E. AKŞİT, 2017

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL BİR KONGRÜANS GRUBUNUN İMPRİMİTİF HAREKETİ

ELİF AKŞİT

Ağustos 2017

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL BİR KONGRÜANS GRUBUNUN İMPRİMİTİF HAREKETİ

ELİF AKŞİT

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Serkan KADER

Ağustos 2017

Elif AKŞİT tarafından Doç. Dr. Serkan KADER danışmanlığında hazırlanan "Özel Bir Kongrüans Grubunun İmprimitif Hareketi" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT	Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Üye	: Doç. Dr. Serkan KADER	Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ali Hikmet DEĞER	Karadeniz Teknik Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve …........................... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT

MÜDÜR V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Elif AKŞİT

ÖZET

ÖZEL BİR KONGRÜANS GRUBUNUN İMPRİMİTİF HAREKETİ

AKŞİT, Elif

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Serkan KADER

Ağustos 2017, 68 sayfa

Bu tezde amacımız $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubunun $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninin özel halde alt yörüngesel graflarını incelemektir.

Birinci bölümde konuyla ilgili literatür taraması verildi. İkinci bölümde çalışmamızda kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde ise $\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninin imprimitif hareket sonucunda ortaya çıkan alt yörüngesel grafları ve buradaki kenar ve devre şartları $p>3$ asal, $p\equiv 1 \pmod 4$ olmak üzere $N=2\cdot 3^2p^2$ ve $p>3$ asal, $p\equiv 1 \pmod 3$ olmak üzere $N=2^2 3p^2$ alınarak bulunmuştur. Ayrıca $N=2\cdot 3^2p^2$ için alt yörüngesel grafın orman olma şartı verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Modüler grup, normalliyen, imprimitif hareket, alt yörüngesel graf, devre

SUMMARY

IMPRIMITIVE ACTION OF A SPECIAL CONGUENCE GROUP

AKŞİT, Elif
Niğde Ömer Halisdemir University
Graduate School of Natural and Appiled Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Associate Professor Serkan KADER

August 2017, 68 pages

In this thesis, the aim is to study suborbital graphs of the normaliser of congruence subgroup $\Gamma_0(N)$ in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ for special cases.

In the first section, the review of the literature is given. In the second section, we give some basic definitions and theorems to be used in our work.

In the third section, we get suborbital graphs arising from the imprimitive action for the normaliser of $\Gamma_0(N)$ in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ and conditions of edge and circuit for $N = 2\cdot 3^2 p^2$, $p > 3$ prime, $p \equiv 1(\bmod 4)$ and $N = 2^2 3p^2$, $p > 3$ prime, $p \equiv 1(\bmod 3)$. Also the condition of suborbital graph to be forest is determined for $N = 2\cdot 3^2 p^2$.

Keywords: Modular group, normaliser , imprimitve action, suborbital graph, circuit

ÖN SÖZ

Bu çalışma, $\Gamma_0\left(N\right)$ kongrüans alt grubunun $\mathrm{PSL}\left(2,\mathbb{R}\right)$ deki normalliyeni olan $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(N\right)\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin maksimal bir alt kümesi üzerindeki hareketinden ortaya çıkan alt yörüngesel graflarını bulmak amacı ile Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Bu çalışmanın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, çalışmam boyunca bana her türlü kolaylığı sağlayan tez danışmanım Doç. Dr. Serkan KADER' e, moral ve motivasyon desteklerinden dolayı Prof. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT ve Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN' a saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, varlığıyla hep yanımda olan yokluğunda bile hep desteğini hissettiğim kıymetlim Tevfik AKŞİT' e çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{C}}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\varphi(a)$	Euler fonksiyonu
Γ	Modüler grup
$\Gamma_0(N)$	Γ nın $N \mid c$ olan bir alt grubu
$\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$	$\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni
$\Gamma_C(N)$	Normalliyenin determinantı 1 olan elemanlarının grubu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$	Gerçel katsayılı, lineer, kesir dönüşümlerinin grubu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\hat{\mathbb{Q}}$	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathcal{U}$	$\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$A \subset B$	A kümesi B kümesinin alt kümesidir
$A \leq B$	A grubu B grubunun alt grubudur
$\lvert A:B \rvert$	B alt grubunun A daki indeksi
$a \mid b$	a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	a sayısı b sayısını bölmez

$a \| b$	a sayısı b sayısının bir tam bölenidir
$a \equiv b \pmod{N}$	N sayısı (a-b) sayısını böler
(a,b)	a ile b sayılarının en büyük ortak böleni
G_x	x noktasının G deki sabitleyeni
Gx	x noktasının G - yörüngesi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Lineer kesirli dönüşümler grubu, Öklid olmayan geometriler ve invaryant teorinin ortaya çıkmasıyla büyük önem kazanmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu topolojik grup yapısına uygun olduğu için analiz ve cebirsel yöntemlerle incelenmiştir.

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere $T: z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklindeki dönüşümlerin grubu $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Bu $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ üst yarı düzleminin bir otomorfizm grubudur. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu olan Γ Modüler grubunun, $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma^0(N), \Gamma_1(N)$ kongrüans alt grupları üzerine oldukça fazla çalışmalar vardır.

Bir küme üzerinde hareket eden bir permütasyon grubunun alt yörüngesel grafı fikri ilk olarak C. C. Sims tarafından 1967 de ortaya atıldı. Biggs ve White (1979) ise bunun sonlu gruplara uygulamalarını yapmışlardır. Ayrıca Jones, Singerman ve Wicks (1991) alt yörüngesel graflar ve devre uzunlukları incelemişler ve bu çalışmada konjektür olarak bırakılan orman olma şartı Akbaş (2001) tarafından çözülmüştür.

Diğer taraftan graflarla, sayılar teorisi ile ilgili bazı temel sonuçların özellikle Fibonacci sayılarının elde edilmesi graf teorinin önemini daha da artırmıştır. Kör (2012), Ünal (2013) ve Akbaba (2016) tezlerinde alt yörüngesel grafların özelliklerinden faydalanarak Fibonacci sayılarına ulaşmıştır.

$\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni Lehner ve Newman (1964) tarafından çalışıldı. Conway ve Norton (1979) ise normalliyenin elemanlarının karakterizasyonunu tam olarak yapmışlardır.

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin Fuchsian grubu ve sonlu üretilmiş olan normalliyen, grubun cinsi *g*, üretici eliptik elemanların mertebesi m_i ve parabolik sınıf sayısı *s* olmak üzere

$(g;\, m_1, m_2, \ldots, m_r;\, s)$

ile verilen bir simgeye sahiptir.

N nin karesiz olması durumunda simge problemi Maclachlan (1981) tarafından çözülmüştür. N nin keyfi olması durumu ise hala açık bir problemdir. Fakat Normalliyenin parabolik sınıf sayısı Akbaş ve Singerman (1992) tarafından bulundu ve 3, 4 ve 6 mertebeli eliptik üretici elemanlar tam olarak belirlendi.

N nin karesiz olması durumunda $\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninin alt yörüngesel grafındaki devreler (Akbaş ve Başkan, 1996; Keskin, 2006) ve N nin Akbaş ve Singerman (1992) de verilen transitif hareket koşulunu sağlaması durumunda (Keskin ve Demirtürk, 2009) de bulunmuştur. N nin transitif hareket koşulunu sağlamaması durumunda özel haller için alt yörüngesel graflar (Kader vd., 2010; Güler vd., 2011; Güler vd., 2016) da incelenmiştir.

Bu çalışmada $\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninin imprimitif hareket sonucunda ortaya çıkan alt yörüngesel grafları $p>3$ asal, $p\equiv 1 \pmod 4$ olmak üzere $N = 2\cdot 3^2 p^2$ ve $p>3$ asal, $p\equiv 1 \pmod 3$ olmak üzere $N = 2^2 3 p^2$ için araştırılmıştır. Her iki durum için kenar ve devre şartları ve $N = 2\cdot 3^2 p^2$ için elde edilen alt yörüngesel grafın orman olma şartı verilmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Topolojik Grup

Tanım 2.1. $(G,*)$ bir grup ve topolojik uzay olsun. Eğer

(i) $M: \begin{array}{l} G\times G \to G \\ (g,h) \to g*h \end{array}$

(ii) $m: \begin{array}{l} G \to G \\ g \to g^{-1} \end{array}$

şeklinde tanımlanan dönüşümler sürekli ise G ye *topolojik grup* adı verilir.

Tanım 2.2. G topolojik bir grup ve X topolojik uzay olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \wedge : G\times X & \to & X \\ (g,x) & \to & \wedge(g,x) := g\wedge x \end{array}$$

dönüşümü sürekli ve $g,h\in G,\ x\in X$ ve e, G nin birim elemanı olmak üzere

(i) $g\wedge(h\wedge x) = gh\wedge x$,

(ii) $e\wedge x = x$,

şartları sağlanıyorsa $[G,X,\wedge]$ veya $[G,X]$' e *topolojik dönüşüm grubu* ve G ye X üzerinde bir *hareket grubu* denir.

Önerme 2.3. $[G,X]$ topolojik dönüşüm grubu ve $x,y\in X$ için

$x \approx y :\Leftrightarrow gx = y, g\in G$

ile verilen $\approx$ bağıntısı X üzerinde bir *denklik bağıntısı*dır. Bu bağıntının denklik sınıflarına *hareketin yörüngeleri* adı verilir. $Gx := \{gx \mid g\in G\}$ kümesine $x\in X$ in *yörüngesi* denir.

Tanım 2.4. $[G,X]$ topolojik dönüşüm grubu ve keyfi $x,y\in X$ için $gx = y$ olacak biçimde bir $g\in G$ elemanı varsa G nin X üzerindeki hareketi *transitiftir* denir. Eğer hareket transitif ise bir tek yörünge vardır. Buna göre $\forall x\in X$ için $Gx = X$ dir.

Tanım 2.5. G bir grup ve $H < G$ olsun. H nin G *deki indeksi*, H alt grubuna göre denklik sınıflarının sayısıdır ve $|G:H|$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x \in X$ keyfi olmak üzere $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ kümesine x *noktasının sabitleyeni* denir.

Tanım 2.7. G bir grup olsun. $H < G$ alt grubunun G deki *normalliyeni* $N(G(H)) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ kümesidir.

Tanım 2.8. G bir grup ve T_1 ile T_2 bunun iki alt grubu olsun. Eğer $T_1 = gT_2g^{-1}$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa T_1 ile T_2 ye G de *eşleniktir* denir.

Tanım 2.9. Bir T dönüşümü için $T^m = I$ olan en küçük $m > 0$ tam sayısına T nin mertebesi denir.

Tanım 2.10. $N \in \mathbb{Z}$ için $1 \leq a \leq N$ ve $(a, N) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\varphi(N)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona *Euler fonksiyonu* denir.

$m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_s^{r_s}$ ise bu takdirde

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

dir.

2.2 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ Grubu

Reel katsayılı ve 1 determinantlı 2x2 tipindeki matrislerin grubuna özel lineer grup denir ve $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ gösterilir. Buna göre

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \big/ \{\pm I\} = \{z \to Tz : T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})\}$$

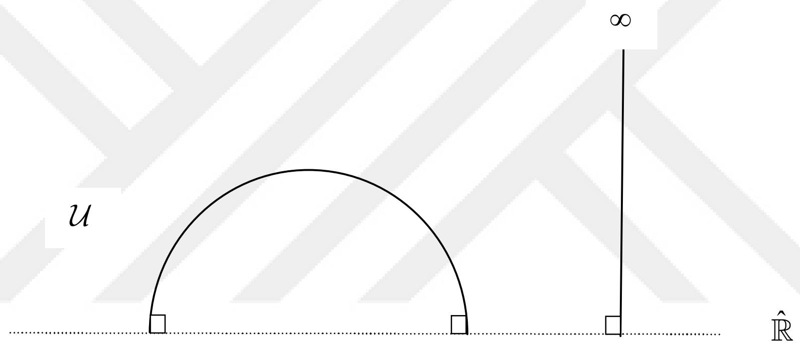
grubu elde edilir. Burada $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisleri aynı kabul edilir. Çünkü her ikisinin de temsil ettiği dönüşüm aynıdır. Bu grubun $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklindedir. $\mathcal{U}$ üzerinde *ds*-metriği (hiperbolik uzunluk)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}, \ (z = x + iy)$$

ile verilir. Öklid olmayan geometrinin üst yarı düzlem modelinde *hiperbolik doğrular,* reel eksene dik yarı çemberler ve yarı doğrulardır.



Şekil 2.1. Hiperbolik doğrular

$\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde kesişmeyen doğrulara *paralel doğrular* denir. Ancak paralel doğrular $\mathcal{U}$ nun sonsuzdaki sınırında kesişebilir. $\mathcal{U}$ nun sonsuzdaki sınırında kesişmeyen paralel doğrulara *ultraparalel doğrular* denir (Anderson, 2000).

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin elemanları karşılık gelen matrisin *iz*ine göre

(i) $|a+d| = 2$ ise parabolik;

(ii) $|a+d| > 2$ ise hiperbolik;

(iii) $|a+d| < 2$ ise eliptik;

olarak sınıflandırılır.

Böylece dönüşüm paralel ise üst yarı düzlemin sınırında bir sabit noktası vardır. Ayrıca hiperbolik dönüşüm üst yarı düzlemin sınırında iki sabit noktaya ve eliptik dönüşüm üst yarı düzlemde bir sabit noktaya sahiptir.

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin bir G alt grubunun parabolik elemanının $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminin sınırında sabit bıraktığı noktaya G'nin bir *parabolik noktası* veya *cusp*'ı ve bunların kümesine ise G'nin *cusp kümesi* denir. G'nin cusp kümesindeki keyfi x_1, x_2 için $gx_1 = x_2$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı bulunamıyorsa bu noktalara *G-eşdeğersiz* denir. G'nin G-eşdeğersiz noktalarının sayısına G'nin *parabolik sınıf sayısı* denir. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin ayrık 0alt gruplarına *Fuchsian grup* adı verilir. Burada bir $\Lambda \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ alt grubunun *ayrık* olması için gerek ve yeter şart I birim matrisinin bir V komşuluğu vardır öyleki $V \cap \Lambda = \{I\}$ olmasıdır.

2.3 Modüler Grup ve Kongrüans Alt Grupları

Tanım 2.11. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ biçimindeki bütün Möbius dönüşümlerinin kümesine *Modüler Grup* denir ve Γ ile gösterilir.

Teorem 2.12. Γ modüler grubu $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleriyle üretilir (Schoneberg, 1974).■

Buna göre $V = TU = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için $U^2 = V^3 = I$ olup U, T ve V modüler grubun üreticileri olduğundan Γ modüler grubu $(0;2,3,\infty)$ şeklinde bir simgeye sahiptir.

$\hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin elemanları, $(x,y)=1$ ve $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\dfrac{x}{y}$ indirgenmiş formunda yazılabilir. Burada $\infty = \dfrac{1}{0} = -\dfrac{1}{0}$ dır.

Γ modüler grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ cusp kümesi üzerindeki hareketi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$$

ile verilir. $T \in \Gamma$ için

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = T\left(\frac{-x}{-y}\right)$$

olduğundan Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır.

Eğer $(x,y)=1$ ve $ad-bc=1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formdadır. Gerçekten, $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda değil ise $(ax+by, cx+dy)=\ell$ olacak şekilde bir $\ell \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Bu durumda $m,n \in \mathbb{Z}$ için

$$ax+by = m\ell \tag{2.1}$$

ve

$$cx+dy = n\ell \tag{2.2}$$

dir. (2.1) ve (2.2) eşitlikleri sırasıyla her d ve $-b$ ile çarpılırsa

$$(ad-bc)x = (md-bn)\ell, \tag{2.3}$$

(2.1) ve (2.2) eşitlikleri ise sırasıyla $-c$ ve a ile çarpılırs

$$(ad-bc)y = (an-cm)\ell \tag{2.4}$$

bulunur. Böylece (2.3) ve (2.4) den $\ell \mid x, y$ çelişkisi elde edilir. ■

Teorem 2.13. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \hat{\mathbb{Q}}$ farklı elemanları için $(a,b)=1$ ve $(c,d)=1$ olduğundan $a\beta - b\alpha = 1$ ve $c\delta - d\gamma = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tam sayıları vardır. Burada

$$T_1(z) = \frac{az+\alpha}{bz+\beta} \quad \text{ve} \quad T_2(z) = \frac{cz+\gamma}{dz+\delta}$$

alınırsa $T_1, T_2 \in \Gamma$ olur. $T_1(\infty) = \frac{a}{b}$ ve $T_2(\infty) = \frac{c}{d}$ olduğundan $\varphi := T_2 T_1^{-1} \in \Gamma$ için $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ dir. Bu da Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğini gösterir. ■

Tanım 2.14. Pozitif N tam sayısı için Γ nın

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1 \, mod \, N, b \equiv c \equiv 0 \, mod \, N \right\}$$

şeklinde tanımlanan alt grubuna *temel kongrüans alt grubu* ve bu alt grubu içeren Γ nın herhangi bir alt grubuna *kongrüans alt grubu* denir. Başlıca kongrüans alt grupları

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid a \equiv d \equiv 1(\operatorname{mod} N), c \equiv 0(\operatorname{mod} N) \right\},$$

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0(\operatorname{mod} N) \right\},$$

$$\Gamma^0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0(\operatorname{mod} N) \right\}$$

dır. Burada açıkça $\Gamma(N) \leq \Gamma_1(N) \leq \Gamma_0(N) \leq \Gamma$ dır.

Ayrıca $\Gamma(N)$, Γ nın normal bir alt grubu olduğundan $\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_1(N)$ nin de normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(N) \triangleleft \Gamma_0(N)$ dir. Buna göre indeksler $N > 2$ için

$$\mu_0(N) := \left|\Gamma : \Gamma_0(N)\right| = N \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

$$|\Gamma : \Gamma_1(N)| = \frac{N^2}{2} \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$$\frac{\mu(N)}{2} := |\Gamma : \Gamma(N)| = \frac{N^3}{2} \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

dir.

N=2 için $|\Gamma:\Gamma_0(2)|=3$, $|\Gamma:\Gamma_1(2)|=3$, $|\Gamma:\Gamma(2)|=6$ ve $N>2$ için

$$|\Gamma_0(N):\Gamma_1(N)|=\frac{|\Gamma:\Gamma_1(N)|}{|\Gamma:\Gamma_0(N)|}=\frac{N}{2}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\varphi(N)}{2};$$

$$|\Gamma_1(N):\Gamma(N)|=\frac{|\Gamma:\Gamma(N)|}{|\Gamma:\Gamma_1(\mathrm{N})|}=N$$

elde edilir.

Γ nın cusp kümesi $\hat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ ve $\Gamma(N)$ kongrüans alt gruplarının cusp kümesi de $\hat{\mathbb{Q}}$ dır (Schoneberg, 1974) .

Teorem 2.15. $\Gamma_0(N)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat: Aksini varsayalım. Bu durumda $0,\infty\in\hat{\mathbb{Q}}$ ve $T=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(\mathrm{N})$ için

$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ olur.

Buradan b=1 ve d=0 dır. $ad-bcN=1$ olduğundan $c=-1$ ve $N=1$ bulunur ki bu $\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\Gamma_0(N)$ nın hareketi transitif değildir. ■

Lemma 2.16. $(k,s)=1$ ve $s\neq 0$ olmak üzere $\frac{k}{s}\in\mathbb{Q}$ için $A\begin{pmatrix}\frac{k}{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k_1}{s_1}\end{pmatrix}$, $s_1\,|\,N$ koşulunu sağlayan bir $A\in\Gamma_0(N)$ vardır (Akbaş ve Başkan, 1996).■

Lemma 2.17. $d_1\,|\,N$ ve $(a_1,d_1)=(a_2,d_1)=1$ olsun. Eğer $A\begin{pmatrix}a_1\\d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\d_1\end{pmatrix}$ ise bu takdirde $t=\left(d_1,\frac{N}{d_1}\right)$ olmak üzere $a_1\equiv a_2 \bmod t$ dir (Akbaş ve Başkan, 1996) . ■

Lemma 2.18. $d \mid N$ olsun. Bu takdirde $(a,d)=1$ olmak üzere $\frac{a}{d}$ nin $\Gamma_0(N)$ altındaki $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ yörüngesi

$$\left\{ \frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}} : (N,y)=d\,, a \equiv x\frac{y}{d} \left(\operatorname{mod}\left(d, \frac{N}{d} \right) \right) \right\}$$

kümesidir. Yörüngelerinin sayısı ise φ Euler fonksiyonu olmak üzere, sadece $\varphi\left(d, \frac{N}{d}\right)$ dir (Güler vd, 2011). ■

Teorem 2.19. $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubunun temel bölgesinin cinsi

$$g = 1 + \frac{\mu_0(N)}{12} - \frac{\varepsilon_\rho}{3} - \frac{\varepsilon_i}{4} - \frac{\sigma_\infty}{2}$$

dir. Burada

$$\varepsilon_\rho = \begin{cases} 0 & , \ 9 \mid N \\ \prod\limits_{p \mid N} \left(1 + \left(\frac{-3}{p} \right) \right) & , \ 9 \nmid N \end{cases} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & , \ 4 \mid N \\ \prod\limits_{p \mid N} \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) & , \ 4 \nmid N \end{cases}$$

dir ve $\sigma_\infty = \sum\limits_{t \mid N} \varphi\left(\left(t, N/t \right) \right)$ biçimindedir. φ Euler fonksiyonu olmak üzere,

$$\left(\frac{-3}{p} \right) = \begin{cases} 0 & , \quad p = 3 \\ 1 & , \quad p \equiv 1 (\operatorname{mod} 3) \\ -1 & , \quad p \equiv 2 (\operatorname{mod} 3) \end{cases} \quad , \quad \left(\frac{-1}{p} \right) = \begin{cases} 0 & , \quad p = 2 \\ 1 & , \quad p \equiv 1 (\operatorname{mod} 4) \\ -1 & , \quad p \equiv 3 (\operatorname{mod} 4) \end{cases}$$

dir (Schoneberg, 1974) .■

$N = 1,\ldots,10,12,13,16,18,25$ için $g = 0$,

$N = 11,14,15,17,19,20,21,24$ için $g = 1$,

$N = 22,23$ için $g = 2$ dir.

2.4 İmprimitif Hareket

Tanım 2.20. (i) $\Omega \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere $\eta : \Omega \to \Omega$ bire-bir örten ise η ya Ω nın *permütasyonu* denir. X in tüm *permütasyonlarının kümesi* S^x ile gösterilir.

$(ii) \eta_1, \eta_2 \in S^x$ ise $\eta_1 o \eta_2 \in S^x$ dir. S^x grubu Ω üzerinde *simetrik grup* olarak adlandırılır ve bunun alt gruplarına X üzerinde *permütasyon grupları* denir.

Tanım 2.21. (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Ω de tanımlı bir denklik bağıntısı $" \approx "$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ iken $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa buna bir *G-invaryant denklik bağıntısı* ve bu bağıntının denklik sınıflarına ise *blok* denir.

Buna göre, Ω üzerinde her durumda tanımlı olan iki tane

(i) *Özdeşlik bağıntısı :* $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

(ii) *Evrensel bağıntı :* $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$

invaryant denklik bağıntısı vardır ve bunlara *aşikar* (*trivial*) *bağıntılar* denir.

Tanım 2.22. Ω üzerinde (i) ve (ii) den başka bir *G*- invaryant denklik bağıntısı yoksa G nin Ω üzerindeki hareketine *primitif*, aksi halde *imprimitif* denir.

Lemma 2.23. (G,Ω) bir transitif permütasyon grubunun hareketinin primitif olması için gerek ve yeter şart $\forall \alpha \in \Omega$ için G_α sabitleyeninin Ω nın maksimal bir alt grubu olmasıdır (Biggs and White, 1979).■

Teorem 2.24. G nin Ω üzerindeki hareketi transitif olsun. Bu takdirde (G,Ω) imprimitiftir $\Leftrightarrow G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ koşulunu sağlayan $\alpha \in \Omega$ ve $H < G$ alt grubu vardır.

Bu durumda Ω üzerinde aşikar olmayan *G*-invaryant denklik bağıntısı

$$g(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow g^{-1} h \in H$$

şeklinde tanımlanır ve bunun denklik sınıflarının sayısı $|G:H|$ indeksidir (Biggs and White, 1979).■

2.5 Devreler

Çalışmada alt yörüngesel graflarda devre ve kenar şartları inceleneceği için burada graf ve devre tanımları detaya girilmeden verilecektir.

Tanım 2.25. X boştan farklı bir küme ve $\Delta \subset X \times X$ bir bağıntı olmak üzere $G=(X,\Delta)$ ikilisine bir *graf* denir. *Grafın köşeleri X* in elemanları ve *grafın kenarları* Δ 'nın elemanlarıdır.

Eğer $(a,b)\in\Delta$ veya $(b,a)\in\Delta$ ise bu durum $a \to b$ veya $a \leftarrow b$ ile gösterilir ve a ile b *bir kenar ile bağlanmıştır* denir. Bu durumda a ve b *komşu köşeler* olarak adlandırılır.

Tanım 2.26. $G=(X,\Delta)$ grafı ve $A \subset X$ kümesi verilsin. Buna göre $G^{'}=(A,\Delta \cap A \times A)$ grafına *G nin A köşe kümeli alt grafı* denir.

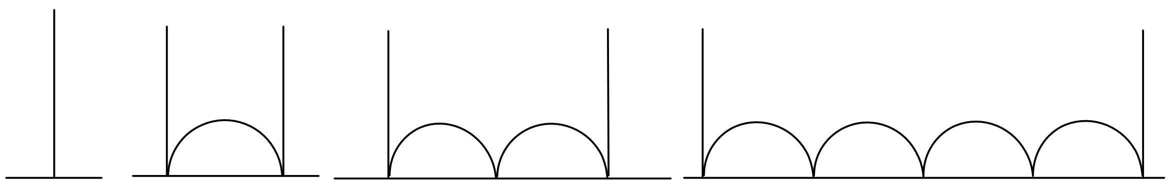
Tanım 2.27. *G*-grafının bir $v_1, v_2, \ldots, v_n$ köşe dizisini alalım. Burada ardışık köşeler bir kenar ile bağlanmış ise *n-uzunluğunda bir yol vardır* denir. Eğer $v_1 = v_n$ ve köşelerinin tümü farklı ise $n \geq 3$ için

$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n \to v_1$

yoluna *n-kenarlı yönlendirilmiş bir devre* denir.

$n=3$ ise devreye bir *üçgen*, $n=4$ ise *dörtgen* ve $n=6$ ise *altıgen* denir.

$n=2$ ise $v_1 \to v_2 \to v_1$ yoluna bir *ikigen* ve hiçbir devre içermeyen grafa *orman* adı verilir.



Şekil 2.2. Devreler

Tanım 2.28. $G=(X,\Delta)$ bir graf olmak üzere X üzerinde

"$a \approx b :\Leftrightarrow a=b$ veya a dan b ye bir yol vardır".

ile tanımlanan $\approx$- bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

(i) $\approx$- bağıntısı altında X bir denklik sınıfı ise G' ye *bağlantılı graf* denir.

(ii) $\approx$- bağıntısı altında bir X_1 denklik sınıfı için $(X_1, \Delta \cap X_1 \times X_1)$ bağlantılı bir graftır ve buna *G-nin bağlantılı bileşeni* denir.

Farklı G ve G' graflarının köşeleri arasında 1-1 ve örten bir dönüşüm var ve bu dönüşüm komşu köşeleri, komşu köşelere resmediyorsa G ve G' graflarına *izomorf graflar* denir (Tsuzuku, 1982).

2.6 Alt Yörüngesel Graflar

(G,Ω) transitif permütasyon grubu olsun. $g \in G$ olmak üzere

$$g:(\alpha,\beta) \to (g(\alpha), g(\beta)) \in \Omega \times \Omega$$

ile tanımlanan G nin $\Omega \times \Omega$ üzerindeki hareketinin yörüngelerine G'nin *alt yörüngeleri* denir. (α,β)' yı içeren alt yörüngeyi $O(\alpha,\beta)$ ile gösterelim.

$O(\alpha,\beta) := \{g(\alpha,\beta) : g \in G\} = \{(g(\alpha), g(\beta)) : g \in G\}$, yani

$(x,y) \in O(\alpha,\beta)$ dır ancak ve ancak $(x,y) = g(\alpha,\beta)$ olan bir $g \in G$ vardır.

$O(\alpha,\beta)$ *alt yörüngesinden* bir $G(\alpha,\beta)$ alt yörüngesel grafı şu şekilde elde edilir;

$G(\alpha,\beta)$' nın köşeleri Ω nın elemanlarıdır ve $\gamma,\delta\in\Omega$ noktaları için $(\gamma,\delta)\in O(\alpha,\beta)$ ise ise γ'dan δ'ya yönlenmiş bir kenar vardır ve bu $\gamma\to\delta$ ile gösterilir. Bu kenarı $\mathcal{U}$ üst yarı düzleminde bir hiperbolik geodezik olarak çizilebilir.

(i) $O(\alpha,\beta)=O(\beta,\alpha)$ ise $G(\alpha,\beta)=G(\beta,\alpha)$ dır ve bu graf karşılıklı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Yani $G(\alpha,\beta)$ grafında $\gamma\to\delta$ ise yine $G(\alpha,\beta)$ grafında $\delta\to\gamma$ dir. Bu durumda $G(\alpha,\beta)$ grafına *kendisiyle eşleşmiş graf* denir.

(ii) $O(\alpha,\beta)\neq O(\beta,\alpha)$ olsun. $G(\alpha,\beta)$ grafında $\gamma\to\delta$ ise $G(\beta,\alpha)$ grafında $\delta\to\gamma$ dir. Bu durumda ise $G(\alpha,\beta)$ ve $G(\beta,\alpha)$ graflarına *eşleşmiş graflar* denir.

Önerme 2.29. (G,Ω) transitif permütasyon grubu için bir $\mathcal{G}$ alt yörüngesel grafı verilsin. Bu durumda;

(i) G, $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

(ii) G, $\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerindeki hareketi transitiftir.

(iii) $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş bir graf ise; G, $\mathcal{G}$ nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerindeki hareketi transitiftir.

(iv) G, $\mathcal{G}$ nin kenarları üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $g\in G$ keyfi olmak üzere ;

(i) $L_g:\ \mathcal{G}\ (\alpha,\beta)\to\ \mathcal{G}\ (\alpha,\beta),\ L_g(x\to y):=g(x)\to g(y)$ dönüşümünün bir otomorfizma yani birebir, örten , yapı koruyan dönüşüm olduğunu göstermeliyiz.

Yapı koruma :

$x\to y$ $\mathcal{G}$ de bir kenar olsun. $(x,y)\in O(\alpha,\beta)$ dır. $O(\alpha,\beta)=\{g(\alpha,\beta):g\in G\}$ olduğundan $h\in G$ vardır öyle ki $(x,y)=h(\alpha,\beta)$ dır. Böylece $g\in G$ için

$$g(x,y)=g(h(\alpha,\beta))=gh(\alpha,\beta)$$

ve buradan

$$gh(\alpha,\beta)=g(x,y)=(g(x),g(y))$$

olur. Yani $g(x) \to g(y)$ $\mathcal{G}$ de bir kenardır. Bu da L_g dönüşümünün yapı koruyan bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Şimdi birebirliği gösterelim.

$x \to y$, $a \to b$ $\in$ $\mathcal{G}$ kenarları için $L_g(x \to y) = L_g(a \to b)$ olsun. Buna göre

$$g(x) \to g(y) = g(a) \to g(b)$$

olur. G grup olduğu için $g^{-1} \in G$ olup

$$g^{-1}g(x) \to g^{-1}g(y) = g^{-1}g(a) \to g^{-1}g(b)$$

elde edilir. Buradan $x \to y = a \to b$ dir. Yani , L_g birebirdir.

Ayrıca $\forall x \to y \in \mathcal{G}$ kenarı için $g^{-1}(x) \to g^{-1}(y) \in \mathcal{G}$ kenarı vardır öyleki

$$L_g\left(g^{-1}(x) \to g^{-1}(y)\right) = g\left(g^{-1}(x)\right) \to g\left(g^{-1}(y)\right) = x \to y$$

dir. Dolayısıyla L_g örten bir dönüşümdür.

(ii) (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olduğundan aşikardır.

(iii) $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş olsun . bu durumda $O(\alpha,\beta) = O(\beta,\alpha)$ dır. x ile y ardışık köşeler ise (x,y) veya $(y,x) \in O(\alpha,\beta)$ dır. Dolayısıyla x ile y ve a ile b ardışık köşeler ise $(x,y) \in O(\alpha,\beta)$ ve $(a,b) \in O(\alpha,\beta)$ olduğunu farzedebiliriz. $O(\alpha,\beta) = \{g(x,y) : g \in G\}$ olduğundan $g_1, g_2 \in G$ vardır öyleki $(x,y) = g_1(\alpha,\beta)$ ve $(a,b) = g_2(\alpha,\beta)$ dır. Böylece ; $g_1^{-1}(x,y) = (\alpha,\beta)$, yani $(a,b) = g_2 g_1^{-1}(x,y)$ ve G grup olduğundan $h := g_2 g_1^{-1} \in G$ dir. Böylece G nin $\mathcal{G}$ grafının ardışık köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiği gösterilmiş oldu.

(iv) $x \to y$ ve $a \to b$ $\mathcal{G}$ (α,β) da iki kenar olsun. Bu takdirde , $(x,y) \in O(\alpha,\beta)$ ve $(a,b) \in O(\alpha,\beta)$ olduğundan $T_1(\alpha,\beta) = (x,y)$ ve $T_1(\alpha,\beta) = (a,b)$ olan $T_1, T_2 \in G$ vardır. Buradan $T_1^{-1}(x,y) = T_1^{-1}(a,b)$ dir. Böylece , $T_2 \circ T_1^{-1}(x,y) = (a,b)$ elde edilir. Bu da bize G nin $\mathcal{G}$ alt yörüngesel grafının kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğini gösterir (Ünal, 2013).■

BÖLÜM III

YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

3.1 $\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki Normalliyeni

Teorem 3.1. $\Gamma_0(N)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki *normalleyeni*

$$\mathcal{N}or\left(\Gamma_0(N)\right) := \left\{ \begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} : ade^2 - bcN/h^2 = e > 0 \right\}$$

şeklindedir. Buradaki her bir harf bir tamsayı , $e \,\|\, N/h^2$ ve h ise $h^2 \mid N$ şartını sağlayan 24'ün en büyük bölenidir. $\left(r \,\|\, s \text{ yani } r, s\text{'nin bir tam b}\ddot{o}\text{lenidir} :\Leftrightarrow \left(r, \frac{s}{r} \right) = 1 \text{ dir.} \right)$ (Akbaş,1989).■

Tanım 3.2. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0(N)\right)$de determinantı 1 olan dönüşümlerin kümesi, $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0(N)\right)$ nin bir alt grubudur ve $\Gamma_C(N)$ ile gösterilir. Açıkça

$$\Gamma_0\left(N/h^2\right) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_C(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

dır. Böylece $\Gamma_C(N)$, $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile $\Gamma_0\left(N/h^2\right)$ nin bir eşleniğidir.

$\mathrm{W}_e = \begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}$ biçimindeki matrislere karşılık gelen dönüşümlerin kümesi bir gruptur ve $\Gamma_{\mathrm{W}}(N)$ ile gösterilir, burada $e \,\|\, N$ ve $\det \mathrm{W}_e = e \quad 0$ dır. $\Gamma_{\mathrm{W}}(N)$ nin elemanları *Atkin-Lehner dönüşümleri* olarak adlandırılır (Akbaş, 1989).■

Şimdi gerekli olan $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(N\right)\right)$de $\Gamma_0\left(N\right)$nin indeksini hesaplayalım. $\Gamma_C\left(N\right)$, $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(N\right)\right)$ nin 2^{ρ} indeksli normal bir alt grubudur, burada ρ, N/h^2 nin farklı asal çarpanlarının sayısıdır. $\Gamma_0\left(N\right) \leq \Gamma_C\left(N\right)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.3. $|\Gamma_C\left(N\right) : \Gamma_0\left(N\right)| = h^2\tau$ dur. Burada $\tau = \left(\frac{3}{2}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\varepsilon_2}$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 \;; & 2^2, 2^4, 2^6 \,\|\, N \\ 0 \;; & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 \;; & 9 \,\|\, N \\ 0 \;; & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: $\Gamma_C\left(N\right)$, determinantı 1 olan $\begin{pmatrix} a & b/h \\ cN/h & d \end{pmatrix}$ biçimindeki dönüşümlerin kümesi olduğundan , yukarıdaki ifadelerden yararlanarak

$$\left|\Gamma_C\left(N\right) : \Gamma_0\left(N\right)\right| = \frac{N\prod\limits_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\frac{N}{h^2}\prod\limits_{p|\frac{N}{h^2}}\left(1+\frac{1}{p}\right)} = h^2\tau$$

elde edilir. Burada

$$\tau = \prod_{p|N}\left(1+\frac{1}{p}\right) \;/\; \prod_{p|\left(N/h^2\right)}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

şeklindedir.

Şimdi her r tam sayısı için $h\left(r\right)$ yi $\left(h\left(r\right)\right)^2 | r$ olmak üzere 24 ün en büyük böleni olacak şekilde yazalım. $N, 2^{\alpha}3^{\beta}K$ ve $\left(K,6\right) = 1$ olacak şekilde yazıldığında, eğer $\alpha = 2,4,6$ veya $\beta = 2$ ise $\tau \neq 1$ olduğu görülür (Akbaş and Singerman,1989).■

Sonuç 3.4. ρ ve τ yukarıdaki gibi olmak üzere $|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(N\right)\right) : \Gamma_0\left(N\right)| = 2^{\rho}h^2\tau$ dur (Akbaş and Singerman,1989).■

Buradan $2^{\rho}h^2\tau = 2^{r}h^2s$ eşitliği kolayca elde edilir, burada r, ρ ve τ yukarıdaki gibi ve

$$s_2 = \begin{cases} 3/4 \, ; \; 2 \mid \left(h\left(2^{\alpha}\right)\right)^2 \parallel N \\ 1 \, ; \; \text{aksi takdirde} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad s_3 = \begin{cases} 2/3 \, ; \left(h\left(3^{\beta}\right)\right)^2 = 9 \parallel N \\ 1 \, ; \; \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olmak üzere $s = s_2 s_3$ şeklindedir (Ogg, 1980). ■

Eğer Λ sonlu üretilmiş bir Fuchsian grup ise genel gösterimi aşağıdaki şekildedir.

Üreticiler

$a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ hiperbolik

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ eliptik

$q_1, q_2, \ldots, q_s$ parabolik

Bağıntılar

$$x_1^{m_1} = \ldots = x_r^{m_r} = \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{s} q_k = 1$$

Grubun simgesi $\left(g\,; m_1, \ldots, m_r\,; s\right)$

Hiperbolik ölçüm $\mu\left(\Lambda\right) = 2\pi \left\{ 2\left(g-1\right) + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{m_i}\right) + s \right\}$ (3.1)

Eğer Λ_0 , Λ da sonlu indekse sahip ise

$$\frac{\mu\left(\Lambda_0\right)}{\mu\left(\Lambda\right)} = \left|\Lambda : \Lambda_0\right| \tag{3.2}$$

dır. Eğer Λ_0 , Λ da M indeksli bir normal alt grup ise ;

Λ_0 daki parabolik sınıf sayısı $= M \sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{r_i}$ (3.3)

Λ_0 daki eliptik sınıf sayısı $= M \sum_{i \in \Omega} \dfrac{1}{t_i}$ (3.4)

dir. Burada $r_i, q_i \left(\operatorname{mod} \Lambda_0\right)$ ın üssü (yani bir k sayısı için $q^k \in \Lambda_0$ dır.) ; $t_i, x_i \left(\operatorname{mod} \Lambda_0\right)$ ın üssü ve $\Omega = \left\{ i \mid 1 \le i \le r ,\; t_i < m_i \right\}$ dir (Akbaş, 1989). ■

Teorem 3.5. N keyfi bir tam sayı olsun. Bu durumda $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$ yalnızca 2,3,4 ve 6 mertebeli periyotlara sahip olabilir ve üstelik

a) $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$, 4.mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$ nin 4.mertebeden bir periyoda sahiptir ancak ve ancak,
$N/h^2 = 2p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ ve $i = 2,\dots,r$ olmak üzere , $2 \parallel N/h^2$ ve $p_i \equiv 1 \pmod 4$.

b) $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$, 6.mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$nin 6.mertebeden bir periyoda sahiptir ancak ve ancak $N/h^2 = 3p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ ve $i = 2,\dots,r$ olmak üzere , $3 \parallel N/h^2$ ve $p_i \equiv 1 \pmod 3$.

c) $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$, 3.mertebeden en çok bir periyoda sahiptir. $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$nin 3.mertebeden bir periyoda sahiptir ancak ve ancak
$N/h^2 = p_3^{\alpha_3}\dots p_r^{\alpha_r}$ ve $i = 3,\dots,r$ olmak üzere , $3 \parallel N/h^2$ ve $p_i \equiv 1 \pmod 3$ tür (Akbaş and Singerman , 1992). ■

Teorem 3.6. $\Lambda_0 = \Gamma_0(N)$ ve $\Lambda = \mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$ olsun. Bu takdirde (3.3) deki r_i ler için $2^8 \nparallel N$ ise $r_i \mid h$ ve $2^8 \parallel N$ ise $r_i \mid 2h$ dır (Akbaş,1989). ■

Teorem 3.7. $N \in \mathbb{Z}$ keyfi ve $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_n^{\alpha_n}$ asal çarpanlarına parçalanışı verilsin. Bu takdirde $\mathcal{N}or(\Gamma_0(N))$ nin $\Gamma_0(N)$ nin cuspları üzerinde transitif olarak hareket etmesi için (Yani parabolik sınıf sayısı $\pi(N)=1$ olması için) gerek ve yeter şart $\alpha_1 \le 7$, $\alpha_2 \le 3$ ve $\alpha_i \le 1$, $i = 3,\dots,r$ olmasıdır (Akbaş,1989). ■

3.2 $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin Alt Yörüngesel Grafları

$p>3$ asal bir sayı ve $p\equiv 1(\bmod 4)$ olmak üzere $N=2\cdot 3^2 p^2$ için $h=3$ olduğundan $T=\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$ ve $e \,\|\, N/h^2$ göz önüne alınırsa, $\det T=e=1,2,p^2,2p^2$ dir. Yani $\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni olan $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin elemanları

$$T_1=\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix},\ ad-2bcp^2=1; \qquad T_2=\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix},\ 2ad-bcp^2=1$$

$$T_3=\begin{pmatrix} ap^2 & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & dp^2 \end{pmatrix},\ adp^2-2bc=1; \qquad T_4=\begin{pmatrix} 2ap^2 & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2dp^2 \end{pmatrix},\ 2adp^2-bc=1$$

şeklindedir.

Teorem 3.7 ye göre $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif değildir. Dolayısıyla $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin transitif olarak hareket ettiği $\hat{\mathbb{Q}}$ nın maksimal bir alt kümesini bulmalıyız.

Lemma 3.8. $\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin yörüngeleri

(i) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\2\cdot 3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix};$
$\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}11\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2p^2\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\p\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\p\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\p\end{pmatrix};\ldots;\begin{pmatrix}p-1\\p\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1\\2p\end{pmatrix};\begin{pmatrix}p+2\\2p\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2p\end{pmatrix};\begin{pmatrix}p+4\\2p\end{pmatrix};\ldots;\begin{pmatrix}p+p-1\\2p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p-1\\2p\end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} a_1 \\ 3p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ 3p \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{2p-2} \\ 3p \end{pmatrix}$ ve farklı $\begin{pmatrix} a_i \\ 3p \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_j \\ 3p \end{pmatrix}$ yörüngeleri için $a_i \not\equiv a_j \pmod{3p}$,

(v) $\begin{pmatrix} b_1 \\ 3^2 p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ 3^2 p \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_{p-1} \\ 3^2 p \end{pmatrix}$, burada farklı $\begin{pmatrix} b_i \\ 3^2 p \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} b_j \\ 3^2 p \end{pmatrix}$ yörüngeleri için $b_i \not\equiv b_j \pmod{p}$,

(vi) $\begin{pmatrix} c_1 \\ 2 \cdot 3p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2 \\ 2 \cdot 3p \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c_{2p-2} \\ 2 \cdot 3p \end{pmatrix}$, burada farklı $\begin{pmatrix} c_i \\ 2 \cdot 3p \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} c_j \\ 2 \cdot 3p \end{pmatrix}$ yörüngeleri için $c_i \not\equiv c_j \pmod{3p}$,

(vii) $\begin{pmatrix} d_1 \\ 2 \cdot 3^2 p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_2 \\ 2 \cdot 3^2 p \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} d_{p-1} \\ 2 \cdot 3^2 p \end{pmatrix}$, burada farklı $\begin{pmatrix} d_i \\ 2 \cdot 3^2 p \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} d_j \\ 2 \cdot 3^2 p \end{pmatrix}$ yörüngeleri için $d_i \not\equiv d_j \pmod{p}$,

Tüm yörüngelerin sayısı $\sum_{d|N} \varphi\left(\left(d, \frac{2 \cdot 3^2 p^2}{d}\right)\right) = 8(p+1)$ dir.

İspat: Lemma 2.17 den $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ yörüngesi için *d* nin bütün mümkün değerleri

$1, 2, 3, 2 \cdot 3, 3^2, 2 \cdot 3^2, p, 2p, 3p, 2 \cdot 3p, 3^2 p, 2 \cdot 3^2 p, p^2, 2p^2, 3p^2, 2 \cdot 3p^2, 3^2 p^2, 2 \cdot 3^2 p^2$

şeklindedir. Böylece Euler formülüne göre bu yörüngelerin eşlenik olmayan sınıf sayısı

$1, 2, 3^2, 2 \cdot 3^2, p^2, 2p^2, 3^2 p^2, 2 \cdot 3^2 p^2$ için 1,

$3, 2 \cdot 3, 3p^2, 2 \cdot 3p^2$ için 2,

$p, 2p, 3^2 p, 2 \cdot 3^2 p$ için $p-1$,

$3p, 2 \cdot 3p$ için $2p-2$

dir. ■

Teorem 3.9. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden biri

$$\hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2 p^2\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2\cdot 3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup$$

$$\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}11\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2 p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2 p^2\end{pmatrix}$$

dir.

İspat: Öncelikle $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ yörüngesinin $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ ile hareketini inceleyelim.

$T_1=\begin{pmatrix}a & b/3\\ 2\cdot 3p^2c & d\end{pmatrix}$, $ad-2bcp^2=1$, elemanını göz önüne alalım. Buna göre

$$\begin{pmatrix}a & b/3\\ 2\cdot 3p^2c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b/3\\ 2\cdot 3p^2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b\\ 3\left(2\cdot 3p^2c+d\right)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ve

$$\left(3a+b,3\left(2\cdot 3p^2c+d\right)\right)=1$$

elde edilir. Bu takdirde

(1*) $3\nmid b,d$ olsun. Bu durumda $k,\ell\in\mathbb{Z}$ için $d=6k\pm 1$ ve $b=6\ell\pm 1$ veya $b=6\ell\pm 2$ olur. Ayrıca $y=\left(2\cdot 3^2p^2,3\left(2\cdot 3p^2c+d\right)\right)=3$ ve

$$x\equiv\left(3a+b\right)\left(2\cdot 3p^2c+d\right)\left(\bmod\left(3,\frac{2\cdot 3^2p^2}{3}\right)\right)$$

$$\equiv\left(3a+b\right)\left(2\cdot 3p^2c+d\right)\left(\bmod 3\right)$$

$$\equiv bd\left(\bmod 3\right)$$

olur. Sonuç olarak $x\equiv\pm 1\left(\bmod 3\right)$ veya $x\equiv\pm 2\left(\bmod 3\right)$ bulunur ki buradan

$$\frac{3a+b}{3\left(2\cdot 3p^2c+d\right)}\in\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\ \text{veya}\ \in\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

elde edilir.

(2*) $3 \mid d$ ve $3 \nmid b$ olduğunda $\dfrac{3a+b}{3^2\left(2.3p^2c+d_0\right)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 3^2 \end{pmatrix}$.

(3*) $3|b$ ve $3 \nmid d$ olduğunda $\dfrac{a+2b_0}{2.3p^2c+d} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$T_2 = \begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2.3.p^2c & 2d \end{pmatrix}$, $2ad - bcp^2 = 1$, elemanı göz önüne alındığında b ve c tek olmalıdır.

$$T_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2.3.p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+b \\ 2.3\left(3.p^2c+d\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

rasyonel sayısı elde edilir. Bu takdirde $2ad - bcp^2 = 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a+b \\ 3\left(3p^2c+d\right) \end{pmatrix}$$

için $\left(6a+b, 3\left(3p^2c+d\right)\right) = 1$ dir. Ayrıca b tek olduğundan

$$\left(6a+b, 2\cdot 3\left(3p^2c+d\right)\right) = 1$$

olur.

(4*) $3 \mid b$ ve $3 \nmid d$ olduğunda $\dfrac{6a+b}{2.3\left(3p^2c+d\right)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dir.

(5*) $3 \nmid b$ ve $3 \mid d$ olduğunda $\dfrac{6a+b}{2.3^2\left(p^2c+d_0\right)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2.3^2 \end{pmatrix}$ dir.

(6*) $3 \nmid b$ ve $3 \nmid d$ olsun. Bu durumda

$$y = \left(2\cdot 3^2 p^2, 2\cdot 3\left(3p^2c+d\right)\right) = 2\cdot 3 \text{ ve } \left(2\cdot 3, \frac{2\cdot 3^2 p^2}{2\cdot 3}\right) = 3$$

olduğundan

$$\begin{aligned} x &\equiv (6a+b)\left(3p^2c+d\right) \pmod 3 \\ &\equiv bd \pmod 3 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda yine $k,\ell \in \mathbb{Z}$ için $b = 6k \pm 1$ ve $d = 6\ell \pm 1$ veya $d = 6\ell \pm 2$ olduğundan $x \equiv \pm 1 \pmod 3$ veya $x \equiv \pm 2 \pmod 3$ bulunur ki bu da

$$T_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix}5\\2\cdot 3\end{pmatrix}$$

olduğunu gösterir.

Böylece $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2.3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}5\\2.3\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix}1\\2.3^2\end{pmatrix}$ elde edilir.

Şimdi $T_3 = \begin{pmatrix} a\cdot p^2 & b/3 \\ 2.3.p^2c & d\cdot p^2\end{pmatrix}$ $adp^2 - 2bc = 1$, elemanını göz önüne alalım. Burada a ve d tek olmak zorundadır.

$$\begin{pmatrix} a\cdot p^2 & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d\cdot p^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot p^2 + b/3 \\ 2\cdot 3p^2c + d\cdot p^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot a\cdot p^2 + b \\ 3\cdot p^2\left(2\cdot 3\cdot c + d\right)\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

dir.

(7*) $3 \mid b$ ve $3 \nmid d$ ise $\dfrac{ap^2 + b_0}{p^2\left(2\cdot 3c + d\right)} \in \begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}$ dir.

(8*) $3 \mid d$ ve $3 \nmid b$ olduğunda $\dfrac{3\cdot a\cdot p^2 + b}{3^2\cdot p^2\left(2\cdot c + d_0\right)} \in \begin{pmatrix}1\\3^2\cdot p^2\end{pmatrix}$ dir.

(9*) $3 \nmid b,d$ ise $k,\ell \in \mathbb{Z}$ için $d = 6k \pm 1$ ve $b = 6\ell \pm 1$ veya $b = 6\ell \pm 2$ dir.

$$y = \left(2\cdot 3^2 p^2, 3p^2\left(2\cdot 3c + d\right)\right) = 3p^2 \text{ ve } \left(y, \frac{2\cdot 3^2 p^2}{y}\right) = 3$$

olduğundan

$$\begin{aligned} x &\equiv \left(3ap^2 + b\right)\left(2\cdot 3c + d\right) \pmod 3 \\ &\equiv bd \pmod 3, \end{aligned}$$

yani $x \equiv \pm 1 \pmod 3$ veya $x \equiv \pm 2 \pmod 3$ bulunur. Buna göre

$$T_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix} \text{ veya } \in \begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}$$

olduğunu gösterir.

$T_4 = \begin{pmatrix} 2 \cdot a \cdot p^2 & b/3 \\ 2.3.p^2 c & 2 \cdot d \cdot p^2 \end{pmatrix}$, $2adp^2 - bc = 1$, elemanını göz önüne alalım. Burada b ve c tektir.

$$T_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap^2 & b/3 \\ 2 \cdot 3p^2 c & 2dp^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ap^2 + b/3 \\ 2 \cdot 3p^2 c + 2dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6ap^2 + b \\ 2 \cdot 3p^2 (3c + d) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sayısı elde edilir. Bu durumda

(10*) $3 \mid b$ ve $3 \nmid d$ olduğunda $\dfrac{6a + b}{2.3p^2 (3c + d)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2p^2 \end{pmatrix}$ dir.

(11*) $3 \nmid b$ ve $3 \mid d$ olduğunda $\dfrac{6a + b}{2.3^2 p^2 (c + d_0)} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2.3^2 p^2 \end{pmatrix}$ dir.

(12*) $3 \nmid b$ ve $3 \nmid d$ olsun. Bu durumda

$$y = \left(2 \cdot 3^2 p^2, 2 \cdot 3p^2 (3c + d)\right) = 2 \cdot 3p^2 \text{ ve } \left(y, \frac{2 \cdot 3^2 p^2}{y}\right) = 3$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} x &\equiv \left(6ap^2 + b\right)(3c + d) \pmod 3 \\ &\equiv bd \pmod 3 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $k, \ell \in \mathbb{Z}$ için $b = 6k \pm 1$ ve $d = 6\ell \pm 1$ veya $d = 6\ell \pm 2$ olduğundan $x \equiv \pm 1 \pmod 3$ veya $x \equiv \pm 2 \pmod 3$ bulunur. $p \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan

$$T_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot 3p^2 \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \cdot 3p^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)\right)$ grubunun transitif olduğu $\hat{\mathbb{Q}}$ nın maksimal alt kümelerden biri;

$$\hat{\mathbb{Q}}(2\cdot 3^2p^2)=\binom{1}{1}\cup\binom{1}{2}\cup\binom{1}{3}\cup\binom{2}{3}\cup\binom{1}{2\cdot 3}\cup\binom{5}{2\cdot 3}\cup\binom{1}{3^2}\cup\binom{1}{2\cdot 3^2}\cup\binom{1}{p^2}\cup$$
$$\cup\binom{1}{2p^2}\cup\binom{1}{3p^2}\cup\binom{2}{3p^2}\cup\binom{1}{2\cdot 3p^2}\cup\binom{11}{2\cdot 3p^2}\cup\binom{1}{3^2p^2}\cup\binom{1}{2\cdot 3^2p^2}$$

dir. ■

Teorem 3.10. $\hat{\mathbb{Q}}(2\cdot 3^2p^2)$ de bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat: Transitif hareketten dolayı herhangi iki noktanın sabitleyeni eşleniktir. Böylece sadece ∞ un $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$ deki sabitleyenini göz önüne almak yeterlidir.

$$T=\begin{pmatrix} ae & \frac{b}{3} \\ 2\cdot 3p^2c & de \end{pmatrix}\in\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$$

için

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae & \frac{b}{3} \\ 2\cdot 3p^2c & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae \\ 2\cdot 3p^2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

olduğundan $c=0$ dır. Bu durumda $e=1$ ve $ad=1$ olduğundan $T=\begin{pmatrix}1 & b/3\\0 & 1\end{pmatrix}$ elde edilir. Bu da $\left(\mathcal{N}or\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)_\infty=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1/3\\0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle$ olduğunu gösterir. ■

Şimdi imprimitif hareketi irdeleyelim. Teorem 2.24 te

$G_\alpha=\left(\mathcal{N}or\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)_\infty$, $G=\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$ ve

$$H=N_0\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)=\left\langle\Gamma_C\left(2\cdot 3^2p^2\right),\ T_2=\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\right\rangle$$

olarak alınırsa açıkça

$$\left(\mathcal{N}or\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)_\infty<N_0\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)<\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$$

dır.

Teorem 3.11. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki imprimitif hareketi sonucunda oluşan bloklar

$$[0]=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}5\\2\cdot 3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2\end{pmatrix}$$

$$[\infty]=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}11\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2p^2\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

İspat: $\left|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right):\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|=2^\rho\cdot h^2.\tau$ indeks hesabında $N=2\cdot 3^2p^2$ alındığında $\rho=2$, $h=3$ ve $\tau=\dfrac{4}{3}$ olduğu açıktır. Buna göre

$$\left|\Gamma_C\left(2\cdot 3^2 p^2\right):\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|=h^2\cdot\tau=9\cdot\frac{4}{3}=12,$$

$$\left|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right):\Gamma_C\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|=2^\rho=4,$$

$$\left|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right):\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|=48,$$

$$\left|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right):N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|=2,$$

bulunur. Ayrıca

$T_2^2\in\Gamma_C\left(N\right)\Leftrightarrow a+d=\pm 1$ olduğundan $\left|N_0\left(2\cdot 3^2p^2\right):\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right|=24$

dir. Buna göre

$$\underbrace{\left|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right):\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|}_{48}=\underbrace{\left|N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right):\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|}_{24}\cdot\underbrace{\left|\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right):N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right|}_{2}$$

olur. Buradan açıkça

$$\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)=N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\cup\begin{pmatrix}ap^2 & b/3\\ 2\cdot 3p^2c & dp^2\end{pmatrix}N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$$

dir. Böylece denklik sınıflarının sayısı (blok sayısı) 2 dir.

Teorem 2.24 gereğince;

$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix}a & b/3\\ 2\cdot 3p^2c & d\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ 2\cdot 3p^2c\end{pmatrix}$ dir. a tek ve $a = 3a_0$ ise $\begin{pmatrix}1\\ 2p^2\end{pmatrix}$, a tek

ve $3 \nmid a$ ise $\begin{pmatrix}1\\ 2\cdot 3p^2\end{pmatrix}$, $a = 5a_0$ ise $\begin{pmatrix}5\\ 2\cdot 3p^2\end{pmatrix}$ ye gider.

$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{g}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix}2a & b/3\\ 2\cdot 3p^2c & 2d\end{pmatrix}}_{h}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ 3p^2c\end{pmatrix}$ ve $2ad - bcp^2 = 1$ olduğundan $a = 3a_0$ ise

$\begin{pmatrix}1\\ p^2\end{pmatrix}$, $3 \nmid a$ $c = 3c_0$ ise $\begin{pmatrix}1\\ 3p^2\end{pmatrix}$, a çift c tek ise $\begin{pmatrix}2\\ 3p^2\end{pmatrix}$, $c = 3c_0$ ise $\begin{pmatrix}1\\ 3^2p^2\end{pmatrix}$ ye gider .

Benzer işlemlerle bloklar istenilen şekilde elde edilir. ■

Burada amaç, $N_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)$ grubunun elemanlarıyla normalliyene yaklaşarak normalliyenin yapısını incelemek ve $N_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)$ elemanlarını graflarla karakterize etmektir.

$G = \mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$ ve $X = \hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2p^2\right)$ alınırsa $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$ grubunun $\hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2p^2\right)$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan herhangi bir alt yörünge $v \in \hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2p^2\right)$ için (∞, v) ikilisini ihtiva eder öyle ki $\left(u, p^2\right) = 1$ ve $v = \dfrac{u}{p^2}$ dir. Bu alt yörünge $O\left(\infty, \dfrac{u}{p^2}\right)$ ile ve karşılık gelen alt yörüngesel graf $G\left(\infty, \dfrac{u}{p^2}\right)$ veya kısaca G_{u,p^2} ile gösterilir.

$\left(\dfrac{r}{s}, \dfrac{x}{y}\right) \in O\left(\infty, \dfrac{u}{p^2}\right)$ olmasını $\dfrac{r}{s} \to \dfrac{x}{y}$ ile göstereceğiz. Bazen bu durumu $\dfrac{r}{s} \to \dfrac{x}{y} \in G_{u,p^2}$ ile de gösterebileceğiz.

Teorem 3.12. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin G_{u,p^2} de bir kenar olması için gerek ve yeter şart

(i) $2 \cdot 3^2 p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm ur \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $y \equiv \pm us \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(ii) $3^2 p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2ur \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $y \equiv \pm 2us \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(iii) $2 \cdot 3p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 3ur \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $y \equiv \pm 3us \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $ry - sx = \pm 3p^2$

(iv) $3p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2 \cdot 3ur \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $y \equiv \pm 2 \cdot 3us \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $ry - sx = \pm 3p^2$

(v) $2p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 3^2 ur \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $y \equiv \pm 3^2 us \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(vi) $p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2 \cdot 3^2 ur \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $y \equiv \pm 2 \cdot 3^2 us \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

koşullarından birinin sağlanmasıdır.

İspat: "$\Rightarrow$" : $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$, G_{u,p^2} de bir kenar olsun. Bu takdirde $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O\left(\infty, \frac{u}{p^2}\right)$ dir.

Dolayısıyla $T \in \mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)\right)$ vardır öyle ki $T(\infty) = \frac{r}{s}, T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \frac{x}{y}$ dir.

(i) $2 \cdot 3^2 p^2 \parallel s$ ise $T_1 = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2 \cdot 3p^2 c & d \end{pmatrix}$, $\det T_1 = ad - 2bcp^2 = 1$ elemanını inceleyelim.

Burada a ve d tek , $3 \nmid a, d$, $3 \mid b, c$ olsun. Böylece $i = 0,1$ için

$$T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2 \cdot 3p^2 c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \cdot 3^2 p^2 c_0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^i r}{(-1)^i s}$$

olduğundan $r = (-1)^i a$ ve $s = (-1)^i 2 \cdot 3^2 p^2 c_0$ dır. Ayrıca $j = 0,1$ için

$$T \begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_0 \\ 2 \cdot 3^2 p^2 c_0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{au + b_0 p^2}{2 \cdot 3^2 p^2 u c_0 + dp^2} = \frac{(-1)^j x}{(-1)^j y}$$

şeklindedir. $\det T_1 = 1$ olduğundan $\left(au + b_0 p^2, 2 \cdot 3^2 p^2 u c_0 + dp^2\right) = 1$ olur. Buradan

$$x \equiv (-1)^j \left(au + bp^2\right) \left(\mathrm{mod}\, p^2\right) \text{ ve } y \equiv (-1)^j \left(2 \cdot 3^2 p^2 c_0 u + dp^2\right) \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$$

olup

$$x \equiv (-1)^{i+j} ur \left(\bmod p^2\right) \quad \text{ve} \quad y \equiv (-1)^{i+j} us \left(\bmod p^2\right)$$

bulunur. Yani

$$x \equiv \pm ur \left(\bmod p^2\right), y \equiv \pm us \left(\bmod p^2\right)$$

bulunur.

$$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2 c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au + b_0 p^2 \\ 2\cdot 3^2 p^2 c_0 & 2\cdot 3^2 p^2 c_0 u + dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i r & (-1)^j x \\ (-1)^i s & (-1)^j y \end{pmatrix}$$

için

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j}(ry - sx) &= (-1)^{i+j}\left(adp^2 - 2\cdot 3^2 p^2 c_0 b_0 p^2\right) \\ &= (-1)^{i+j} p^2 \left(ad - 2\cdot 3^2 p^2 c_0 b_0\right) = \pm p^2 \end{aligned}$$

dir.

(ii) $3^2 p^2 \parallel s$ ise $T_2 = \begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2 c & 2d \end{pmatrix}$ şeklinde olup $\det T_2 = 2ad - bcp^2 = 1$ dir. Burada $3 \nmid a$ ve $3 \mid b, c$ olsun. $i = 0,1$ için

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2 c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{3^2 p^2 c_0} = \frac{(-1)^i r}{(-1)^i s}$$

olduğundan $r = (-1)^i a$, $s = (-1)^i 3^2 p^2 c_0$ olur. $j = 0,1$ için

$$T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2 c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{2au + b_0 p^2}{2\cdot 3^2 p^2 c_0 u + 2dp^2} = \frac{2au + b_0 p^2}{2\left(3^2 p^2 c_0 u + dp^2\right)} = \frac{(-1)^j x}{(-1)^j y}$$

şeklindedir. $\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 3p^2 c & d \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı 1 ve $\left(u, p^2\right) = 1$ olduğundan $\left(2au + b_0 p^2, 3^2 p^2 c_0 u + dp^2\right) = 1$ olur. b tek olduğundan

$$\left(2au + b_0 p^2, 2\left(3^2 p^2 c_0 u + dp^2\right)\right) = 1$$

dir. Böylece

$$x \equiv (-1)^j \left(2au + b_0 p^2\right)\left(\bmod p^2\right) \text{ve } \; y \equiv (-1)^j\, 2\left(3^2 p^2 c_0 u + dp^2\right)\left(\bmod p^2\right)$$

dir. O halde

$$x \equiv (-1)^{i+j}\, 2ur\left(\bmod p^2\right) \;\text{ ve }\; y \equiv (-1)^{i+j}\, 2us\left(\bmod p^2\right)$$

olur. Yani

$$x \equiv \pm 2ur\left(\bmod p^2\right), y \equiv \pm 2us\left(\bmod p^2\right)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2au + b_0 p^2 \\ 2\cdot 3^2 p^2 c_0 & 2\cdot 3^2 p^2 c_0 u + 2dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i r & (-1)^j x \\ (-1)^i s & (-1)^j y \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$(-1)^{i+j}(ry - sx) = (-1)^{i+j}\left(2\cdot 3adp^2u - 2\cdot 3^2 p^4 c_0 b_0\right) = (-1)^{i+j}\, p^2\left(2ad - bcp^2\right) = \pm p^2$$

bulunur.

(iii) $2\cdot 3p^2 \,\|\, s$ ise $T_1 = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}$ ve $ad - 2bcp^2 = 1$ dir. Buradan a ve d tek olmak zorundadır. $3 \nmid a,b,c,d$ olsun.

$$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{(-1)^i r}{(-1)^i s}$$

dir. Burada $r = (-1)^i a$, $s = (-1)^i\, 2\cdot 3p^2c$ olur. $j = 0{,}1$ için

$$T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{au + b/3\, p^2}{2\cdot 3p^2cu + dp^2} = \frac{(-1)^j x}{(-1)^j y}$$

şeklindedir. $\det T_1 = 1$ olduğundan $\left(au + b/3\, p^2, 2\cdot 3p^2cu + dp^2\right) = 1$ olur. Buradan

$$x = (-1)^j\left(au + b/3\, p^2\right)\left(\bmod p^2\right) \text{ve } \; y = (-1)^j\left(2\cdot 3p^2cu + dp^2\right)\left(\bmod p^2\right)$$

dir. O halde

$x \equiv (-1)^{i+j} 3ur \pmod{p^2}$ ve $y \equiv (-1)^{i+j} 3us \pmod{p^2}$

olur. Yani

$x \equiv \pm 3ur \pmod{p^2}$ ve $y \equiv \pm 3us \pmod{p^2}$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & au + b/3\, p^2 \\ 2\cdot 3p^2c & 2\cdot 3p^2cu + dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i r & (-1)^j x \\ (-1)^i s & (-1)^j y \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$(-1)^{i+j}(ry - sx) = (-1)^{i+j}\left(3adp^2 - 2\cdot 3p^4bc\right) = (-1)^{i+j} 3p^2\left(ad - 2bcp^2\right) = \pm 3p^2$$

bulunur.

(iv) $3p^2 \parallel s$ ise $T_2 = \begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}$ olup $2ad - bcp^2 = 1$ dir. Burada b ve c tek olmak zorundadır. $3 \nmid a,b,c$ olsun. $i = 0,1$ için

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{a}{3p^2c} = \frac{(-1)^i r}{(-1)^i s}$$

olduğundan $r = (-1)^i a$, $s = (-1)^i 3p^2c$ olur. $j = 0,1$ için

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{2au + b/3\, p^2}{2\cdot 3p^2cu + 2dp^2} = \frac{2\cdot 3au + bp^2}{2\cdot 3^2p^2cu + 2\cdot 3dp^2} = \frac{(-1)^j x}{(-1)^j y}$$

dir. $\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı 1 ve $(u,p^2) = 1$ olduğundan

$$\left(6au + bp^2, 3\left(3p^2cu + dp^2\right)\right) = 1$$

olur. Buradan ve $3 \nmid b$ olduğundan $\left(6au + bp^2, 2\cdot 3\left(3p^2cu + dp^2\right)\right) = 1$ dir. Böylece

$$x \equiv (-1)^j \left(6au + bp^2\right)\left(\bmod p^2\right) \text{ ve } y \equiv (-1)^j\, 2\cdot 3\left(3p^2cu + dp^2\right)\left(\bmod p^2\right)$$

olur . Buna göre

$$x \equiv (-1)^{i+j}\, 6ur\left(\bmod p^2\right) \text{ ve } y \equiv (-1)^{i+j}\, 6us\left(\bmod p^2\right)$$

dir. Yani

$$x \equiv \pm 6ur\left(\bmod p^2\right), y \equiv \pm 6us\left(\bmod p^2\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2\cdot 3au + bp^2 \\ 3p^2c & 2\cdot 3^2p^2cu + 2\cdot 3dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i r & (-1)^j x \\ (-1)^i s & (-1)^j y \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$(-1)^{i+j}(ry - sx) = (-1)^{i+j}\left(2\cdot 3adp^2 - 3p^4bc\right) = (-1)^{i+j}\, 3p^2\left(2ad - bcp^2\right) = \pm 3p^2$$

dir.

(v) $2p^2 \parallel s$ ise $T_1 = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}$, $\det T = ad - 2bcp^2 = 1$ dir. $3 \mid a$, $3 \nmid b$ olsun.

$i = 0,1$ için

$$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a_0}{2\cdot 3p^2c} = \frac{(-1)^i r}{(-1)^i s}$$

dir. Buradan $r = (-1)^i a_0$ ve $s = (-1)^i\, 2\cdot 3p^2c$ olur. $j = 0,1$ için

$$T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{au + b/3\, p^2}{2\cdot 3p^2cu + 2dp^2} = \frac{3^2a_0u + bp^2}{2\cdot 3^2p^2cu + 2\cdot 3dp^2} = \frac{(-1)^j x}{(-1)^j y}$$

Burada $\det T_1 = 1$ olduğundan $\left(3^2a_0u + bp^2, 2\cdot 3^2p^2cu + 2\cdot 3dp^2\right) = 1$ olur. Buna göre

$$x \equiv (-1)^j\left(3^2a_0u + bp^2\right)\left(\bmod p^2\right) \text{ ve } y \equiv (-1)^j\left(2\cdot 3^2p^2cu + 2\cdot 3dp^2\right)\left(\bmod p^2\right)$$

dir. O halde

$x \equiv (-1)^{i+j} 3^2 ur \left(\bmod p^2\right)$ ve $y \equiv (-1)^{i+j} 3^2 us \left(\bmod p^2\right)$

olur. Yani

$x \equiv \pm 3^2 ur \left(\bmod p^2\right)$ ve $y \equiv \pm 3^2 us \left(\bmod p^2\right)$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & 3^2 a_0 u + bp^2 \\ 2\cdot 3p^2c & 2\cdot 3^2 p^2cu + 3dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i r & (-1)^j x \\ (-1)^i s & (-1)^j y \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$(-1)^{i+j}(ry - sx) = (-1)^{i+j}\left(3a_0dp^2 - 2bcp^4\right) = (-1)^{i+j} p^2\left(3a_0d - 2bcp^2\right) = \pm p^2$$

dir.

(vi) $p^2 \parallel s$ ise $T=\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}$ olmak zorundadır. $2ad - bcp^2 = 1$ dir. $3 \mid a$, $3 \nmid b$, $3 \nmid c$ olsun. Burada

$$T_2\left(\frac{1}{0}\right) = \begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2a}{2\cdot 3p^2c} = \frac{a_0}{p^2c} = \frac{(-1)^i r}{(-1)^i s}$$

olur ve $r = (-1)^i a$, $s = (-1)^i p^2c$ bulunur. $j = 0,1$ için

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2\cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{6a_0u + b/3}{2\cdot 3p^2cu + 2dp^2} = \frac{18a_0u + b}{18p^2cu + 6dp^2} = \frac{(-1)^j x}{(-1)^j y}$$

burada $\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 3p^2c & d \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı 1 ve $\left(u, p^2\right) = 1$ olduğundan $\left(18a\ u + bp^2, 18p^2cu + 6dp^2\right) = 1$ dir. Böylece

$x \equiv (-1)^j \left(18a_0u + bp^2\right)\left(\bmod p^2\right)$ ve $y \equiv (-1)^j\, 2\cdot 3\left(3p^2cu + dp^2\right)\left(\bmod p^2\right)$

olur. O halde

$x \equiv (-1)^{i+j}\, 2\cdot 3^2 ur \left(\bmod p^2\right)$ ve $y \equiv (-1)^{i+j}\, 2\cdot 3^2 us \left(\bmod p^2\right)$

olur. Yani

$x \equiv \pm 2 \cdot 3^2 ur \left(\bmod p^2\right)$ ve $y \equiv \pm 2 \cdot 3^2 us \left(\bmod p^2\right)$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 2a & b/3 \\ 2 \cdot 3p^2c & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 2 \cdot 3a_0u + bp^2 \\ p^2c & 2 \cdot 3p^2cu + 2 \cdot 3dp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^i r & (-1)^j x \\ (-1)^i s & (-1)^j y \end{pmatrix}$$

den

$$(-1)^{i+j}(ry - sx) = (-1)^{i+j}\left(2 \cdot 3a_0dp^2 - bcp^4\right) = (-1)^{i+j} p^2\left(2 \cdot 3a_0d - bcp^2\right) = \pm p^2$$

dir.

"$\Leftarrow$": (i) $2 \cdot 3^2 p^2 \parallel s$ ve $x \equiv \pm ur\left(\bmod p^2\right), y \equiv \pm us\left(\bmod p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $k, \ell \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $x = ur + kp^2$ ve $y = us + \ell p^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında

$$ry - sx = r\left(us + \ell p^2\right) - s\left(ur + kp^2\right) = r\ell p^2 - ksp^2 = p^2$$

eşitliğinden $r\ell - ks = 1$ elde edilir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & k \\ s & \ell \end{pmatrix}, det\, T_0 = 1$ ve $2 \cdot 3^2 p^2 \parallel s$ göz önüne alındığında $T_0 \in \Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right) \subset N_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$ dir.

(ii) $3^2 p^2 \parallel s$ ve $x \equiv \pm 2ur\left(\bmod p^2\right), y \equiv \pm 2us\left(\bmod p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $x = 2ur + kp^2$ ve $y = 2us + 2\,\ell p^2$ olacak şekilde $k, \ell \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında $ry - sx = p^2\left(2r\ell - ks\right) = p^2$ den $4r\ell - 2ks = 2$ ve buradan $4r\ell - \frac{6ks}{3} = 1$ elde edilir.

$k_0 = 3k$ olmak üzere $4r\ell - \frac{2k_0s}{3} = 1$ olur. Böylece $T_0 := \begin{pmatrix} 2r & k_0/3 \\ 2s & 2\ell \end{pmatrix}, \det T_0 = 2$ ve $3^2 p^2 \parallel s$ göz önüne alındığında $T_0 \subset N_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$ dir.

(iii) $2\cdot 3p^2 \parallel s$ ve $x \equiv \pm 3ur \left(\bmod p^2\right), y \equiv \pm 3us \left(\bmod p^2\right)$, $ry - sx = \pm 3p^2$ olsun. Bu durumda $k, \ell \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $x = 3ur + kp^2$ ve $y = 3us + 3\ell p^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında

$$ry - sx = r\left(3us + 3\ell p^2\right) - s\left(3ur + kp^2\right) = 3r\ell - ks = 3,$$

yani $r\ell - \dfrac{ks}{3} = 1$ elde edilir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & k/3 \\ s & \ell \end{pmatrix}, det\, T_0 = 1$ ve $2\cdot 3p^2 \parallel s$ olduğundan $T_0 \subset N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ dir.

(iv) $3p^2 \parallel s$ ve $x \equiv \pm 2\cdot 3ur \left(\bmod p^2\right)$, $y \equiv \pm 2\cdot 3us \left(\bmod p^2\right)$, $ry - sx = \pm 3p^2$ olsun. Bu durumda $x = 6ur + kp^2$ ve $y = 6us + 6\ell p^2$ olacak şekilde $k, \ell \in \mathbb{Z}$ vardır. Determinanttan

$$ry - sx = r\left(6us + 6\ell p^2\right) - s\left(6ur + kp^2\right) = 3$$

olur. Buradan $2r\ell - \dfrac{ks}{3} = 1 \Rightarrow 4r\ell - \dfrac{2ks}{3} = 2$ elde edilir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} 2r & k/3 \\ 2s & 2\ell \end{pmatrix}, det\, T_0 = 2$ ve $3p^2 \parallel s$ olduğundan $T_0 \subset N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ dir.

(v) $2p^2 \parallel s$ ve $x \equiv \pm 3^2 ur \left(\bmod p^2\right)$, $y \equiv \pm 3^2 us \left(\bmod p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $k, \ell \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $x = 9ur + kp^2$ ve $y = 9us + 6\ell p^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında

$$ry - sx = r\left(9us + 6\ell p^2\right) - s\left(9ur + kp^2\right) = r\ell - ks = 1$$

den $r\ell - \dfrac{3ks}{3} = 1$ elde edilir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} r & k/3 \\ s & \ell \end{pmatrix}, det\, T_0 = 1$ ve $2p^2 \parallel s$ olduğundan $T_0 \subset N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ dir.

(vi) $p^2 \parallel s$ ve $x \equiv \pm 2\cdot 3^2 ur \left(\bmod p^2\right)$, $y \equiv \pm 2\cdot 3^2 us\left(\bmod p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$ olsun. Bu durumda $k,\ell \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $x = 18ur + kp^2$ ve $y = 18us + 2\ell p^2$ dir. Bu eşitlikler determinantta yerine yazıldığında

$$ry - sx = r\left(18us + 2\ell p^2\right) - s\left(18ur + kp^2\right) = 4r\ell - \frac{6ks}{3} = 2$$

dir. Buna göre $T_0 := \begin{pmatrix} 2r & k/3 \\ 6s & 2\ell \end{pmatrix}$, $\det T_0 = 2$ ve $p^2 \parallel s$ olduğundan $T_0 \subset N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.13. G_{u,p^2} alt yörüngesel grafının kendisiyle eşleşmesi için gerek ve yeter koşul $18u^2 \equiv -1 \; \left(\bmod p^2\right)$ olmasıdır.

İspat: **"⇒"** G_{u,p^2} kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu durumda $O\left(\infty, \frac{u}{p^2}\right) = O\left(\frac{u}{p^2}, \infty\right)$ dır. O halde $T = \begin{pmatrix} ae & b/3 \\ 2\cdot 3p^2 c & de \end{pmatrix} \in \mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ için

$$T(\infty) = \frac{u}{p^2} \quad \text{ve} \quad T\left(\frac{u}{p^2}\right) = \infty$$

dur. $T(\infty) = \frac{u}{p^2}$ olduğundan $\frac{ae}{2\cdot 3p^2 c} = \frac{u}{p^2}$ olup $3 \mid a$, $e = 1$ veya 2 olabilir. $e = 1$ ise $6 \mid a$ olmalıdır. $\det = ad - 2bcp^2 = 1$ ve a, d tek olduğundan bu bir çelişkidir. Bu durumda $e = 1$ olamaz. Buna göre $e = 2$, $3 \mid a$ ve $c = 1$ olur. O halde $a = 3a_0$ dır. Buradan

$$\frac{ae}{2\cdot 3p^2 c} = \frac{3a_0}{3p^2} = \frac{a_0}{p^2} = \frac{u}{p^2}$$

olur. Yani $a_0 = u$ dur.

$$\begin{pmatrix} ae & b/3 \\ 2\cdot 3p^2 c & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{3aeu + bp^2}{3p^2\left(2\cdot 3cu + de\right)} = \frac{1}{0}$$

olduğundan $2\cdot 3cu+de=0$ yani $2\left(3cu+d\right)=0$ olur. Buradan $d=-3u$ dur. O halde determinanttan

$$1=2ad-bcp^2 \; = 2.3a_0(-3u)-bcp^2$$

olur. Buradan $18u^2 \equiv -1 \left(\bmod p^2\right)$ bulunur.

"$\Leftarrow$": $18u^2 \equiv -1 \left(\bmod p^2\right)$ olsun. Bu takdirde $18u^2=-1-kp^2$ olacak şekilde $k\in\mathbb{Z}$ vardır. Buradan $-36u^2-2kp^2=2 \;\Rightarrow -36u^2-2\cdot 3\dfrac{k}{3}p^2=2$ olur.

$$T=\begin{pmatrix} 6u & k/3 \\ 2\cdot 3p^2 & -6u \end{pmatrix}$$

alınırsa $\det T=2$ olduğundan $T\in \mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$ bulunur. Ayrıca

$$T\left(\infty\right)=\frac{u}{p^2} \;\text{ ve }\; T\left(\frac{u}{p^2}\right)=-\frac{1}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

olduğundan $O\left(\infty,\dfrac{u}{p^2}\right)=O\left(\dfrac{u}{p^2},\infty\right)$ olur ki bu da G_{u,p^2} nin kendisi ile eşleşmiş olduğunu gösterir. ■

$\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2p^2\right)\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2p^2\right)$ üzerinde transitif olduğundan blokları transitif olarak permüte eder. Dolayısıyla alt graflar birbirine izomorftur. Böylece sadece bir blok üzerinde çalışmak yeterlidir. G_{u,p^2} nin köşeleri

$$[\infty]=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}2\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}11\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3^2p^2\end{pmatrix}$$

bloğunda olan alt grafını F_{u,p^2} ile gösterelim. G_{u,p^2}, F_{u,p^2} nin iki ayrı kopyasını ihtiva eder.

Teorem 3.14. $\frac{r}{s}$, $\frac{x}{y} \in [\infty]$ olmak üzere $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,p^2}$ olması için $\Leftrightarrow$

(i) $2 \cdot 3^2 p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm ur \left(\bmod p^2 \right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(ii) $3^2 p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 2ur \left(\bmod p^2 \right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(iii) $2 \cdot 3p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 3ur \left(\bmod p^2 \right)$, $ry - sx = \pm 3p^2$

(iv) $3p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 2 \cdot 3ur \left(\bmod p^2 \right)$, $ry - sx = \pm 3p^2$

(v) $2p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 3^2 ur \left(\bmod p^2 \right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(vi) $p^2 \| s$ ise $x \equiv \pm 2 \cdot 3^2 ur \left(\bmod p^2 \right)$, $ry - sx = \pm p^2$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.12. den açıktır. ■

Teorem 3.15. $N_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$, F_{u,p^2} nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: **(i)** $v, w \in [\infty]$, F_{u,p^2} nin köşeleri olsun. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3p^2\right)\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$ üzerinde transitif olduğundan $T = \begin{pmatrix} ae & b/3 \\ 2 \cdot 3p^2 c & de \end{pmatrix} \in \mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)\right)$ vardır öyleki $T(v) = w$ dır. $v, w \in [\infty]$ olduğundan $v = \dfrac{x}{yp^2}$ ve $w = \dfrac{k}{\ell p^2}$ şeklindedir. Buradan

$$T(v) = \begin{pmatrix} ae & b/3 \\ 2 \cdot 3p^2 c & de \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ yp^2 \end{pmatrix} = \frac{3ae + byp^2}{3p^2\left(acx + dey\right)} = \frac{k}{\ell p^2}$$

olup $e = 1$ veya $e = 2$ olmak zorundadır. O halde $T \in N_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$ olur. Yani $N_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$, $[\infty]$ bloğu üzerinde transitiftir.

Şimdi $N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ nin F_{u,p^2} nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiğini gösterelim. Bunun için $\frac{r}{sp^2}\rightarrow\frac{x}{yp^2}$ ve $\frac{k_1}{\ell_1 p^2}\rightarrow\frac{k_2}{\ell_2 p^2}$ F_{u,p^2} de iki kenar olsun. Burada

$$\left(\frac{r}{sp^2},\frac{x}{yp^2}\right),\left(\frac{k_1}{\ell_1 p^2},\frac{k_2}{\ell_2 p^2}\right)\in O\left(\infty,\frac{u}{p^2}\right)$$

dır. Buna göre $T_1,T_2\in \mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$ için

$$T_1(\infty)=\frac{r}{sp^2}\ ,\ T_1\left(\frac{u}{p^2}\right)=\frac{x}{yp^2}\quad \text{ve}\quad T_2(\infty)=\frac{k_1}{\ell_1 p^2}\ ,\ T_2\left(\frac{u}{p^2}\right)=\frac{k_2}{\ell_2 p^2}$$

dir. Buradan yine $e=1$ veya $e=2$ olmak zorundadır. Buna göre

$$T_2T_1^{-1}\left(\frac{r}{sp^2}\right)=\frac{k_1}{\ell_1 p^2}\quad \text{ve}\quad T_2T_1^{-1}\left(\frac{x}{yp^2}\right)=\frac{k_2}{\ell_2 p^2}$$

dir. Dolayısıyla $N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right), F_{u,p^2}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte eder. ■

Teorem 3.16. F_{u,p^2} nin kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmez.

İspat: Aksini farzedelim. Yani $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)\right)$, $\hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ üzerinde transitif olduğundan $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{u}{p^2}$, $\frac{x_1}{y_1p^2}\rightarrow\frac{x_2}{y_2p^2}$ ve $\frac{x_1}{y_1p^2}<\frac{u}{p^2}<\frac{x_2}{y_2p^2}$ olsun. $x_1y_2p^2-x_2y_1p^2=-p^2$ veya $-3p^2$ olur. Buradan $x_1y_2-x_2y_1=-1$ veya $x_1y_2-x_2y_1=-3$ ve ayrıca kenar şartlarından $y_1=3$ veya $y_1=6$ dır.

$x_1y_2-x_2y_1=-3$ olsun. $\frac{x_1}{y_1}<u<\frac{x_2}{y_2}$ olduğundan $\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}<u-\frac{x_2}{y_2}<0$ olur. Buradan

$$\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1y_2}<\frac{uy_2-x_2}{y_2}<0$$

olup

$$\frac{-3}{y_1y_2}<\frac{uy_2-x_2}{y_2}<0\,,$$

yani $\frac{-3}{y_1} < uy_2 - x_2 < 0$ bulunur. Buna göre y_1 in durumundan -1 ile 0 arasında başka bir tam sayı olması çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla F_{u,p^2} nin kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmez. ■

Teorem 3.17. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının ikigen içermesi için gerek ve yeter koşul $18u^2 \equiv -1 \pmod{p^2}$ olmasıdır. ■

Örnek: $\frac{1}{0} \to \frac{4}{289} \to \frac{1}{0}$ ve $\frac{1}{18\cdot 289} \to \frac{4}{71\cdot 289} \to \frac{1}{18\cdot 289}$ açıkça $F_{4,289}$ da ikigendir.

Teorem 3.18. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı üçgen içermez.

İspat: "$\Rightarrow$": $\hat{\mathbb{Q}}\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ üzerindeki hareket transitif olduğundan genellikten bir şey kaybetmeden devreyi

$$\infty \to \frac{k}{\ell} \to \frac{x}{y} \to \infty$$

biçiminde kabul edebiliriz. Teorem 3.12 den $k \equiv \pm u \left(\bmod p^2\right)$ ve $\ell = p^2$ dir. Buradan

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x}{y} \to \frac{1}{0}$$

olup Teorem 3.12 gereğince son kenar için $y = \pm p^2, \pm 3p^2$ olabilir.

(i) $y = p^2$ ise 2. kenar şartından $up^2 - xp^2 = \pm p^2$ ve $x = u \pm 1$ olur. Ayrıca $x \equiv \pm 18u^2 \left(\bmod p^2\right)$ bağıntısı elde edilir. Buradan $u \pm 1 \equiv \pm 18u^2 \left(\bmod p^2\right)$ $18u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ ve 3. kenar şartından $1 \equiv -18u(u \pm 1) \left(\bmod p^2\right)$, yani $18u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ bağıntısı elde edilir. Bu ikisinden $17u^2 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olur. Buradan $u \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olur ki bu $\left(u, p^2\right) = 1$ olması ile çelişir.

(ii) $y = 3p^2$ ise $3up^2 - xp^2 = \pm p^2$, yani $3u \pm 1 = x$ olur. Buna göre 2. kenar şartından $18u^2 \pm 3u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ bağıntısı ve 3. kenar şartından

$$18u^2 \pm 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$$

bağıntısı elde edilir. Burada yine $u \equiv 0 \left(\bmod p^2 \right)$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı üçgen içermez. ■

Teorem 3.19. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının dörtgen ihtiva etmesi için gerek ve yeter koşul $18u^2 \pm 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olmasıdır.

İspat: **"⇒"**: F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı bir dörtgen ihtiva etsin. Transitiflikten bu dörtgen $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x_1}{y_1 p^2} \to \frac{x_2}{y_2 p^2} \to \frac{1}{0}$ biçiminde seçilebilir. Buradaki tüm harfler pozitif tamsayıdır. $\frac{u}{p^2} \to \frac{x_1}{y_1 p^2}$ kenarından $x_1 = uy_1 + 1$ ve $x_1 \equiv -18u^2 \left(\bmod p^2\right)$ dir. Buradan

$$18u^2 + uy_1 + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right) \tag{3.5}$$

olur. Teorem 3.12 ye göre kenar şartlarından $y_2 = 1$ veya $y_2 = 3$ olur. Buradan

$$1 \equiv -18ux_2 \left(\bmod p^2\right) \tag{3.6}$$

$$1 \equiv -6ux_2 \left(\bmod p^2\right) \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.5), (3.6) ve (3.7) denklemlerinden

$$1 \equiv -18u\left(u + {}^{y_1}\!/_{18}\right)\left(\bmod p^2\right) \tag{3.8}$$

$$1 \equiv -6u\left(3u + {}^{y_1}\!/_{6}\right)\left(\bmod p^2\right) \tag{3.9}$$

olur. Bu ikisinden $y_1 = 6$ veya $y_1 = 18$ olmalıdır.

Şimdi $y_2 = 1$ olsun. $\frac{x_1}{y_1 p^2} \to \frac{x_2}{p^2}$ kenarında

$y_1 = 18$ için $x_1 - y_1 x_2 = -1$, $18u + 2 = 18x_2$ olup $18 \mid 2$ çelişkisi elde edilir.

$y_1 = 6$ için $x_1 - y_1 x_2 = -1$, $6u + 1 - 6x_2 = -3$, $6\left(u - x_2\right) = -4$ olduğundan $6 \mid 4$ çelişkisi elde edilir.

Öte yandan $y_2 = 3$ ise $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x_1}{y_1 p^2} \to \frac{x_2}{3p^2} \to \frac{1}{0}$ olur.

$y_1 = 18$ olsun. Bu durumda kenar şartlarından $3x_1 - y_1 x_2 = -1$, $54u + 3 - 18x_2 = -1 \Rightarrow 27u - 9x_2 = -2$ bulunur ki bu da $9 \mid 2$ çelişkisini verir. O halde $y_1 = 6$ ve $y_2 = 3$ olmalıdır.

Dolayısıyla F_{u,p^2} nin dörtgen içermesi için $18u^2 + 6u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ olmalıdır. Eğer devre azalan olsaydı $18u^2 - 6u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ elde edilirdi.

"$\Leftarrow$": $18u^2 \pm 6u + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ ise Teorem 3.12 deki kenar şartlarından

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{6u \pm 1}{6p^2} \to \frac{3u \pm 1}{3p^2} \to \frac{1}{0}$$

dörtgeni açıkça bulunur. ■

Örnek: $F_{7,25}$ grafı kenarları $\frac{2}{9 \cdot 25} \to \frac{3}{14 \cdot 25} \to \frac{11}{51 \cdot 25} \to \frac{13}{60 \cdot 25} \to \frac{2}{9 \cdot 25}$ olan dörtgen ihtiva eder.

Çözüm: $\frac{2}{9 \cdot 25} \to \frac{x_1}{y_1 \cdot 25} \to \frac{x_2}{y_2 \cdot 25} \to \frac{x_3}{y_3 \cdot 25} \to \frac{x_4}{y_4 \cdot 25}$ devrenin kapanması ve dörtgen oluşması için son kenarın $\frac{2}{9 \cdot 25}$ olması gerekmektedir. Bu nedenle $x_4 = 2$ ve $y_4 = 9$ olmalıdır.

1.kenar için $3^2 p^2 \parallel s$ olduğu için kenar şartından

$x_1 \equiv \pm 2ur \pmod{p^2}$, yani $x_1 \equiv \pm 2 \cdot 7 \cdot 2 \pmod{25}$

ten $x_1 = 3$ seçilebilir. $ry - sx = p^2$ den $y_1 = 14$ bulunur.

2. kenar için $2p^2 \parallel s$ kenar şartından $x_2 \equiv \pm 3^2 \cdot 7 \cdot 3 \pmod{25}$ ten $x_2 = 11$ seçilirse $ry - sx = -25$ ve $y_2 = 51$ olur.

3.kenar için $3p^2 \parallel s$ kenar şartından $x_3 \equiv -2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \pmod{25}$ için $x_3 = 13$ olur. $11 \cdot y_3 \cdot 25 - 13 \cdot 51 \cdot 25 = -3 \cdot 25$ ve $y_3 = 60$ bulunur.

4. Kenar için $2 \cdot 3p^2 \parallel s$ olduğundan

$2 \equiv -3 \cdot 7 \cdot 13 \pmod{25}$

$\equiv -23 \pmod{25}$

bulunur ki, böylece $F_{7,25}$ grafında $\frac{2}{9 \cdot 25} \to \frac{3}{14 \cdot 25} \to \frac{11}{51 \cdot 25} \to \frac{13}{60 \cdot 25} \to \frac{2}{9 \cdot 25}$ dörtgeni elde edilir.

Örnek: $F_{1,25}$ grafı kenarları $\frac{1}{3 \cdot 25} \to \frac{19}{54 \cdot 25} \to \frac{6}{17 \cdot 25} \to \frac{17}{48 \cdot 25} \to \frac{1}{3 \cdot 25}$ olan dörtgen ihtiva eder.

Çözüm: $\frac{1}{3 \cdot 25} \to \frac{x_1}{y_1 \cdot 25} \to \frac{x_2}{y_2 \cdot 25} \to \frac{x_3}{y_3 \cdot 25} \to \frac{x_4}{y_4 \cdot 25}$ devrenin kapanması ve dörtgen oluşması için son kenarın $\frac{1}{3 \cdot 25}$ olması gerekmektedir. Bu nedenle $x_4 = 1$ ve $y_4 = 3$ olmalıdır.

1.kenar için $3p^2 \parallel s$ kenar şartından $x_1 \equiv \pm 2 \cdot 3ur \left(\text{mod p}^2\right)$ yani $x_1 \equiv \pm 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \pmod{25}$ ten $x_1 = 19$ seçilebilir. Bu durumda $ry - sx = -3p^2$ den $1 \cdot y_1 \cdot 25 - 19 \cdot 3 \cdot 25 = -3 \cdot 25$, $y_1 = 54$ bulunur.

2. kenar için $2 \cdot 3^2 p^2 \parallel s$ kenar şartından $x_2 \equiv -1 \cdot 19 \pmod{25}$ ten $x_2 = 6$ seçilirse $ry - sx = 19 \cdot y_2 \cdot 25 - 54 \cdot 6 \cdot 25 = -25$ ve $y_2 = 17$ olur.

3. kenar için $p^2 \parallel s$ kenar şartından $x_3 \equiv -2 \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 6 \pmod{25}$ için $x_3 = 17$ olur. $6 \cdot y_3 \cdot 25 - 17 \cdot 17 \cdot 25 = -25$ ve $y_3 = 48$ bulunur.

4. kenar için $2 \cdot 3p^2 \parallel s$ oluğundan $1 \equiv 3 \cdot 1 \cdot 17 \pmod{25}$ olur. Dolayısıyla

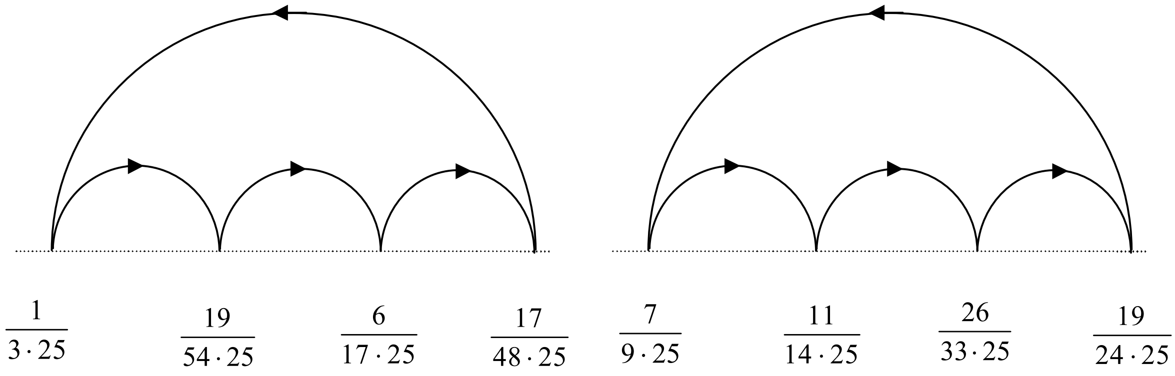
$$\frac{1}{3 \cdot 25} \to \frac{19}{54 \cdot 25} \to \frac{6}{17 \cdot 25} \to \frac{17}{48 \cdot 25} \to \frac{1}{3 \cdot 25}$$

devresi $F_{1,25}$ grafında bir dörtgendir.

Benzer şekilde

$$\frac{7}{9 \cdot 25} \overset{<}{\to} \frac{11}{14 \cdot 25} \to \frac{26}{33 \cdot 25} \to \frac{19}{24 \cdot 25} \to \frac{7}{9 \cdot 25}$$

nin $F_{1,25}$ grafında dörtgen olduğu gösterilebilir.



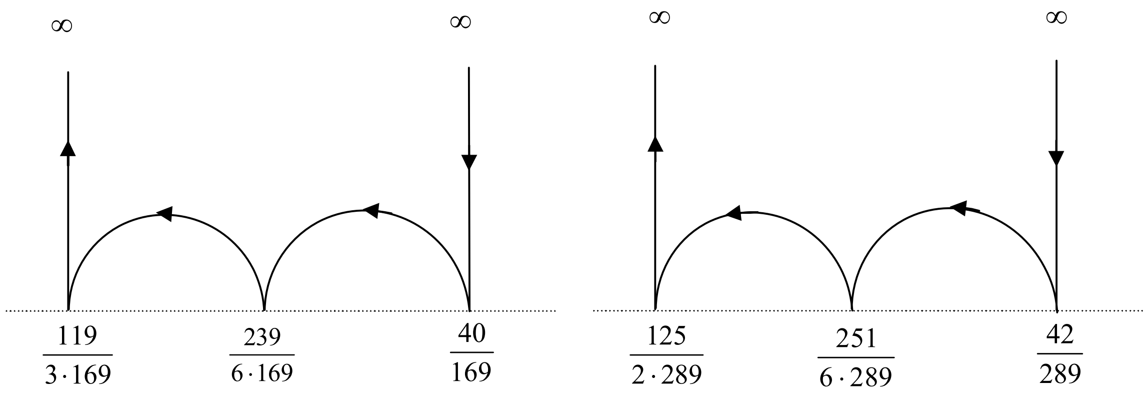
Şekil 3.1 $F_{1,25}$ alt yörüngesel grafında dörtgenler

Ayrıca $T = \begin{pmatrix} -24 & 1/3 \\ -2\cdot 3\cdot 25 & 2 \end{pmatrix} \in N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ ile $F_{1,25}$ deki

$\frac{1}{3\cdot 25} \to \frac{19}{54\cdot 25} \to \frac{6}{17\cdot 25} \to \frac{17}{48\cdot 25} \to \frac{1}{3\cdot 25}$ dörtgeni $\frac{1}{0} \to \frac{1}{25} \to \frac{7}{6\cdot 25} \to \frac{4}{3\cdot 25} \to \frac{1}{0}$

dörtgenine resmedilir.

Örnek: Teorem 3.19 dan $\frac{1}{0} \to \frac{40}{169} \to \frac{239}{6\cdot 169} \to \frac{119}{3\cdot 169} \to \frac{1}{0}$ nin $F_{40,169}$ de ve $\frac{1}{0} \to \frac{42}{289} \to \frac{251}{6\cdot 289} \to \frac{125}{3\cdot 289} \to \frac{1}{0}$ nin $F_{42,289}$ de dörtgen olduğu açıktır.



Şekil 3.2. $F_{40,169}$ ve $F_{42,289}$ alt yörüngesel graflarında dörtgenler

Teorem 3.20. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı ormandır ancak ve ancak $18u^2 \pm 6u + 1 \not\equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ dir.

İspat: **"$\Rightarrow$":** F_{u,p^2} orman ise tanım gereği dörtgen içermez. Dolayısıyla $18u^2 \pm 6u + 1 \not\equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olur.

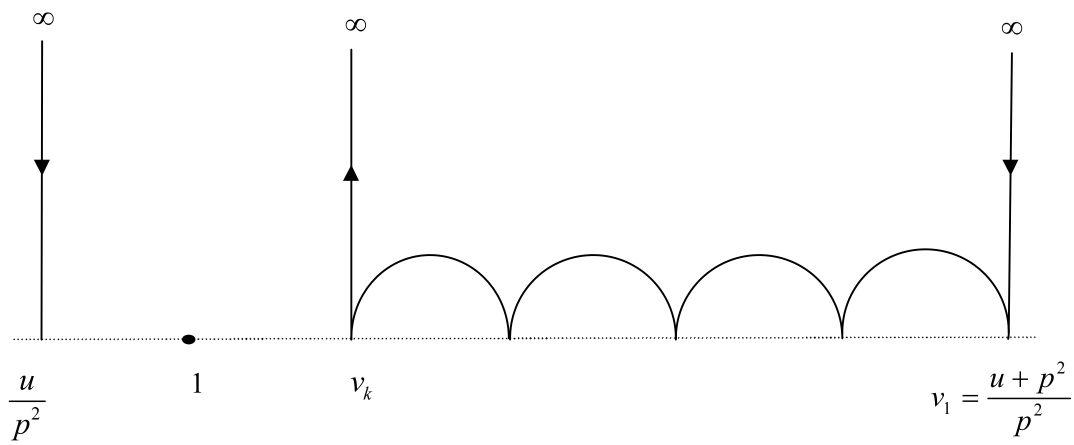
"$\Leftarrow$": $18u^2 \pm 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olsun. F_{u,p^2} nin orman olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. Yani F_{u,p^2} orman olmasın. Bu durumda F_{u,p^2} de

$\infty \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to \infty$

şeklinde uzunlukta bir C devresi vardır. Burada alınan herhangi bir devren periyodu 1 olduğundan C-nin ∞ - dan farklı köşelerini $\left[\dfrac{u}{p^2}, \dfrac{u+p^2}{p^2}\right]$ aralığında seçebiliriz.

Kenar şartlarından $v_1 = \dfrac{u}{p^2}$ veya $v_1 = \dfrac{u+p^2}{p^2}$ dir.

Eğer $v_1 = \dfrac{u+p^2}{p^2}$ ise v_k , $\left[\dfrac{u}{p^2}, \dfrac{u+p^2}{p^2}\right]$ aralığında $v_k \to \infty$ olan bir tek köşedir.



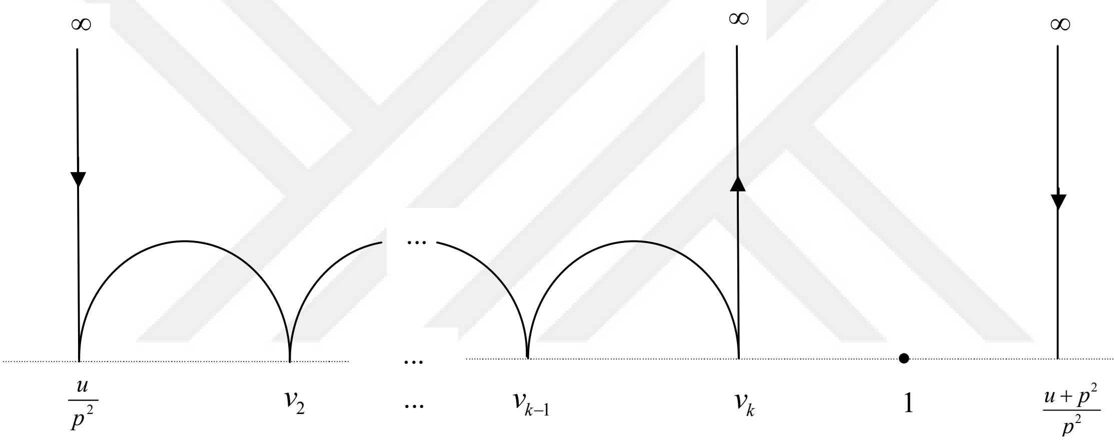
Şekil 3.3. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı – I

Diğer yandan F_{u,p^2} de komşu iki köşe arasında bir tam sayı bulunmayacağından devre 1 in sol tarafına geçmez. Bu durumda $v_k > 1$ dir.

Şimdi $v_k = \dfrac{x}{yp^2}$ alalım. Buradan $x > yp^2$ dir. Bu durumda $m > 0$ için $x = yp^2 + m$ biçimdedir. Ayrıca $x < u + p^2$ olduğundan $yp^2 + m < u + p^2$ olur. Buradan $y = 1$ ve $m < u < p^2$ bulunur. O halde $\dfrac{x}{p^2} \to \dfrac{1}{0}$ kenarından

$$1 \equiv -18ux \left(\bmod p^2\right) \Rightarrow \ 1 \equiv -18u\left(p^2 + m\right) \left(\bmod p^2\right) \Rightarrow 1 \equiv -18um \left(\bmod p^2\right)$$

elde edilir. Buna göre $\dfrac{m}{p^2} \to \dfrac{1}{0} \in F_{u,p^2}$ dir. $\dfrac{m}{p^2} < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir C devresi yoktur.



Şekil 3.4. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı-II

O halde $v_1 = \dfrac{u}{p^2}$ dir. Böylece C devresi olarak $\infty \to \dfrac{u}{p^2} \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to \infty$ alabiliriz. $v_k > \dfrac{u+1}{p^2}$ dir. Şimdi v, v_1 den büyük olan ve $v_1 \to v \in F_{u,p^2}$ olan F_{u,p^2} nin en büyük köşesi olsun. $v = v_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için aksini farzedelim. Yani $v_2 < v$ olsun. v, C de bir köşe ise $v = v_3$ alalım. Bu durumda

$$\infty \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to \infty$$

daha kısa uzunluklu bir devredir ki, bu C devresinin minimal uzunluklu bir devre olmasıyla çelişir.

Eğer v , C de bir köşe değilse $v_i < v < v_{i+1}$ olan C de v_i, v_{i+1} köşeleri mevcuttur. Bu $v_1 \to v$ ve $v_i \to v_{i+1}$ kenarlarının F_{u,p^2} de kesiştiğini gösterir, bu ise bir çelişkidir. Çünkü F_{u,p^2} nin kenarları $\mathcal{U}$ da kesişmezler. Böylece $v_2 = v$ dir. $v_1 < v_2$ olduğundan $v_2 = \dfrac{u+\frac{k}{6\ell}}{p^2}$ olacak şekilde $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$ sayıları vardır. $v_1 \to v_2$ F_{u,p^2} de bir kenar olduğundan

$$\frac{u}{p^2} \to \frac{u+\frac{k}{6\ell}}{p^2} = \frac{6u\ell + k}{6\ell p^2}$$

olur. Buradan kenar şartlarına göre

$$6u\ell p^2 - 6u\ell p^2 - kp^2 = -p^2$$

yani $k = 1$ bulunur. Buna göre $\dfrac{u}{p^2} \to \dfrac{6u\ell + 1}{6\ell p^2}$ olup kenar şartlarına göre $6u\ell + 1 \equiv -18u^2 \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$, yani $18u^2 + 6u\ell + 1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$ bulunur. ℓ_0, $18u^2 + 6u\ell_0 + 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı olmak üzere $v_2 = \dfrac{u+\frac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ dir. Buradan $1 < \ell_0 < p^2$ olur. Aksi halde $\ell_0 > p^2$ ise ℓ_0, yukarıdaki şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı olduğundan $\mathrm{mod}\, p^2$ ile çelişir.

$\ell_0 = p^2$ ise $18u^2 + 6up^2 + 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$ yani $18u^2 \equiv -1\left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$ olur ki bu ise kenarın kendisiyle eşleşmiş olacağını söyler.

$\ell_0 = 1$ ise $18u^2 + 6u + 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$ elde edilir ki bu bir dörtgen devre vereceğinden çelişkidir.

Şimdi $\varphi = \begin{pmatrix} -6u & \dfrac{18u^2+6u\ell_0+1}{3p^2} \\ -6p^2 & 6u+2\ell_0 \end{pmatrix} \in N_0\left(2\cdot 3^2 p^2\right)$ dönüşümünü alalım. $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{u}{p^2}$

olduğundan $\varphi(\infty) = v_1$,

$$\varphi(v_1) = \varphi\left(\frac{u}{p^2}\right) = \begin{pmatrix} -6u & \dfrac{18u^2+6u\ell_0+1}{3p^2} \\ -6p^2 & 6u+2\ell_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{6u\ell_0+1}{6\ell_0 p^2} = \frac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2} = v_2$$

olur. Genel olarak

$$\begin{pmatrix} -6u & \dfrac{18u^2+6u\ell_0+1}{3p^2} \\ -6p^2 & 6u+2\ell_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+\dfrac{x}{6y} \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{-u\dfrac{x}{y}+\dfrac{6u\ell_0+1}{3}}{\left(-\dfrac{x}{y}+2\ell_0\right)p^2} = \frac{u+\dfrac{y}{6\ell_0 y-3x}}{p^2}$$

dir. Ayrıca $\varphi(z) = \dfrac{-6uz+\dfrac{18u^2+6u\ell_0+1}{3p^2}}{-6p^2z+6u+2\ell_0}$ fonksiyonu $\left(-\infty, \dfrac{u+\ell_0}{p^2}\right)$ aralığında kesin

artandır. Gerçekten

$$\varphi'(z) = \frac{-6u\left(-6p^2z+6u+2\ell_0\right)+6p^2\left(\dfrac{18u^2+6u\ell_0+1}{3p^2}-6uz\right)}{\left(-6p^2z+6u+2\ell_0\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\left(-6p^2z+6u+2\ell_0\right)} > 0$$

dır.

$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{u}{p^2}$, $\varphi\begin{pmatrix}u\\p^2\end{pmatrix} = \dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ ve

$$\varphi\begin{pmatrix} \dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6u & \dfrac{18u^2+6u\ell_0+1}{3p^2} \\ -6p^2 & 6u+2\ell_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+\dfrac{1}{6\ell_0} \\ p^2 \end{pmatrix} = \frac{u+\dfrac{1}{6\ell_0-\dfrac{3}{\ell_0}}}{p^2} = \frac{u+\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}}}{p^2},$$

$$\varphi\left(\frac{u+\dfrac{1}{6\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}}}{p^2}\right)=\frac{u+\dfrac{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}}{6\ell_0\left(\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}\right)-3}}{p^2}=\frac{u+\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}}}}{p^2}$$

şeklinde devam eder. Yani

$$\frac{1}{0}\to\frac{u}{p^2}\to\frac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}\to\frac{u+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}}}{p^2}\to\frac{u+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}}}}{p^2}\to\dots$$

elde edilir. Buradan $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}}}$ kesri $\ell_0>1$ için bir irrasyonel sayıdır.
$\vdots$

$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}\begin{matrix}\\ \vdots\\ 2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}\end{matrix}}}$ kesri sonlu adımda $\ell_0\geq 1$ için tamsayı değildir. Gerçekten, ilk adımda $\dfrac{1}{6\ell_0}\notin\mathbb{Z}$ olduğu açıktır. k. adımda önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}\begin{matrix}\\ \vdots\\ 2\ell_0-\dfrac{1}{\ell_0}\end{matrix}}}=\dfrac{m}{6n}\notin\mathbb{Z}$ olsun. O halde k+1. adım

$\dfrac{1}{6\left(\ell_0-\dfrac{m}{6n}\right)}$ ve $(m,6n)=1$ olur. Şimdi kabul edelim ki $\dfrac{1}{6\left(\ell_0-\dfrac{m}{6n}\right)}\in\mathbb{Z}$ olsun. $\dfrac{m}{6n}<1$ ise $\dfrac{n}{6\ell_0 n-m}<1$ dir. Gerçekten $\ell_0\geq 1$ için $6n>m$ olduğundan $-m>-6n\ \Rightarrow 6\ell_0 n-m>6\ell_0 n-6n=n$ olur. Buradan $\dfrac{n}{6\ell_0 n-m}<1$ olur ki bu bize

$\dfrac{1}{6\left(\ell_0-\dfrac{m}{6n}\right)} \notin \mathbb{Z}$ olduğunu gösterir. Buna göre $\dfrac{u}{p^2}$ nin gideceği en uzak köşe $\dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}$

ve en yakın köşe yoktur. Ayrıca $\dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ nin gideceği en uzak köşe $\dfrac{u+\dfrac{1}{6\left(\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}\right)}}{p^2}$ olmasına rağmen en yakın köşe yoktur.

Gerçekten $18u^2+6u\ell_0+1\equiv 0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$ olduğundan $\dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}$, F_{u,p^2} de bir köşedir.

Şimdi $\dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2} \overset{<}{\rightarrow} \dfrac{u+\dfrac{t}{6s}}{p^2}=\dfrac{6us+t}{6sp^2}$ olsun. Buna göre kenar şartlarından iki durum vardır. Birincisi $36\ell_0 us+6s-36\ell_0 us-6\ell_0 t=-3$ olmasıdır. Buradan $6s=6\ell_0 t-3$ olur. Ayrıca

$$6us+t\equiv -3u\left(6\ell_0 u+1\right)\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$
$$6u\ell_0 t-3u+t\equiv -18u^2\ell_0-3u\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$
$$18u^2\ell_0+\left(6u\ell_0+1\right)t\equiv 0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

olur. Buradan ve $6u\ell_0+1\equiv -18u^2\left(\operatorname{mod} p^2\right)$ olduğundan

$$18u^2\ell_0-18u^2 t\equiv 0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

yani $t\equiv \ell_0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$ olur. O halde $t=\ell_0+rp^2$ olacak şekilde negatif olmayan bir r tamsayısı vardır. Buradan

$$\frac{t}{6s}=\frac{\ell_0+rp^2}{6\ell_0\left(\ell_0+rp^2\right)-3}$$

bulunur. İkinci durumda ise kenar şartlarından

$$36\ell_0 us+6s-36\ell_0 us-6\ell_0 t=-1$$

olur. Buradan $6s=6\ell_0 t-1$ dir. Yine kenar şartlarından

$6us+t \equiv -u(6u\ell_0+1)\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \Rightarrow u(6\ell_0 t-1)+t \equiv -6u^2\ell_0 - u\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$

$\Rightarrow 6u^2\ell_0 + (6u\ell_0+1)t \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \Rightarrow 6u^2\ell_0 - 18u^2 t \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right) \Rightarrow 3t \equiv \ell_0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$

bulunur. Dolayısıyla $r^* \in \mathbb{Z}^+$ için $3t = \ell_0 + r^* p^2$ olur. Buna göre

$$\frac{t}{6s} = \frac{3t}{18s} = \frac{\ell_0 + r^* p^2}{3(6\ell_0 t - 1)} = \frac{\ell_0 + r^* p^2}{6\ell_0\left(\ell_0 + r^* p^2\right) - 3}$$

elde edilir.

Şimdi $f : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ell_0 + xp^2}{6\ell_0\left(\ell_0 + xp^2\right) - 3}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{p^2\left(6\ell_0^{\ 2} + 6\ell_0 p^2 x - 3\right) - 6\ell_0 p^2\left(\ell_0 + xp^2\right)}{\left(6\ell_0^{\ 2} + 6\ell_0 p^2 x - 3\right)^2} \\ &= \frac{-3p^2}{\left(6\ell_0^{\ 2} + 6\ell_0 p^2 x - 3\right)^2} < 0 \end{aligned}$$

olduğundan f kesin azalandır. O halde en büyük değer $x=0$ noktasında $f(0) = \dfrac{\ell_0}{6\ell_0^{\ 2} - 3}$ tür. Buradan

$$\frac{6u\ell_0 + 1}{6\ell_0 p^2} \to \frac{u + \dfrac{\ell_0}{6\ell_0^{\ 2} - 3}}{p^2} = \frac{\left(6\ell_0^{\ 2} - 3\right)u + \ell_0}{\left(6\ell_0^{\ 2} - 3\right)p^2}$$

olur. Burada $\left(\left(6\ell_0^{\ 2} - 3\right)u + \ell_0, 6\ell_0^{\ 2} - 3\right) = 1$ dir. Ayrıca $\left(\left(6\ell_0^{\ 2} - 3\right)u + \ell_0, p^2\right) = 1$ dir. Çünkü $\left(\left(6\ell_0^{\ 2} - 3\right)u + \ell_0, p^2\right) = m_0$ olsa

$\left(6\ell_0^{\ 2} - 3\right)u + \ell_0 = \ell_0(6\ell_0 u + 1) - 3u \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ m_0\right)$

olurdu. $m_0 \mid p^2$ olduğundan $p \mid m_0$ dır.

$\ell_0(6\ell_0 u + 1) \equiv 3u \ \left(\mathrm{mod}\ p\right)$ ve $18u^2 + 6u\ell_0 + 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$ olduğundan $-18u^2\ell_0 \equiv 3u\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$ yani $6u\ell_0 + 1 \equiv 0\left(\mathrm{mod}\ p^2\right)$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla

$\left(\left(6\ell_0^{\,2}-3\right)u+\ell_0\,,p^2\right)=1$ dir. Buradan $\dfrac{u+\dfrac{\ell_0}{6\ell_0^{\,2}-3}}{p^2}$, F_{u,p^2} de bir köşe olup $\dfrac{6u\ell_0+1}{6\ell_0 p^2}$

nin gittiği en uzak köşedir.

$\underset{x\to\infty}{\ell im}\, f\left(x\right)=\dfrac{1}{6\ell_0}$ olduğundan $\dfrac{6u\ell_0+1}{6\ell_0 p^2}$ köşesinin gittiği köşeden küçük sonsuz tane köşe vardır. Dolayısıyla $\dfrac{6u\ell_0+1}{6\ell_0 p^2}$ nin gittiği en yakın köşe yoktur.

φ dönüşümü $\left(-\infty,\dfrac{u+\ell_0}{p^2}\right)$ aralığında kesin artan olduğundan $\dfrac{x}{6y}<\dfrac{z}{6w}<\ell_0$ için

$\varphi\left(\dfrac{u+\dfrac{x}{6y}}{p^2}\right)<\varphi\left(\dfrac{u+\dfrac{z}{6w}}{p^2}\right)$ dir. $x,y\in\mathbb{Z}^+$ için $\dfrac{x}{y}<1$ olsun. $1<\ell_0<p^2$ ve $x<y$

olduğundan

$6\ell_0 y-3x>6\ell_0 y-3y>y$

olur. Buradan $\dfrac{y}{6\ell_0 y-3x}<1$ dir.

$\varphi\left(\dfrac{u+\dfrac{x}{6y}}{p^2}\right)=\dfrac{u+\dfrac{y}{6\ell_0 y-3x}}{p^2}$ ve $v_2=\dfrac{u+\dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}$

olduğundan $\varphi\left(v_1\right)=v_2$ dir. Buradan

$$\varphi\left(\varphi\left(v_1\right)\right)=\varphi\left(v_2\right)=\frac{u+\dfrac{1}{6\left(\ell_0-\dfrac{1}{2\ell_0}\right)}}{p^2}<\frac{u+1}{p^2}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse $i\in\mathbb{Z}^+$ için $\varphi^i\left(v_1\right)<\dfrac{u+1}{p^2}$ olduğu görülür.

Şimdi tümevarım metodu ile $0\le i\le k-1$ için $v_{i+1}=\varphi^i\left(v_1\right)=\varphi^{i+1}\left(\infty\right)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $1\le i\le s$ için $v_i=\varphi^{i-1}\left(v_1\right)$ dir. O halde $v_{s+1}=\varphi^s\left(v_1\right)$ dir.

Bunu göstermek için $v_{s+1} < \varphi^s(v_1)$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $v_1 \to v_2$, F_{u,p^2} de bir kenar ise $N_0(2\cdot 3^2 p^2)$, F_{u,p^2} nin kenar ve köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden $\varphi^{s-1} \in N_0(2\cdot 3^2 p^2)$ olmak üzere $\varphi^{s-1}(v_1) \to \varphi^{s-1}(v_2)$ yani $v_s \to \varphi^{s-1}(\varphi(v_1)) = \varphi^s(v_1)$, $F_{u.p^2}$ de bir kenardır.

Acaba $\varphi^s(v_1) \in F_{u,p^2}$ köşesi C devresinde bir köşe midir? Kabul edelim ki $\varphi^s(v_1)$, C de bir köşe olmasın. Bu durumda $\varphi^s(v_1) < v_k$ olduğundan $v_t < \varphi^s(v_1) < v_{t+1}$ olacak şekilde v_t, v_{t+1} köşeleri mevcuttur. Böylece $v_t \to v_{t+1}$ kenarı ile $v_s \to \varphi^s(v_1)$ kenarı kesişir. Bu da $F_{u.p^2}$ nin kenarlarının üst yarı düzlemde kesişmemesiyle çelişir.

Şimdi $\varphi^s(v_1)$, C devresinde bir köşe olsun. O halde $v_{s+1} < \varphi^s(v_1)$ olduğundan bir $s^* \geq s+2$ için $\varphi^s(v_1) = v_{s^*}$ dır. Bu durumda $\infty \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_s \to v_t \to v_k \to \infty$ şeklinde daha kısa uzunluklu bir devre elde edilir ki bu bir çelişkidir. Buna göre $v_{s+1} \geq \varphi^s(v_1)$ dir.

Son olarak $v_{s+1} > \varphi^s(v_1)$ olsun. $v_1 < v_2$ için $\varphi(v_1) < \varphi(v_2)$ yani $\varphi(v_1) < \varphi^2(v_1)$ olur. Buradan ve φ kesin artan olduğundan $\varphi(\varphi(v_1)) < \varphi(\varphi^2(v_1)) \Rightarrow \varphi^2(v_1) < \varphi^3(v_1)$ bulunur. İşlemler devam ettirildiğinde $\varphi^{s-2}(v_1) < \varphi^{s-1}(v_1) < \varphi^s(v_1) < v_{s+1}$ olur. Buradan ve $\varphi^{-(s-1)}(\varphi^{s-2}(v_1)) = \infty$ olduğundan

$$\varphi^{-(s-1)}(v_{s+1}) > \varphi^{-(s-1)}(\varphi^s(v_1)) = \varphi(v_1) = v_2$$

dir. Dolayısıyla $F_{u.p^2}$ deki $v_s \to v_{s+1}$ kenarı için $v_1 = \varphi^{-(s-1)}(v_s) \to \varphi^{-(s-1)}(v_{s+1})$, $F_{u.p^2}$ de bir kenar olur ki bu v_2 nin seçimi ile çelişir. Sonuç olarak $0 \leq i \leq k-1$ için $v_{i+1} = \varphi^i(v_1)$ dir. Dolayısıyla $v_k < \dfrac{u+1}{p^2}$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi son olarak $t \geq 1$ için minimal uzunluklu ters yönlendirilmiş

$$\infty \to v_1 = \frac{u}{p^2} \to v_2 \to \ldots \to v_t \leftarrow v_{t+1} \to \ldots \to v_k \to \infty$$

C devresinin mevcut olduğunu kabul edelim. O halde $i \leq t$ için $v_i = \varphi^i(\infty)$ dur. $v_i \leftarrow v$ ve $v > \dfrac{u}{p^2}$ şartını sağlayan en büyük $v \in F_{u,p^2}$ rasyonel sayısını alalım. Bu durumda $m^* \in \mathbb{N}$ için $v = \dfrac{u + \frac{1}{6m^*}}{p^2}$ olur. Çünkü v, $v_1 = \dfrac{u}{p^2}$ den daha büyük bir rasyonel sayı olduğundan $v = \dfrac{u + \frac{k^*}{6m^*}}{p^2}$ alınabilir. $v_i \leftarrow v$, F_{u,p^2} de bir kenar olduğundan $p^2 v_1 \to p^2 v$ de F_{u,p^2} de bir kenardır. Böylece

$$u \leftarrow u + \frac{k^*}{6m^*} = \frac{6um^* + k^*}{6m^*} \in F_{u,p^2} \Leftrightarrow 6um^* - 6um^* - k^* = -1$$

ve buradan $k^* = 1$ dir. Buna göre kenar şartlarından

$$v_1 = \frac{u}{p^2} \leftarrow v = \frac{u + \frac{1}{6m^*}}{p^2} = \frac{6um^* + 1}{6m^* p^2} \in F_{u,p^2} \Leftrightarrow 2 \cdot 3^2 p^2 \mid 6m^* p^2$$

olduğundan

$$u \equiv u\left(6um^* + 1\right)\left(\operatorname{mod} p^2\right) \Leftrightarrow 6u^2 m^* \equiv 0\left(\operatorname{mod} p^2\right) \text{ ve } \left(6u^2, p^2\right) = 1$$

olup $p^2 \mid m$ bulunur. Buradan ve $2 \cdot 3^2 p^2 \mid 6m^* p^2$ olduğundan $3p^2 \mid m^*$ olur.

Ayrıca v en büyük olduğundan $m^* = 3p^2$ olur. Buradan $v_2 \leq v = \dfrac{u + \frac{1}{6m^*}}{p^2}$ dir. $\ell_0 < p^2$ olduğundan $\ell_0 < m^*$ olup $v < \dfrac{u + \frac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ bulunur.

Eğer $t = 1$ ise $\infty \to v_1 \leftarrow v \to \ldots \to v_k \to \infty$ olup $\dfrac{u}{p^2} \to \dfrac{u + \frac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ olduğundan $s \geq 3$ olmak üzere $v < v_s = \dfrac{u + \frac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ dir. Bu durumda daha kısa uzunluklu

$\infty \to v_1 \to v_s \to \ldots \to v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki bu bir çelişkidir. Buna göre $t > 1$ olmak zorundadır. Buradan $v_1 \to v_2 = \dfrac{u + \dfrac{1}{6\ell_0}}{p^2}$ dir.

$w^* = \varphi^{t+1}(\infty)$ olsun. $v_1 \to v_2 \in F_{u,p^2}$ olduğundan $\varphi^{t-1}(v_1) \to \varphi^{t-1}(v_2)$ F_{u,p^2} de bir kenardır. $0 \le i \le k-1$ için $v_{i+1} = \varphi^i(v_1) = \varphi^{i+1}(\infty)$ olduğundan $v_t \to \varphi^t(v_1) = v_{t+1}$ olur. Kenar şartlarından $v_t \leftarrow v_{t+1}$ ve $v_t \to v_{t+1}$ durumları $18u^2 \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ bağıntısını verir.

$18u^2 + 6\ell_0 u + 1 \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p^2\right)$

den $6\ell_0 u \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ yani $\ell_0 \equiv 0 \left(\operatorname{mod} p^2\right)$ çelişkisi elde edilir. Buradan $v_{t+1} < w^*$ olmalıdır. Çünkü aksi halde $v_{t+1} > w^*$ ise

$\varphi^{-(t-1)}\left(\varphi^{t-2}(v_1)\right) = \infty$ ve $\varphi^{t-2}(v_1) < \varphi^t(v_1)$

olduğundan

$\varphi^{t-2}(v_1) = \varphi^t(v_1) = \varphi^t(\varphi(\infty)) = \varphi^{t+1}(\infty) = w^* < v_{t+1}$

olur. Buradan

$\varphi^{-(t-1)}(v_{t+1}) > \varphi^{-(t-1)}(w^*) = v_2$

ve

$v_1 = \varphi^{-(t-1)}(v_t) \leftarrow \varphi^{-(t-1)}(t+1) > v_2$,

F_{u,p^2} de bir kenardır. Ancak bu v_2 nin seçimi ile çelişir. $v_{t+1} < v^*$ ise $s \ge t+2$ için $w = v_s$ olur ki buradan daha kısa uzunluklu $\infty \to v_1 \to \ldots \to v_t \to v_s \to \ldots \to v_k \to \infty$ devresi elde edilir. Fakat bu yine bir çelişkidir. Buradan ters yönlendirilmiş bir C devresi yoktur.■

3.3 $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2^2\cdot 3p^2\right)\right)$ nin Alt Yörüngesel Grafları

$p>3$ asal bir sayı ve $p\equiv 1(\bmod 3)$ olmak üzere $N=2^2\cdot 3p^2$ için h=2 olduğundan $T=\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$ ve $e\,\|\,N/h^2$ göz önüne alınırsa, $\det T=e=1,3,p^2,3p^2$ olabilir. Yani normalliyenin elemanları

$$T_1=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & d \end{pmatrix},\ ad-3bcp^2=1; \qquad T_2=\begin{pmatrix} 3a & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3d \end{pmatrix}\ 9ad-2bcp^2=3p^2$$

$$T_3=\begin{pmatrix} ap^2 & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & dp^2 \end{pmatrix},adp^2-2bc=1; \qquad T_4=\begin{pmatrix} 3ap^2 & b/2 \\ 2\cdot 3p^2c & 3dp^2 \end{pmatrix},9adp^2-2bc=3p^2$$

şeklindedir (Tiryaki, 2011).

Teorem 3.21. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2^2\cdot 3p^2\right)\right)$ normalliyenin

$$\hat{\mathbb{Q}}\left(2^2\cdot 3p^2\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\cdot 3\end{pmatrix}\cup$$
$$\cup\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\cdot 3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\cdot 3p^2\end{pmatrix}$$

maksimal alt kümesi üzerindeki hareketi transitiftir (Tiryaki, 2011). ■

Teorem 3.22. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2^2\cdot 3p^2\right)\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki imprimitif hareketi sonucunda oluşan bloklar

$$[0]=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\cdot 3\end{pmatrix}$$
$$[\infty]=\begin{pmatrix}1\\p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\3p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2p^2\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}1\\2^2\cdot 3p^2\end{pmatrix}$$

şeklindedir (Tiryaki, 2011). ■

Teorem 3.23. $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in [\infty]$ ve $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,p^2}$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $2^2 \cdot 3p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm ur \left(\text{mod } p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(ii) $2 \cdot 3p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2ur \left(\text{mod } p^2\right)$, $ry - sx = \pm 2p^2$

(iii) $2^2 p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 3ur \left(\text{mod } p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(iv) $3p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2^2 ur \left(\text{mod } p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

(v) $2p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2 \cdot 3ur \left(\text{mod } p^2\right)$, $ry - sx = \pm 2p^2$

(vi) $p^2 \parallel s$ ise $x \equiv \pm 2^2 \cdot 3ur \left(\text{mod } p^2\right)$, $ry - sx = \pm p^2$

şartlarından birinin sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 3.12. ye benzer şekildedir. ■

Teorem 3.24. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının ikigen içermesi için gerek ve yeter koşul $12u^2 \equiv -1 \left(\text{mod } p^2\right)$ olmasıdır. ■

Teorem 3.25. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı üçgen içermez.

İspat: Kabul edelim ki F_{u,p^2} bir üçgen ihtiva etsin. Bu durumda transitif hareketten dolayı devreyi $\frac{1}{0} \to \frac{x}{y} \to \frac{k}{\ell} \to \frac{1}{0}$ biçiminde kabul edebiliriz. Teorem 3.23. den $y = p^2$ ve $\ell = p^2$ veya $\ell = 2p^2$ dir. Teorem 3.23. deki (i). kenar şartından $x \equiv u \left(\text{mod } p^2\right)$ olur.

$\ell = p^2$ seçilirse Teorem 3.23. den $x\ell - ky = p^2$ den $k = u + 1$ ve $k \equiv -12u^2 \left(\text{mod } p^2\right)$ bulunur. Buradan

$$12u^2 + u + 1 \equiv 0 \left(\text{mod } p^2\right) \tag{3.10}$$

olur. Son kenar şartından

$1 \equiv -12uk \left(\bmod p^2\right) \Rightarrow 1 \equiv -12u\left(u+1\right)\left(\bmod p^2\right)$

olup buradan

$$12u^2 + 12u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right) \tag{3.11}$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) den $11u \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ dir. $p \equiv 1 \left(\bmod 3\right)$ olduğundan $u \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ çelişkisi elde edilir.

$\ell = 2p^2$ seçilirse $2u - k = -1 \Rightarrow k = 2u + 1$ dir. (ii). kenar şartından

$2u + 1 \equiv -12u^2 \left(\bmod p^2\right) \Rightarrow 12u^2 + 2u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$

dir. Ayrıca son kenar şartından $1 \equiv -6u\left(2u+1\right)\left(\bmod p^2\right)$ den

$12u^2 + 6u + 1 \equiv 0\left(\bmod p^2\right)$

olur. Sonuç olarak $4u \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ ve $p \equiv 1\left(\bmod 3\right)$ ve asal olduğundan $u \equiv 0\left(\bmod p^2\right)$ çelişkisi elde edilir. Böylece F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı üçgen içermez. ■

Teorem 3.26. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafı dörtgen içermez.

İspat: Kabul edelim ki F_{u,p^2} dörtgen içersin. $\hat{\mathbb{Q}}\left(2^2 3p^2\right)$ üzerindeki hareket transitif olduğundan bu dörtgen $\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{k}{\ell p^2} \to \frac{m}{np^2} \to \frac{1}{0}$ şeklinde olur. Son kenardan $n = 1$ veya $n = 2$ dir.

İspatı $n = 1$ için yapacağız. $n = 2$ için durum benzerdir. $\frac{k}{\ell p^2} \to \frac{m}{np^2}$ kenarından $k - m\ell = -1$ veya $k - m\ell = -2$ dir.

Eğer $\ell = 2$ veya $\ell = 6$ ise Teorem 3.23. den ve üçüncü kenardan $k - 2m = -2$ veya $k - 6m = -2$ dir. Böylece k çift olmalıdır. $\left(k, \ell\right) = 1$ ve ℓ çift olduğundan bu imkansızdır.

Eğer $\ell = 4$ ise Teorem 3.23. deki ikinci ve üçüncü kenar şartlarından $4u - k = -1$ ve $k - 4m = -1$ olur. Buradan $2u - 2m = -1$ bulunur ki bu $2 \mid 1$ çelişkisini verir.

$\ell = 3$ ve $\ell = 12$ için benzer hesaplamalarla sırasıyla $3 \mid 2$ ve $6 \mid 1$ çelişkileri elde edilir. Dolayısıyla F_{u,p^2} dörtgen içermez. ■

Teorem 3.27. $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2^2 3p^2\right)\right)$ nin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının bir altıgen içermesi için gerek ve yeter şart $12u^2 \pm 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ olmasıdır.

İspat: "⇒": Kabul edelim ki F_{u,p^2} alt yörüngesel grafında bir altıgen olsun. Transitiflikten dolayı altıgeni

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{x_1}{y_1 p^2} \to \frac{x_2}{y_2 p^2} \to \frac{x_3}{y_3 p^2} \to \frac{x_4}{y_4 p^2} \to \frac{1}{0}$$

alınabilir. Buradaki bütün harfler pozitif tamsayıdır. $\frac{u}{p^2} \to \frac{x_1}{y_1 p^2}$ kenarından

$x_1 = uy_1 + 1$ ve $x_1 \equiv -12u^2 \left(\bmod p^2\right)$ den

$$12u^2 + uy_1 + 1 \equiv 0 \bmod p^2 \tag{3.12}$$

olur. Buna göre 6. kenardan

$$x_4 \equiv u + \frac{y_1}{12} \left(\bmod p^2\right) \tag{3.13}$$

$$x_4 \equiv 2u + \frac{y_1}{6} \left(\bmod p^2\right) \tag{3.14}$$

bulunur. Şimdi $T = \begin{pmatrix} -12u & \dfrac{12u^2 + uy_1 + 1}{p^2} \\ -12p^2 & 12u + y_1 \end{pmatrix} \in N_0\left(2^2 \cdot 3p^2\right)$ dönüşümünü ele alalım.

Buradan $\frac{x_1}{y_1 p^2} = \frac{uy_1 + 1}{y_1 p^2} = T^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olduğu açıktır. Sonraki adımda $\frac{x_2}{y_2 p^2} = T^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikli olarak $\frac{x_2}{y_2 p^2} \le T^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olduğunu göstermeliyiz. Aksini varsayalım. Yani $\dfrac{x_2}{y_2 p^2} > T^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{u\left(y_1^2-12\right)+y_1}{p^2\left(y_1^2-12\right)}$ olsun. Buradan

$$uy_2\left(y_1^2-12\right)+y_1y_2 < x_2\left(y_1^2-12\right) \tag{3.15}$$

elde edilir. Ayrıca $\dfrac{u}{p^2} < \dfrac{x_2}{y_2 p^2}$ olduğundan

$$-x_2 < -uy_2 \tag{3.16}$$

$$uy_2y_1^2 < x_2y_1^2 \tag{3.17}$$

olur. (3.15) ve (3.16) ten

$$uy_2y_1^2 - 12uy_2 + y_1y_2 < x_2y_1^2 - 12x_2 < x_2y_1^2 - 12uy_2,$$

yani

$$uy_2y_1^2 + y_1y_2 < x_2y_1^2 \tag{3.18}$$

bulunur. (3.17) ve (3.18) den

$$y_1y_2 < 0$$

bulunur ki y_1 ve y_2 pozitif olduğundan bu bir çelişkidir. Buna göre $\dfrac{x_2}{y_2 p^2} \le T^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dır. Bu durumda altıgenin bir köşesi $T^3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ olmalıdır.

Şimdi $\dfrac{x_3}{y_3 p^2} = T^4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{uy_1\left(y_1^2-24\right)+y_1^2-12}{y_1\left(y_1^2-24\right)p^2}$ olduğunu gösterelim. Yukarıda olduğu gibi $\dfrac{x_3}{y_3 p^2} > T_1^4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ olsun. Buradan

$$uy_1y_3\left(y_1^2-24\right)+y_1^2y_3-12y_3 < x_3y_1\left(y_1^2-24\right) \tag{3.19}$$

olur.

$$\frac{u}{p^2} < \frac{x_3}{y_3 p^2}$$

olduğundan $uy_3 < x_3$ olup buradan

$$-x_3 < -uy_3 \tag{3.20}$$

$$uy_3{y_1}^3 < x_3{y_1}^3 \tag{3.21}$$

bulunur. (3.19) ve (3.20) den

$$uy_3{y_1}^3 - 24uy_1y_3 + {y_1}^2y_3 - 12y_3 < x_3{y_1}^3 - 24x_3y_1 < x_3{y_1}^3 - 24uy_3y_1,$$

yani

$$uy_3{y_1}^3 + {y_1}^2y_3 - 12y_3 < x^3{y_1}^3 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.21) ve (3.22) den ${y_1}^2y_3 - 12y_3 < 0$ ve $y_3 \neq 0$ olduğundan ${y_1}^2 - 12 < 0$ bulunur. Buradan $y_1 = 1, 2$ veya 3 olabilir. Bu bir çelişkidir. Çünkü (3.13) ve (3.14) den $6 \mid y_1$ ve $12 \mid y_1$ dir. O halde $\frac{x_3}{y_3p^2} \leq T^4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ olur.

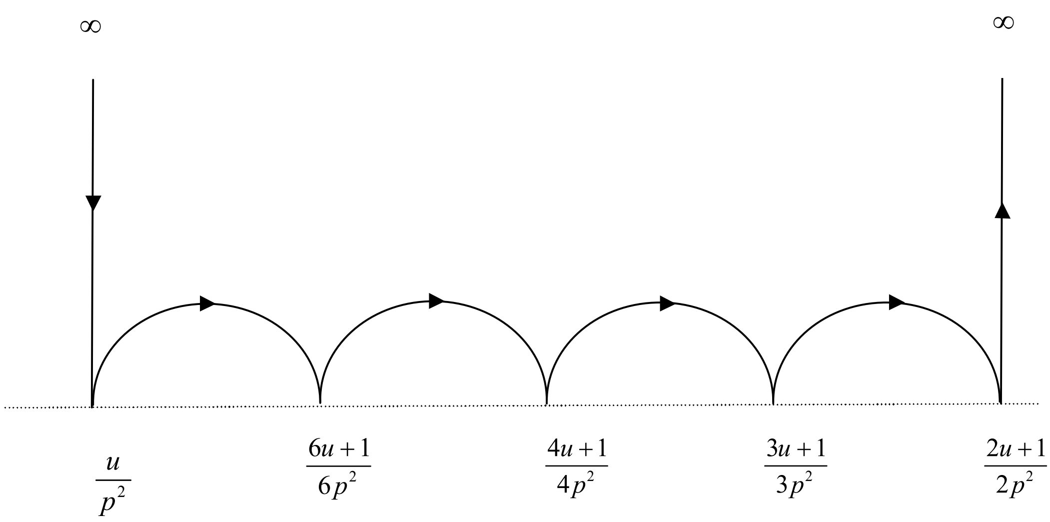
Son kenar için Teorem 3.23 den $y_4 = 1$ veya $y_4 = 2$ olmalıdır. $y_4 = 1$ ve $y_1 = 12$ ise $\frac{12u+1}{12p^2} \to \frac{x_4}{p^2}$ kenarından $12u + 1 - 12x_4 = -1$, yani $6(u - x_4) = -1$ bulunur ki buradan $6 \mid 1$ çelişkisi elde edilir. $y_4 = 2$ ve $y_1 = 12$ ise 5. kenar $\frac{12u+1}{12p^2} \to \frac{x_2}{2p^2}$ olup buradan $24u + 2 - 12x_4 = -1$ yani $8u - 4x_4 = -1$ çelişkisi elde edilir.

O halde $y_1 = 6$ ve $y_4 = 2$ olmalıdır. Sonuç olarak $12u^2 + 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ elde edilir. Devre azalan olsaydı $12u^2 - 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ bulunurdu.

"⇐": Eğer $12u^2 \pm 6u + 1 \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$ ise Teorem 3.23 deki kenar şartlarından

$$\frac{1}{0} \to \frac{u}{p^2} \to \frac{6u \pm 1}{6p^2} \to \frac{4u \pm 1}{4p^2} \to \frac{3u \pm 1}{3p^2} \to \frac{2u \pm 1}{2p^2} \to \frac{1}{0}$$

altıgeni elde edilir.



Şekil 3.5. F_{u,p^2} alt yörüngesel grafında altıgen

Örnek: Teorem 3.27. ye göre

$$\frac{1}{0} \to \frac{11}{49} \to \frac{67}{6\cdot 49} \to \frac{45}{4\cdot 49} \to \frac{34}{3\cdot 49} \to \frac{23}{2\cdot 49} \to \frac{1}{0}$$

nin $F_{11,49}$ da ve

$$\frac{1}{0} \to \frac{4}{169} \to \frac{23}{6\cdot 169} \to \frac{15}{4\cdot 169} \to \frac{11}{3\cdot 169} \to \frac{7}{2\cdot 169} \to \frac{1}{0}$$

nin $F_{4,169}$ da dörtgen olduğu kolaylıkla görülür.

BÖLÜM IV

SONUÇLAR

Bu çalışmada normalliyenin grafları hakkında şimdiye kadar yapılan çalışmaları özetleyen bir literatür özeti verilmiştir.

$N = 2 \cdot 3^2 p^2$, $p \equiv 1 \pmod 4$ ve $p > 3$ asal, alınarak $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği maksimal alt kümelerden birisi olan $\hat{\mathbb{Q}}\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)$ bulunmuştur. Buradaki transitif hareketten ortaya çıkan G_{u,p^2} grafının kendisiyle eşleşmiş olma şartı ve kenar şartları belirlenmiştir.

Ayrıca $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2 \cdot 3^2 p^2\right)\right)$ nin F_{u,p^2} alt yörüngesel grafının dörtgen devre içermesi ve orman olması için gerek ve yeter bulunmuştur.

$N = 2^2 3 p^2$, $p \equiv 1 \pmod 3$ ve $p > 3$ asal, için $\mathcal{N}or\left(\Gamma_0\left(2^2 3 p^2\right)\right)$ nin $\hat{\mathbb{Q}}\left(2^2 3 p^2\right)$ üzerindeki transitif hareketi ile ortaya çıkan F_{u,p^2} alt yörüngesel grafında kenar şartları bulunarak bu alt yörüngesel grafın altılı devre içermesi için şartlar verilmiştir.

KAYNAKLAR

Akbaba, Ü., $\Gamma_0(N)$ *Grubunun alt yörüngesel graflarındaki minimal uzunluklu imprimitif hareket,* Yüksek Lisans Tezi, ***Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Trabzon, 1-77, 2016.

Akbaş, M., *The normalizer of modular subgroups*, Ph.D. Thesis, ***University of Southampton***,1-148, 1989.

Akbaş, M., *On suborbital graphs for the modular group*, ***Bull. London Math. Soc.,*** 33, 647-652, 2001.

Akbaş, M. and Başkan, T., *Suborbital graphs for the normalizer of* $\Gamma_0(N)$, ***Tr. J. Of Math.***, Tübitak, 20, 379-387,1996.

Akbaş, M. and Singerman, D., *The signature of the normalizer of* $\Gamma_0(N)$, ***London Math. Soc. Lecture Notes***, CUP, Cambridge, 165, 77–86, 1992.

Anderson J. W., *Hyperbolic geometry*, ***Springer-Verlag***, 2000.

Beardon, A.F., *The geometry of discrete groups*, ***Springer Verlag, New York***, 1983.

Beşenk, M., Simge devirleri ve graflar, Doktora Tezi, ***Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Trabzon, 1-107, 2009.

Biggs, N. L. and White, A. T., *Permutation groups and combinatorial structures*, ***London Math. Soc. Lecture Notes 33***, Cambridge University Pres, Cambridge,1979.

Conway, J.H. and Norton, S.P., *Montrous moonshine, Bull.* ***London Math. Soc****.,* 11, 308-339,1979.

Güler, B.Ö., $\Gamma_0(N)$ *Kongrüans alt grubunun* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *deki normalliyenin alt yörüngesel grafları,* Doktora Tezi, ***Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Trabzon, 1-62 2006.

Güler, B. Ö., Beşenk, M., Değer, A. H. and Kader, S., *Elliptic elements and circuits in suborbital graphs,* ***Hacet. J. Math. Stat.,*** 40(2), 203-210, 2011.

Güler, B. Ö., Kör, T. and Şanlı, Z., *Solutions to some congruence equations via suborbital graphs,* ***Springer Plus***, 5: 1327, 2016.

Jones, G.A. and Singerman, D., *Complex functions : an algebraic and geometric viewpoint*, ***Cambridge University Press, Cambridge***, 1987.

Jones, G.A., Singerman, D. and Wicks, K., *The modular group and generalized farey graphs,* ***London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge***, 160, 316-338,1991.

Kader, S., Güler, B. Ö. and Değer, A. H., *Suborbital graphs for a special subgroup of the normalizer of* $\Gamma_0(m)$, ***Iranian Journal of Science & Technology,Transaction A,*** Vol. 34, No. A4, 305-312, 2010.

Keskin, R., *Suborbital graphs for the normalizer of* $\Gamma_0(m)$, ***Europan Juornal of Combinatorics***, Vol. 27, No. 2, 193-206, 2006.

Keskin, R. and Demirturk, B., *On suborbital graphs for the normalizer of* $\Gamma_0(N)$*,* ***Electronic Juornal of Combinatorics,*** Vol. 16, No. 1, R116., 2009.

Kör, T., *Bir tip modüler graf ve fibonacci sayıları*, Doktora Tezi, ***Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Trabzon, 1-64, 2012.

Lehner, J. and Newman, M., *Weierstrass points of* $\Gamma_0(N)$, ***Annals of Mathematics*** 79, No.2, March, 360–368, 1964.

Macbeat, A.M., *The classification of non-euclidean crystallographic groups*, ***Can.J. Math,*** 19, 1192-1205. 1967.

Maclachlan, C., *Groups of units of zero ternary quadratic forms*, ***Proceedings of the Royal Society of Edinburg***, 88, 141-157, 1981.

Newman, M., *The normalizer of certain modular subgroups,* ***Can. J. Math***, 8, 29-31,1956.

Ogg, A.P., *Automorphismes des courbes modulaires*, ***Seminaire Delange-Pisot,Poitou,*** 7, 1974.

Ogg, A.P., *Modular functions*, ***Proceedings of Symposia in Pure Mathematics***, 37, 1980.

Schoeneberg, B., *Elliptic modular functions*, ***Springer Verlag, Berlin***, 1974.

Shimura, G., *Inroduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. ***Princeton Univ. Press***, 1971.

Sims, C.C., *Graphs and finite permutation groups*, ***Mathematische. Zeitschrift***., 95, 76-86, 1967.

Tiryaki, Ş., $\Gamma_0(m)$ *nin* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *deki normalliyenin alt yörüngesel grafları,* Yüksek Lisans Tezi, ***Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** *Niğde*, 1-49, 2011.

Tsuzuku, T., *Finite groups and finite geometries*, ***Cambridge University Press***, Cambridge,1982.

Ünal, H., *Alt yörüngesel graflar ve fibonacci sayıları* , Yüksek Lisans Tezi, ***Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Trabzon, 1-71, 2013.

Wilkie, H.C., *On non-euclidean crystallographic groups*, ***Math. Zeitschr***, 91 (1966).

ÖZ GEÇMİŞ

Elif AKŞİT 1992 yılında Niğde'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara da tamamladı. 2014 yılında Aksaray Üniversitesi Sabire Yazıcı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu ve aynı yıl Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programına başladı.