T.C.
ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KOMBİNATORİYAL İSPATLARI

MEHMET TOMAK

Mayıs 2017

M. TOMAK, 2017
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KOMBİNATORİYAL İSPATLARI

MEHMET TOMAK

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK

Mayıs 2017

Mehmet TOMAK tarafından **Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK** danışmanlığında hazırlanan "**Özel Sayı Dizilerinin Kombinatoriyal İspatları**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Murat ALP

(Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

(Abdullah Gül Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK

(Ömer Halisdemir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20…. tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20…. tarih ve .... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet TOMAK

ÖZET

ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KOMBİNATORİYAL İSPATLARI

TOMAK, Mehmet
Ömer Halisdemir Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK

Mayıs 2017, 35 sayfa

Bu yüksek lisans tezi üç ana başlıktan oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ve özelliklerinden bahsederken, ikinci ve üçüncü bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarının kombinatoriyal özelliklerini içermektedir.

Anahtar sözcükler: Fibonacci ve Lucas sayıları, kombinatoriyal özellikler

SUMMARY

COMBINATORIAL PROOFS OF SPECIAL NUMBER SEQUENCES

TOMAK, Mehmet
Ömer Halisdemir University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Professor Dr. Nurettin IRMAK

May 2017, 35 pages

This thesis is consist of three main parts. We present the definitons of Fibonacci and Lucas numbers together with their properties in the first section. The second and third sections consist the combinatorial proofs of Fibonacci and Lucas numbers..

Keywords: Fibonacci, Lucas numbers, combinatorial identities

ÖN SÖZ

Bu yüksek lisans çalışmasında, sayma ilkelerine dayanarak Fibonacci ve Lucas sayılar için bilinen özelliklerin ispatı verilmiştir. Öncelikle Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları ve ilgili teoremleri verildikten sonra, kombinatoriyal olarak kare ve dominolar kullanılarak aralarındaki ilişkileri veren özellikler ispat edilmiştir.

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK 'a, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen eşime ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi, sadece çalışmam boyunca değil, tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi koruyuculuğumu üstlenen babam Mustafa TOMAK' a, annem Arife TOMAK' a, kardeşlerime ve hayat arkadaşım Özlem TAŞKIN TOMAK' a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
F_n	$n.$ Fibonacci sayısı
L_n	$n.$ Lucas sayısı
$\binom{n}{k}$	n nin k lı kombinasyonu.

BÖLÜM I
GİRİŞ

Bu bölümde, konu ile ilgili temel kavramlar, Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımı, üreteç fonksiyonu, Binet tipi formül, kombinatoriyal tanımları yapılmıştır.

Sayılar teorisinde; önemli araştırma konularında biriside sayıları karakterize edip, sayıların birbirleriyle olan ilişkilerini, bağıntılarını incelemektir. Bu konuda ilk akla gelen sayılar Fibonacci, Lucas, Pell, Jacosthal, Euler, Bernoulli, Stirling sayıları olmasına rağmen konuyla ilgili en iyi örnek Fibonacci sayı dizisidir.

Tanım 1.1

$\{F_n\}$, Fibonacci sayı dizisini göstermek üzere $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ başlangıç koşulları altında, $n \geq 3$ için, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
(1.1)

bağıntısını sağlayan sayılara Fibonacci sayıları denir (Koshy,2001).

Fibonacci sayı dizisinin ilk birkaç terimi

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

gibidir.

Fibonacci sayıları 1202 yılında Fibonacci ‘nin basılan *Liber Abaci* adlı kitabında, tavşanlarla ilgili aşağıdaki sorusunda ortaya çıkmıştır. Soru şu şekildedir,

“Kabul edelim ki, biri erkek diğeri dişi olan yeni doğmuş bir çift tavşanımız olsun.

1- *Her bir çift yavru tavşan 1 ay içinde olgunlaşıyor,*
2- *Her bir tavşan 1 ay içinde bir tavşan çifti doğuruyor,*
3- *Bu tavşanların hiç ölmediği kabul ediliyor.*

Bu şartlar altında, 100. ayda kaç çift tavşan vardır?”

Bu problemde ele alınan düşünce ilk tavşan çiftinin 1 Ocak tarihinde doğduğunu kabul ederek tablo haline dönüştürüldüğünde

Çizelge 1.1. Yavru ve olgun tavşanların aylara göre sayısı

Çift sayısı	*Ocak*	*Şubat*	*Mart*	*Nisan*	*Mayıs*	*Haziran*	*Temmuz*	…
Yavru	0	1	1	2	3	5	8	…
Olgun	1	0	1	1	2	3	5	…
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	…

tablosu elde edilir. Yukarıdaki tablodan da kolaylıkla görülebileceği gibi, tablonun toplam satırında verilen sayılar Fibonacci sayılarıdır.

1.1 Doğada Fibonacci Sayıları

Fibonacci sayıları birer matematiksel ifade olsalar da, başta doğadaki birçok oluşum olmak üzere birçok farklı alanda çok ilginç şekillerde karşımıza çıkmaktadırlar. Bazı örnekleri şu şekildedir.

Birçok ağaç türünde kökten gövdeye, gövdeden dallara doğru çıkıldığında her bir yatay kesitteki dal sayısının Fibonacci sayılarına karşılık geldiği görülür. Başlangıçta tek bir gövde var iken bir süre sonra bu gövde iki dala ayrılır ve bu dallardan biri tek başına uzamaya devam ederken diğeri bir süre sonra ikiye ayrılır. İkiye ayrılan bu dallardan sadece bir tanesi yine ikiye ayrılacak ve bu işlem en tepeye doğru yere paralel kesitler oluşturduğumuzda bu kesitlerin buluştuğu dal sayısı 1, 2, 3, 5, 8, 13, … şeklinde artacaktır.

Yeterince büyümüş bir ay çekirdeği koçanında da Fibonacci sayılarına net bir şekilde rastlanmaktadır. Merkezden dışa doğru uzanan ay çekirdeği spirallerinde karşılıklı iç içe geçmiş iki farklı sıralanış görülür. Bu sıraların her birindeki çekirdek sayısı 34 ve 55' dir. Çok nadir bazı türlerde bu sayılar 55 ve 89 ya da 89 ve 144 olabilmektedir. Karşılaşılmış en büyük sayılar ise 144 ve 233 olup şu andaki dünya rekorudur. Bu sayılardan her biri Fibonacci sayılarıdır.

Benzer şekilde ananas, enginar gibi bitkilerin kabuklarında, denizyıldızının kollarında, çiçek ve bitkilerin üreme organlarındaki sayılarda, elmayı enine kestiğimizde çekirdeklerin beş sıra olarak dizilişinde hep Fibonacci sayılarına rastlanmaktadır.

Bir diğer benzer durumda bitkilerin neredeyse tümünde görülen filotaksi kavramında karşımıza çıkmaktadır.

Doğada çiçeklerin saplarındaki yapraklar ve ağaçların dalları, dipten başlayıp sap veya gövde üzerinde dönerek ve aralarında sabit bir mesafe kalacak şekilde dizilmektedir. Matematiksel olarak bu durum bir oranla ifade edilmektedir. $\frac{p}{q}$ şeklindeki bir oran bize, bu bitki türünün tepeden bakıldığında tam olarak aynı hizada görülen iki yaprağın arasında q tane yaprak olduğunu ve bu q tane yaprağın sap etrafında p tur attığını söylemektedir. Kayısı ve vişnede bu oran $2/5$ 'tir. Bu da örneğin tam olarak sola bakan bir yapraktan başlayıp gövde etrafında 2 tam tur attığımızda yine sola bakan bir yaprağa geldiğimizi ve bu arada 5 yaprak bulunduğunu (uçlardan biri dahil) belirtmektedir. Bir başka deyişle tepeden bakıldığında iki ardışık yaprak arasındaki açı $2\times 360/5=144$ derecedir.

Armutta $3/8$ olan bu oran bademde $5/13$ 'tür.

Zoolojide de Fibonacci sayılarına rastlanmaktadır. Bir örnek verecek olursak arıların soyağaçlarını ele almak yeterli olacaktır. Erkek arıların sadece anneleri vardır, babaları yoktur. Teknik olarak döllenmemiş bir yumurtadan çıkarlar. Dişi arıların ise bir anne ve bir babaları vardır. Yani döllenmiş bir yumurtadan çıkarlar. Bir dişi arının soyağacını oluşturursak ve bu arıya sondan birinci jenerasyon olarak bakarsak sondan ikinci jenerasyonda biri dişi (anne) biri erkek (baba) toplam iki atası olduğunu, sondan üçüncü jenerasyonda annenin anne ve babası ve babanın annesi olmak üzere üç atası olduğunu gözlemleriz. Birkaç jenerasyon daha geriye giderek her bir jenerasyondaki fert sayısının 1, 2, 3, 5, 8, … şeklindeki Fibonacci sayıları olduğunu görürüz.

Botanik ve zoolojide karşımıza çıkan Fibonacci sayıları, kimyadaki atom ve moleküllerin yapılarında ve karşılık gelen topolojik indekslerinde, altküme sayılarında ve bazı diğer sayısal özelliklerde, optikte, graf teoride, müzikte, parçalanış teoride, elektrik devrelerinde ve daha birçok alanda karşımıza çıkmaktadır.

1.2 Altın Oran

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Altın oran irrasyonel bir sayıdır ve ondalık sistemde yazılışı; 1,618033988749894…'tür. Bu oranın kısaca gösterimi ise; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olur.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ eşitliğinde F_n yerine x^n yazılırsa, yani $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ denklemi elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ ve $\beta = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$ sayıları elde edilir.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … Fibonacci sayı dizisini ele aldığımızda ardışık iki terimin birbirine oranı da bize altın oranı verir.

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

1.3 Fibonacci sayıları için Binet Formülü

Bir önceki bölümde bulduğumuz α, β köklerini ele alalım. Fibonacci sayısının her terimi, α ve β 'nın bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğinden,

$$F_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

(1.2)

denklemi elde edilir. (1.2) denkleminde Fibonacci sayılarının başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ düşüldüğünde, $F_0 = A + B = 0$ ve $F_1 = A\alpha + B\beta = 0$ denklemleri elde edilir. Bu iki denklem çözüldüğünde $A = \frac{1}{\alpha - \beta}$ ve $B = -\frac{1}{\alpha - \beta}$ olarak elde edilir. A ve B katsayıları (1.2) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ elde edilir.

Elde edilen bu eşitlik Binet Formülü olarak bilinir. Binet formülü, Fibonacci ve Lucas sayı dizilerin birbirleriyle olan ilişkilerini ispatlamakta kullanılmaktadır.

1.4 Fibonacci Sayılarının Bazı Özellikleri

Bu kısımda Fibonacci sayılarının sağladığı birçok matematiksel bağıntıdan önemli olanlardan bir kaçını vereceğiz. Öncelikli olarak şimdi vereceğimiz özellik bize bu bağıntılarının ispatında önemli bir yer tutacaktır.

$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ve $|x|<1,\ n\to\infty$ için $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ dir.

Teorem 1.1. (Lucas, 1876)

Ardışık Fibonacci sayılarının toplamı şu şeklide ifade edilir,

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

(1.3)

dir.

İspat: Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısını her bir adımda kullanalım;

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

şeklinde alt alta yazılan ifadeler taraf tarafa toplama yapılırsa

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 \ = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

Şimdi de Binet formülü kullanarak teoremi ispat edelim.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha^i - \sum_{i=1}^{n} \beta^i\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha^{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta^{i+1}\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade de i gördüğümüzü yere $i+1$ indis değişimi ve $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ eşitliği kullanıldığında,

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\alpha\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - \beta\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right\}$$

bulunur. $\alpha+\beta=1$ ve $\alpha\beta=-1$ eşitlikleri kullanıldığında,

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{-\alpha^2(1-\alpha^n)+\beta^2-(1-\beta^n)\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}-(\alpha^2-\beta^2)\right\}$$

$$= \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} - \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$= F_{n+2}-1$$

elde edilir.

Teorem 1.2. (Lucas, 1876)

$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$ ve $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1}-1$ dir.

(1.4)

İspat:

Binet formülü kullanarak teoremi ispat edelim.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha^{2i-1}-\beta^{2i-1}}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha^{2i-1} - \sum_{i=1}^{n}\beta^{2i-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha^{2i} - \beta\sum_{i=1}^{n}\beta^{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha\frac{1-\alpha^{2n}}{(1-\alpha)(1-\beta)} - \beta\frac{1-\beta^{2n}}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(-\alpha^2\frac{1-\alpha^{2n}}{(1+\alpha)} + \beta^2\frac{1-\beta^{2n}}{1+\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(-1+\alpha^{2n}+1-\beta^{2n}\right)$$

$$=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}=F_{2n}$$

elde edilir.

Teoremde verilen diğer özelliği de benzer şekilde ispat etmek mümkündür.

1.5 Eş (Associate) Dizisi

Fibonacci sayıları dendiğinde aklımıza gelen bir diğer sayı dizisi de Lucas sayılarıdır. n. Lucas sayısı L_n ile gösterilir. Fibonacci sayılarının indirgeme bağıntısı ve $L_1=1$, $L_2=3$ başlangıç koşullarını ele alırsak, eş diziyi yani Lucas sayılarını elde ederiz. $n\geq 3$ için $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ olduğundan ilk birkaç Lucas sayısı;

$L_1=1$, $L_2=3$, $L_3=4$, $L_4=7$, $L_5=11$, $L_6=18$, $L_7=29$, $\ldots$

dir.

Fibonacci sayılarında olduğu gibi Lucas sayıları içinde bir Binet formülü elde edilir. Fibonacci sayıları için kullanılan yöntemle, Lucas sayıları için elde edilen Binet formülü $L_n=\alpha^n+\beta^n$ şeklindedir.

Fibonacci sayıları ile Lucas sayılarının bazı özelliklerini verelim.

Teorem 1.3.

$\sum_{j=0}^{k}F_{i+j}=F_{i+k+2}-F_{i+1}$ dir.

Teorem 1.4.

$(\mathrm{F}_{n+1},\mathrm{F}_n)=1$ dir.

Teorem 1.5. (Cassini Formülü)

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^{\,2}=(-1)^n$$

Teorem 1.6. $n \geq 1$ için aşağıdakiler sağlanır.

1. $L_n F_n = F_{2n}$;
2. $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$;
3. $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$;
4. $5F_n = L_{n+1} - L_{n-1}$;

1.6 Fibonacci Genelleştirmeleri

Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine yapılan çalışmaların bir diğer yönü de bu sayıların genelleştirmeleri üzerinedir. İki çeşit genelleştirme mevcuttur. Bunların ilki, Fibonacci sayı dizisinin derecesini değiştirmeden başlangıç koşulları ve katsayılar yerine keyfi tamsayılar almaktır. Yani,

İkinci basamaktan indirgeme dizisi p ve q sıfırdan farklı tamsayılar, $U_0 = a$, $U_1 = b$ başlangıç koşulları ve $n > 1$ için

$$U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$$

kuralı ile tanımlanır. Elde edilen $\{U_n\}$ dizisine Horadam dizisi denir. Özel bilinen Horadam sayı dizileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 1.2 Özel sayı dizileri

p	q	a	b	Gösterimi	Dizinin Adı
1	-1	0	1	$\{F_n\}$	Fibonacci Dizisi
1	-1	2	1	$\{L_n\}$	Lucas Dizisi
2	-1	0	1	$\{P_n\}$	Pell Dizisi
2	-1	2	2	$\{p_n\}$	Pell-Lucas Dizisi
1	-2	0	1	$\{J_n\}$	Jakobsthal Dizisi
1	-2	2	1	$\{j_n\}$	Jakobsthal-Lucas Dizisi

İkinci tür genelleştirme ise, Fibonacci sayı dizisinin hem derecesi arttırmak hem de katsayılarına tamsayı getirerek elde edilen sayı dizisidir. Yani,

k. basamaktan en genel indirgeme dizisi; $1 \le i \le k$ için c_i'ler keyfi tamsayılar ve $u_0, u_1, ..., u_k$ ' lar keyfi başlangıç koşulları olmak üzere $n > k$ için

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + ... + c_k u_{n-k} \tag{1.4}$$

indirgeme kuralı ile tanımlanır. Özel olarak $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 1$ alınırsa, elde edilen sayı dizisine k. mertebeden Fibonacci sayı dizisi denir. $k = 3$ için Tribonacci sayı dizisi, $k = 4$ için Tetranacci sayı dizisi elde edilir.

1.7 Matrisler ve İndirgeme Dizileri

Yukarıda (1.4) ile tanımlanan dizi için açıkça

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

matris çarpımından elde edilir. Buradaki

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisine kompaniyon (eş) matrisi denir. Özel olarak Fibonacci sayı dizileri ele alındığında,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ için } A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Bu matrisler ve matris çarpımının özellikleri kullanılarak, $A^{n+m} = A^n A^m$ matris eşitliğini göz önüne alırsak ve 1. Satır 2. Sütun elemanlarını eşitlersek $A^{n+m} = A^n A^m$ eşitliğinden

$$F_{n+m} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1}$$

özelliği elde edilir. Özel olarak $n = m$ alındığında,

$$F_{2n} = F_{n+1} F_n + F_n F_{n-1} = F_n (F_{n+1} + F_{n-1}) = F_n L_n$$

olur ki buradan temel bölünebilme özelliklerinden F_n / F_{2n} sonucunu elde ederiz.

$A^{n+m} = A^n A^m$ eşitliğini şimdi $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ şeklinde yazar ve matris çarpımını göz önüne alırsak,

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

yazarız ve buradan

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

sonucunu elde ederiz.

BÖLÜM II

FİBONACCİ SAYILARININ KOMBİNATORİYAL İSPATLARI

Bu bölümde Fibonacci sayıları için bilinen bazı özelliklerin ispatlarını kombinatoriyal yoldan elde edeceğiz.

2.1 Fibonacci Sayılarının Kombinatoriyal Yorumları

n sayısını, 1 ve 2 sayılarını kullanarak ve bu iki sayının toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir? Bu sayıyı f_n ile gösterelim.

Örneğin, f_4 sayısını inceleyelim. 4 sayısı;

$1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$ olmak üzere 5 farklı şekilde yazılabildiğinden $f_4 = 5$ dir.

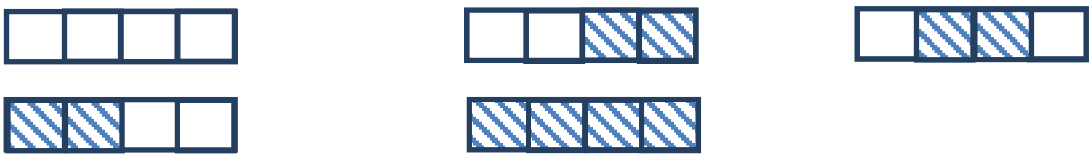
Kombinatoriyal olarak görmek için dizimizde ilk sayı 1 ise, geriye $n-1$ sayı kalır ve f_{n-1} tane farklı yol vardır. İlk sayı 2 ise f_{n-2} tane farklı yol vardır. Dolayısıyla

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

elde edilir.

f_n sayıları Fibonacci sayı dizilerinin indirgeme bağıntısı ile aynıdır.

Amacımız, f_n 'nin daha görsel ifadesini tercih etmek. 1 sayısını kare ve 2 sayısını domino olarak düşünelim. f_n, n uzunluğundaki bir şeritte kare ve dominoları kullanarak yapılacak farklı döşeme sayısını ifade eder. Böylece $f_4 = 5$ sayısının şerit olarak gösterimi şu şekildedir.



Şekil 2.1. $f_4 = 5$ sayısının parçalanması

Boş şeriti yani 0-şeriti için $f_0 = 1$ dersek, $f_{-1} = 0$ olarak tanımlarız. Bu ise Fibonacci sayıları ile tanımlanan $\{f_n\}$ dizisi arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı olduğunu gösterir.

Teorem 2.1. n uzunluğundaki bir şeritin kare ve dominolarla oluşturulmasına yönelik yolları f_n olarak hesap edelim. Böylece f_n bir Fibonacci Sayısıdır. Özellikle

$n \geq -1$ için $f_n = F_{n+1}$ 'dir.

2.2 Fibonacci Sayıları İçin Kombinatoriyal Özellikler

Bu bölümde Fibonacci sayı dizisi için bilinen özelliklerin hem Binet formülü yardımıyla hem de kombinatoriyal yönden ispatları verilmiştir. Binet formülü kullanılarak elde edilen ispatlarda, tanımlanan α ve β sayılarının özellikleri kullanılırken, kombinatoriyal yönden ispat yapılırken, bir soru ve elde edilen iki cevap kullanılacaktır.

Özellik 2.2.1:

$n \geq 0$, $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$ dir.

İspat: Öncelikle Binet formülü kullanarak ispat edelim.

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n} F_{k+1}$$

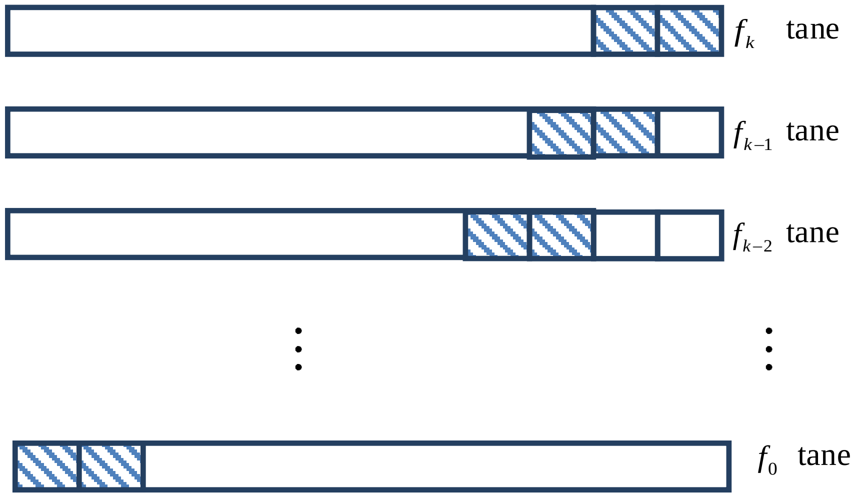
$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} (\sum_{k=0}^{n} \alpha^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \beta^{k+1}) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k} - \beta \sum_{k=0}^{n} \beta^{k}) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha (\frac{1-\alpha^{k+1}}{1-\alpha}) - \beta (\frac{1-\beta^{k+1}}{1-\beta}) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha(1-\beta)(1-\alpha^{k+1}) - \beta(1-\alpha)(1-\beta^{k+1})}{(1-\alpha)(1-\beta)} \right) \\
&= -\frac{1}{\alpha - \beta} ((\alpha - \alpha\beta)(1-\alpha^{k+1}) + (-\beta + \alpha\beta)(1-\beta^{k+1}) \\
&= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 \\
&= F_{k+3} - 1 \\
&= f_{k+2} - 1
\end{aligned}
$$

Kombinatoriyal yönden ispatlamak için sorulacak soru şu şekildedir.

Soru: $(n+2)$ uzunluğundaki bir şerit de en az bir tane domino kullanılarak kaç farklı döşeme yapılabilir?

Cevap 1: $(n+2)$ uzunluğundaki bir şerit de, f_{n+2} tane farklı döşeme yapılabilir. Hepsi karelerden oluşan döşeme çıkartıldığında, $f_{(n+2)} - 1$ tane döşemede mutlaka en az bir tane domino vardır.

Cevap 2: Eğer döşemede son fayans domino ise, kalan yer k uzunluğunda olduğundan f_k farklı döşeme yapılabilir. Son fayans kare, bir önceki fayans domino ise f_{k-1} yer kaldığından, f_{k-1} tane döşeme yapılabilir. Bu döşeme ilk fayans domino oluncaya kadar devam ederse, kalan yer sıfır olduğundan f_0 tane döşeme yapılabilir. Yani;



Şekil 2.2 Dominoların dizilişi

En az bir domino bulunmak şartıyla toplam farklı döşeme sayısı,

$f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_k = f_{k+2} - 1$ 'dir.

Özellik 2.2.2: $n \geq 0$, $f_0 + f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1}$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f_{2k} &= \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} \beta^{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha^{2k} - \beta \sum_{k=0}^{n} \beta^{2k}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha \left(\frac{1 - \alpha^{2k+2}}{1 - \alpha^2}\right) - \beta \left(\frac{1 - \beta^{2k+2}}{1 - \beta^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

α ve β sayıları $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denklemin kökleri olduğundan bu denklemi sağlar ve $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ve $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden $1 - \alpha^2 = \alpha$ ve $1 - \beta^2 = \beta$ ifadeleri son eşitlikte yerine yazıldığında,

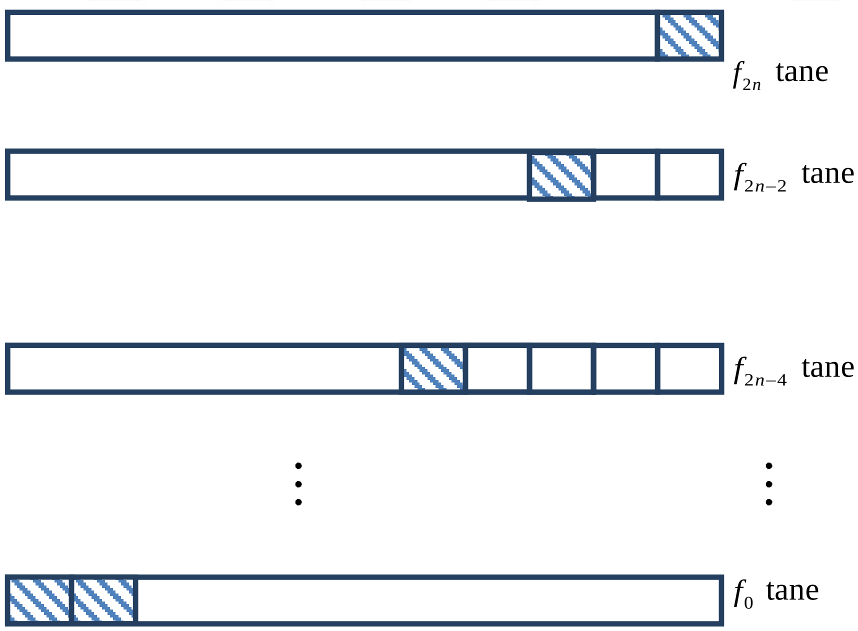
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha^{2k+2}}{-\alpha}\right)-\beta\left(\frac{1-\beta^{2k+2}}{-\beta}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(-1+\alpha^{2k+2}+1-\beta^{2k+2}) \\
&= \frac{\alpha^{2k+2}-\beta^{2k+2}}{\alpha-\beta} \\
&= F_{2k+2} \\
&= f_{2k+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Kombinatoriyal yoldan ispatı için sorulacak soru ise şu şekildedir.

Soru: $(2n+1)$ uzunluğundaki şerit de kaç farklı döşeme vardır?

Cevap 1: $(2n+1)$ uzunluğundaki şerit de f_{2n+1} farklı döşeme vardır.

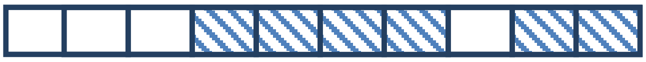
Cevap 2: Şeridin uzunluğu tek olduğu için, en az bir tane kare olmak zorundadır. Geri kalan yere f_{2n} döşeme yapılabilir.



Şekil 2.3. Döşemelerin oluşturulması

Dolayısıyla $\sum_{k=0}^{n} f_{2k}$ tane farklı döşeme yapılabilir.

Birçok Fibonacci özelliği verilen bir hücredeki "kırılabilirlik tanımına" dayanır. Herhangi bir şerit *1 ile k* arasındaki bir döşeme ve *k+1 ile n* arasında bir döşemeden oluşuyorsa, bu döşemeye *k*. hücrede kırılabilirdir denir. Eğer *k*. hücre bir dominodan oluşuyorsa, bu döşemeye kırılamaz denir.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Şekil 2.4. Kırılabilirlik

Yukarıdaki döşeme 2, 3, 8 'inci hücrelerden kırılabilirken, 4, 6, 9 'uncu hücrelerde kırılamaz.

Özellik 2.2.3: $m,n \geq 0$, $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$ dir.

İspat:

Fibonacci sayıları için Binet formülü ve $f_n = F_{n+1}$ eşitliği kullanılırsa, $f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$ denklemi $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n$ denklemine dönüşür.

$$F_{m+1}F_{n+1} + F_m F_n = \frac{\left(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}\right)\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) + \left(\alpha^m - \beta^m\right)\left(\alpha^n - \beta^n\right)}{\left(\alpha - \beta\right)^2}$$

$$== \frac{\alpha^{m+n+1} + \alpha^m \beta^n + \beta^m \alpha^n + \beta^{m+n+2} - \alpha^m \beta^n - \beta^m \alpha^n + \beta^{m+n}}{\left(\alpha - \beta\right)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n+1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \beta^{m+n+1}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\alpha - \beta\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{m+n+1}(\alpha-\beta)-\beta^{m+n+1}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha-\beta)\left(\alpha^{m+n+1}-\beta^{m+n+1}\right)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{m+n+1}-\beta^{m+n+1}}{\alpha-\beta} \\
&= F_{m+n+1} \\
&= f_{m+n}
\end{aligned}
$$

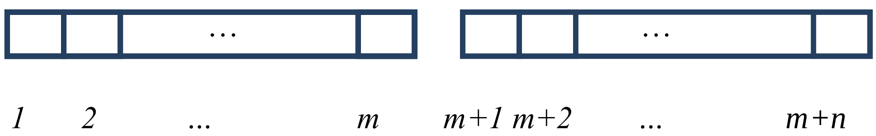
Kombinatoriyal ispat için sorulacak soru şu şekildedir.

Soru: $(m+n)$ uzunluğunda bir şeritte kaç tane döşeme yapılabilir?

Cevap 1: $(m+n)$ uzunluğundaki şeritte f_{m+n} farklı döşeme yapılabilir.

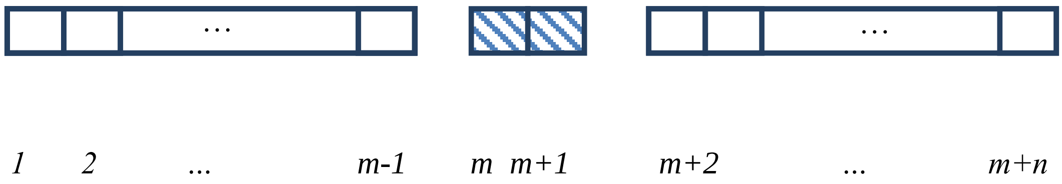
Cevap 2: m. hücredeki kırılabilirliği inceleyelim.

Eğer m. hücrede kırılabilirse, m uzunluğunda ve n uzunluğunda olmak üzere, iki parçaya ayrılır. m uzunluğundaki bir şeritte f_m farklı döşeme, n uzunluğundaki bir şeritte ise f_n farklı döşeme oluşturulabildiğinden toplamda $f_m f_n$ farklı döşeme oluşturulabilir. Yani,



Şekil 2.5. *m*. hücrede Kırılabilirlik

elde edilir. Eğer m. hücre kırılamaz ise, $m-1$ ve $n-1$ olacak şekilde iki şeride ayrılır. Dolayısıyla f_{m-1} ve f_{n-1} farklı döşeme yapılabilir. Yani,



Şekil 2.6. *m*. hücrede kırılamaz

elde edilir. Dolayısıyla bir hücre ya kırılabilir ya da kırılamaz olduğundan $f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$ farklı döşeme yapılabilir.

Özellik 2.2.4: $n \geq 0$ için, $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \binom{n-\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor n/2 \rfloor} = f_n$ dir.

İspat: Bu özelliği tümevarım yöntemi ile çözelim.

i) $n = 2$ için,

$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2$ ve $F_3 = 2$ olduğundan eşitlik sağlanır.

ii) n ve $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

iii) $n+1$ için,

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla;

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left\{ \binom{n-i-1}{i} + \binom{n-i-1}{i-1} \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i-1}{i} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i-1}{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} + \sum_{i=-1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-2-i}{i} \\
&= F_n + F_{n-1} \\
&= F_{n+1}
\end{aligned}
$$

Soru: n uzunluğundaki şerit de kaç farklı döşeme yapılabilir?

cevap 1: f_n tane n-şerit vardır.

cevap 2: n şeritte kaç tane kesin olarak i tane domino kullanılmıştır? Cevabın sıfırdan farklı olması için $0 \le i \le n/2$ olmak zorundadır. Böyle şeritlerde $n-2i$ kare kullanılması gerekli ve dolayısıyla $n-i$ şerit kullanıyoruz.

Şekil 2.7. 10-şeritte 3 domino $\binom{7}{3}$ farklı şekilde seçilir.

Yukarıdaki şeritte 10 döşemede 3 domino ve 4 kare kullanılmıştır. $n-i$ fayanstan i tane domino $\binom{n-i}{i}$ kadar seçilir. Dolayısıyla,

$\sum_{i\ge 0} \binom{n-i}{i}$ kadar n-döşeme vardır.

Özellik 2.2.5 : $n \ge 0$ için, $\sum_{i\ge 0} \sum_{j\ge 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+1}$ dir.

İspat: Özellik 2.2.5 de kullanılan tümevarım metodu ile ispatlanabilir.

Kombinatoriyal yoldan ispatı için sorulacak soru şu şekildedir.

Soru: $(2n+1)$ -lik şeritte kaç farklı döşeme yapılabilir.

Cevap 1: f_{2n+1} tane şerit vardır.

Cevap 2: $(2n+1)$ bir şerit mecburen en az bir tane kare içermek zorundadır. Eğer bir karenin sağ ve sol tarafındaki kare sayıları eşit ise, bu kareye medyan kare denir. İspat, medyan kareye dayanmaktadır.

Şekil 2.8. Medyan kare

Medyan karenin sol tarafındaki döşemede i tane domino, sağ tarafındaki döşemede ise j tane domino olduğunu kabul edelim. Toplam domino sayısı $i+j$ 'dir. Dolayısıyla $2n+1-2(i+j)$ tane kare mevcut olup sağ ve sol taraftaki kare sayısı eşit olduğundan, her iki tarafta da $n-i-j$ tane vardır. Sol tarafta $n-i-j+i=n-j$ tane kare ve dominolardan i tanesi domino olduğundan $\binom{n-j}{i}$ farklı sayıda domino seçilir. Benzer şekilde, sağ taraftaki kare ve dominolardan j tanesi domino olduğundan $\binom{n-i}{j}$ tane domino seçilir. Dolayısıyla

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\binom{n-j}{i}\binom{n-i}{j}$$

farklı sayıda döşeme yapılabilir.

Özellik 2.2.6 : $n\geq 0$ için, $f_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f_{k-1}$ dir.

İspat: $f_{k-1} = F_k$ olduğundan

$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f_{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} F_k$ elde edilir. Fibonacci sayıları için Binet formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta} &= \frac{1}{\alpha-\beta}(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\beta^k) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^k) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}((1+\alpha)^n - (1-\beta)^n) \\
&= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\
&= F_{2n} \\
&= f_{2n-1}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Kombinatoriyal yoldan ispatı için sorulacak soru şu şekildedir.

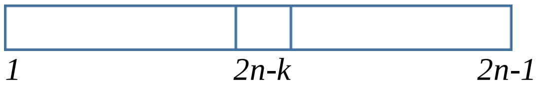
Soru: $(2n-1)$ -lik şerit de kaç farklı döşeme yapılabilir?

Cevap 1: f_{2n-1} tane farklı döşeme yapılabilir.

Cevap 2: İlk n fayans arasında kare olanların sayısını düşünelim. $(2n-1)$ -lik bir döşeme en az biri kare olmak koşulu ile en az n tane fayans (kare ve domino) içermek zorundadır. Gerçekten en az $n-1$ tane olursa, maksimum uzunluktaki döşemeyi bulmak için domino sayısı fazla, kare sayısı az olmak zorundadır. Yani, 1 tane kare kullanılırsa, en uzun döşeme elde edilir. Geriye $n-2$ tane domino kalır. $2(n-2)+1=2n-3$ uzunluğu elde edilir. Buda $2n-1$ uzunluğu ile çelişir. Dolayısıyla en az n tane fayans olmak zorundadır.

İlk n fayanstan k tanesi kare ve $(n-k)$ tanesi domino ise, $\binom{n}{k}$ farklı yol ile $2(n-k)-k = 2n-k$ uzunluğundaki yere döşenebilir. Geriye kalan $(2n-1)-(2n-k) = k-1$ uzunluğundaki şeritte f_{k-1} farklı döşeme yapılabilir. Dolayısıyla $\binom{n}{k} f_{k-1}$ farklı döşeme yapılabilir. Dolayısıyla,

$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_{k-1}$ farklı döşeme yapılabilir.



Şekil 2.9. $2n-k$ uzunluğundaki şerit, *k* tane kare *n-k* tane domino içerir.

Özellik 2.2.7: $n \geq 1$, $3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}$ dir.

İspat: $f_n = F_{n+1}$ bağıntısı ve Binet formülü ele alınırsa,

$F_{n+3} + F_{n-1} = 3F_{n+1}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} F_{n+3} + F_{n-1} &= \frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n+1}\left(\alpha^2 + \alpha^{-2}\right) - \beta^{n+1}\left(\beta^2 + \beta^{-2}\right)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{1}{\alpha^2} = (-\beta)^2 = \beta^2$ ve $\frac{1}{\beta^2} = (-\alpha)^2 = \alpha^2$ eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_{n+3} + F_{n-1} &= \frac{\alpha^{n+1}(\alpha^2 + \beta^2) - \beta^{n+1}(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha - \beta} \\ &= L_2 \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= 3F_{n+1} \end{aligned}$$

bulunur.

İki farklı kümeyi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Küme 1: *n* şeritteki döşemelerin sayısı olsun. f_n tane eleman vardır.

Küme 2: $(n-2)$ veya $(n+2)$-lik şeritteki döşemelerin sayısı olsun. $f_{n-2} + f_{n+2}$ tane eleman vardır.

Bu özelliği ispatlamak için küme 1 ile küme 2 arasında “1-3 karşılık” tanımını kuracağız. Yani; küme 1’deki her bir nesne için, küme 2 de üç farklı nesne oluşturabiliriz öyle ki, küme 2 deki her nesne bir tanedir. Dolayısıyla küme 2 nin eleman sayısı, küme 1 in eleman sayısının üç katıdır.

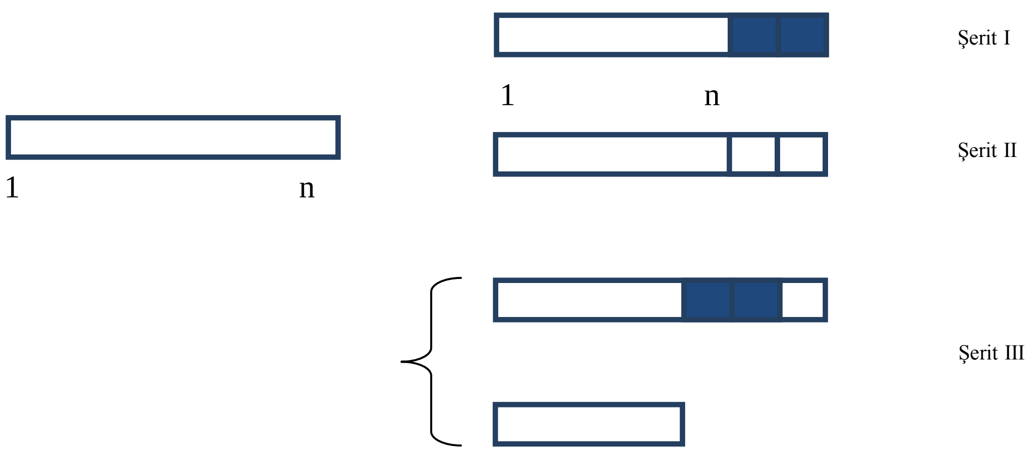
Özel olarak, küme 1 deki her bir n-şerit için, aşağıda uzunlukları $(n+2)$ veya $(n-2)$ olan üç farklı şerit oluşturuyoruz.

Şerit I : n uzunluğundaki bir döşemenin sonuna bir domino ekleyerek $(n+2)$–lik bir döşeme yapılabilir.

Şerit II : n uzunluğundaki bir döşemenin sonuna iki kare ekleyerek $(n+2)$–lik bir döşeme yapılabilir.

Şerit III : Bu döşeme n uzunluğundaki döşemenin son fayansına bağlıdır. Eğer döşeme bir kare ile bitiyorsa, bu kareden önce bir domino ekleyerek $(n+2)$ döşeme yapılabilir. Eğer bir domino ile bitiyorsa bu domino kaldırılır ve $(n-2)$ döşeme yapılır. Dolayısıyla küme 2 nin eleman sayısı küme 1 in eleman sayısının 3 katıdır. Bu da;

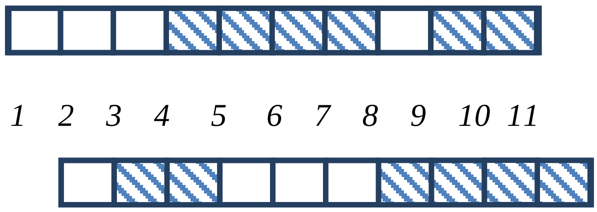
$3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}$ olduğunu gösterir.



Şekil 2.10. 1-3 karşılık

2.3 Şerit Çiftleri

Bu bölümde, “kuyruk değişimi” tekniği ile birkaç özellik kanıtlayacağız.



Şekil 2.11. *i.* hücrede kırılabilir ise *i.* hücrede hatalı.

Yukarıdaki iki döşemeyi düşünelim. İlk döşeme 1. hücreden 10. hücreye, ikinci döşeme 2. hücreden 11’e kadar. Her iki şeritte *i.* Hücrede kırılabilir ise, $2 \le i \le 10$ için *i.* hücre hatalıdır denir. Yukarıdaki şekilde 1., 2., 5., ve 7. Hücreler kusurludur. Kuyruk olarak ise son kusurlu hücreden sonraki fayanslar olarak adlandırıyoruz. Örneğin yukarıdaki şekilde, son iki fayans kuyruktur.

Kuyruk değişimi, Simson formülü ve Cassini özelliği için temel özelliktir. İlk bakışta, $(-1)^n$ teriminin kombinatorial özelliği için kullanışsız gibi görülebilir. Yine de, bu terimi “hata terimi” olarak göreceğiz.

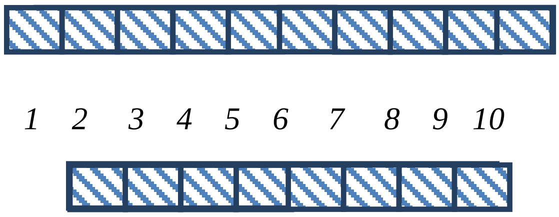
Özellik 2.2.8: $n \ge 0$ için, $f_n^{\,2} = f_{n+1} f_{n-1} + (-1)^n$ dir.

Küme 1: *n* uzunluğunda iki şeritte yapılan döşemeler, $f_n f_n = f_n^{\,2}$ tanedir.

Küme 2: *(n+1)* uzunluğunda ve *(n-1)* uzunluğunda iki şeritte yapılan döşemeler, $f_{n+1} f_{n-1}$ sayısı kadardır.

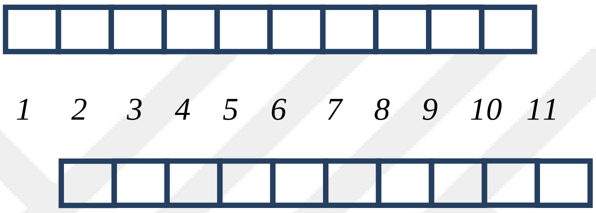
Eşleme:

Kabul edelim ki *n* tek olsun. Bu durumda alttaki ve üstteki şeritler en az bir kare içermek zorundadır. *i* hücredeki kare ya *i.* hücrede ya da *i-1.* hücrede “kusurlu” olmak zorundadır. iki tane *n* uzunluğunda şeritin kuyruk kısmını değiş-tokuş yaptığımızda, *(n+1)* uzunluğunda ve *(n-1)* uzunluğunda aynı kusurlarla iki şerit elde edilir. *N* uzunluğundaki şeritler ile *(n+1)* ve *(n-1)* uzunluğundaki şeritler arasında 1-1 eşleme yapılabilir. *(n+1)* ve *(n-1)* uzunluğundaki şeritler arasında kusursuzluk var mıdır?



Şekil 2.12. kusursuzluk.

Yukarıdaki şekildeki gibi bir kusursuzluk mutlaka vardır. Dolayısıyla n tek iken $f_n^{\ 2} = f_{n+1} f_{n-1} - 1$'dir. n çift iken de kusurlu şerit çiftleri arasında 1-1 eşleme vardır.



Şekil 2.13. Bir tane kusursuz şerit çifti.

Yukarıdaki şekilde olduğu gibi sadece 1 tane kusursuz şerit çifti vardır. Dolayısıyla $f_n^{\ 2} = f_{n+1} f_{n-1} + 1$ 'dir.

Özellik 2.2.9: $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} f_k^{\ 2} = f_n f_{n+1}$ 'dir.

Soru: n-lik ve $(n+1)$-lik bir şeritte kaç tane şerit yapılabilir?

Cevap 1: $f_n f_{n+1}$ tane şerit vardır.

Cevap 2: n-lik şeritin üzerine $(n+1)$-lik şeriti yerleştirelim.

Şekil 2.14. İki şerit çiftinde $f_n f_{n+1}$ farklı döşeme yapılabilir.

İki şeritte 1. Hücre ile başladığından dolayı, herhangi şerit çiftinin 0. Hücrede bir kusura sahiptir diye düşünebiliriz. *k*. hücrede kaç tane şerit çifti son kusura sahiptir? ${f_k}^2$ tane şerit vardır. Dolayısıyla;

$$\sum_{k=0}^{n} {f_k}^2 = f_n f_{n+1}$$

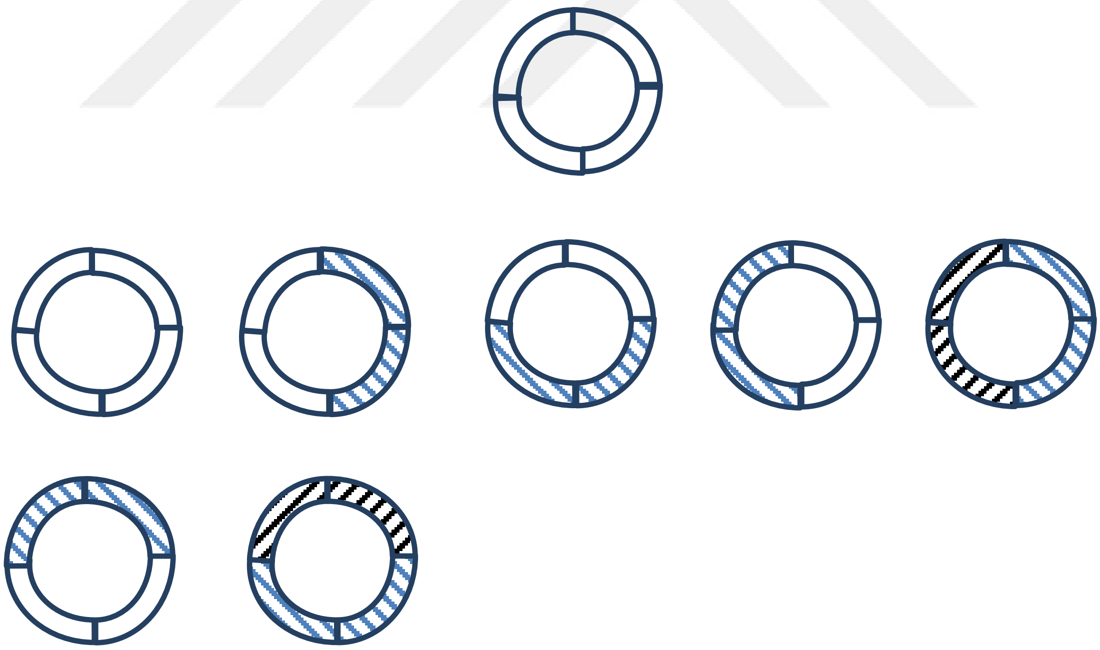
BÖLÜM III

LUCAS SAYILARININ KOMBİNATORİYAL İSPATLARI

Bu bölümde Lucas sayılarını ve Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren özelliklerin kombinatoriyal yoldan ispatlarını yapacağız. İlk olarak Lucas sayılarının kombinatoriyal yoldan yorumunu vereceğiz.

3.1 Lucas Sayılarının Kombinatoriyal Yorumu

Lucas sayılarının, Fibonacci sayılarında ki şeridin iki ucunun birleştirerek elde edilen halka üzerine döşenen kare ve domino kullanılarak farklı döşemelerin sayısı olduğunu göreceğiz. l_n sayısı olarak, n hücreden oluşan halkaya kare ve dominolar yerleştirilerek elde edilen farklı şerit sayısı olarak düşünelim. Örneğin; $l_4 = 7$'dir. yani 4-uzunluğundaki bir halka şeklinde bir şeride, domino ve kare kullanarak 7 farklı döşeme yapılabilir. Döşemeler aşağıda şu şekilde verilmiştir.



Şekil 3.1. $l_4 = 7$ sayısının parçalanması

n-uzunluğunda bir halka olarak, n-uzunluğundaki bir şeridin dairesel hale getirilmiş durumu olarak tanımlayalım. Eğer domino *n.* ve *1.* hücreleri kapsadığı durumlarda "faz dışı" olarak, diğer durumlarda "faz içi" olarak tanımlayalım. Şekil 3.1'de 5 tanesi faz içi 4-halka iken, 2 tanesi faz dışı 4-halkadır.

Başlangıç koşulları ile beraber, n uzunluğundaki halkaların sayısı Lucas dizisine Lucas sayı dizisi ile aynı indirgeme bağıntısını sağlar. Yani,

$n \geq 3$ için $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$'dir.

Bunu görebilmek için halkadaki son döşemeye bakalım. İlk fayans olarak birinci hücreyi kapsayan kareyi veya *1. ve 2.* hücreyi ya da n. *ve 1.* Hücreyi kapsayan domino olarak düşünelim. Son fayans olarak da ilk fayanstan önce gelen fayansı düşünelim. İlk fayans şeridin faz durumunu belirler. l_{n-1} tane n halka kare ile biterken, l_{n-2} tane n halka domino ile biter. Dolayısıyla,

$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ eşitliği sağlanır.

Teorem 2: $n \geq 0$ için, l_n; n uzunluğunda bir halkanın domino ve kare döşemeleriyle elde edilen şeritlerin sayısı olmak üzere; $l_n = L_n$'dir.

Burada L_n, n. Lucas sayısıdır.

3.2 Lucas Özellikleri

Özellik 3.2.1: $n \geq 1$ için $l_n = f_n + f_{n-2}$'dir.

Bu özelliği ispatlayabilmek için, sorulacak soru şu şekildedir.

Soru: n uzunluğunda halkada, kaç farklı döşeme yapılabilir?

Cevap 1: n uzunluğunda bir halkaya yapılabilecek farklı döşeme sayısı L_n dir.

Cevap 2: Bir halka ya faz içi ya da faz dışı olabileceğinden her iki durumu inceleyelim. Halka eğer faz içi ise, bu halka bir şeride karşılık gelir ve dolayısıyla f_n tane farklı döşeme vardır. Halka faz dışı ise, $n-2$ uzunluğunda bir şeride karşılık gelir ve dolayısıyla f_{n-2} tane farklı döşeme vardır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Şekil 3.2. *n* uzunluğundaki faz içi ve faz dışı halka

Özellik 3.2.2: $n \geq 0$ için $f_{2n-1} = L_n f_{n-1}$'dir.

Bu özelliği ispatlamak için iki farklı küme tanımlayalım.

Küme 1: $2n-1$ uzunluğundaki bir şeritte farklı döşemeler olsun. Bu durumda küme 1'in eleman sayısı f_{2n-1}'dir.

Küme 2: Bir halka ve bir şerit düşünelim öyle ki halkanın uzunluğu n, şeridin uzunluğu $n-1$ ise yapılabilecek farklı döşemeler olsun. Bu durumda küme 2'nin eleman sayısı $L_n f_{n-1}$ 'dir.

Bu iki küme arasında eleman sayılarını karşılaştırabilmek için, yapılacak eşlemeyi şu şekilde tanımlayalım.

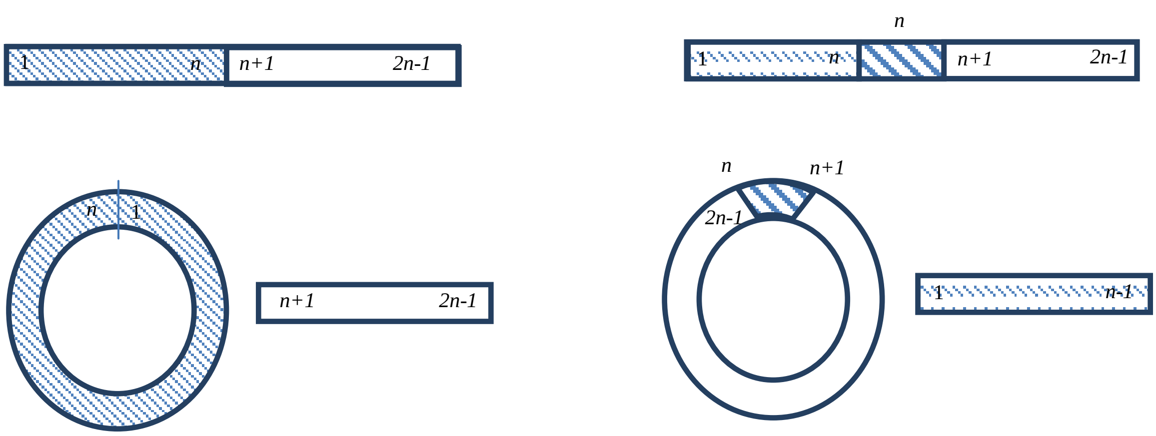
Eşleme: *2n-1* uzunluğunda bir T^* şeridi verilsin. Aşağıdaki şekilde belirtildiği gibi iki durum vardır. *n.* hücreden kırılabilirdir ya da *n.* hücreden kırılamazdır.

Durum I:

n. hücrede kırılabilir.

Durum II:

n. hücrede kırılamaz



Şekil 3.3. *n.* hücreden kırılabilir veya kırılamaz

Durum 1: T^* n. hücrede kırılabilir ise, n sağ tarafta, 1 sol tarafta olacak şekilde faz içi bir n-halka oluşturulabilir. $n+1$. hücreden $2n-1$. hücreye $n-1$ uzunluğunda da f_n farklı döşeme yapılabilir.

Durum 2: T^* n. hücrede kırılamaz ise, n. ve $n+1$. hücre bir domino ile kaplanır. 1. hücreden $n-1$. hücreye kadar f_{n-1} tane farklı döşeme, n. hücreden $2n-1$. hücreye L_n farklı halka olduğundan $f_{2n-1} = L_n f_{n-1}$'dir.

Özellik 3.2.3: $n \geq 0$ için $5f_n = L_n + L_{n-2}$'dir.

Bu özelliği kombinatoriyal yoldan ispatlamak için iki kümeyi şu şekilde tanımlayalım.

Küme 1: n uzunluğundaki bir şeritteki döşemeler olsun. Küme 1 in eleman sayısı f_n 'dir.

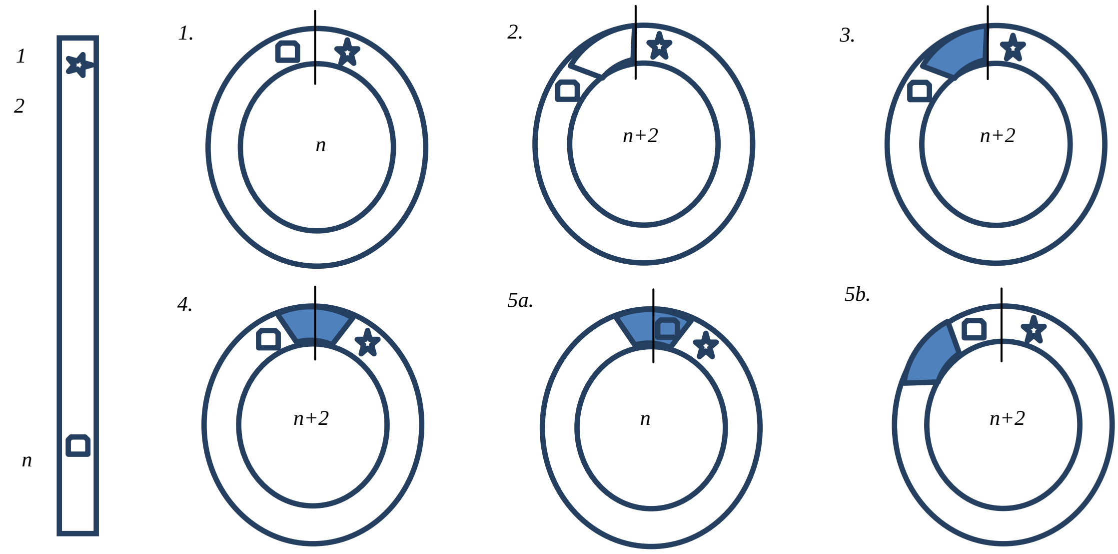
Küme 2: n uzunluğundaki halkada ya da $n+2$ uzunluğundaki halkadaki farklı döşemeler olsun. Küme 2 nin eleman sayısı $L_n + L_{n+2}$'dir.

Kümeler arasındaki eşlemeyi aşağıdaki şekilde oluşturalım.

Eşleme: Bu özelliği ispatlamak için küme 1 ile küme 2 arasında "1'e 5" bir eşleme kuralım. Küme 1 deki her bir döşeme için, küme 2'de birbirleriyle çakışmayacak şekilde 5 farklı n uzunluğunda halka oluşturacağız.

Verilen bir n uzunluğundaki şeritten, 5 farklı n uzunluğunda halkanın 4 tanesi şu şekilde oluşturulur.

1) Birinci ve n. hücreleri birleştirerek faz içi bir n uzunluğunda halka oluşturmak.
2) İki kare yerleştirerek faz içi $n+2$ uzunluğunda bir halka oluşturmak.
3) Bir domino yerleştirerek faz içi $n+2$ halka oluşturmak.
4) Bir domino yerleştirerek faz dışı $n+2$ halka oluşturmak.



Şekil 3.4. n uzunluğundaki halkadan n ve $n+2$ uzunluğunda 5 farklı halka elde edilir

Beşinci halka n uzunluğundaki şeridin bir kare veya domino ile başlayıp başlamayacağına bağlıdır.

Eğer bir domino ile başlarsa,

5a. Faz dışı n uzunluğundaki bir halkayı saat yönünde 1 hücre kaydırmakla,

Eğer bir kare ile başlarsa,

5b. Kareden önce bir domino ekleyerek faz içi $n+2$ uzunluğunda bir halka oluşturmakla,

5'inci halka elde edilir.

Özellik 3.2.4: $n \geq 0$ için $\sum_{r=0}^{n} f_r L_{n-r} = (n+2) f_n$ 'dir.

Kombinatoriyal yoldan ispatı için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

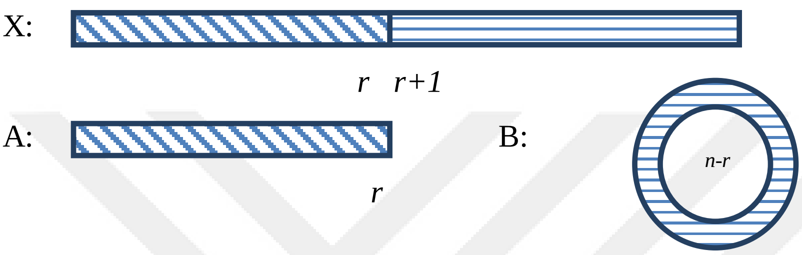
Küme 1: n uzunluğundaki döşemelerin kümesi olsun. Bu kümenin eleman sayısı tanımdan f_n 'dir

Küme 2: A bir r uzunluğunda bir döşeme ve B $0 \leq r \leq n$ için bir $n-r$ uzunluğunda bir halka olmak üzere, (A,B) çiftinin kümesini düşünelim. Tanımdan bu kümenin eleman sayısı $\sum_{r=0}^{n} f_r L_{n-r}$ kadardır.

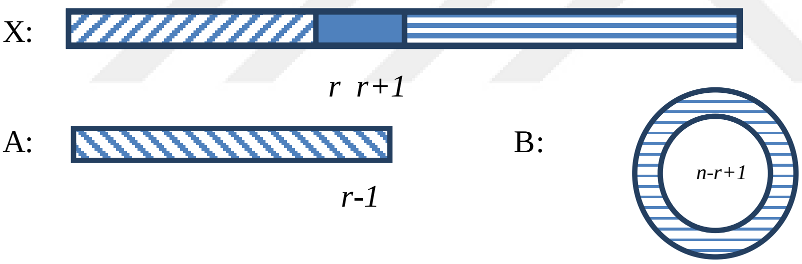
Eşleme: Küme 1 ile küme 2 arasında "1'e $n+2$" eşleme yapalım. Herhangi bir n uzunluğunda X döşemesinin r. hücrede kırılabilir olup olmamasını durumuna göre incelenirse,

X, r. hücresinde kırılabilir ise; aşağıdaki şekilde ifade edildiği gibi, 1. Hücreden r. hücreye kadar r uzunluğunda bir şerit ve $r+1$. hücre ile n. hücreleri birleştirerek $n-r$ uzunluğunda bir halka oluşturalım.

X, r. hücrede kırılabilir ise;



X, r. hücrede kırılamaz ise;



Şekil 3.5. r. hücrede kırılabilir veya kırılamaz

X, r. hücrede kırılamaz ise r. ve $r+1$. hücreleri kapsayan bir domino vardır. Bu durumda aşağıdaki şekilde de belirtildiği gibi $r-1$ uzunluğunda bir döşeme ve $n-r+1$ uzunluğunda bir halka elde edilebilir.

X kırılabilir ise, X=AB olacak şekilde A r uzunluğunda bir döşeme, B $n-r$ uzunluğunda bir halka mevcuttur. B faz içi *(n-r)*-halka olmak üzere (A,B) şerit çiftini eşleştirelim.

X kırılamaz ise; X=AdB olacak şekilde A, $r-1$ uzunluğunda bir döşeme ve B, $n-r+1$ uzunluğunda bir halka mevcuttur. Döşeme çifti (A,dB)'yi , B faz dışı $n-r+1$ uzunluğunda bir halka olmak üzere şerit çiftini eşleştirelim. $1 \le r \le n-1$ için bu şekilde tam olarak $n-1$ adet eşleştirme yapılabilir. Ayrıca, $r=0$ için uzunluğu 0 olan bir döşeme ve uzunluğu n olan faz için ve faz dışı iki halka oluşturulabilir. Benzer şekilde $r=n$ için uzunluğu n olan bir şerit oluşturulabileceğinden her n uzunluğundaki şeritten $n+2$ tane (A,B) veya (A,dB) döşeme çifti üretilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

A.T. Benjamin, J. J. Quinn, Proofs that Really Count: The art of Combinatorial Proof, ***Dolciani Mathematical Expositions,*** Washington, 2003.

T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, New York, 2001.

Irmak, N., Fibonacci ve Lucas sayılarının ters toplamları ve uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, ***Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Niğde, s. 1-10, 2011.

Benjamin, A. T. and Quinn, J. J., "Recounting Fibonacci and Lucas identities". ***College Math. J.*** 30 (1999), no. 5, 359–366.

Benjamin, A. T. and Quinn, J. J., "Fibonacci and Lucas identities through colored tilings", ***Util. Math.*** 56 (1999), 137–142.

ÖZ GEÇMİŞ

Mehmet TOMAK 21.08.1984 tarihinde Antalya'nın Manavgat ilçesinde doğdu. İlk ve orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2003 yılında kayıt yaptırdığı Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında Antalya Valiliğinde memur olarak göreve başladı. 2016 yılında Ömer Halisdemir Üniversitesine yatay geçiş yaparak yüksek lisans eğitimine devam etmektedir. 2017 yılı başından itibaren İçişleri Bakanlığı Merkez teşkilatında memur olarak görevine devam etmektedir.