1-d)(1-f) > 0$$

olduğundan (4.3) denklemi sağlanır.

4.3 Lineerleştirilebilir Kararlılık Analizi

$$f(x, y, z) = \frac{a+x}{b+y}, \quad g(x, y, z) = \frac{c+y}{d+z}, \quad h(x, y, z) = \frac{e+z}{f+x} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n, z_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n, z_n), \quad z_{n+1} = h(x_n, y_n, z_n) \quad (4.5)$$

(4.1) denklemi ile verilen sistem, yukarıda (4.5) formundaki genel bir sistemin bir özel durumudur. (4.1) denklem sisteminin $E = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktasındaki lokal asimptotik kararlılığını belirlemek için E noktasındaki

$$T(x, y, z) = \left(\frac{a+x}{b+y}, \frac{c+y}{d+z}, \frac{e+z}{f+x} \right)$$

dönüşümüne karşılık gelen jakobiyen matris

$$J_T = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix}$$

şeklinde olup, E denge noktasındaki hesaplamalar yapılırsa

$$J_T(E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b+\bar{y}} & -\frac{\bar{x}}{b+\bar{y}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d+\bar{z}} & -\frac{\bar{y}}{d+\bar{z}} \\ -\frac{\bar{z}}{f+\bar{x}} & 0 & \frac{1}{f+\bar{x}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. $I_{3 \times 3}$ birim matris olmak üzere, $\det(J_T(E) - \lambda I) = 0$ ifadesi kullanılırsa

$$\det(J_T(E) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} f_x - \lambda & f_y & f_z \\ g_x & g_y - \lambda & g_z \\ h_x & h_y & h_z - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

dır. Burada $f_z = 0$, $g_x = 0$ ve $h_y = 0$ olduğundan

$$\det(J_T(E) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} f_x - \lambda & f_y & 0 \\ 0 & g_y - \lambda & g_z \\ h_x & 0 & h_z - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

olur. Burada $r = f_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + g_y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + h_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ olmak üzere açık bir şekilde

$$r = \frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} \quad \text{ile} \quad yazılır. \quad s = -f_x g_y - f_x h_z - g_y h_z + g_z h_y + g_x f_y + f_z h_x$$

ifadesinden sıfır olan terimler yerlerine yazılırsa, $s = -f_x g_y - f_x h_z - g_y h_z$ olup bu ise

$$s = -\frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} - \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} - \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})} \quad \text{şeklinde elde edilir. Benzer}$$

işlemler $t = f_x g_y h_z - f_x g_z h_y - f_y g_x h_z + f_y g_z h_x + f_z g_x h_y - f_z g_y h_x$ ifadesi için kullanılırsa,

$$\text{önce } t = f_x g_y h_z + f_y g_z h_x \text{ halini alır. Bu ifade ise } t = \frac{1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z}}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} \text{ şeklinde elde}$$

edilir. İkinci bölümden de biliyoruz ki Jakobiyen matrisin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \quad \text{şeklinde verilir. Bu durumda, } E = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ noktasındaki lokal}$$

asimptotik kararlılık Teorem 2.6 kullanılabilir. Burada, Teorem 2.6' yı tekrar ifade

ederek, ispatı açık bir şekilde verilen sistem için yapalım.

Teorem 4.1. (4.1) ile verilen sistemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \quad (4.6)$$

ile verilsin. Bu durumda,

a) Eğer (4.6) denkleminin bütün çözümleri 1 den küçük oluyorsa yani $|\lambda| < 1$ ise $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b) Eğer (4.6) denkleminin çözümlerinden en az biri 1 den büyükse $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası kararsızdır.

c) (4.6) denkleminin bütün çözümlerinin 1 den küçük olması için yeter ve gerek şart

$$|r+t| < 1-s, \quad |r-3t| < 3+s, \quad t^2 - s - rt < 1$$

yani

$$|\lambda_{1,2,3}| < 1 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} |r+t| < 1-s \\ |r-3t| < 3+s \\ t^2 - s - rt < 1 \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

olmasıdır.

İspat. (4.7) şartı ele alınırsa,

$$1) |r+t| < 1-s \quad (4.8)$$

olup, mutlak değer özelliğinden

$$r+t < 1-s \quad (4.9a)$$

ve

$$r+t > -1-s \quad (4.9b)$$

olur. (4.8) de r, t, s ifadelerine karşılık gelen değerler yerine yazılırsa

$$\left| \frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} + \frac{1-\bar{x}\bar{y}\bar{z}}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} \right|$$

$$< 1 + \frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} + \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} + \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

elde edilir. İlk olarak (4.9a) durumu ele alınırsa yani;

i) $r+t < 1-s$, r, t, s değerleri bilindiğinden bu ifadede yerine yazılırsa

$$\frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} + \frac{1-\bar{x}\bar{y}\bar{z}}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$< 1 + \frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} + \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} + \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

elde edilir. Bu ifadede her iki tarafın paydası eşitlenirse yeni ifade

$$\left[\frac{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} + \frac{(b+\bar{y})(f+\bar{x})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} + \frac{(b+\bar{y})(d+\bar{z})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} \right]$$

$$+ \frac{(1-\bar{x}\bar{y}\bar{z})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$< \left[\frac{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} + \frac{(f+\bar{x})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} + \frac{(d+\bar{z})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} \right]$$

$$+ \frac{(b+\bar{y})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

şeklini alır. Paydası eşitlenen bu ifade toplanırsa

$$\frac{(d+\bar{z})(f+\bar{x}) + (b+\bar{y})(f+\bar{x}) + (b+\bar{y})(d+\bar{z}) + (1-\bar{x}\bar{y}\bar{z})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$< \frac{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x}) + (f+\bar{x}) + (d+\bar{z}) + (b+\bar{y})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

elde edilir. Bu son ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(d+\bar{z})(f+\bar{x}) + (b+\bar{y})(f+\bar{x}) + (b+\bar{y})(d+\bar{z}) + (1-\bar{x}\bar{y}\bar{z})$$

$$< (b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x}) + (f+\bar{x}) + (d+\bar{z}) + (b+\bar{y})$$

elde edilir. Burada benzer ifadeler ortak paranteze alınırsa

$$\left[\begin{array}{l} (d + \bar{z})(f + \bar{x})(1 - b - \bar{y}) + (1 - b - \bar{y}) - (f + \bar{x})(1 - b - \bar{y}) \\ -(d + \bar{z})(1 - b - \bar{y}) \end{array} \right] < \bar{x} \bar{y} \bar{z}$$

sonucuna varılır. Bu ise daha basit olarak

$$(1 - b - \bar{y})(1 - d - \bar{z})(1 - f - \bar{x}) < \bar{x} \bar{y} \bar{z} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır.

$\bar{x} = \frac{a + \bar{x}}{b + \bar{y}}$ olduğundan bu ifadede içler dışlar çarpımı yapılır ve benzer ifadeler ortak

paranteze alınırsa $\bar{x}(b + \bar{y}) = a + \bar{x} \Rightarrow \bar{x}(b + \bar{y} - 1) = a$ elde edilir. Son ifadenin her iki tarafı \bar{x} ile bölünürse

$$(1 - b - \bar{y}) = -\frac{a}{\bar{x}} \quad (4.11a)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde, $\bar{y} = \frac{c + \bar{y}}{d + \bar{z}}$ ve $\bar{z} = \frac{e + \bar{z}}{f + \bar{x}}$ için gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(1 - d - \bar{z}) = -\frac{c}{\bar{y}} \quad (4.11b)$$

ve

$$(1 - f - \bar{x}) = -\frac{e}{\bar{z}} \quad (4.11c)$$

elde edilir. (4.11a-c) ifadeleri (4.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(-\frac{a}{\bar{x}}\right)\left(-\frac{c}{\bar{y}}\right)\left(-\frac{e}{\bar{z}}\right) < \bar{x} \bar{y} \bar{z} \Leftrightarrow -ace < (\bar{x} \bar{y} \bar{z})^2$$

olup, eşitsizlik daima sağlanır.

ii) $r + t > -1 - s$ durumu için, (i) deki bu ifadede bilinen değerler yerine yazılırsa

$$\frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} + \frac{1-\bar{x}\bar{y}\bar{z}}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$> -1 - \frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} - \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} - \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

elde edilir. Bu ifadede her iki tarafın paydası eşitlenip toplanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(d+\bar{z})(f+\bar{x}) + (b+\bar{y})(f+\bar{x}) + (b+\bar{y})(d+\bar{z}) + (1-\bar{x}\bar{y}\bar{z})$$

$$> -(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x}) - (f+\bar{x}) - (d+\bar{z}) - (b+\bar{y})$$

elde edilir. Son ifadede benzer terimler ortak paranteze alınır

$$(d+\bar{z})(f+\bar{x})(1+b+\bar{y}) + (1+b+\bar{y}) + (f+\bar{x})(1+b+\bar{y}) + (d+\bar{z})(1+b+\bar{y}) > \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

olur. Bu ifade basitçe

$$(1+b+\bar{y})(1+d+\bar{z})(1+f+\bar{x}) > \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

şeklinde yazılır ve dolayısıyla eşitsizlik daima sağlanır.

$$2) |r-3t| < 3+s \quad (4.12)$$

şartı için $r-3t < 3+s$ ve $r-3t > -3-s$ olup r, s, t değerleri (4.12) de yerlerine yazılırsa

$$\left| \frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} + \frac{3-3\bar{x}\bar{y}\bar{z}}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})} \right|$$

$$< 3 - \frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} - \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} - \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

elde edilir.

i) $r-3t < 3+s$ durumu için

$$\frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} + \frac{3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$< 3 - \frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} - \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} - \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

olup, yine burada da paydalar eşitlenip terimler toplanırsa

$$\frac{(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(d+\bar{z})+(3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3)}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$< \frac{3(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})-(f+\bar{x})-(d+\bar{z})-(b+\bar{y})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

yani

$$\frac{(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(d+\bar{z})+(3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3)}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$< \frac{3(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})-(f+\bar{x})-(d+\bar{z})-(b+\bar{y})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

son ifadede basit bir düzenleme yapılırsa

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3 < 3(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})-(d+\bar{z})(f+\bar{x})$$

$$-(b+\bar{y})(d+\bar{z})-(b+\bar{y})(f+\bar{x})-(f+\bar{x})-(b+\bar{y})-(d+\bar{z})$$

elde edilir. Benzer terimler ortak paranteze alınır

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} < (\bar{y}+b-1)(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(\bar{z}+d-1)(b+\bar{y})(f+\bar{x})$$

$$+(\bar{x}+f-1)(b+\bar{y})(d+\bar{z})-(\bar{x}+f-1)-(\bar{y}+b-1)-(\bar{z}+d-1)$$

ya da

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} < (\bar{x}+f-1)[(b+\bar{y})(d+\bar{z})-1]+(\bar{y}+b-1)[(d+\bar{z})(f+\bar{x})-1]$$

(4.13)

$$+(\bar{z}+d-1)[(b+\bar{y})(f+\bar{x})-1]$$

şeklinde yazılabilir. (4.13)' de $b \geq 1$, $d \geq 1$ ve $f \geq 1$ için eşitsizliğin sağlandığı görülür. Bunun için

$$0 < bd-1+b\bar{z}+d\bar{y}$$

ifadesinin her iki yanına $\bar{y}\bar{z}$ ifadesi eklenip ortak çarpan parantezine alınırsa

$$\bar{y}\bar{z} < (b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1$$

Son denklem \bar{x} ile çarpılır ve düzenlenirse

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} < \bar{x}[(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1] \leq (\bar{x} + f - 1)[(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1]$$

elde edilir. Benzer düzenlemeler

$$0 < df - 1 + d\bar{x} + f\bar{z}$$

ifadesi için de yapılırsa

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} < \bar{y}[(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - 1] \leq (\bar{y} + b - 1)[(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - 1]$$

sonucuna varılır.

$$0 < bf - 1 + f\bar{y} + f\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}\bar{y} < df - 1 + d\bar{x} + f\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}\bar{y} < (b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z} < \bar{z}[(b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1] \leq (\bar{z} + b - 1)[(b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1]$$

olup

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} < (\bar{x} + f - 1)[(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1]$$

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} < (\bar{y} + b - 1)[(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - 1]$$

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} < (\bar{z} + d - 1)[(b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1]$$

şeklinde eşitsizlikler elde edilir.

$\bar{x} = \frac{a + \bar{x}}{b + \bar{y}}$ ifadesi içler dışlar çarpımı ile $\bar{x}(b + \bar{y}) = a + \bar{x}$ şeklinde olur. Buradan

gerekli düzenleme yapılırsa

$$(\bar{y} + b - 1) = \frac{a}{\bar{x}} \tag{4.14a}$$

elde edilir. $\bar{y} = \frac{c + \bar{y}}{d + \bar{z}}$ ifadesinden

$$(\bar{z} + d - 1) = \frac{c}{\bar{y}} \quad (4.14b)$$

elde edilir. Son olarak $\bar{z} = \frac{e + \bar{z}}{f + \bar{x}}$ ifadesinden

$$(f + \bar{x} - 1) = \frac{e}{\bar{z}} \quad (4.14c)$$

sonucuna varılır. (4.14a-c) denklemleri (4.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} < \frac{e}{\bar{z}}[(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1] + \frac{a}{\bar{x}}[(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - 1] + \frac{c}{\bar{y}}[(b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1]$$

elde edilip bu eşitsizlik düzenlenirse

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} < \frac{a}{\bar{x}}(d + \bar{z})(f + \bar{x}) + \frac{c}{\bar{y}}(b + \bar{y})(f + \bar{x}) + \frac{e}{\bar{z}}(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - \frac{a}{\bar{x}} - \frac{c}{\bar{y}} - \frac{e}{\bar{z}} \quad (4.15)$$

olur. $\bar{x} = \frac{a + \bar{x}}{b + \bar{y}}$ olup bu ifadede içler dışlar çarpımı yapırsa $\bar{x}(b + \bar{y}) = a + \bar{x}$ ve $(b + \bar{y})$

ifadesi yalnız bırakılırsa

$$(b + \bar{y}) = \frac{a + \bar{x}}{\bar{x}} \quad (4.16a)$$

elde edilir. Aynı şekilde $\bar{y} = \frac{c + \bar{y}}{d + \bar{z}}$ ve $\bar{z} = \frac{e + \bar{z}}{f + \bar{x}}$ için benzer düzenlemeler yapırsa

$$(d + \bar{z}) = \frac{c + \bar{y}}{\bar{y}} \quad (4.16b)$$

ve

$$(f + \bar{x}) = \frac{e + \bar{z}}{\bar{z}} \quad (4.16c)$$

elde edilir. (4.16a-c) denklemleri (4.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} < \frac{a}{\bar{x}}\left(\frac{c + \bar{y}}{\bar{y}}\right)\left(\frac{e + \bar{z}}{\bar{z}}\right) + \frac{c}{\bar{y}}\left(\frac{a + \bar{x}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{e + \bar{z}}{\bar{z}}\right) + \frac{e}{\bar{z}}\left(\frac{a + \bar{x}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{c + \bar{y}}{\bar{y}}\right) - \frac{a}{\bar{x}} - \frac{c}{\bar{y}} - \frac{e}{\bar{z}}$$

elde edilir. Burada paydası eşit olan terimler toplanırsa

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} < \frac{a(c+\bar{y})(e+\bar{z})+c(a+\bar{x})(e+\bar{z})+e(a+\bar{x})(c+\bar{y})-a\bar{y}\bar{z}-c\bar{x}\bar{z}-e\bar{x}\bar{z}}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}$$

ve gerekli düzenleme yapılsa

$$3(\bar{x}\bar{y}\bar{z})^2 < a(c+\bar{y})(e+\bar{z})+c(a+\bar{x})(e+\bar{z})+e(a+\bar{x})(c+\bar{y})-a\bar{y}\bar{z}-c\bar{x}\bar{z}-e\bar{x}\bar{z}$$

denklemini elde edilir. Son denklem daha açık olarak

$$3(\bar{x}\bar{y}\bar{z})^2 < ace+ac\bar{z}+ae\bar{y}+a\bar{y}\bar{z}+ace+ac\bar{z}+ce\bar{x}+c\bar{x}\bar{z}+ace+ae\bar{y}+ac\bar{x}+a\bar{x}\bar{y}-a\bar{y}\bar{z}-e\bar{x}\bar{y}-c\bar{x}\bar{z}$$

şeklinde olup,

$$3(\bar{x}\bar{y}\bar{z})^2 < 3ace+2ac\bar{z}+2ae\bar{y}+2ce\bar{x} \quad (4.17)$$

denklemini elde edilir.

ii) $r-3t > -3-s$ durumu için de bilinen r, t, s değerleri yerine yazılırsa

$$\frac{1}{b+\bar{y}} + \frac{1}{d+\bar{z}} + \frac{1}{f+\bar{x}} + \frac{3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$> -3 + \frac{1}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})} + \frac{1}{(b+\bar{y})(f+\bar{x})} + \frac{1}{(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

son ifadede paydalar eşitlenir ve terimler toplanırsa

$$\frac{(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(d+\bar{z})+3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

$$> \frac{-3(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(f+\bar{x})+(d+\bar{z})+(b+\bar{y})}{(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})}$$

olup elde edilen bu ifadede sadeleştirme yapılsa

$$(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(f+\bar{x})+(b+\bar{y})(d+\bar{z})+3\bar{x}\bar{y}\bar{z}-3$$

$$> -3(b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x})+(f+\bar{x})+(d+\bar{z})+(b+\bar{y})$$

olur ki son ifadenin benzer terimler ortak paranteze alınırsa

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} > -(d+\bar{z})(f+\bar{x})(b+\bar{y}+1) - (b+\bar{y})(f+\bar{x})(d+\bar{z}+1) \\ - (b+\bar{y})(d+\bar{z})(f+\bar{x}+1) + (b+\bar{y}+1) + (d+\bar{z}+1) + (f+\bar{x}+1)$$

ve bu ifade üzerinde düzenleme yapılırsa sonuç olarak

$$3\bar{x}\bar{y}\bar{z} > (b+\bar{y}+1)[1-(d+\bar{z})(f+\bar{x})] + (d+\bar{z}+1)[1-(b+\bar{y})(f+\bar{x})] \\ + (f+\bar{x}+1)[1-(b+\bar{y})(d+\bar{z})] \quad (4.18)$$

elde edilir.

$$\bar{x} = \frac{a+\bar{x}}{b+\bar{y}} \text{ olduğundan bu ifadede içler dışlar çarpımı yapılırsa } \bar{x}(b+\bar{y}) = a+\bar{x} \text{ elde}$$

edilir. Son ifadenin her iki tarafı \bar{x} ile bölünürse

$$(b+\bar{y}) = \frac{a}{\bar{x}} + 1 \quad (4.19a)$$

$$\text{olur. } \bar{y} = \frac{c+\bar{y}}{d+\bar{z}} \text{ ve } \bar{z} = \frac{e+\bar{z}}{f+\bar{x}} \text{ ifadeleri için de benzer düzenlemeler yapılırsa}$$

$$(d+\bar{z}) = \frac{c}{\bar{y}} + 1 \quad (4.19b)$$

ve

$$(f+\bar{x}) = \frac{e}{\bar{z}} + 1 \quad (4.19c)$$

sonuçlarına ulaşılır. Elde edilen (4.19a-c) aşağıdaki ifadelerde yerine yazılırsa ifadelerin sağ tarafındaki sonuçlar elde edilir.

$$1-(d+\bar{z})(f+\bar{x}) < 0 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{c}{\bar{y}}+1\right)\left(\frac{e}{\bar{z}}+1\right)$$

$$1-(b+\bar{y})(d+\bar{z}) < 0 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{a}{\bar{x}}+1\right)\left(\frac{c}{\bar{y}}+1\right)$$

$$1 - (f + \bar{x})(b + \bar{y}) < 0 \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{e}{z} + 1\right)\left(\frac{a}{x} + 1\right)$$

olduğundan (4.18) eşitsizliğinin sağ tarafı negatifken bu eşitsizlik daima sağlanacaktır.

3) $t^2 - s - rt < 1$ için r, s, t değerleri yerine yazılırsa

$$\left[\begin{aligned} & \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})^2}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} + \frac{1}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})} + \frac{1}{(b + \bar{y})(f + \bar{x})} + \frac{1}{(d + \bar{z})(f + \bar{x})} \\ & - \frac{\left(\frac{1}{b + \bar{y}} + \frac{1}{d + \bar{z}} + \frac{1}{f + \bar{x}} \right) (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})} \end{aligned} \right] < 1$$

elde edilir. Bu ifadede paydalar eşitlenirse

$$\left[\begin{aligned} & \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})^2}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} + \frac{(f + \bar{x})}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})} + \frac{(d + \bar{z})}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})} \\ & + \frac{(b + \bar{y})}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})} \\ & - \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})(f + \bar{x})} - \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})} - \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})}{(b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})^2} \end{aligned} \right] < 1$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\left[\begin{aligned} & \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})^2}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} + \frac{(b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})^2}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} + \frac{(b + \bar{y})(d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} \\ & + \frac{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})(f + \bar{x})}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} - \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})(d + \bar{z})(f + \bar{x})}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} - \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})(b + \bar{y})(f + \bar{x})}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} \\ & - \frac{(1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})(b + \bar{y})(d + \bar{z})}{(b + \bar{y})^2 (d + \bar{z})^2 (f + \bar{x})^2} \end{aligned} \right] < 1$$

olup paydası eşit olan ifadeler toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\left[\begin{array}{l} (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})^2 + (b + \bar{y})(d + \bar{z})(f + \bar{x})^2 + (b + \bar{y})(d + \bar{z})^2(f + \bar{x}) \\ + (b + \bar{y})^2(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})(b + \bar{y})(f + \bar{x}) \\ - (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})(b + \bar{y})(d + \bar{z}) \end{array} \right]$$

$$< (b + \bar{y})^2(d + \bar{z})^2(f + \bar{x})^2$$

elde edilir. Son ifadede benzer terimler ortak paranteze alınırsa

$$\left[\begin{array}{l} (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})^2 + (d + \bar{z})(f + \bar{x})[(b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1] \\ + (b + \bar{y})(f + \bar{x})[(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1] + (b + \bar{y})(d + \bar{z})[(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - 1] \\ + (d + \bar{z})(f + \bar{x})\bar{x} \bar{y} \bar{z} + (b + \bar{y})(f + \bar{x})\bar{x} \bar{y} \bar{z} + (b + \bar{y})(d + \bar{z})\bar{x} \bar{y} \bar{z} \end{array} \right]$$

$$< (b + \bar{y})^2(d + \bar{z})^2(f + \bar{x})^2$$

elde edilir. Buradan

$$\left[\begin{array}{l} (1 - \bar{x} \bar{y} \bar{z})^2 + (d + \bar{z})(f + \bar{x})[(b + \bar{y})(f + \bar{x}) - 1 + \bar{x} \bar{y} \bar{z}] \\ + (b + \bar{y})(f + \bar{x})[(b + \bar{y})(d + \bar{z}) - 1 + \bar{x} \bar{y} \bar{z}] \\ + (b + \bar{y})(d + \bar{z})[(d + \bar{z})(f + \bar{x}) - 1 + \bar{x} \bar{y} \bar{z}] \end{array} \right] < (b + \bar{y})^2(d + \bar{z})^2(f + \bar{x})^2 \quad (4.20)$$

sonucuna varılır. Sonuç olarak (4.13) veya (4.17) şartının her ikisi ve (4.20) şartı sağlanıyorsa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir. Bu da ispattır.

Teorem 4.2. Eğer (4.20) yada (4.13) veya (4.17) şartlarının her ikisi sağlanırsa (4.1) sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer,

$$b \geq 1, \quad d \geq 1, \quad f \geq 1 \quad (4.21)$$

ise (4.1) sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. İspat için (4.21) ile verilen şartların (4.20) ile verilen denklemi sağladığını

göstermek yeterli olacaktır. (4.20) şartı

$$\left[\begin{array}{l} (b+y)^2(d+z)^2(f+x)^2 - (1-xyz)^2 - (d+z)(f+x)[(b+y)(f+x)-1+xyz] \\ -(b+y)(f+x)[(b+y)(d+z)-1+xyz] - (b+y)(d+z)[(d+z)(f+x)-1+xyz] \end{array} \right] > 0$$

şeklinde olup, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left[\begin{array}{l} y^2 z^2 f^2 + b^2 z^2 x^2 + y^2 d^2 x^2 + xyz + byd^2 x^2 + byz^2 x^2 + byd zx^2 + y^2 d^2 fx \\ + y^2 f^2 dz + b^2 z^2 fx + y^2 z^2 fx + yz^2 fx + y^2 dzfx + y^2 dzx^2 + b^2 dzx^2 + byz^2 f^2 \\ (bd-1)(fd-1)(bf-1) + yx^2 d(bf-1) + x^2 yz^2 (b-1) + yx^2 z(bd-1) \\ + 2bdzx(bf-1) + 2bdyx(df-1) + y^2 dx(df-1) + y^2 zf(df-1) \\ + bz^2 x(bf-1) + xyzbf(d-1) + xyzbd(f-1) + xyzb(df-1) + 2xyzd(bf-1) \\ + 2xyzd(bf-1) + 2xyzf(bd-1) + bx^2 d(bd-1) + bz^2 f(bf-1) + y^2 z^2 x(f-1) \\ + xyz^2 f(b-1) + x^2 yzb(d-1) + yz^2 x(bf-1) + bz^2 xy(f-1) + y^2 df(df-1) \\ + y^2 zx(df-1) + y^2 zxf(d-1) + y^2 zxd(f-1) + x^2 y^2 z(d-1) + bx^2 z(bd-1) \\ + yz^2 f(bf-1) + 2ydzf(bf-1) + x^2 yzd(b-1) + xyz(df-1)(b-1) \\ + yf(df-1)(bd-1) + bz(bf-1)(df-1) + zf(bf-1)(bd-1) \\ + dy(df-1)(bf-1) + bx(bd-1)(fd-1) + dx(bd-1)(bf-1) \\ + xz(1-b^2 + 2b^2 fd - 2bf) + xy(1-d^2 + 2bfd^2 - 2fd) \\ + zy(1-f^2 + 2bdf^2 - 2bf) \end{array} \right] > 0$$

elde edilir. Yukarıdaki bütün terimlerin toplamı son üç toplam hariç negatif değildir veya her ikisi de pozitiftir. Eğer (4.21) şartı sağlanırsa son üç toplamın negatif olmadığı gösterilebilir. Bu ise aşağıdaki şekilde açıklanır. Birinci toplam için,

$$\begin{aligned} & xz(1-b^2+2b^2fd-2bf) \\ & \geq xz(1-b^2+2b^2f-2bf) = xz[1-b^2+2bf(b-1)] \\ & = xz(b-1)[2bf-(b+1)] \geq xz(b-1)(2b-b-1) = xz(b-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

olur. İkinci toplam için:

$$\begin{aligned} & xy(1-d^2+2bfd^2-2fd) \\ & \geq xy(1-d^2+2fd^2-2fd) = xy[1-d^2+2df(d-1)] \\ & = xy(d-1)[2df-(d+1)] \geq xy(d-1)(2d-d-1) = xy(d-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Üçüncü toplam için ,

$$\begin{aligned} & zy(1-f^2+2bdf^2-2bf) \\ & \geq zy(1-f^2+2bf^2-2bf) = zy(f-1)(2bf-f-1) \\ & \geq zy(f-1)(2f-f-1) = zy(f-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

4.4 Global Çekim Sonuçları

Bu bölümde, (4.1) denklem sisteminin denge noktalarının global çekim sonuçları elde edilecektir. İki boyutlu denklem sistemleri için benzer sonuçları Kulenovic ve Nurkanovic (2002), Kulenovic ve Nurkanovic (2005)' de tartışmışlardır.

Teorem 4.3. $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$ birer aralık $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ olmak üzere

$$f : B \rightarrow [a_1, b_1], \quad g : B \rightarrow [a_2, b_2], \quad h : B \rightarrow [a_3, b_3],$$

ile tanımlı, sürekli f, g ve h fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlarlar.

a) $\forall (x, y, z) \in B$ için $f(x, y, z)$ fonksiyonu x ve z noktasında artan y noktasında azalan,

$\forall (x, y, z) \in B$ için $g(x, y, z)$ fonksiyonu x ve y noktasında artan z noktasında azalan,

$\forall (x, y, z) \in B$ için $h(x, y, z)$ fonksiyonu y ve z noktasında artan ve x noktasında azalandır.

$$m_1 = f(m_1, M_2, m_3), \quad M_1 = f(M_1, m_2, M_3)$$

$$\mathbf{b)} \quad m_2 = g(m_1, m_2, M_3) \quad M_2 = g(M_1, M_2, m_3) \quad (4.22)$$

$$m_3 = h(M_1, m_2, m_3) \quad M_3 = h(m_1, M_2, M_3)$$

Eğer, (4.22) sisteminin bir çözümü varsa $m_1 = M_1, m_2 = M_2, m_3 = M_3$ olur. (4.5)

sisteminin $(x_0, y_0, z_0) \in B$ noktasındaki her çözümü $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in B$ denge noktasına yakınsar.

İspat.

$$m_1^{(0)} = a_1, \quad m_2^{(0)} = a_2, \quad m_3^{(0)} = a_3,$$

$$M_1^{(0)} = b_1, \quad M_2^{(0)} = b_2, \quad M_3^{(0)} = b_3,$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ şeklinde tanımlansın.

$$m_1^{(i)} = f(m_1^{(i-1)}, M_2^{(i-1)}, m_3^{(i-1)}), \quad M_1^{(i)} = f(M_1^{(i-1)}, m_2^{(i-1)}, M_3^{(i-1)}),$$

$$m_2^{(i)} = g(m_1^{(i-1)}, m_2^{(i-1)}, M_3^{(i-1)}), \quad M_2^{(i)} = g(M_1^{(i-1)}, M_2^{(i-1)}, m_3^{(i-1)}), \quad (4.23)$$

$$m_3^{(i)} = h(M_1^{(i-1)}, m_2^{(i-1)}, m_3^{(i-1)}), \quad M_3^{(i)} = h(m_1^{(i-1)}, M_2^{(i-1)}, M_3^{(i-1)}).$$

B aralığının değişmezliği kullanılırsa:

$$m_1^{(0)} \leq m_1^{(1)}, \quad m_2^{(0)} \leq m_2^{(1)}, \quad m_3^{(0)} \leq m_3^{(1)},$$

$$M_1^{(0)} \geq M_1^{(1)}, \quad M_2^{(0)} \geq M_2^{(1)}, \quad M_3^{(0)} \geq M_3^{(1)},$$

elde edilir. f, g ve h fonksiyonlarının monotonluğunu ile:

$$m_1^{(1)} = f(m_1^{(0)}, M_2^{(0)}, m_3^{(0)}) \leq f(m_1^{(1)}, M_2^{(1)}, m_3^{(1)}) = m_1^{(2)},$$

$$m_2^{(1)} = g(m_1^{(0)}, m_2^{(0)}, M_3^{(0)}) \leq g(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, M_3^{(1)}) = m_2^{(2)},$$

$$m_3^{(1)} = h(M_1^{(0)}, m_2^{(0)}, m_3^{(0)}) \leq h(M_1^{(1)}, m_2^{(1)}, m_3^{(1)}) = m_3^{(2)},$$

$$M_1^{(1)} = f(M_1^{(0)}, m_2^{(0)}, M_3^{(0)}) \geq f(M_1^{(1)}, m_2^{(1)}, M_3^{(1)}) = M_1^{(2)},$$

$$M_2^{(1)} = g(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, m_3^{(0)}) \geq g(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, m_3^{(1)}) = M_2^{(2)},$$

$$M_3^{(1)} = h(m_1^{(0)}, M_2^{(0)}, M_3^{(0)}) \geq h(m_1^{(1)}, M_2^{(1)}, M_3^{(1)}) = M_3^{(2)}.$$

elde edilir. Tümevarım prensibi: $i = 0, 1, 2, \dots$ için

$$a_1 = m_1^{(0)} \leq m_1^{(1)} \leq \dots \leq m_1^{(i)} \leq \dots \leq M_1^{(i)} \leq \dots \leq M_1^{(1)} \leq M_1^{(0)} = b_1,$$

$$a_2 = m_2^{(0)} \leq m_2^{(1)} \leq \dots \leq m_2^{(i)} \leq \dots \leq M_2^{(i)} \leq \dots \leq M_2^{(1)} \leq M_2^{(0)} = b_2,$$

$$a_3 = m_3^{(0)} \leq m_3^{(1)} \leq \dots \leq m_3^{(i)} \leq \dots \leq M_3^{(i)} \leq \dots \leq M_3^{(1)} \leq M_3^{(0)} = b_3.$$

elde edilir.

$$m_1^{(0)} \leq x_0 \leq M_1^{(0)}, \quad m_2^{(0)} \leq y_0 \leq M_2^{(0)}, \quad m_3^{(0)} \leq z_0 \leq M_3^{(0)}.$$

f, g ve h fonksiyonlarının monotonluğu ile:

$$m_1^{(1)} = f(m_1^{(0)}, M_2^{(0)}, m_3^{(0)}) \leq x_1 = f(x_0, y_0, z_0) \leq f(M_1^{(0)}, m_2^{(0)}, M_3^{(0)}) = M_1^{(1)},$$

$$m_2^{(1)} = g(m_1^{(0)}, m_2^{(0)}, M_3^{(0)}) \leq y_1 = g(x_0, y_0, z_0) \leq g(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, m_3^{(0)}) = M_2^{(1)},$$

$$m_3^{(1)} = h(M_1^{(0)}, m_2^{(0)}, m_3^{(0)}) \leq z_1 = h(x_0, y_0, z_0) \leq h(m_1^{(0)}, M_2^{(0)}, M_3^{(0)}) = M_3^{(1)},$$

$$m_1^{(2)} = f(m_1^{(1)}, M_2^{(1)}, m_3^{(1)}) \leq x_2 = f(x_1, y_1, z_1) \leq f(M_1^{(1)}, m_2^{(1)}, M_3^{(1)}) = M_1^{(2)},$$

$$m_2^{(2)} = g(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, M_3^{(1)}) \leq y_2 = g(x_1, y_1, z_1) \leq g(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, m_3^{(1)}) = M_2^{(2)},$$

$$m_3^{(2)} = h(M_1^{(1)}, m_2^{(1)}, m_3^{(1)}) \leq z_2 = h(x_1, y_1, z_1) \leq h(m_1^{(1)}, M_2^{(1)}, M_3^{(1)}) = M_3^{(2)}.$$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$m_1^{(k)} \leq x_k \leq M_1^{(k)}, \quad m_2^{(k)} \leq y_k \leq M_2^{(k)}, \quad m_3^{(k)} \leq z_k \leq M_3^{(k)}.$$

elde edilir. Böylece m_1, m_2, m_3, M_1, M_2 ve M_3 sayıları mevcut olup

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} m_1^k, & m_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} m_2^k, & m_3 &= \lim_{k \rightarrow \infty} m_3^k, \\ M_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} M_1^k, & M_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} M_2^k, & M_3 &= \lim_{k \rightarrow \infty} M_3^k, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$m_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} x_k} \leq M_1, \quad m_2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \leq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} y_k} \leq M_2, \quad m_3 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} z_k \leq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} z_k} \leq M_3.$$

dır. f, g ve h fonksiyonlarının sürekliliğini kullanarak (4.23) sistemi sağlanır.

$$\begin{aligned} m_1 &= f(m_1, M_2, m_3), & M_1 &= f(M_1, m_2, M_3), \\ m_2 &= g(m_1, m_2, M_3), & M_2 &= g(M_1, M_2, m_3), \\ m_3 &= h(M_1, m_2, m_3), & M_3 &= h(m_1, M_2, M_3), \end{aligned}$$

Teoremin (b) şıkkı kullanılırsa

$$m_1 = M_1 = \bar{x}, \quad m_2 = M_2 = \bar{y}, \quad m_3 = M_3 = \bar{z}$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.4. $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3]$ aralıkları ve f, g, h fonksiyonları Teorem (4.3) deki şartları sağlasın. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır.

- a)** $\forall (x, y, z) \in B$ için $f(x, y, z)$ fonksiyonu x noktasında artan, y ve z noktasında azalan,
 $\forall (x, y, z) \in B$ için $g(x, y, z)$ fonksiyonu y noktasında artan, x ve z noktasında azalan,
 $\forall (x, y, z) \in B$ için $h(x, y, z)$ fonksiyonu z noktasında artan ve x ve y noktasında azalandır.

b) $m_1 = f(m_1, M_2, M_3), \quad M_1 = f(M_1, m_2, m_3),$

$$m_2 = g(M_1, m_2, M_3), \quad M_2 = g(m_1, M_2, m_3), \quad (4.24)$$

$$m_3 = h(M_1, M_2, m_3), \quad M_3 = h(m_1, m_2, M_3),$$

Eğer (4.24) sisteminin bir çözümü varsa $m_1 = M_1$, $m_2 = M_2$, $m_3 = M_3$ olur.

(4.5) sisteminin $(x_n, y_n, z_n) \in B$ noktasındaki her çözümü $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in B$ denge noktasına yakınsar. B aralığı Teorem (4.3) ve Teorem (4.4)'ün özelliklerini ihtiva eder. $(f, g, h): B \rightarrow B$ olup, B (4.5) denkleminin çözüm aralığıdır.

4.5 Çözüm Aralığı

Bu bölümde, parametrelerin bazı özel değerleri için, bazı özel durumlara ait global çözüm aralıkları Teorem (4.3) kullanılarak elde edilecektir.

Durum 4.1. $b > 1$, $d > 1$, $f > 1$:

Bu durumda (4.1) sisteminin tek bir pozitif $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası vardır ve (4.1) sistemi

$$f(x, y, z) = \frac{a+x}{b+y}, \quad g(x, y, z) = \frac{c+y}{d+z}, \quad h(x, y, z) = \frac{e+z}{f+x}$$

şeklindeki (4.5) formunda gösterilebilir.

f, g, h fonksiyonlarının monotonluğunu kullanarak ve x, y ve z bileşenlerinin her biri için çözüm aralıklarını tespit etmek amacıyla x, y ve z için sınırlar sırasıyla

$[L_1, U_1]$, $[L_2, U_2]$, $[L_3, U_3]$, olmak üzere $L_i, U_i, i = 1, 2, 3$ dir.

$$L_1 \leq \frac{a+L_1}{b+U_2} \leq x_{n+1} = \frac{a+x_n}{b+y_n} \leq \frac{a+U_1}{b+L_2} \leq U_1,$$

$$L_2 \leq \frac{c+L_2}{d+U_3} \leq y_{n+1} = \frac{c+y_n}{d+z_n} \leq \frac{c+U_2}{d+L_3} \leq U_2,$$

$$L_3 \leq \frac{e+L_2}{f+U_3} \leq z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n} \leq \frac{e+U_2}{f+L_3} \leq U_3,$$

şeklinde yazılır. Burada $L_i = L$, $U_i = U$, $i = 1, 2, 3$ olarak kabul edilir ve yukarıdaki eşitsizlikte yerlerine yazılırsa, böylece

$$L \leq \frac{a+L}{b+U} \leq x_{n+1} = \frac{a+x_n}{b+y_n} \leq \frac{a+U}{b+L} \leq U, \quad (4.25a)$$

$$L \leq \frac{c+L}{d+U} \leq y_{n+1} = \frac{c+y_n}{d+z_n} \leq \frac{c+U}{d+L} \leq U, \quad (4.25b)$$

$$L \leq \frac{e+L}{f+U} \leq z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n} \leq \frac{e+U}{f+L} \leq U, \quad (4.25c)$$

sonucuna varılır. (4.25a)' in sol eşitsizliğinden,

$$L \leq \frac{a+L}{b+U} \Rightarrow L(b+U) \leq a+L \Rightarrow Lb+LU \leq a+L \Rightarrow LU \leq a+L(1-b)$$

ve sağ eşitsizliğinden,

$$\frac{a+U}{b+L} \leq U \Rightarrow a+U \leq U(b+L) \Rightarrow a+U \leq Ub+LU \Rightarrow a+U(1-b) \leq LU$$

elde edilip,

$$a+U(1-b) \leq LU \leq a+L(1-b) \quad (4.26)$$

sonucuna varılır. (4.25b) ve (4.25c)' de benzer işlemler yapılırsa sırasıyla

$$c+U(1-b) \leq LU \leq c+L(1-d) \quad (4.27)$$

$$e+U(1-f) \leq LU \leq e+L(1-f) \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.26), (4.27) ve (4.28) eşitsizlikleri

$$b \geq 1, d \geq 1, f \geq 1 \quad (4.29)$$

(4.29)' un sağlandığı her durumda sabittir. Yukarıdaki eşitsizlikte $L = 0$ alınırsa

$$U \geq \max \left\{ \frac{a}{b-1}, \frac{c}{d-1}, \frac{e}{f-1} \right\} \quad (4.30)$$

elde edilir. Böylece (4.1) sisteminin çözüm aralığı $B=[L,U]\times[L,U]\times[L,U]$ olup $L=0$ olduğundan $B=[0,U]\times[0,U]\times[0,U]$ elde edilir. Dolayısıyla (4.1) sisteminin çözüm aralığı

$$S_{inv}=[0,U]^3 \quad (4.31)$$

olur. Bu durumda Teorem (4.3) uygulanırsa (b) şartından,

$$m_1 = \frac{a+m_1}{b+M_2}, \quad M_1 = \frac{a+M_1}{b+m_2},$$

$$m_2 = \frac{c+m_2}{d+M_3}, \quad M_2 = \frac{c+M_2}{d+m_3},$$

$$m_3 = \frac{e+m_3}{f+M_1}, \quad M_3 = \frac{e+M_3}{f+m_1}.$$

elde edilir. İlk ikisinden

$$m_1 = \frac{a+m_1}{b+M_2} \Rightarrow m_1(b+M_2) = a+m_1 \Rightarrow m_1(b+M_2-1) = a \Rightarrow m_1 = \frac{a}{b-1+M_2} \text{ ve}$$

$$M_1 = \frac{a+M_1}{b+m_2} \Rightarrow M_1(b+m_2) = a+M_1 \Rightarrow M_1(b+m_2-1) = a \Rightarrow M_1 = \frac{a}{b-1+m_2}$$

şeklinde belirlenir ve birbirine bölünürse

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{b-1+m_2}{b-1+M_2} \quad (4.32a)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$m_2 = \frac{c+m_2}{d+M_3} \Rightarrow m_2(d+M_3) = c+m_2 \Rightarrow m_2(d-1+M_3) = c \Rightarrow m_2 = \frac{c}{(d-1+M_3)}$$

ve

$$M_2 = \frac{c+M_2}{d+m_3} \Rightarrow M_2(d+m_3) = c+M_2 \Rightarrow M_2(d-1+m_3) = c \Rightarrow M_2 = \frac{c}{d-1+m_3}$$

olup, oranlanırsa

$$\frac{m_2}{M_2} = \frac{d-1+m_3}{d-1+M_3} \quad (4.32b)$$

elde edilir. Son olarak

$$m_3 = \frac{e+m_3}{f+M_1} \Rightarrow m_3(f+M_1) = e+m_3 \Rightarrow m_3(f-1+M_1) = e \Rightarrow m_3 = \frac{e}{f-1+M_1}$$

$$M_3 = \frac{e+M_3}{f+m_1} \Rightarrow M_3(f+m_1) = e+M_3 \Rightarrow M_3(f-1+m_1) = e \Rightarrow M_3 = \frac{e}{f-1+m_1}$$

şeklinde basitçe belirlenir. Buradan,

$$\frac{m_3}{M_3} = \frac{f-1+m_1}{f-1+M_1} \quad (4.32c)$$

elde edilir. Bu (4.32a), (4.32b) ve (4.32c) sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ile eşitlenirse

$$\frac{m_1}{M_1} = \alpha_1 \leq 1, \quad \frac{m_2}{M_2} = \alpha_2 \leq 1 \quad \text{ve} \quad \frac{m_3}{M_3} = \alpha_3 \leq 1$$

elde edilip (4.32a), (4.32b) ve (4.32c)' de gerekli işlemler yapılırsa

$$(b-1)(\alpha_1-1) = M_2(\alpha_2-\alpha_1),$$

$$(d-1)(\alpha_2-1) = M_3(\alpha_3-\alpha_2), \quad (4.33)$$

$$(f-1)(\alpha_3-1) = M_1(\alpha_1-\alpha_3).$$

sonucuna varılır.

$b > 1, d > 1$ ve $f > 1$ ise (4.33) eşitsizliğinin sol yanları ya sifıra eşit ya da sıfırdan küçüktür. Böylece

$$\alpha_2 - \alpha_1 \leq 0, \quad \alpha_3 - \alpha_2 \leq 0 \quad \text{ve} \quad \alpha_1 - \alpha_3 \leq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$\alpha_1 \leq \alpha_3 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

dır. (4.33) şartına göre $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ olup

$$M_1 = m_1, \quad M_2 = m_2, \quad M_3 = m_3$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem (4.3)'ün (b) şartı sağlanmış oldu. Teorem (4.3) ve (4.2) yi kullanarak U 'nun sağ taraftan limiti keyfi geniş aralıkta seçilebilir. Bu durumda ise aşağıdaki global sonuç elde edilir.

Teorem 4.5. Kabul edelim ki $b > 1$, $d > 1$, $f > 1$ olsun. S_{inv} kümesi değişmez ve çekim noktası olan bir kümedir ve (4.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ çözümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y} \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{z}$$

olacak şekilde tek bir pozitif $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası global çekim noktasıdır. Ayrıca tek pozitif $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Durum 4.2. $b = 1, d > 1, f > 1$ ($d = 1, b > 1, f > 1$ veya $f = 1, b > 1, d > 1$)

Bu durumda ise (4.1) sisteminin tek bir $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pozitif denge noktası vardır. $b = 1, d > 1, f > 1$ şartı için işlemler yapılacaktır. Diğer iki durumda ise benzer işlemleri yapmak mümkündür. Durum 4.1 deki gibi çözüm aralığı

$$R_{inv} = \left[\frac{a}{U}, U\right] \times \left[\frac{a}{U}, U\right] \times [0, U_3] \quad (4.34)$$

şeklinde olup, çözüm kümesinin sınırları aşağıdaki şartlardan elde edilir.

$$L_1 \leq \frac{a + L_1}{b + U_2} \leq x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n} \leq \frac{a + U_1}{b + L_2} \leq U_1,$$

$$L_2 \leq \frac{c + L_2}{d + U_3} \leq y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n} \leq \frac{c + U_2}{b + L_3} \leq U_2,$$

$$L_3 \leq \frac{e + L_2}{f + U_1} \leq z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n} \leq \frac{e + U_2}{f + L_1} \leq U_3.$$

Bu ifadelerde $L_1 = L_2 = L$ ve $U_1 = U_2 = U$ ve $b = 1$ alınırsa

$$L \leq \frac{a + L}{1 + U} \leq x_{n+1} = \frac{a + x_n}{1 + y_n} \leq \frac{a + U}{1 + L} \leq U, \quad (4.35a)$$

$$L \leq \frac{c+L}{d+U_3} \leq y_{n+1} = \frac{c+y_n}{d+z_n} \leq \frac{c+U}{d+L_3} \leq U, \quad (4.35b)$$

$$L_3 \leq \frac{e+L_3}{f+U} \leq z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n} \leq \frac{e+U_3}{f+L} \leq U_3, \quad (4.35c)$$

elde edilir. (4.35a)'nın sağ ve sol eşitsizliklerinden sırasıyla

$$\left. \begin{array}{l} L \leq \frac{a+L}{1+U} \Rightarrow L+LU \leq a+L \Rightarrow L \leq \frac{a}{U} \\ \frac{a+U}{1+L} \leq U \Rightarrow a+U \leq U+UL \Rightarrow \frac{a}{U} \leq L \end{array} \right\} \Rightarrow L = \frac{a}{U}.$$

olup L sınırı bulunmuş olur. (4.35b)'de $L_3 = 0$ alınır

$$\frac{c+U}{d} \leq U \Rightarrow c+U \leq Ud \Rightarrow \frac{c}{d-1} \leq U$$

elde edilir. (4.35c)'nin sağ eşitsizliğinden

$$\frac{e+U_3}{f+L} \leq U_3 \Rightarrow e+U_3 \leq U_3(f+L) \Rightarrow e \leq U_3(f-1+L) \Rightarrow \frac{e}{(f-1+L)} \leq U_3$$

elde edilip $L = \frac{a}{U}$ olduğundan $LU = a \Rightarrow L = U$ alınır $L^2 = a \Rightarrow L = \sqrt{a}$ olup

$$\frac{e}{(f-1+\sqrt{a})} < U_3$$

sonucuna varılır. (4.35b)'nin sol kısmından

$$L \leq \frac{c+L}{d+U_3} \Rightarrow L(d+U_3) \leq c+L \Rightarrow L(d-1+U_3) \leq c \Rightarrow L(d-1+\frac{e}{f-1+\sqrt{a}}) < c$$

yazılır ve $L = \frac{a}{U}$ kullanılırsa

$$\frac{a}{U}(d-1+\frac{e}{f-1+\sqrt{a}}) < c \Rightarrow \frac{a}{c}(d-1+\frac{e}{f-1+\sqrt{a}}) < U$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$U > \max \left\{ \frac{a}{c} \left(d-1 + \frac{e}{f-1+\sqrt{a}} \right), \sqrt{a} \right\}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$U > \max \left\{ \frac{a}{c} \left(d-1 + \frac{e}{f-1+\sqrt{a}} \right), \sqrt{a} \right\}, \quad U \geq \frac{c}{d-1}, \quad U_3 > \frac{e}{f-1+\sqrt{a}}. \quad (4.36)$$

sınırları elde edilir. (4.33) ile verilen denkleme Teorem (4.3) uygulanırsa, $\alpha_1 = \alpha_2$ elde edilir. Son iki eşitliğin çarpımından da

$$(d-1)(f-1)(\alpha_1-1)(\alpha_3-1) = M_1 M_3 (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_3)$$

elde edilir. Bu eşitlik için (4.33) şartından dolayı $\alpha_1 = 1$ veya $\alpha_3 = 1$ olmak zorundadır.

Böylece

$$m_1 = M_1, \quad m_2 = M_2, \quad m_3 = M_3$$

ifadeleri sağlanır. Dolayısıyla Teorem (4.3)'ün (b) şartı sağlanmış olur. Teorem (4.3) ve (4.2) kullanarak U ve U_3 çözüm aralıklarının sağ taraftan limiti alındığında keyfi sabitler seçilebilir. $\frac{a}{U}$ ifadesini keyfi küçük seçmek için soldan limiti alınır. Böylece global çekim sonucu aşağıdaki gibi elde edilir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2005).

Teorem 4.6. Kabul edelim ki $b=1$, $d>1$ ve $f>1$ olsun. U , U_3 ve R_{inv} kümesi bir değişmez ve çekim noktası kümesidir ve (4.1) sisteminin tek bir $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ denge noktası global çekim noktasıdır. Ayrıca (4.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ çözümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{z}$$

dir. Burada $d=1$, $b>1$, $f>1$ ve $f=1$, $b>1$, $d>1$ durumları bu duruma benzer şekilde yapılabilir. R_{inv2} , R_{inv3} kümeleri uygun bir şekilde tanımlanırsa aynı sonuç elde edilir.

Durum 4.3. $b=d=1$, $f>1$ ve $(d=f=1, b>1, \text{ veya } b=f=1, d>1)$:

Bu durumda (4.1) sisteminin tek bir $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pozitif denge noktası vardır. Durum 4.1 de olduğu gibi

$$P_{inv} = [0, U_1] \times \left[\frac{c}{U_2}, U_2\right] \times \left[\frac{c}{U_2}, U_2\right]$$

şeklinde çözüm aralığı elde edilir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2005). Çözüm kümesinin sınırları aşağıdaki şartlardan elde edilir.

$$L_1 \leq \frac{a+L_1}{b+U_2} \leq x_{n+1} = \frac{a+x_n}{b+y_n} \leq \frac{a+U_1}{b+L_2} \leq U_1,$$

$$L_2 \leq \frac{c+L_2}{d+U_3} \leq y_{n+1} = \frac{c+y_n}{d+z_n} \leq \frac{c+U_2}{d+L_3} \leq U_2,$$

$$L_3 \leq \frac{e+L_2}{f+U_3} \leq z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n} \leq \frac{e+U_2}{f+L_3} \leq U_3.$$

Burada $L_3 = L_2$ ve $U_3 = U_2$ ve $b = d = 1$ alınırsa

$$L_1 \leq \frac{a+L_1}{1+U_2} \leq x_{n+1} = \frac{a+x_n}{1+y_n} \leq \frac{a+U_1}{1+L_2} \leq U_1, \quad (4.37a)$$

$$L_2 \leq \frac{c+L_2}{1+U_2} \leq y_{n+1} = \frac{c+y_n}{1+z_n} \leq \frac{c+U_2}{1+L_2} \leq U_2, \quad (4.37b)$$

$$L_2 \leq \frac{e+L_2}{f+U_1} \leq z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n} \leq \frac{e+U_2}{f+L_1} \leq U_2, \quad (4.37c)$$

elde edilir. (4.37b)' nin sağ ve sol eşitsizliklerinden sırasıyla

$$\left. \begin{array}{l} L_2 \leq \frac{c+L_2}{1+U_2} \Rightarrow L_2 + L_2 U_2 \leq c + L_2 \Rightarrow L_2 \leq \frac{c}{U_2} \\ \frac{c+U_2}{1+L_2} \leq U_2 \Rightarrow c + U_2 \leq U_2 + U_2 L_2 \Rightarrow \frac{c}{U_2} \leq L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L_2 = \frac{c}{U_2}.$$

bulunur ve $L_2 = U_2$ alınırsa

$$L_2 = \frac{c}{U_2} \Rightarrow L_2 U_2 = c \Rightarrow U_2 > \sqrt{c}$$

sonucuna ulaşılır. (4.37a)' daki sağ taraftaki eşitsizlikten ve $L_2 = \frac{c}{U_2}$ olduğundan

$$\frac{a+U_1}{1+L_2} \leq U_1 \Rightarrow a+U_1 \leq U_1+U_1L_2 \Rightarrow a \leq U_1 \frac{c}{U_2} \Rightarrow U_1 \geq \frac{a}{c}U_2$$

olur. (4.37c)' nin sol tarafındaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} L_2 \leq \frac{e+L_2}{f+U_1} &\Rightarrow L_2f + L_2U_1 \leq e + L_2 \Rightarrow L_2U_1 \leq e + L_2(1-f) \\ &\Rightarrow \frac{c}{U_2} \frac{a}{c}U_2 \leq e + \frac{c}{U_2}(1-f) \Rightarrow a \leq e + \frac{c}{U_2}(1-f) \\ &\Rightarrow U_2 \geq \frac{c(f-1)}{e-a} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.37c)' nin sağ tarafındaki eşitsizlikten ve $L_1 = 0$ olduğundan

$$\frac{e+U_2}{f+L_1} \leq U_2 \Rightarrow e+U_2 \leq U_2f + U_2L_1 \Rightarrow \frac{e}{f-1} \leq U_2$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla

$$U_1 \geq \frac{a}{c}U_2, \quad e > a, \quad U_2 \geq \max\left\{\frac{c(f-1)}{e-a}, \frac{e}{f-1}\right\}, \quad U_2 > \sqrt{c} \quad (4.38)$$

sınırlar elde edilir. Teorem (4.3)'ün uygulanması ile (4.33)' da ilk iki eşitlikte eşitlikte $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ ve üçüncü eşitlikte $\alpha_3 = 1$ sağlanır. Yani

$$m_1 = M_1, \quad m_2 = M_2, \quad m_3 = M_3$$

olur. Sonuç olarak Teorem (4.3)' ün (b) şartı sağlanmış olur. Teorem (4.3) ve (4.2)' yi kullanarak U_1 ve U_2 çözüm aralıklarının sağdan limiti alındığında keyfi genişlikte seçilir. $\frac{c}{U_2}$ ise keyfi küçüklükte seçilebilir. Dolayısıyla global çekim sonucu aşağıdaki gibi elde edilir (Kulenovic ve Nurkanovic, 2005).

Teorem 4.7. Kabul edelim ki, $b = d = 1$, $f > 1$ olsun. P_{inv} kümesi değişmezdir ve çekim kümesidir. (4.1) sisteminin tek bir $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pozitif denge noktası global çekim noktasıdır ve (4.1) sisteminin her $\{(x_n, y_n, z_n)\}$ çözümü için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{z}$$

olur. Yine burada da $d = f = 1, b > 1$ ve $b = f = 1, d > 1$ durumları benzer şekilde yapılabilir, P_{inv2} ve P_{inv3} çözüm kümeleri için de aynı sonuçları verir.

BÖLÜM V

SONUÇLAR

İki ve üç farklı türün rekabete dayalı popülasyonlarının değişimlerin incelenmesi amacı ile, iki ve üç boyutlu kesirli fark denklem sistemleri sırasıyla tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde ele alınmıştır. İlk olarak, üçüncü bölümde iki boyutta fark denklem sistemi, x_0, y_0 keyfi negatif olmayan başlangıç şartları, a, b, d ve e parametreleri pozitif sayılar olmak üzere:

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{d + y_n}{e + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklinde verilmiştir. Bu sistemin a ve b parametrelerinin $a > 0$ ve $b > 0$ olması halinde Durum (3.1-6)'yı sağlayan bu sisteme ait pozitif denge noktaları bulunmuştur. Bu denge noktalarının lokal ve global asimptotik kararlılıkları Teorem 3.1 ve lineer kararlılık analizi yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca Durum (3.1-3) için uygun olan dikdörtgensel bölgedeki global çekim sonuçlarına yer verilmiş, Durum (3.4-6) için dikdörtgensel bölge belirlenemediğinden monoton dönüşüm tekniği yardımı ile sonuçlar elde edilmiştir.

İkinci olarak dördüncü bölümde $a, b, c, d, e, f \in (0, \infty)$ parametreler ve x_0, y_0, z_0 keyfi negatif olmayan reel sayılar olmak üzere üç boyutta kesirli fark denklem sistemi,

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklinde tanımlanmıştır. İki boyutta olduğu gibi bu sistem için de denge noktaları bulunmuş, bu denge noktaları yardımıyla bir ikinci dereceden denklem elde edilip bu denklemin köklerinden birinin ve diskriminantın pozitif olduğu ve kökler çarpımının sıfırdan küçük olma durumunda tek bir pozitif denge noktasına sahip olmasını sağlayan Durum (4.1-5) elde edilmiştir. Ayrıca lineer kararlılık analizi ve Teorem 4.1-2 yardımıyla denge noktalarının lokal asimptotik kararlılığı ve sistemin monotonluk özellikleri kullanılarak bu denge noktalarındaki global çekim sonuçları elde edilmiştir.

Son olarak Durum (4.1-3) için çözüm aralıkları belirlenerek bu aralıkta pozitif denge noktalarının global asimptotik kararlılığına yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Difference Equations and Inequalities, **Marcell Dekker**, Newyork, USA, 2000.
- Akın, Ö., Bulgak, H., Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, **Selçuk Üniversitesi Basımevi**, Konya, 1998.
- Allen, L.J.S. ve Roeger, L.I.W., “ Discrete May–Leonard competition models”, **I, J. Differ. Equations Appl.** 10, 77–98, 2004.
- Bolat Y. ve Kır İ., Yüksek mertebeden fark denklemlerinin çözümleri üzerine, Yüksek Lisans Tezi, **Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Afyon karahisar, s.1, 2007.
- Chatterje, E., Grove, E. A., Kostrov, Y. ve Ladas, G., “On the trichotomy character of $x_{n+1} = (\alpha + \gamma x_{n-1}) / (A + Bx_{n-1} + x_{n-2})$ ”, **Journal of Difference Equations and Applications** 9, 1113-1128, 2003.
- Clark, D. ve Kulenovic, M.R.S., “ On a coupled system of rational difference equations”, **Comput. Math. Appl.** 43, 849–867, 2002.
- Clark, D., Kulenovic, M.R.S. ve Selgrade, J.F. , “Global asymptotic behavior of a two - dimensional difference equation modelling competition”, **Nonlinear Anal.** 52, 1765-1776, 2003.
- Comins, H.N.ve Hassell, M.P., “ Discrete time models for two-species competition”, **Theor. Pop. Biol.** 9, 202-221, 1976.
- Elaydi, S. N., Introduction To Difference Equations, **Springer**, 1995.
- Elaydi, S.N., An Introduction To Difference Equations, **Springer**, San Antonio,

USA, 1999.

Evans, D.J., Hongjian, L., Megson, G. M. ve Yang, X., “ Global asymptotic stability in a rational recursive sequence”, *Applied Mathematics and Computation* 158, 703-716, 2004.

Franke, J.E., ve Yakubu, A.-A., “ Mutual exclusion verses coexistence for discrete competitive systems”, *J. Math. Biol.* 30, 161-168, 1991.

Franke, J.E. ve A.-A. Yakubu, “ Geometry of exclusion principles in discrete systems”, *J. Math. Anal. Appl.* 168, 385-400, 1992.

Hess, P., “ Periodic - parabolic boundary value problems and positivity”, *Pitman Res. Notes Math.* Ser., Longman Essex, UK, vol. 247, 1991.

Kulenovic, M.R.S. ve Nurkanovic, M., “ Asymptotic behavior of two – dimensional linear fractional system of difference equations”, *Rad. Mat.* 11, 59–78, 2002.

Kulenovic, M.R.S. ve Nurkanovic, M., “ Asymptotic behavior of a linear fractional system of difference equations”, *Rad. Mat.* 11, 59-78, 2002.

Kulenovic, M.R.S. ve Ladas, G., Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures , *Chapman&Hall/CRC*, Florida, 2002.

Kulenovic, M.R.S. ve Nurkanovic, M., “Global asymptotic behavior of a two dimensional system of difference modeling cooperation”, *J. Differ . Equation Appl.* 9, 149-159, 2003.

Kulenovic, M. R. S. ve Nurkanovic, M., “Asymptotic behavior of a system of linear fractional difference equations”, *Journal of Inequalities and Applications* 2, 127-143, 2005.

Kulenovic, M. R. S. ve Nurkanovic, M., “ Global behavior of a three-dimensional linear system of difference equations”, *J. Math. Anal. Appl.* 310, 673-689, 2005.

Kulenovic, M. R. S. ve Nurkanovic, M., “Asymptotic behavior of a linear fractional system of difference equations”, *J. Inequal. Appl.* in press, 2005.

Mickens, R.E., Difference Equations, *Van Nostrand Reinhold*, Newyork, USA.

Roeger, L.-I.W., “ Discrete May – Leonard competition models. III”, *J. Differ. Equations Appl.* 10, 773–790, 2004.

Selgrade, J.F. ve Ziehe, M. “ Convergence to equilibrium in a genetic model with differential viability between the sexes”, *J. Math. Biol.* 25, 477–490, 1987.

Smith, H.L., “ Planar competitive and cooperative difference equations” , *J. Differ. Equations Appl.* 3, 335–357, 1998.

Şekerci, N., Bazı maksimumlu fark denklemlerinin periyodikliği üzerine bir çalışma, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, s. 6, 2008.

Rugh, J. Wilson, Linear System Theory, *Prentice Hall*, 1996.

ÖZGEÇMİŞ

Zeliha Uçar 31.01.1987 tarihinde Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini Adana'da tamamladı. 2006 yılında girdiği Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü'nden Haziran 2010 yılında bölüm üçüncüsü olarak mezun oldu. 2010 yılında Niğde Üniversitesi'nde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Niğde Sınav Dergisi Dershanesi'nde Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2012-2013 Eğitim-Öğretim yılında Adana'da Seyhan Sakarya Ortaokulu'nda Matematik öğretmeni olarak çalıştı ve Çukurova Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimini aldı.