



**T. C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**LİNEER STİFF DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF DENKLEM
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN FARKLI RUNGE-KUTTA METODLARI
KULLANILARAK HESAPLANMASI**

CAHİT KÖME

Haziran 2013

**T. C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**LİNEER STİFF DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF DENKLEM
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN FARKLI RUNGE-KUTTA METODLARI
KULLANILARAK HESAPLANMASI**

CAHİT KÖME

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

Haziran 2013

Cahit KÖME tarafından **Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY** danışmanlığında hazırlanan “**Lineer Stiff Diferansiyel Denklem ve Stiff Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin Farklı Runge-Kutta Metodları Kullanılarak Hesaplanması**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY, Niğde Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Abdulkadir DOĞAN, Abdullah Gül Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ, Nevşehir Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cahit KÖME

ÖZET

LİNEER STİFF DİFERANSİYEL DENKLEM VE STİFF DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN FARKLI RUNGE-KUTTA METODLARI KULLANILARAK HESAPLANMASI

KÖME, Cahit

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

Ocak 2013, 117 Sayfa

Bu yüksek lisans çalışmasında lineer stiff diferansiyel denklem ve stiff diferansiyel denklem sistemlerinin farklı Runge-Kutta metodları kullanılarak çözümlerinin hesaplanması araştırılmıştır. İlk olarak adım sayısı ve merteye arasındaki bağıntı incelenerek bu metodların tarihsel gelişim süreçleri incelenmiştir. Daha sonra metodları yazmakta gerekli olan Butcher Tablosu ve bu tablodan yola çıkarak merteye şartları araştırılmış ve Butcher Tablosunda yer alan katsayıların hesaplama yöntemleri incelenmiştir. Hesaplanan farklı katsayılar ile bazı farklı metodlar incelenmiş ve bu metodlar stiff diferansiyel denklemlere uygulanarak aralarındaki yaklaşım farkları incelenmiştir. Aynı zamanda bulunan metodlara ait kararlılık bölgeleri Dahquist test denklemi kullanılarak elde edilmiştir. Bulunan kararlılık bölgeleri doğrultusunda metodun farklı adım uzunluğu kullanılarak çözümleri elde edilmiştir. Kararlılık bölgesinin büyüklüğüne göre metodların stiff diferansiyel denklemler için hangi adım aralığında daha iyi sonuç verdiği incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Runge-Kutta metodları, stiff diferansiyel denklemler, kararlılık analizi, Butcher tablosu.

SUMMARY

COMPUTATION OF SOLUTIONS OF LINEAR STIFF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND STIFF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING DIFFERENT RUNGE-KUTTA METHODS

KÖME, Cahit
Niğde University
Institute of Science
Mathematics Department

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet Tarık ATAY

January 2013, 117 Paper

In this master thesis, computation of linear stiff ordinary differential equations and stiff systems of differential equations by using different Runge-Kutta methods are researched. Firstly, relations between stage and order of these methods are investigated. Then, historical development of these methods are investigated. Coefficients of Butcher table, which are essential for writing this table and computation techniques for this coefficients are investigated. Some different methods are researched with this computed coefficients and these methods are applied to stiff ordinary differential equations. In addition, approximation differences between them are researched. Also, stability regions of these methods are found using Dahlquist test equation. Through these stability regions, some solutions are obtained using different step size. Finally, it is investigated that step size is appropriate for stiff ordinary differential equations according to stability regions.

Keywords: Runge-Kutta methods, Stiff differential equations, stability analysis, Butcher table.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamda, çalışmalarına yön veren, bilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen aynı zamanda maddi ve manevi her türlü desteği hiçbir karşılık beklemeden fazlasıyla sağlayan danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
FOTOĞRAFLAR DİZİNİ	xix
BÖLÜM I GİRİŞ	1
1.1.Genel Bilgiler	1
BÖLÜM II BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ 5	
2.1. Euler Metodu	6
2.2. Euler Metodu İçin Kararlılık Analizi	6
2.3. Kapalı Euler Metodu	9
2.4. Kapalı Euler Metodu İçin Kararlılık Analizi	9
2.5. Trapez (Yamuk) Kuralı	12
2.6. Yamuk (Trapez) Kuralı İçin Kararlılık Analizi	12
BÖLÜM III RUNGE-KUTTA METODLARI	16
3.1. Açık Tip Runge-Kutta Metodları	16
3.1.1 Açık Tip Runge-Kutta $s=1,p=1$ Durumu	16
3.1.2 Açık Tip Runge-Kutta $s=2,p=2$ Durumu	17
3.1.3 Açık Tip Runge-Kutta $s=3,p=3$ Durumu	21
3.1.4 Açık Tip Runge-Kutta $s=4,p=4$ Durumu	24
3.2. Açık Tip Runge-Kutta Metodları İçin Kararlılık Analizi	28
BÖLÜM IV SAYISAL İNTEGRASYON	31

4.1. Temel Kavramlar	31
4.2. İnterpolasyon yardımıyla İntegrasyon	33
4.3. İntegrasyon Metodlarında Aralık Deęiřtirme	35
4.4. Gauss İntegrasyonu	35
4.5. Legendre Polinomları	38
BÖLÜM V KAPALI RUNGE-KUTTA METODLARI	40
5.1. Genel Bilgiler	40
5.2. Mertebe Şartları	43
5.3. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=1 , p=2 durumu	46
5.4. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=2, p=4 Durumu	47
5.5. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=3, p=6 Durumu	59
5.6. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=4, p=8 Durumu	54
5.7. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=5, p=10 Durumu.....	54
5.8. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=2 p=3 Durumu	55
5.9. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=3 p=5 Durumu	57
5.10. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=2 p=3 Durumu.....	58
5.11. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=3 p=5 Durumu	60
5.12. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=2 p=3 Durumu	61
5.13. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=3 p=5 Durumu	62
5.14. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=2 p=3 Durumu	63
5.15. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=3, p=5 Durumu	64
5.16. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=4, p=7 Durumu	66
5.17. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=5, p=9 Durumu	66
5.18. Runge-Kutta Gauss-Lobatto Metodları	66
5.19. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=2 p=2 Durumu	67

5.20. Diğer Runge-Kutta Gauss-Lobatto Metodları	68
BÖLÜM VI UYGULAMALAR	70
6.1. Giriş	70
6.2. Uygulama (Singular Perturbation Problem)	71
6.2.1. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=5$, $p=10$ ile Yaklaşım	71
6.2.2. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=5$, $p=9$ ile Yaklaşım	81
6.2.3. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA $s=5$, $p=8$ ile Yaklaşım	90
6.3. Uygulama (Stiff Problem)	99
6.3.1. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=1$, $p=2$ ile Yaklaşım	99
6.3.2. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=2$, $p=4$ ile Yaklaşım	102
6.3.3. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=3$, $p=6$ ile Yaklaşım	105
6.3.4. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=4$, $p=8$ ile Yaklaşım	108
6.3.5. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=5$, $p=10$ ile Yaklaşım	111
SONUÇ	114
KAYNAKLAR	115
ÖZGEÇMİŞ	118

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1, h=0.1$ için Kapalı Euler Metodu sonuçları ..10	
Çizelge 4.1. Gauss İntegrasyon Kökleri ve Katsayıları..... 37	37
Çizelge 4.2. Legendre Polinomlarının Kökleri 38	38
Çizelge 5.1. $j=2, k=2$ 'ye kadar olan Padé yaklaşımları..... 42	42
Çizelge 5.2. 4.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebeye şartları 45	45
Çizelge 5.3. 6.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebeye şartları 49	49
Çizelge 6.1. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü... 72	72
Çizelge 6.2. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü ..73	73
Çizelge 6.3. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü .74	74
Çizelge 6.4. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü... 75	75
Çizelge 6.5. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü 76	76
Çizelge 6.6. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1, \varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü .. 77	77
Çizelge 6.7. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1, \varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü... 78	78
Çizelge 6.8. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1, \varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü...79	79
Çizelge 6.9. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.1, \varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü .80	80
Çizelge 6.10. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü..... 81	81
Çizelge 6.11. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü..... 82	82
Çizelge 6.12. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü..... 83	83
Çizelge 6.13. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü..... 84	84
Çizelge 6.14. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü..... 85	85
Çizelge 6.15. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü..... 86	86

Çizelge 6.16. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü.....	87
Çizelge 6.17. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü.....	88
Çizelge 6.18. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü.....	89
Çizelge 6.19. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü.....	90
Çizelge 6.20. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü.....	91
Çizelge 6.21. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü.....	92
Çizelge 6.22. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü.....	93
Çizelge 6.23. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü.....	94
Çizelge 6.24. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü.....	95
Çizelge 6.25. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü.....	96
Çizelge 6.26. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü.....	97
Çizelge 6.27. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü.....	98
Çizelge 6.28. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1,p=2$ ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü	99
Çizelge 6.29. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1,p=2$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü ...	100
Çizelge 6.30. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1,p=2$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü..	101
Çizelge 6.31. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2,p=4$ ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü	102
Çizelge 6.32. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2,p=4$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü ...	103
Çizelge 6.33. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2,p=4$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü..	104

Çizelge 6.34. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3, p=6$ ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü	105
Çizelge 6.35. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3, p=6$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü ...	106
Çizelge 6.36. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3, p=6$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü..	107
Çizelge 6.37. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4, p=8$ ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü	108
Çizelge 6.38. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4, p=8$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü ...	109
Çizelge 6.39. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4, p=8$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü..	110
Çizelge 6.40. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5, p=10$ ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü ...	111
Çizelge 6.41. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5, p=10$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü .	112
Çizelge 6.42. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5, p=10$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü	113

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Butcher Tablosu	4
Şekil 2.1. Euler metodunun kararlılık bölgesi	7
Şekil 2.2. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.01$ için Euler metodu hata grafiği	7
Şekil 2.3. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.001$ için Euler metodu hata grafiği	8
Şekil 2.4. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.0019$ için Euler metodu hata grafiği	8
Şekil 2.5. Kapalı Euler metodunun kararlılık bölgesi	9
Şekil 2.6. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$, $h=0.1$ için Kapalı Euler metodu hata grafiği.....	10
Şekil 2.7. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$, $h=0.01$ için Kapalı Euler metodu hata grafiği.....	10
Şekil 2.8. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$, $h=0.001$ için Kapalı Euler metodu hata grafiği ..	11
Şekil 2.9. Yamuk kuralı için kararlılık bölgesi	12
Şekil 2.10. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$, $h=0.1$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği	13
Şekil 2.11. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1000$, $h=0.1$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği...	13
Şekil 2.12. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$, $h=0.01$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği	13
Şekil 2.13. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 1$, $h=0.001$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği	14
Şekil 2.14. (1.1) denklemi $0 \leq t \leq 100$, $h=0.1$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği	14
Şekil 3.1. $s=1, p=1$ için Butcher tablosu	16
Şekil 3.2. Durum 3.1.2.1 için Butcher tablosu	18
Şekil 3.3. $p = 2, h = 0.01, 0 \leq t \leq 1$ için Heun metodu hata grafiği	18
Şekil 3.4. $p = 2, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Heun metodu hata grafiği	18
Şekil 3.5 $p = 2, h = 0.002, 0 \leq t \leq 1$ için Heun metodu hata grafiği	19
Şekil 3.6. Durum 3.1.2.2 için Butcher tablosu	19
Şekil 3.7 $p = 2, h = 0.01, 0 \leq t \leq 1$ için Düzeltilmiş Euler metodu hata grafiği	19
Şekil 3.8. $p = 2, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Düzeltilmiş Euler metodu hata grafiği ..	20
Şekil 3.9. $p = 2, h = 0.002, 0 \leq t \leq 1$ için Düzeltilmiş Euler metodu hata grafiği ..	20
Şekil 3.10. Durum 3.1.3.1 için Butcher tablosu	21

Şekil 3.11. $p = 3, h = 0.0025, 0 \leq t \leq 1$ için Durum 3.1.3.1 hata grafiği	21
Şekil 3.12. Durum 3.1.3.2 için Butcher tablosu	22
Şekil 3.13. $p = 3, h = 0.0026, 0 \leq t \leq 1$ için Durum 3.1.3.2 hata grafiği	22
Şekil 3.14. Durum 3.1.3.3 için Butcher tablosu	22
Şekil 3.15. $p = 3, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Durum 3.1.3.3 hata grafiği	23
Şekil 3.16. $p = 3, h = 0.0025, 0 \leq t \leq 100$ için Durum 3.1.3.3 hata grafiği	23
Şekil 3.17. Klasik Runge-Kutta 4.mertebe için Butcher tablosu	24
Şekil 3.18. $p = 4, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Klasik Runge-Kutta hata grafiği	25
Şekil 3.19. Runge-Kutta 3/8 metodu için Butcher tablosu	25
Şekil 3.20. $p = 4, h = 0.0026, 0 \leq t \leq 1$ için Runge-Kutta 3/8 hata grafiği	25
Şekil 3.21. Runge-Kutta Gill metodu için Butcher tablosu	26
Şekil 3.22. $p = 4, h = 0.0025, 0 \leq t \leq 100$ için Runge-Kutta Gill hata grafiği	26
Şekil 3.23. Runge-Kutta Dormand metodu için Butcher tablosu	26
Şekil 3.24. $p = 4, h = 0.00275, 0 \leq t \leq 1$ için Runge-Kutta Dormand hata grafiği..	27
Şekil 3.25. $p=1$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi	29
Şekil 3.26. $p=2$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi	29
Şekil 3.27. $p=3$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi	29
Şekil 3.28. $p=4$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi	30
Şekil 4.1. Dikdörtgen metodunun geometrik açıklaması	32
Şekil 4.2. Orta nokta kuralının geometrik açıklaması	32
Şekil 4.3. Yamuk kuralının geometrik açıklaması	34
Şekil 5.1. Kapalı Tip Runge-Kutta Metodu Butcher Tablosu	43
Şekil 5.2. Köşegensel Kapalı Tip Runge-Kutta Metodu Butcher Tablosu	43
Şekil 5.3. Tek Tip Köşegensel Kapalı Tip Runge-Kutta Metodu Butcher Tablosu....	43
Şekil 5.4. Gauss-Legendre $s=1, p=2$ durumu için Butcher Tablosu	46

Şekil 5.5. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=1$, $p=2$ Kararlılık Bölgesi	46
Şekil 5.6. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=2$, $p=4$ durumu için Butcher tablosu.....	48
Şekil 5.7. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=2$, $p=4$ Kararlılık Bölgesi	49
Şekil 5.8. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=3$, $p=6$ Butcher Tablosu	53
Şekil 5.9. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=3$, $p=6$ Kararlılık Bölgesi	53
Şekil 5.10. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=4$, $p=8$ Butcher Tablosu.	54
Şekil 5.11. Runge-Kutta Gauss-Legendre $s=5$, $p=10$ Butcher Tablosu.	54
Şekil 5.12. Runge-Kutta Gauss-Radau I $s=2$, $p=3$ Butcher Tablosu	56
Şekil 5.13. Runge-Kutta Gauss-Radau I $s=2$, $p=3$ Kararlılık Bölgesi	56
Şekil 5.14. Runge-Kutta Gauss-Radau I $s=3$, $p=5$ Butcher Tablosu	57
Şekil 5.15. Runge-Kutta Gauss-Radau I $s=3$, $p=5$ Kararlılık Bölgesi	58
Şekil 5.16. Runge-Kutta Gauss-Radau IA $s=2$, $p=3$ Butcher Tablosu	59
Şekil 5.17. Runge-Kutta Gauss-Radau IA $s=2$, $p=3$ Kararlılık Bölgesi	59
Şekil 5.18. Runge-Kutta Gauss-Radau IA $s=3$, $p=5$ Butcher Tablosu	60
Şekil 5.19. Runge-Kutta Gauss-Radau IA $s=3$, $p=5$ Kararlılık Bölgesi	61
Şekil 5.20. Runge-Kutta Gauss-Radau II $s=2$, $p=3$ Butcher Tablosu	61
Şekil 5.21. Runge-Kutta Gauss-Radau II $s=2$, $p=3$ Kararlılık Bölgesi	62
Şekil 5.22. Runge-Kutta Gauss-Radau II $s=3$, $p=5$ Butcher Tablosu	62
Şekil 5.23. Runge-Kutta Gauss-Radau II $s=3$, $p=5$ Kararlılık Bölgesi	63
Şekil 5.24. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=2$, $p=3$ Butcher Tablosu	64
Şekil 5.25. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=2$, $p=3$ Kararlılık Bölgesi	64
Şekil 5.26. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=3$, $p=5$ Butcher Tablosu	65
Şekil 5.27. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=3$, $p=5$ Kararlılık Bölgesi	65
Şekil 5.28. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=4$, $p=7$ Butcher Tablosu	66
Şekil 5.29. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA $s=5$, $p=9$ Butcher Tablosu	66

Şekil 5.30. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=2, p=2 Butcher Tablosu	67
Şekil 5.31. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=2, p=2 Kararlılık Bölgesi	68
Şekil 5.32. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=3, p=4 Butcher Tablosu	68
Şekil 5.33. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=4, p=6 Butcher Tablosu	68
Şekil 5.34. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=5, p=8 Butcher Tablosu	69
Şekil 6.1. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.1 ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği	72
Şekil 6.2. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.1 ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği	73
Şekil 6.3.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.1 ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği	74
Şekil 6.4.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.01 ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği	75
Şekil 6.5.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.01 ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği	76
Şekil 6.6.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.01 ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği	77
Şekil 6.7.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.001 ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği	78
Şekil 6.8.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.001 ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği	79
Şekil 6.9.(6.1) denkleminin RK-GL metodu ile [0,1] aralığında h=0.001 ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği	80
Şekil 6.10. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile [0,1] aralığında h=0.1 ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği.....	81
Şekil 6.11. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile [0,1] aralığında h=0.1 ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği.....	82
Şekil 6.12. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile [0,1] aralığında h=0.1 ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği.....	83

Şekil 6.13. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği.....	84
Şekil 6.14. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği.....	85
Şekil 6.15. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği.....	86
Şekil 6.16. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği.....	87
Şekil 6.17. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği.....	88
Şekil 6.18. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği.....	89
Şekil 6.19. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği	90
Şekil 6.20. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği	91
Şekil 6.21. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği	92
Şekil 6.22. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği	93
Şekil 6.23. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği	94
Şekil 6.24. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği	95
Şekil 6.25. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği	96
Şekil 6.26. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği	97
Şekil 6.27. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği	98

Şekil 6.28. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1$, $p=2$ ve $h=0.01$ için hata grafiği.....	100
Şekil 6.29. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1$, $p=2$ ve $h=0.001$ için hata grafiği	101
Şekil 6.30. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.1$ için hata grafiği	102
Şekil 6.31. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.01$ için hata grafiği	103
Şekil 6.32. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.001$ için hata grafiği	104
Şekil 6.33. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.1$ için hata grafiği	105
Şekil 6.34. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.01$ için hata grafiği	106
Şekil 6.35. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.001$ için hata grafiği	107
Şekil 6.36. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.1$ için hata grafiği	108
Şekil 6.37. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.01$ için hata grafiği	109
Şekil 6.38. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.001$ için hata grafiği	110
Şekil 6.39. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.1$ için hata grafiği	111
Şekil 6.40. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.01$ için hata grafiği	112
Şekil 6.41. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.001$ için hata grafiği	113

FOTOGRAFLAR DİZİNİ

Fotoğraf 1.1. Carl David Tolmé Runge (1856-1927)	2
Fotoğraf 1.2. Wilhelm Martin Kutta (1867-1944)	3

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1 Genel bilgiler

Fiziksel olaylarla ilgili problemlerin incelenmesinde problemin özelliklerini taşıyan bazı matematiksel modeller kurulmaktadır. Bu tür modellemelerde genellikle bilinmeyen fonksiyon ya da fonksiyonlara ait bağımsız değişkenleri ve bu fonksiyonların türevlerini içeren bir denklem ortaya çıkmaktadır. Bir değişken ve bu değişkenin fonksiyonu ile bu fonksiyonun belirli türevleri arasındaki bu bağıntıya “Diferansiyel Denklem” denmektedir. x bağımsız değişken ve $y(x)$ bağımlı değişken olmak üzere n . mertebeden bir adi diferansiyel denklem $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde gösterilebilir. Bu şekildeki bir adi diferansiyel denklemin çözümü $f(x, y, C) = 0$ şeklindedir. Bu çözüme adi diferansiyel denklemin genel çözümü, C 'nin her bir değeri için elde edilen çözüme ise özel çözüm denir. Diferansiyel denklemlerin gerçek çözümlerinin yanı sıra yaklaşık çözümleri de bulunmaktadır ve bu yaklaşık çözümler nümerik metodlar vasıtasıyla hesaplanabilmektedir (Başarır ve Türker, 2003). Çünkü birçok diferansiyel denklemin gerçek çözümü bulunmamakta ya da gerçek çözümündeki yaşanan bazı zorluklar sonuca ulaşmayı zorlaştırmaktadır. Bu gibi durumlarda diferansiyel denklemlerin yaklaşık değerlerini hesaplamak için nümerik metodlardan faydalanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümlerinde denklem gerçek çözümün katkısı olmadan sayısal olarak bulunmaktadır. Diferansiyel denklem ile birlikte verilen şartlar diferansiyel denklemin analitik çözümündeki sabitleri belirlediğinden diferansiyel denklemin sayısal çözümü verilen şartlar ile ele alınmalıdır. Verilen şartlar analitik çözümün aksine sayısal çözümün başlamasına yardım eder ve bu şartlar değiştiğinde diferansiyel denklem aynı olsa bile denklem baştan tekrar çözülmelidir. Diferansiyel denklem n . mertebeden ise çözümde ortaya çıkan n sabitin belirlenmesi için n tane şartın verilmesi gerekir. Bu şartlar belirli noktalarda bilinmeyen fonksiyonun kendisi ve türevleri arasında yazılan bağlantılardır. Bu şartlar örneğin ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem için bir veya iki noktada $f(x, y, y') = 0$, $g(x, y, y') = 0$ şeklindedir. Bir n . mertebeden diferansiyel denklemin verilen şartlarında n . mertebeden türev terimleri bulunmaz. Şayet böyle terimler bulunursa n . mertebeden türev diferansiyel denklemden diğer türevler cinsinden bulunarak elimine edilir. Diferansiyel denklemin sabitlerini belirlemek için verilen şartlar bir noktada verildiğinde bu probleme başlangıç değer problemi adı verilmektedir.

Bir n . mertebeden $f_i(x, y, y', \dots, y^{n-1}), (i = 1, 2, \dots, n)$ şeklinde başlangıç şartı verildiğinde ve bu şartlar bir noktada, örneğin $x=a$ noktasında yazıldığında bu n tane eşitlikten $y(a), y'(a), y''(a), \dots, y^{n-1}(a)$ değerleri bulunur. Bu nedenle n . mertebeden bir diferansiyel denklemin tek noktada fonksiyonun kendisi ve $(n-1)$. Dereceden türevlerinin verilen değerlere eşit olacak şekilde çözülmesi problemine diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemi adı verilir. Diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemi $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ifadesi n . mertebeden bir diferansiyel denklem olmak üzere analitik olarak $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ve $y(a) = y_1, y'(a) = y_2, y''(a) = y_3, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_n$ şeklinde yazılmaktadır. Bu tip diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için nümerik metodlardan faydalanacağımızı daha önceden belirtilmişti. Nümerik metodların ortaya çıkışı daha evvel zamanlara dayansa da ilk makaleler XIX. yüzyılda J. C. Adams ve Francis Bashforth tarafından yazılmıştır. Daha sonra 1885 yılında Alman matematikçi Runge bazı yeni çalışmalar yaparak metodların mertebesinin varlığını ve bu mertebelerin yaklaşık çözümlerde etkin rol oynadığını gözlemlemiştir.



Fotoğraf 1.1. Carl David Tolmé Runge (1856-1927)

1900'lü yılların başında ise Heun ve Kutta, Adams-Bashforth ve Runge'nin çalışmalarına önemli katkılarda bulunarak daha yüksek mertebeden metodlar elde etmişlerdir. Özellikle Kutta'nın Runge metodlarından yararlanarak bulmuş olduğu yeni metodlar Runge-Kutta metodları olarak anılmaya başlamıştır. Heun, Runge'nin bazı metodlarını geliştirerek 2. ve 3. mertebeden yeni metodlar elde etmeyi başarmıştır. 1925 yılında E. J. Nyström Kutta'nın bulmuş olduğu bazı metodları yeniden düzenleyerek literatüre kazandırmış ve aynı zamanda 2. mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Runge-Kutta metodları ile nasıl hesaplanacağını göstermiştir.



Fotoğraf 1.2. Wilhelm Martin Kutta (1867-1944)

1900'lü yılların sonuna doğru J. C. Butcher Runge-Kutta metodları üzerine farklı çalışmalar yaparak daha yüksek mertebeli yeni metodları bulmuştur. Bu çalışmasında ise Grafik Teorisi'nden yararlanmış ve köklenmiş ağaçlar vasıtasıyla metodların merteye şartlarını grafiksel olarak göstermiştir. Böylece yeni türevleri elde etmek daha kolay olmuştur. Bu çalışmada Butcher tabloları ve köklenmiş ağaçlar ile bir metodun nasıl elde edildiği incelenip yeni bulunan metodların lineer stiff diferansiyel denklem ve denklem sistemleri için optimum sonuçları hesaplanacaktır. Stiff diferansiyel denklemler, hesaplanması zor çok maliyet gerektiren denklemlerdir. Bu tip denklemlerde biri çok çabuk değişen diğeri ise yavaş değişen terim grubu veya grupları bulunmaktadır. Fiziksel olarak bu terim gruplarından biri sistemin geçici (transient) diğeri ise kalıcı (steady state) çözümdür. Geçici çözüm çok kısa bir zamanda sönmekte diğeri ise çözümü belirlemek adına kalmaktadır. Örneğin,

$$y'(x) = -1000y + 3000 - 2000e^{-x}, y(0) = 0 \quad (1.1)$$

ve denklemin analitik çözümü

$$y(x) = 3 - 0.998e^{-1000x} - 2.002e^{-x} \quad (1.2)$$

ele alalım. Görüldüğü gibi denklemdaki e^{-1000x} ifadesi çok kısa bir zamanda 0'a yakınsayarak çözümden kaybolmaya başlar ve diğeri terimler çözüme hakim olur (Bakioğlu,2011). Stiff diferansiyel denklemlerin çözümünde h adım aralığını seçerken dikkat edilmesi gerekir. Genellikle h adım aralığı küçük seçilerek yapılan işlemlerde daha iyi sonuçlar alınmaktadır. Fakat bu durum her metod için aynı değildir. Örneğin Açık tip Runge-Kutta metodlarında $h=0.001$ alınarak bulunan bir hata kapalı tip Runge-Kutta metodlarında $h=0.1$ alınarak bulunabilmektedir. Çalışmamızda aynı zamanda açık

ve kapalı tip Runge-Kutta metodları için merteye şartları ve kararlılık analizleri incelenecektir. Runge-Kutta metodlarının merteye şartlarının belirlenmesinde etkili bir yöntem olan köklenmiş ağaçlar ve Butcher tabloları her bir merteye şartı ve metod için ayrı ayrı incelenecektir.

$$y'(x) = f(x, y(x)), f(x_0) = y_0, y \in R^N, f: R \times R^N \rightarrow R^N \quad (1.3)$$

şeklindeki bir başlangıç değer problemi için s basamaklı genel Runge-Kutta formülasyonu

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), (1 \leq i \leq s) \quad (1.4)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (1.5)$$

şeklinindedir. Yukardaki denklemde k_i 'ler her bir adımda bulunan ortalama eğimler y_{n+1} değerleri ise bir önceki y_n değeri ile bu eğimlere karşılık gelen değerlerin adım sayısı kadar hesaplanması sonucu toplanması ile bulunan değerlerdir. Yukardaki formülasyonda a_{ij} , b_i ve c_i katsayıları Butcher tablosundaki değerleri göstermektedir. s adımlı bir metod için Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Şekil 1.1. Butcher Tablosu

Bu tablo için c , b ve A değerleri sırasıyla

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \quad \text{olarak tanımlanmıştır}$$

(Iserles,2008).

Tablodaki katsayıların seçimine göre yeni metodlar elde edilmekte ve aynı zamanda metodların mertebeleri belirlenebilmektedir. Butcher tablosundaki katsayıları bulabilmek için metodun Taylor seri açılımı ile denklemin gerçek çözümünün Taylor seri açılımının birbirine eşitlenmesi gerekmektedir. Metod için bulunan katsayılar ile

gerçek çözüm için bulunan katsayılar eşitlendiğinde lineer olmayan bir denklem sistemi ortaya çıkmaktadır. Bu denklem sistemindeki denklem sayısı metodun mertebesine göre değişmektedir. Mertebe sayısı arttıkça denklem sayısı da hızlı bir şekilde artış göstermektedir. Örneğin mertebe sayısı 4 iken 8 adet denklem bulunurken, mertebe sayısı 5 olduğunda 17, mertebe 6 olduğunda 37, 7 olduğunda 85, 8 olduğunda 200 adet denklem bulunmaktadır. Görüldüğü gibi 6. mertebeden sonra denklem sayısı çok fazla artış göstermektedir. Bu artış da gerek elle gerekse bilgisayarla yapılan çalışmalarda yeni katsayılar bulmayı oldukça zorlaştırmaktadır. Bu zorluğun üstesinden gelmek için 1960 sonrasında grafik teorisi kullanılarak çok uzun ve hesaplanması zor olan kısmi türevler çok kısa sürede hesaplanmıştır. Bu türevler bazı ağaçlarla simgelenerek ve ağaçlara yeni dallar eklenerek metodların ardıl türevleri elde edilmiştir.

BÖLÜM II

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

2.1. Euler Metodu

$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$ şeklindeki bir diferansiyel denklemin başlangıç değer problemi olduğu daha önceden verilmişti. Burada $f: R \times R^N \rightarrow R^N$ tanımlı vektör değerli bir fonksiyondur. Euler metodu ardışık adımlarla denklemin çözümünü bize verdiğinden ilk olarak $y(x_0) = y_0$ ile çözüme başlanır daha sonra $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_n = x_{n-1} + h$ noktalarında $y(x)$ değerlerinin hesaplanmasıyla devam eder. Burada h adım büyüklüğüdür. Eğer $a \leq x \leq b$ şeklinde ise N pozitif tamsayı olmak üzere, $h = (b - a)/N$ olarak seçilir. Bu durumda her $n=0,1,2,\dots,N$ için $x_n = x_0 + nh$ olarak tanımlanır. Her bir adımın hesaplanması aynı formül ile yapılır. Böyle bir formül için $y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$ şeklindeki Taylor serisi kullanılmaktadır. Eğer h adım büyüklüğü çok küçük ise, bu durumda h^2, h^3, \dots ifadeleri çok küçük olacağından, bu ifadeleri içeren terimlerin ihmal edilmesiyle $y(x + h) = y(x) + hy'(x) = y(x) + hf(x, y(x))$ elde edilmektedir. Bu formülün sağ tarafı verilen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü verir. İlk adımda $y_1 = y(x_0 + h)$ değerine yaklaşan $y_1 = y_0 + hf(x_0, y(x_0))$, $y_2 = y(x_0 + 2h)$ değerine yaklaşan $y_2 = y_1 + hf(x_1, y(x_1))$ değerleri hesaplanır. Genel olarak $n=0,1,\dots$ için $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n))$ formülü olarak yazılmaktadır. Bu formüle Euler formülü denilmektedir (Bakioğlu,2011).

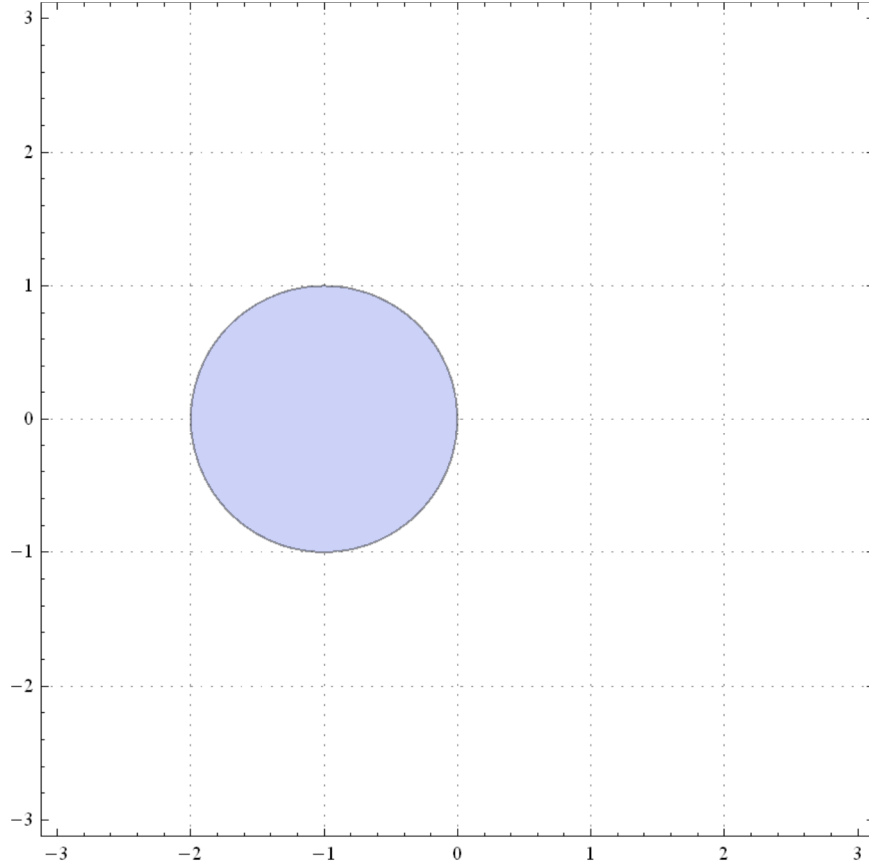
2.2. Euler Metodu İçin Kararlılık Analizi

Metodların doğru sonuç vermesi için gerekli olan kriterlerden bir tanesi de metodların hangi bölgede kararlı olduğunun belirlenmesidir. Metodların kararlılık bölgelerini belirlemek için Dahlquist test denklemini olan

$$y'(x) = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y(x) = e^{\lambda x}, y(0) = y_0, y \in R^N \quad (2.1)$$

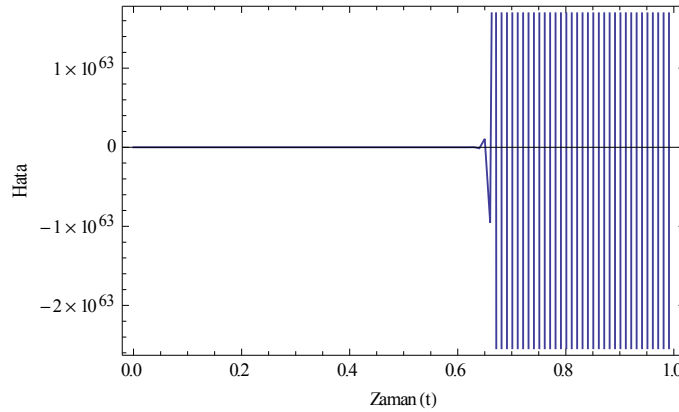
kullanılacak olup bulunan kararlılık fonksiyonunun grafikleri ele alınacaktır. Euler metodu $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n))$ şeklinde tanımlanmıştı. Dahlquist test denklemine Euler metodu uygulanırsa $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n)) = y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n$ dir. Bu ifade daha genel formatta yazılacak olursa $y_{n+1} = (1 + h\lambda)^{n+1}y_0$ dir. Euler

metodunun kararlı olabilmesi için $Re(\lambda) < 0$ ve $|1 + h\lambda| < 1$ olması gerekmektedir. Euler metodunun kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir. Burada bulunan $1 + h\lambda$ ifadesi kararlılık fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.

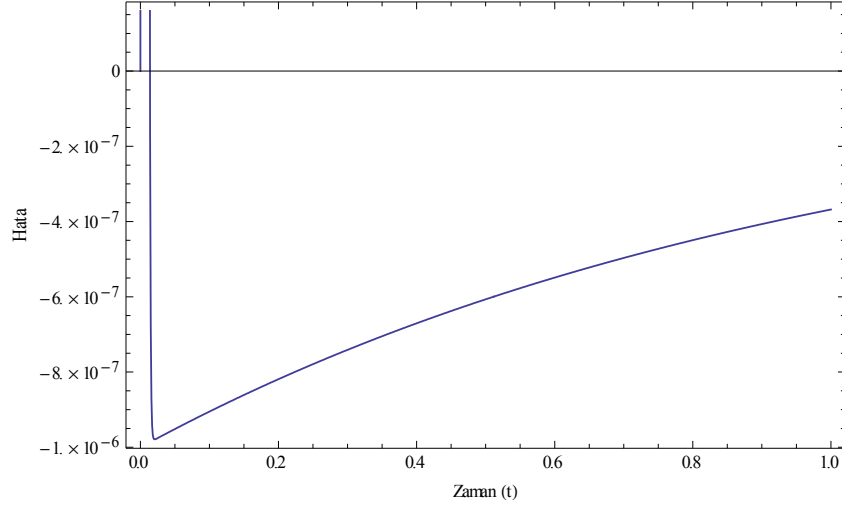


Şekil 2.1. Euler metodunun kararlılık bölgesi

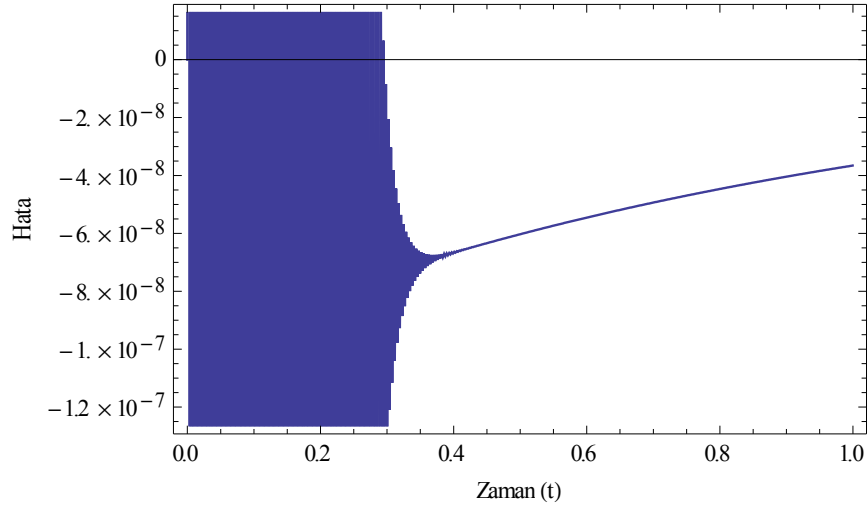
(1.1) denklemini Euler metodu ile farklı değerlerdeki h uzunlukları farklı değerler olarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.



Şekil 2.2. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.01$ için Euler metodu hata grafiği



Şekil 2.3. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.001$ için Euler metodu hata grafiği



Şekil 2.4. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.0019$ için Euler metodu hata grafiği

Görüldüğü gibi $h=0.01$ için hata çoğalarak giderken, $h=0.001$ için $h\lambda$ değerleri kararlılık bölgesinde olduğundan hata oranı oldukça azdır.

2.3. Kapalı Euler Metodu

$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0, f: R^N \times R^N \rightarrow R^N, y \in R^N$ şeklindeki bir başlangıç değer problemi için Taylor seri açılımı $y(x_{n+1} - h) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + \dots$ şeklinde de yazılabilmektedir. Burada ilk iki terimi kullanarak $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_{n+1})$ yazılabilir. Bu ifade en genel formda yazılacak olursa

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (2.2)$$

formülü elde edilir. Bu formüle Kapalı Euler Metodu ya da Geri Euler Metodu denilmektedir. Kapalı Euler metodu açık Euler metoduna göre bira daha karmaşık bir

yapıya sahiptir. Çünkü kapalı Euler metodunda fonksiyondan gelen y_{n+1} değeri her iki tarafta da bulunmaktadır. Dolayısıyla y_{n+1} ifadesi bulunurken açık Euler metodundaki gibi y_n ifadesi kullanılmadığından yaklaşık çözümleri bulmak biraz daha masraflı olmaktadır. Özellikle lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümünde Kapalı metodlar ciddi anlamda masraflı olabilmektedir (Iserles,2008).

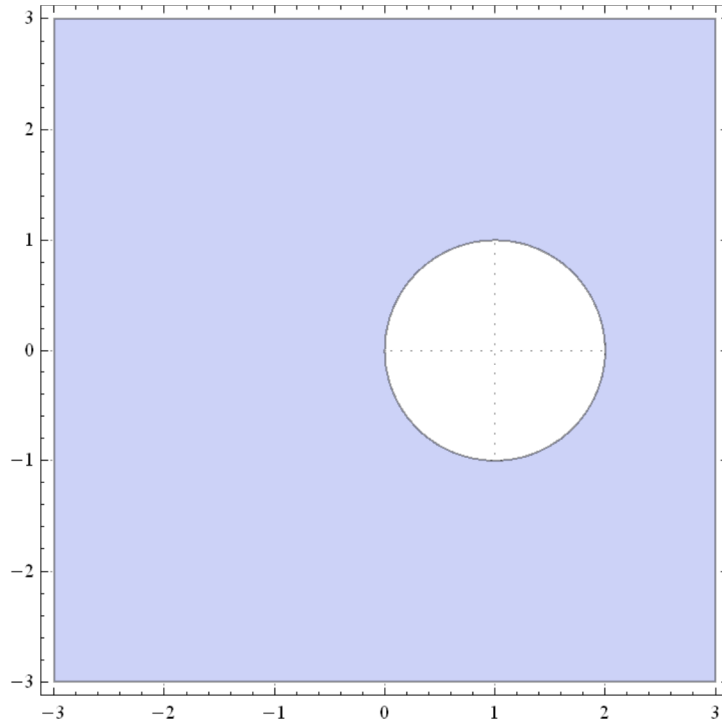
2.4. Kapalı Euler Metodu İçin Kararlılık Analizi

$$y'(x) = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y(t) = e^{\lambda x}, y(0) = y_0, y \in \mathbb{R}^N$$

test denklemini ele alalım. (2.2) formülüne Dahlquist test denklemini uygulanacak olursa

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1} \quad (2.3)$$

ve buradan $y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n$ denklemi elde edilir. Bu denklem en genel şekilde yazılacak olursa $y_{n+1} = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^{n+1} y_0$ dir. Kapalı Euler metodunun kararlı olabilmesi için $Re(\lambda) < 0$ ve $\frac{1}{|1-h\lambda|} < 1$ şartının sağlanması gerekmektedir. Buradan da $|1 - h\lambda| > 1$ olarak bulunmaktadır. Kapalı Euler Metodunun kararlılık bölgesi ise aşağıdaki grafikteki koyu alanlardır.

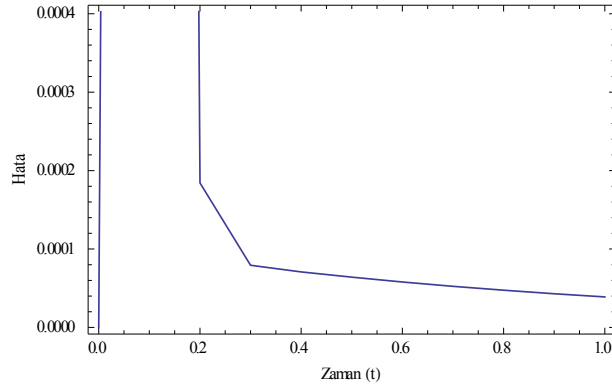


Şekil 2.5. Kapalı Euler metodunun kararlılık bölgesi

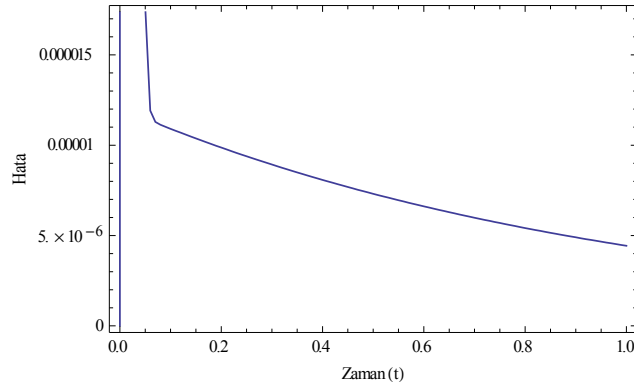
Euler metodu ile Kapalı Euler metodu arasında kararlılık farkı bulunmaktadır. Euler metodunda çok küçük h uzunlukları alınarak yapılan çözümler Kapalı Euler metodunda daha büyük h uzunlukları ile daha iyi sonuçlar verebilmektedir. (1.1) denklemi Kapalı Euler metodu ile h uzunlukları farklı değerler alarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

Çizelge 2.1. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.1$ için Kapalı Euler Metodu sonuçları

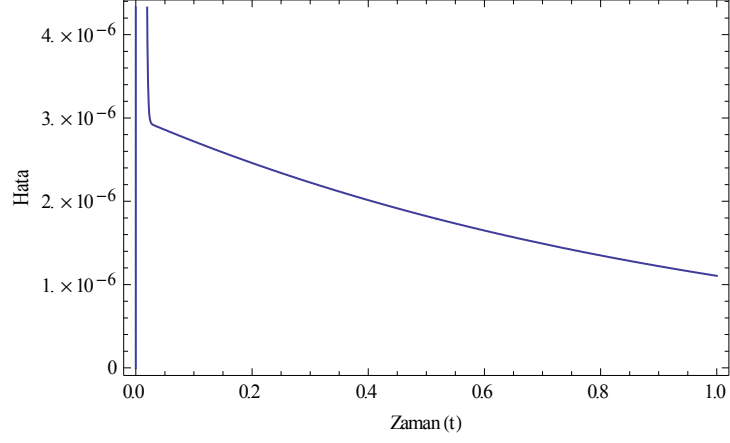
Adım	Yaklaşık	Gerçek	Hata
0.	0	0.	0.
0.1	1.17854	1.18852	0.00997572
0.2	1.36072	1.3609	0.000184308
0.3	1.5168	1.51688	0.0000792233
0.4	1.65795	1.65802	0.0000708174
0.5	1.78566	1.78573	0.0000640697
0.6	1.90122	1.90128	0.0000579726
0.7	2.00578	2.00584	0.0000524557
0.8	2.1004	2.10044	0.0000474639
0.9	2.186	2.18605	0.0000429471
1.	2.26347	2.26351	0.0000388602



Şekil 2.6. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.1$ için Kapalı Euler metodu hata grafiği



Şekil 2.7. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$ ve $h=0.01$ için Kapalı Euler metodu hata grafiği



Şekil 2.8. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$, $h=0.001$ için Kapalı Euler metodu hata grafiği. Açık Euler metodu için alınan büyük h değerleri için doğru sonuçların alınmadığı Bölüm 2.2 'e verilmişti. Dikkat edilecek olursa Euler metodunun aksine Kapalı Euler metodunda $h=0.1$, $h=0.01$, $h=0.001$ değerleri için kararlı olarak hata alındığı görülmektedir.

2.5. Yamuk (Trapez) Kuralı

Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir sonlu $[a, b]$ aralığı üzerinden integrali $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan bölgenin alanını vermektedir. $y = f(x)$ fonksiyonunun integralinin yaklaşık değeri $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlanan $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında kalan yamuğun alanıdır. Bu değer ise açık olarak

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (2.4)$$

şekindedir. (2.4) formülüne $[a, b]$ üzerinden $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık integrali için yamuk kuralı denir. Benzer formül $f(x)$ fonksiyonunun Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak da elde edilebilir. Lagrange interpolasyon polinomu'nun genel formülü

$$L_{n,k} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \quad (2.5)$$

şekindedir. Bu formül kullanılarak $f(x)$ fonksiyonunun a ve b noktalarından geçen Lagrange polinomu bulunacak olursa

$f(x) = f(a) \left(\frac{x-a}{b-a}\right) + f(b) \left(\frac{b-x}{b-a}\right)$ olarak bulunur. Bu denklemde her iki tarafın $[a,b]$ aralığında integrali alınacak olursa

$$\int_a^b f(x)dx = f(a) \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right) dx + f(b) \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (2.6)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla nümerik olarak x_n ve x_{n+1} adımları için yamuk kuralı

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] \quad (2.7)$$

olarak bulunur. (2.7) formülüne Yamuk (Trapez) formülü denir (Bayram,2009).

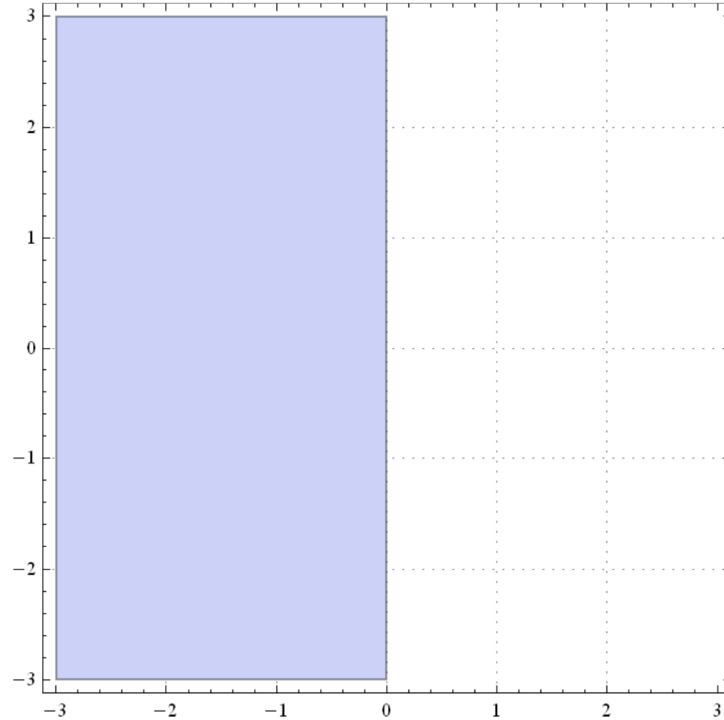
2.6. Yamuk (Trapez) Kuralı İçin Kararlılık Analizi

$$y'(x) = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y(x) = e^{\lambda x}, y(0) = y_0$$

test denklemini ele alalım. (2.7) formülüne Dahlquist test denklemini uygulanacak olursa

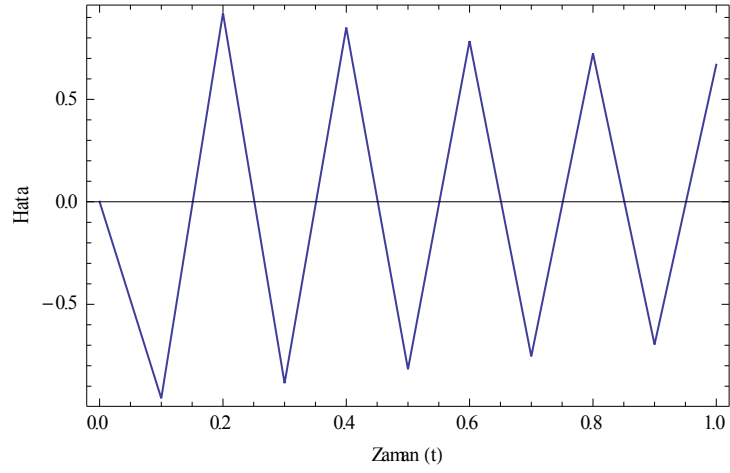
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [\lambda y_n + \lambda y_{n+1}] = \frac{1+h\lambda/2}{1-h\lambda/2} y_n \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Yamuk kuralının kararlı olabilmesi için $Re(\lambda) < 0$, $\left| \frac{1+h\lambda/2}{1-h\lambda/2} \right| < 1$ olması gerekmektedir. Yamuk kuralına ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.

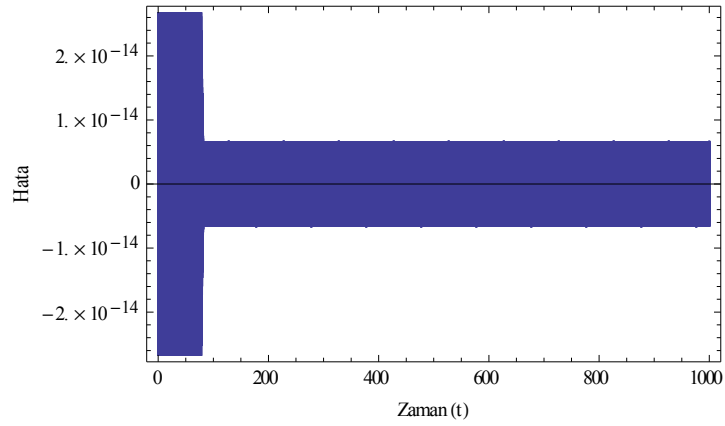


Şekil 2.9. Yamuk kuralı için kararlılık bölgesi

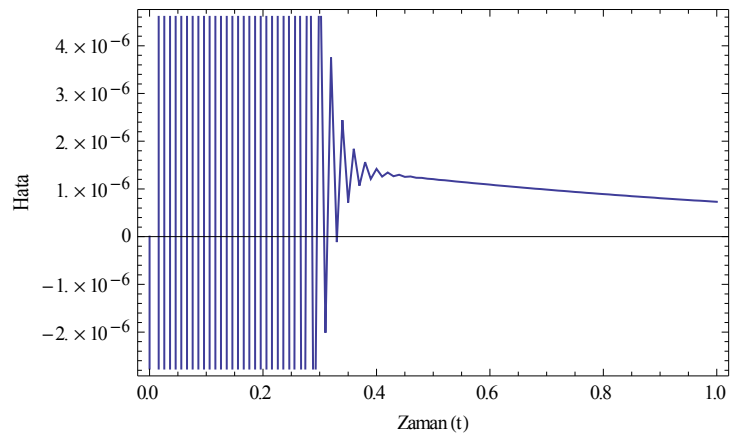
Yamuk kuralının (1.1) denklemini için ile farklı h uzunlukları için bazı sonuçları aşağıdaki gibidir.



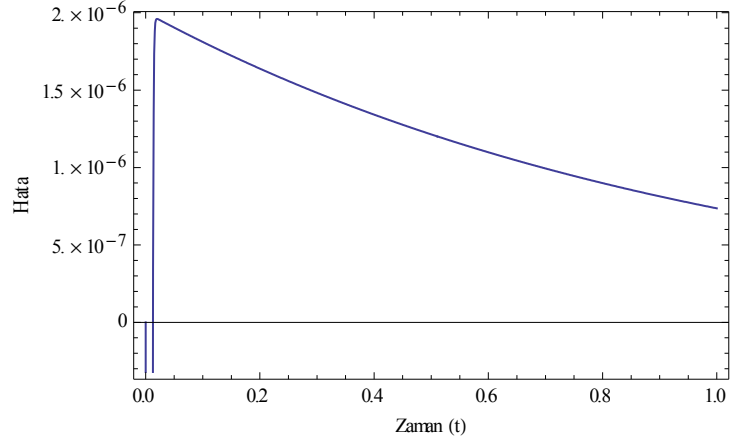
Şekil 2.10. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$, $h=0.1$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği



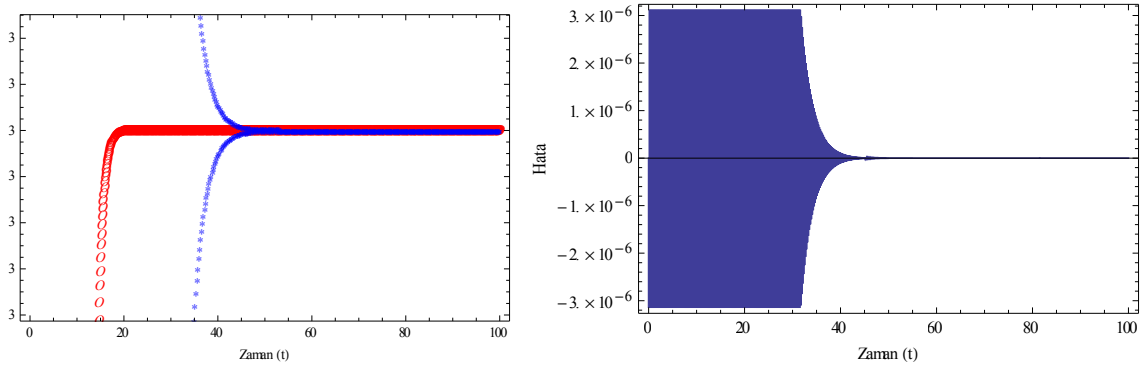
Şekil 2.11. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1000$, $h=0.1$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği



Şekil 2.12. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$, $h=0.01$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği



Şekil 2.13. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 1$, $h=0.001$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği



Şekil 2.14. (1.1) denkleminin $0 \leq t \leq 100$, $h=0.1$ için Yamuk kuralı ile hata grafiği

Şimdiye kadar kullanmış olduğumuz metodlar Nümerik Analiz'in en temel metodlarıdır. Şimdi ise Taylor serileri kullanılarak daha yüksek mertebeden yeni metodların nasıl elde edildiği incelenecektir.

BÖLÜM III

RUNGE-KUTTA METODLARI

3.1 Açık Tip Runge-Kutta Metodları

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad f: R \times R^N \rightarrow R^N \quad \text{ve } y \in R^N \quad (3.1)$$

şeklindeki bir başlangıç değer problemi için s basamaklı Runge-Kutta metodu aşağıdaki gibidir.

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad (1 \leq i \leq s) \quad (3.2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (3.3)$$

Bu formüllerdeki s adım sayısını, b_i, c_i ve a_{ij} katsayıları ise metodu yazmakta gerekli olan katsayıları ifade etmektedir. (3.1) denkleminin gerçek çözümü olan $y(x)$ 'in p . mertebeden Taylor seri açılımı

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x) + O(h^{p+1}) \quad (3.4)$$

şeklinde dir. Yukarıda elde edilen türevler (3.1) denkleminde elde edilecek olursa

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (3.4a)$$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) \quad (3.4b)$$

⋮

olarak bulunur. Runge-Kutta açık tip formüllerinde 4. mertebeye kadar $s \leq p$ ilişkisi vardır (Iserles, 2008). Bu formüller genişletilerek adım sayısı ve mertebeye göre Runge-Kutta metodlarının $s-p$ (adım sayısı – mertebeye) ilişkisi farklı durumlarda incelenecektir.

3.1.1 Açık Tip Runge-Kutta $s = 1, p = 1$ Durumu

Bu bölümde 1. mertebeden 1 adımlı bir metodun genel formülü elde edilecektir. $s=1$ için

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \quad (1 \leq i \leq s) \quad \text{değeri}$$

$$k_1 = f(x_n + c_1 h, y_n + h \sum_{j=1}^1 a_{1j} k_j) = f(x_n + c_1 h, y_n + h a_{11} k_1) = f(x_n, y_n) \quad (3.5)$$

olarak bulunur. Açık tip Runge-Kutta formülasyonları için oluşturulan Butcher tablolarında $i \leq j$ için $a_{ij} = 0$ dır(Iserles 2008). Runge-Kutta metodlarının mertebelerini belirleyebilmek için gerekli koşullar yazılacak olursa $y(x)$ fonksiyonunun 1.mertebeden Taylor seri açılımı

$$y(x+h) = y(x) + h \frac{dy}{dx}(x) + O(h^2) \quad (3.6)$$

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2) \quad (3.6a)$$

olarak bulunur. Bulunan k_1 değeri (3.3) denkleminde yazılırsa $s = 1, p = 1$ için Runge-Kutta formülü

$$y_{n+1} = y_n + hb_1k_1 \quad (3.7)$$

$$y_{n+1} = y_n + hb_1f(x_n, y(x_n)) \quad (3.7a)$$

olarak bulunur. Gerçek çözümün Taylor açılımı ile metodun Taylor açılımı karşılıklı olarak eşitlenirse $b_1 = 1, c_1 = 0, a_{11} = 0$ olarak bulunur. Bulunan bu katsayılarla karşılık gelen Butcher tablosu

0	0
1	

Şekil 3.1. $s=1, p=1$ için Butcher tablosu

şeklindedir. Tablodan yola çıkarak $s=1, p=1$ için geliştirilmiş Runge-Kutta metodu yazılacak olursa

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y(x_n)) \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Bu metodun adı Bölüm (2.1)'de verildiği gibi Euler metodudur. Dolayısıyla Euler metodu Runge-Kutta metodlar ailesi içerisinde yer almaktadır.

3.1.2 Açık tip Runge-Kutta $s=2, p=2$ durumu

Bu bölümde ise 2 adımlı 2.mertebeden Runge-Kutta metodlarının genel formülasyonları elde edilecektir. $s=2$ için k_i değerleri

$$k_1 = f(x_n + c_1h, y_n + ha_{11}k_1 + ha_{12}k_2) = f(x_n, y_n) \quad (3.9)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + ha_{21}k_1 + ha_{22}k_2) = f(x_n + c_2 h, y_n + ha_{21}k_1) \quad (3.9a)$$

olarak bulunur. Bulunan k_i değerlerinin Taylor seri açılımları

$$k_1 = f(x_n, y(x_n)) \quad (3.10)$$

$$k_2 = f(x_n, y(x_n)) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y(x_n)) + ha_{21} f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) \quad (3.10a)$$

olarak bulunur. $y(x)$ gerçek çözümün 2.mertebeden Taylor seri açılımı

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + O(h^3) \quad (3.11)$$

olarak bulunur. Gerçek çözüm olan $y(x)$ 'in türevleri $f(x, y(x))$ cinsinden aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (3.12)$$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) \quad (3.12a)$$

Bulunan değerler (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y(x)) + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) \right] \quad (3.13)$$

olarak bulunur. Bulunan k_i değerleri metodun gelen formülünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & y_n + hb_1 f(x, y(x)) + hb_2 f(x, y(x)) + b_2 c_2 h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \\ & + h^2 a_{21} b_2 f(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \end{aligned} \quad (3.13a)$$

olarak bulunur. Bu ifade gerçek çözümün Taylor seri açılımına benzetilirse

$$y_{n+1} = y_n + hf(x, y(x)) (b_1 + b_2) + h^2 (b_2 c_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + a_{21} b_2 f(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))) \quad (3.13b)$$

denklemini elde edilir. (3.13) ve (3.13.b) denklemleri karşılıklı olarak birbirine eşitlenirse

$b_1 + b_2 = 1$, $b_2 c_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 a_{21} = \frac{1}{2}$ olacak şekilde b_1, b_2, c_2, a_{21} katsayılarına bağlı lineer olmayan bir denklem elde edilir. Bu denklemin keyfi parametre olmaksızın çözümü $b_1 = 1 - b_2$, $c_2 = \frac{1}{2b_2}$, $a_{21} = \frac{1}{2b_2}$ şeklindedir. Bu denklemde katsayılar keyfi

olarak seçilirse 2 adımlı 2.mertebeden yeni ve farklı metodlar elde edilecektir. Bu durumlar farklı katsayılar için incelenecek olursa aşağıdaki durumlar elde edilmektedir.

Durum 3.1.2.1: $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, a_{21} = 1$ olarak seçilirse bu katsayılarla ait Butcher tablosu

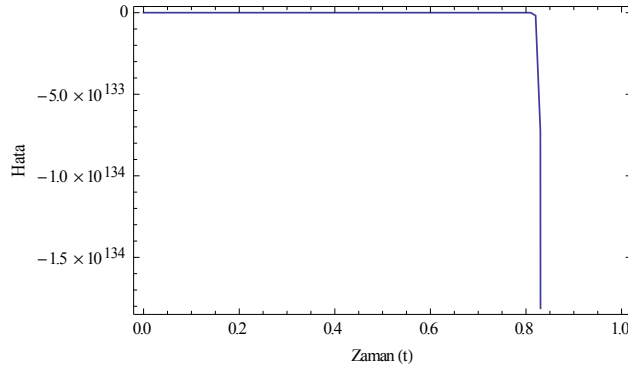
0	0
1	1 0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Şekil 3.2. Durum 3.1.2.1 için Butcher tablosu

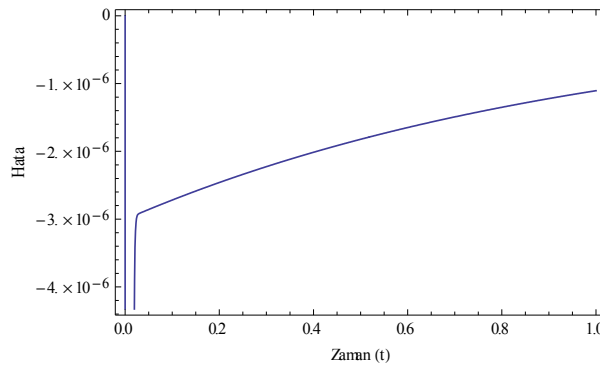
olarak bulunur. Bu tabloya ait genel Runge-Kutta formülü

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y(x_n)) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))) \quad (3.14)$$

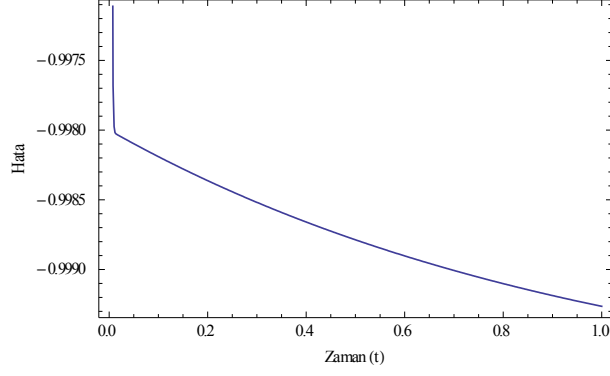
dir. Bu metodun adı Heun metodudur. Heun metodu ile (1.1) denkleminin bazı h uzunlukları için çözümü aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.3 $p = 2, h = 0.01, 0 \leq t \leq 1$ için Heun metodu hata grafiği



Şekil 3.4 $p = 2, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Heun metodu hata grafiği



Şekil 3.5 $p = 2, h = 0.002, 0 \leq t \leq 1$ için Heun metodu hata grafiği

Durum 3.1.2.2. $b_1 = 0, b_2 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{2}$ olarak seçilirse bu katsayılar ait Butcher tablosu

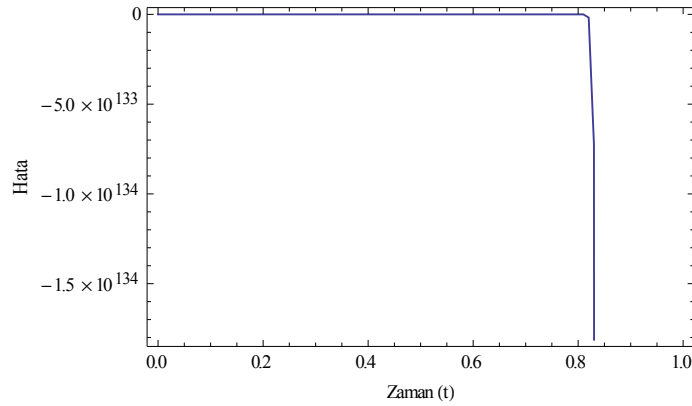
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	

Şekil 3.6. Durum 3.1.2.2 için Butcher tablosu

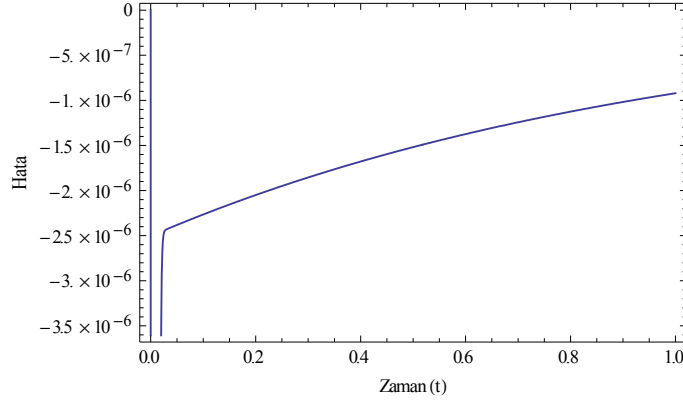
olarak bulunur. Bu tabloya ait genel Runge-Kutta formülü

$$y_{n+1} = y_n + h \left(f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) \right) \quad (3.15)$$

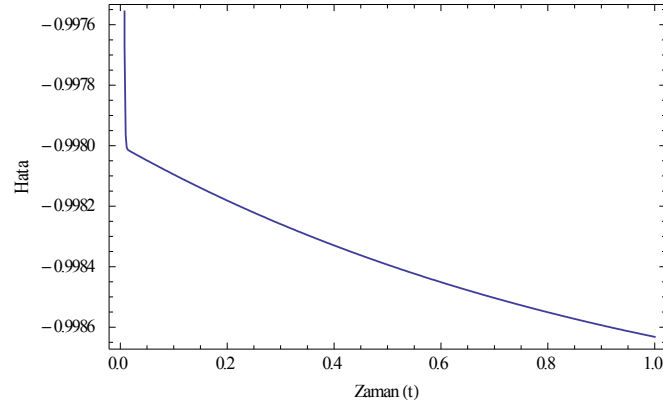
dir. Bu metoda düzeltilmiş Euler metodu denir. Düzeltilmiş Euler metodunun (1.1) denklemi için verdiği sonuçlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.7 $p = 2, h = 0.01, 0 \leq t \leq 1$ için Düzeltilmiş Euler metodu hata grafiği



Şekil 3.8. $p = 2, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Düzeltilmiş Euler metodu hata grafiği



Şekil 3.9. $p = 2, h = 0.002, 0 \leq t \leq 1$ için Düzeltilmiş Euler metodu hata grafiği

3.1.3 Açık tip Runge-Kutta s=3, p=3 durumu

Bölüm 3.1.1 ve bölüm 3.1.2 'deki formülasyonlar $s=3$ ve $p=3$ için uygulanırsa k_i değerleri aşağıdaki olacaktır.

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (3.16)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \quad (3.16a)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h a_{31} k_1 + h a_{32} k_2) \quad (3.16b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3) \quad (3.17)$$

olarak bulunur. $y(x)$ fonksiyonunun $p=3$ için Taylor serisi

$$y(x + h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + O(h^4) \quad (3.18)$$

olarak bulunur. Bulunan Taylor serisi için türevler $f(x, y(x))$ cinsinden hesaplanacak olursa

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (3.19)$$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{d}{dx} y(x) \quad (3.19a)$$

$$y'''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x)) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^2 \quad (3.19b)$$

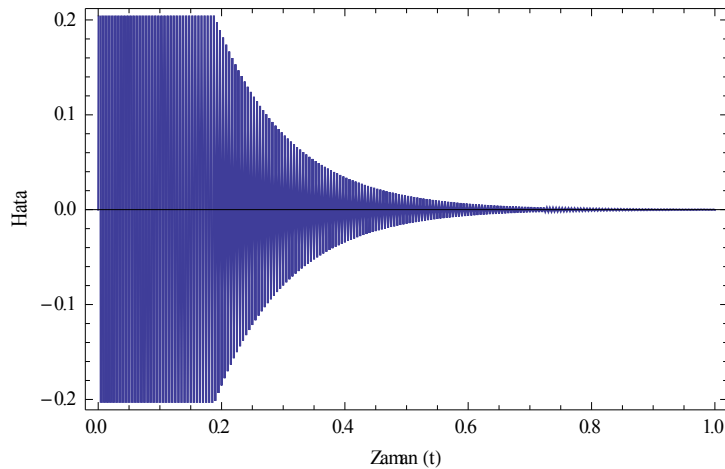
olarak bulunur. Bulunan k_i değerleri 3.mertebeden Taylor serisine açılarak elde edilen yeni denklem ile (3.18) karşılıklı olarak eşitlenirse $b_1 + b_2 + b_3 = 1$, $b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$, $b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$ ve $b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$ ifadeleri elde edilir. Lineer olmayan bir denklem sistemi bulunacaktır. Bu denklem için bazı durumlar aşağıdaki gibidir.

Durum 3.1.3.1. $b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = \frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1, a_{21} = \frac{1}{2}, a_{31} = -1, a_{32} = 2$

0	0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
1	-1	2	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	

Şekil 3.10. Durum 3.1.3.1 için Butcher tablosu

Bu metodun (1.1) denklemini için verdiği sonuçlar aşağıdaki gibidir.



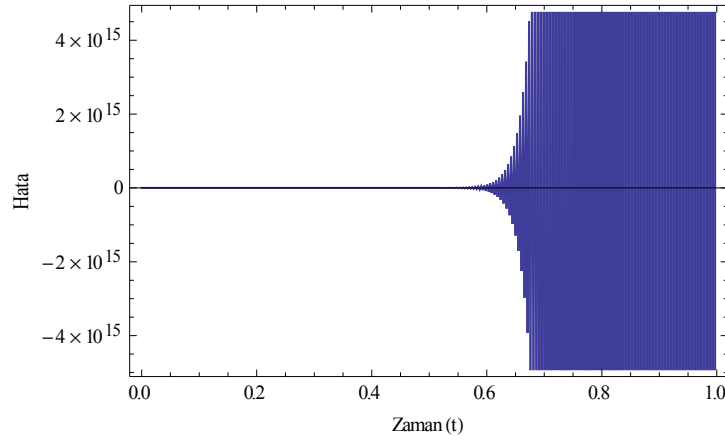
Şekil 3.11. $p = 3, h = 0.0025, 0 \leq t \leq 1$ için Durum 3.1.3.1 hata grafiği

Durum 3.1.3.2. $b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = 0, b_3 = \frac{3}{4}, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{2}{3}, a_{21} = \frac{1}{3}, a_{31} = 0, a_{32} = \frac{2}{3}$

0	0		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0
$\frac{1}{4}$	0		$\frac{3}{4}$

Şekil 3.12. Durum 3.1.3.2 için Butcher tablosu

Bu metodun (1.1) denklemleri için verdiği sonuçlar aşağıdaki gibidir.



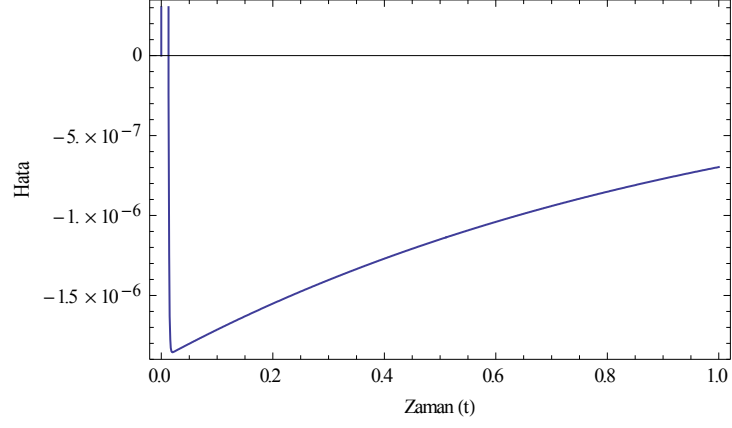
Şekil 3.13. $p = 3, h = 0.0026, 0 \leq t \leq 1$ için Durum 3.1.3.2 hata grafiği

Durum 3.1.3.3. $b_1 = \frac{19}{96}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{15}{32}, c_2 = \frac{3}{7}, c_3 = \frac{16}{21}, a_{21} = \frac{3}{7}, a_{31} = -\frac{64}{945}, a_{32} = \frac{112}{135}$

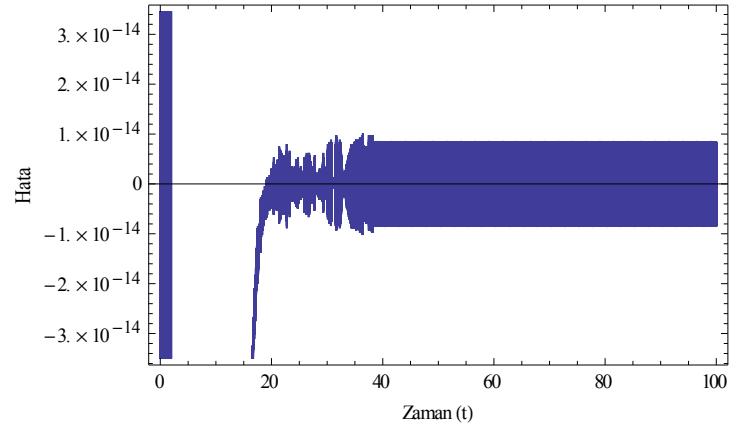
0	0		
$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	
$\frac{16}{21}$	$-\frac{64}{945}$	$\frac{112}{135}$	0
$\frac{19}{96}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{15}{32}$

Şekil 3.14. Durum 3.1.3.3 için Butcher tablosu

Bu metodun (1.1) denklemleri için verdiği sonuçlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.15 $p = 3, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Durum 3.1.3.3 hata grafiği



Şekil 3.16 $p = 3, h = 0.0025, 0 \leq t \leq 100$ için Durum 3.1.3.3 hata grafiği

3.1.4 Açık Tip Runge-Kutta s=4, p=4 Durumu

s=4, p=4 için Runge-Kutta formülasyonundan elde edilen k_i değerleri aşağıdaki gibidir.

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (3.20)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \quad (3.20a)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h a_{31} k_1 + h a_{32} k_2) \quad (3.20b)$$

$$k_4 = f(x_n + c_4 h, y_n + h a_{41} k_1 + h a_{42} k_2 + h a_{43} k_3) \quad (3.20c)$$

olarak bulunur. $y(x)$ fonksiyonunun $p=4$ için Taylor serisi

$$y(x + h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(iv)}(x) + O(h^5) \quad (3.21)$$

şeklinindedir. Bulunan (3.20), (3.20a), (3.20b), (3.20c) denklemleri Taylor serisine açılarak (3.21) denkleminde eşitlendiğinde lineer olmayan keyfi parametrelere dayalı çözüm gerektiren bir denklem ortaya çıkmaktadır. Bu denklem aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=1}^4 b_i = 1 \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i = \frac{1}{2} \quad (3.22a)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \quad (3.22b)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \quad (3.22c)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \quad (3.22d)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \quad (3.22e)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \quad (3.22f)$$

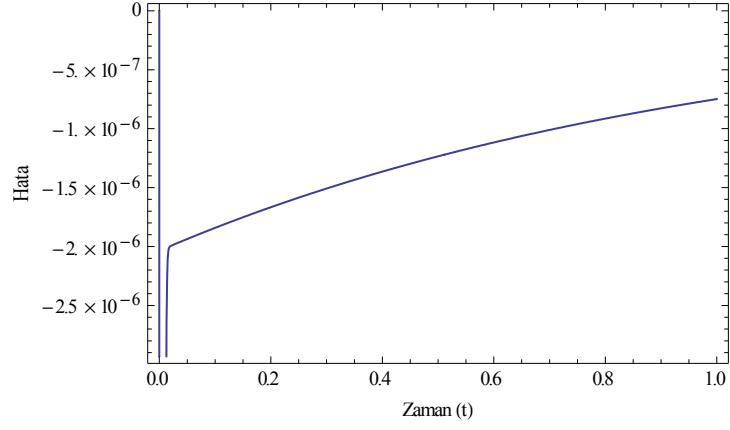
$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \quad (3.22g)$$

Lineer olmayan bu denklem sisteminin çözümü elle çok zor olduğundan cebirsel hesap yapan bazı bilgisayar programları kullanılmıştır. Bulunan bazı sonuçlara ait Butcher tabloları aşağıdaki gibidir.

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Şekil 3.17. Klasik Runge-Kutta 4.mertebe için Butcher tablosu

Klasik Runge-Kutta 4. mertebe metodunun (1.1) denklemi için vermiş olduğu sonuçlar aşağıdaki gibidir.

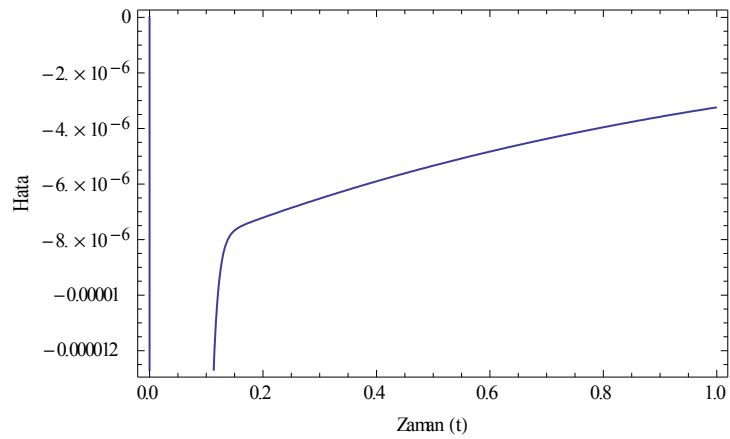


Şekil 3.18 $p = 4, h = 0.001, 0 \leq t \leq 1$ için Klasik Runge-Kutta hata grafiği

0	0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0		
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	
1	1	-1	1	0
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Şekil 3.19. Runge-Kutta 3/8 metodu için Butcher tablosu

Runge-Kutta 3/8 metodunun (1.1) denklemi için vermiş olduğu sonuçlar aşağıdaki gibidir.

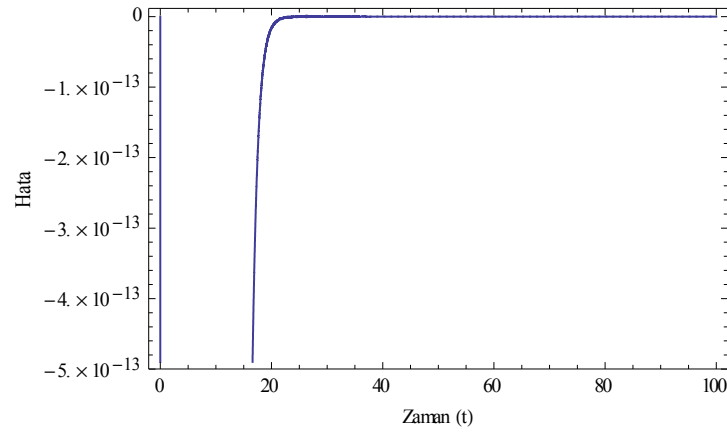


Şekil 3.20 $p = 4, h = 0.0026, 0 \leq t \leq 1$ için Runge-Kutta 3/8 metodu hata grafiği

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	
1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{6}$

Şekil 3.21. Runge-Kutta Gill metodu için Butcher tablosu

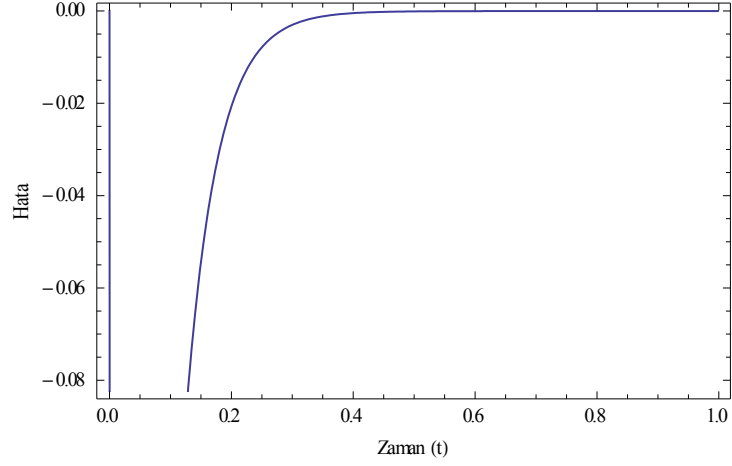
Runge-Kutta Gill metodunun (1.1) denklemleri için vermiş olduğu sonuçlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.22. $p = 4, h = 0.0025, 0 \leq t \leq 100$ için Runge-Kutta Gill metodu hata grafiği

0	0			
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0		
$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{4}$	0	
1	$\frac{19}{44}$	$-\frac{15}{44}$	$\frac{10}{11}$	0
	$\frac{11}{72}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{11}{72}$

Şekil 3.23. Runge-Kutta Dormand metodu için Butcher tablosu



Şekil 3.24. $p = 4, h = 0.00275, 0 \leq t \leq 1$ için Runge-Kutta Dormand metodu hata grafiği

3.2. Açık Tip Runge-Kutta Metodları İçin Kararlılık Analizi

Bölüm 2 de bazı metodların kararlılık analizleri yapılmış ve bunlara bağlı olarak h adım aralıkları seçilerek yaklaşık çözümdeki etkileri gösterilmiştir. Şimdi açık tip Runge-Kutta metodlarının kararlılık analizleri yapılarak kararlılık bölgeleri belirlenecektir. Runge-Kutta açık tip metodları için $a_{ij} = 0, i \leq j$ olduğu daha önceki bölümlerden bilinmektedir. Bir adi diferansiyel denklem için açık tip Runge-Kutta metodu (3.2) ve (3.3) olarak verilmiştir. Runge-Kutta metodları için kararlılık analizi yapılırken Bölüm 2 de olduğu gibi Dahlquist test denkleminde faydalanılacaktır (Iserles,2008). $y'(x) = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y(x) = e^{\lambda x}$, $y(0) = y_0$ test denklemini ele alalım. (3.2) ve (3.3) denklemleri test denklemine uygulanırsa

$$y_n = y_{n-1} + z \sum_{i=1}^s b_i Y_i \quad (3.23)$$

$$Y_i = y_{n-1} + z \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} Y_j \quad (3.24)$$

denklemleri elde edilecektir. Burada $z = h\lambda$ olarak belirlenmiştir. (3.23) denklemini vektör formunda

$$y_n = y_{n-1} + z b^T [Y] \quad (3.25)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[Y] = (Y_1, Y_2, \dots, Y_s)^T$ dir. (3.24) denklemini vektör formunda

$$[Y] = y_{n-1} [1] + z[A][Y] \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[1] = (1, 1, \dots, 1)^T$ dir. Burada $[Y]$ yalnız bırakılacak olursa

$$[Y] - z[A][Y] = y_{n-1}[1] \quad (3.26a)$$

$$[Y](I - z[A]) = y_{n-1}[1] \quad (3.26b)$$

$$[Y] = (I - z[A])^{-1}y_{n-1}[1] \quad (3.26c)$$

olarak bulunur. (3.26c) ifadesi (3.23) ifadesinde yerine konulursa

$$y_n = y_{n-1} + zb^T(I - z[A])^{-1}y_{n-1}[1] \quad (3.27)$$

$$y_n = y_{n-1}(1 + zb^T(I - z[A])^{-1}[1]) \quad (3.27a)$$

$$y_n = y_{n-1}(1 + zb^T(I + z[A] + Z^2[A]^2 + \dots + z^k[A]^k + \dots)[1]) \quad (3.27b)$$

$$y_n = y_{n-1}(1 + (\sum_{i=1}^{\infty} z^i b^T[A]^{i-1}[1])) \quad (3.27c)$$

şeklinindedir. $[A]^{i-1} = 0$, $i > s$ olduğundan (3.27c) ifadesi

$$y_n = y_{n-1}(1 + (\sum_{i=1}^s z^i b^T[A]^{i-1}[1])) \quad (3.27d)$$

formuna dönüşecektir. Mertebe şartları kullanılarak $b^T[A]^{i-1}[1] = \frac{1}{i!}$ şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla (3.27c) ifadesi

$$y_n = y_{n-1}(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + (\sum_{i=p+1}^{\infty} b^T[A]^{i-1}[1])) \quad (3.27e)$$

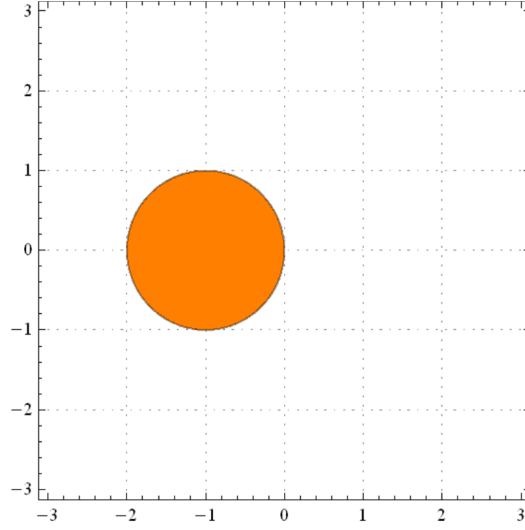
şeklinde yazılır. $[A]^{i-1} = 0$, $i > s$ olduğundan

$$y_n = y_{n-1}(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + (\sum_{i=p+1}^s b^T[A]^{i-1}[1])) \quad (3.27f)$$

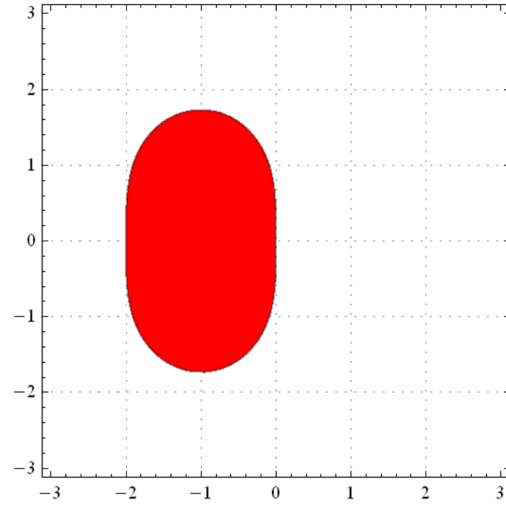
şeklinde dönüşecektir. Bu durumda denklem $y_n = R(z)y_{n-1}$ formuna dönüşecektir. Burada $R(z)$ kararlılık fonksiyonudur ve

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + (\sum_{i=p+1}^s b^T[A]^{i-1}[1]) \text{ dir.} \quad (3.28)$$

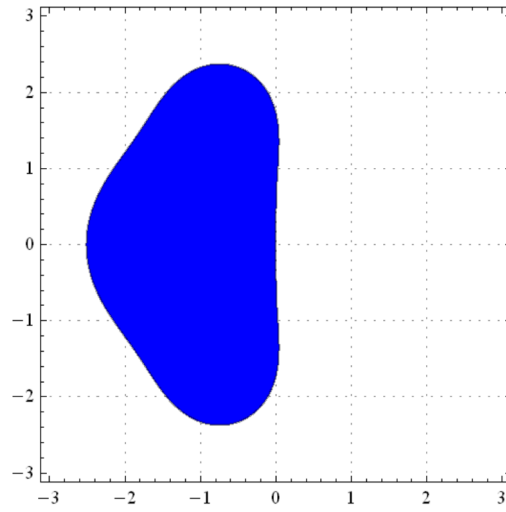
Daha önce bir metodun kararlı olabilmesi için $|R(z)| < 1$ olması gerektiği belirtilmişti. $p = 4$ 'e kadar olan metodların kararlılık bölgeleri aşağıdaki gibidir.



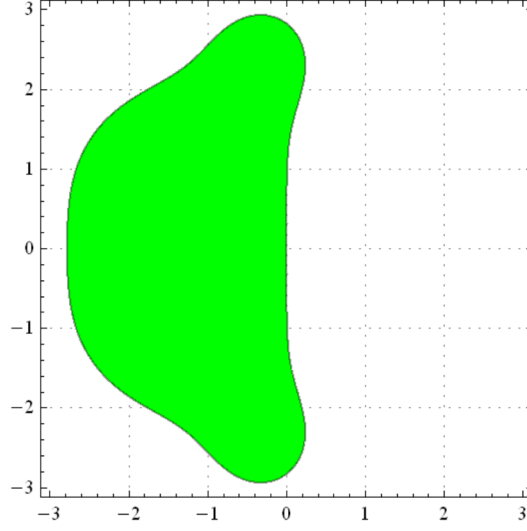
Şekil 3.25. $p=1$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi



Şekil 3.26. $p=2$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi



Şekil 3.27. $p=3$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi



Şekil 3.28. $p=4$ için Runge-Kutta metodu kararlılık bölgesi

Şekillerde görüldüğü üzere mertebe sayısı arttıkça metodun kararlılık bölgesi de doğru orantılı olarak artmaktadır. Ayrıca $p = 1$ için Euler metodunun kararlılık bölgesi bulunmaktadır.

BÖLÜM IV

SAYISAL İNTEGRASYON

4.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde bir fonksiyonun belli bir aralıktaki integral yaklaşımlarının çeşitli yönleri incelenecektir. Farklı tipte yaklaşımların daha kullanışlı olması için birçok sebep vardır. Birincisi, her fonksiyon analitik olarak integrallenemeyebilir. İkinci olarak, integrallenebilen bir fonksiyon dahi olsa, bu fonksiyonun integralini hesaplamak için etkili bir yol elde edilmemiş olabilir. Sayısal integrasyon kavramı daha iyi açıklanabilmesi için Riemann anlamında integrallenebilme kavramı verilmelidir. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $[a, b]$ 'nin bir P parçalanışı $\{x_0, \dots, x_n\}$ olsun. Her i için,

$$M_i(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (4.1)$$

$$m_i(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (4.1a)$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (4.1b)$$

olsun. Burada Üst Darboux Toplamı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$U(f, p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad (4.1c)$$

Alt Darboux Toplamı ise,

$$L(f, p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad (4.1d)$$

şeklinde dir. $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki üst integrali

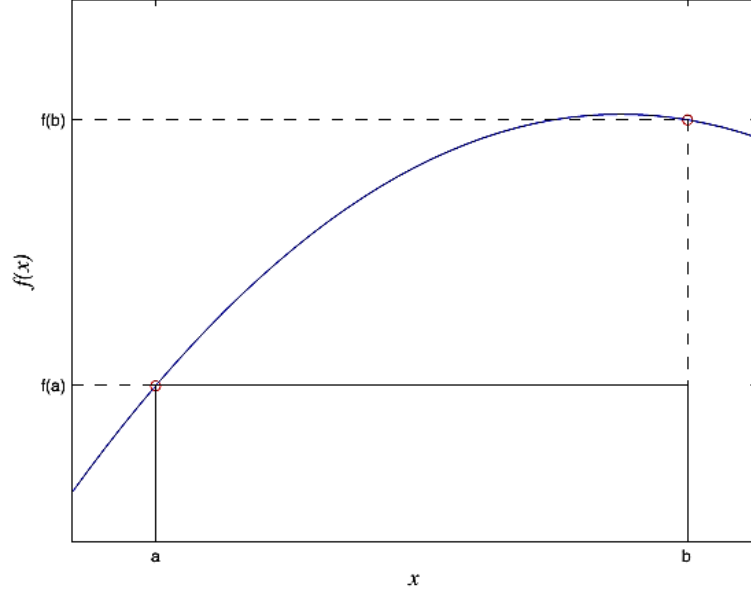
$$U(f) = \inf(U(f, P)) \quad (4.1e)$$

ve alt integrali ise

$$L(f) = \sup(L(f, P)) \quad (4.1f)$$

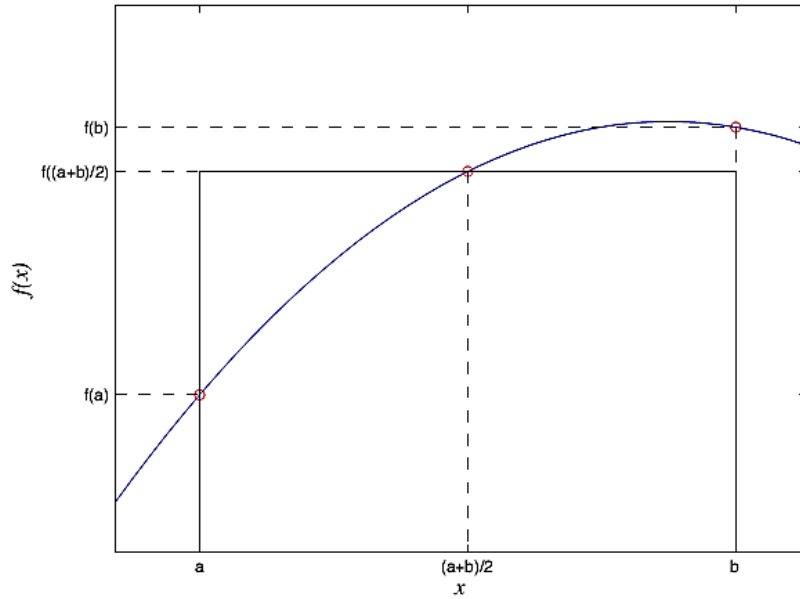
dir. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki alt ve üst integralleri birbirine eşit ise bu değerler ortak olarak $\int_a^b f(x) dx$ şeklinde gösterilir ve buna $f(x)$ 'in Riemann anlamında integrali denir. $\int_a^b f(x) dx$ integralini hesaplamannın en kolay yollarından bir

tanisi fonksiyonun başlangıç veya bitiş noktalarından herhangi birindeki değer ile aralığın uzaklığının çarpımıdır. Örneğin, $x = a$ için $\int_a^b f(x)dx = f(a)(b - a)$ elde edilir. Bu yaklaşım dikdörtgen metodu olarak bilinmektedir.



Şekil 4.1. Dikdörtgen metodunun geometrik açıklaması

Dikdörtgen kuralının farklı bir varyasyonu da orta nokta kuralıdır. Dikdörtgen kuralına benzer şekilde $\int_a^b f(x)dx$ ifadesi aralığın uzaklığı ile $f(x)$ in bir noktadaki değerinin çarpımı ile elde edilmektedir. Fakat bu kuralda başlangıç noktası aralığın tam ortasıdır.



Şekil 4.2. Orta nokta kuralının geometrik açıklaması

Böylece daha iyi bir yaklaşım elde edilmesi amaçlanmıştır. Orta nokta kuralının değeri,

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (4.2)$$

şeklindedir.

4.2. İnterpolasyon yardımıyla İntegrasyon

Bir fonksiyonun integrasyon kurallarının elde edilmesi için başka bir yol da interpolasyon polinomlarıdır. Varsayalım ki $f(x)$ fonksiyonunun $n + 1$ noktadaki değerleri $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ olsun. $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ değerleri $f(x)$ 'in $n+1$ noktadaki değerleri olsun. $Der(P_n(x)) \leq n$ olacak şekildeki Lagrange interpolasyon polinomu aşağıdaki gibidir

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) \quad (4.3)$$

ve burada,

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (4.4)$$

Burada ise $f(x) \approx P_n(x)$ dir ve aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (4.5)$$

dir. İntegrasyon katsayıları olan A_i 'ler aşağıdaki gibidir.

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx \quad (4.6)$$

şeklindedir. Eğer birçok farklı fonksiyon integre edilmek istenirse ve aynı noktalarda hesap yapılırsa integrasyon katsayıları en başta hesaplanabilir çünkü bu katsayılar integrasyonun başlamasına bağlı değildir. Fakat integrasyon noktaları değiştirilerek işlem yapılırsa integrasyon katsayıları tekrar hesaplanması gerekmektedir. Eşit olarak bölünmüş sayısal integrasyon formülü aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (4.7)$$

Bu formüle Newton-Cotes formülü denir.

Örnek 4.1. $n = 1$ ve iki interpolasyon noktası $x_0 = a$ ve $x_1 = b$ için

$$l_0(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad l_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (4.8)$$

olur. Böylece,

$$A_0 = \int_a^b l_0(x) dx = \int_a^b \frac{b-x}{b-a} dx = \frac{b-a}{2} \quad (4.8a)$$

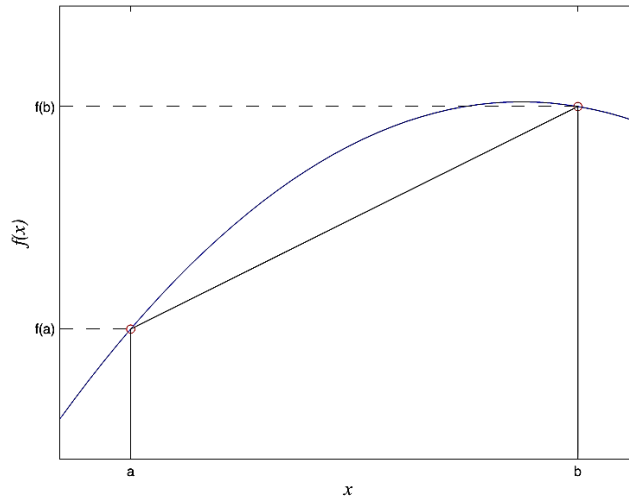
olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$A_1 = \int_a^b l_1(x) dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2} = A_0 \quad (4.8b)$$

olarak bulunur. Bu ifadelerden yola çıkarak $f(x)$ fonksiyonunun değeri yazılacak olursa

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^1 A_i f(x_i) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \quad (4.8c)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.3. Yamuk kuralının geometrik açıklaması

Örnek 4.2. $[a, b] = [0, 1]$ aralığında $\int_a^b f(x) dx$ integrali $h = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanacak olursa aşağıdaki denklem elde edilecektir.

$$\int_0^1 f(x) dx = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(1) \quad (4.9)$$

Bu integral derecesi 2'den küçük ya da eşit polinomlar için kesin olduğundan $\{1, x, x^2\}$ polinomları kullanılarak çözüme gidilecektir. Böylece aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$1 = \int_0^1 1 dx = A_0 + A_1 + A_2 \quad (4.9a)$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}A_1 + A_2 \quad (4.9b)$$

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4}A_1 + A_2 \quad (4.9c)$$

Bu lineer denklem sistemi çözüldüğünde A_0, A_1, A_2 ifadeleri sırasıyla $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ olarak bulunmaktadır. Böylelikle istenilen çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)}{6}. \quad (4.9d)$$

4.3. İntegrasyon Metodlarında Aralık Değişirme

$$\int_c^d f(t) dt = \sum_{i=0}^n A_i f(t_i) \quad (4.10)$$

[c,d] aralığında integrasyon formülü ele alınacak olursa [c,d] aralığının [a,b] aralığına dönüştürülebilmesi için

$$\lambda(t) = \frac{b-a}{d-c} t + \frac{ad-bc}{d-c} \quad (4.11)$$

dönüşümünün uygulanması gerekmektedir. Böylece yeni aralıktaki integrasyon formülü

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{d-c} \int_c^d f(\lambda(t)) dt \approx \frac{b-a}{d-c} \sum_{i=0}^n A_i f(\lambda(t_i)) \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Bu ifade daha da genişletilecek olursa

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{d-c} \sum_{i=0}^n A_i f\left(\frac{b-a}{d-c} t_i + \frac{ad-bc}{d-c}\right) \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilmektedir.

4.4. Gauss İntegrasyonu

Bu integrasyon metodunda özel olarak [-1,1] aralığı kullanılmaktadır. Newton – Cotes formüllerinin aksine Gauss integrasyonunda aralıklar eşit olarak alınmamaktadır. Bu sebeple integrasyon noktalarının yanında ağırlık katsayıları da bulunması gerekecektir. Bu hesaplama sayısal olarak daha masraflı fakat yaklaşım olarak diğer integrasyon metodlarından daha güzel sonuçlar vermektedir. Gauss integrasyon formülü aşağıdaki gibidir.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (4.14)$$

Bu formülde x_1, x_2, \dots, x_n noktaları $[-1,1]$ aralığında integrasyon noktaları ve c_1, c_2, \dots, c_n 'ler ise bu integrasyona ait ağırlık katsayılarıdır. Gauss integrasyonunda aralıklar eşit olarak parçalanmadığından dolayı $2n$ parametre bulunmalıdır. Seçilecek interpolasyon polinomu'nun derecesi en fazla $2n - 1$ olabilir. Örneğin $n = 2$ için Gauss integrasyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir. Bu ifade 3. Dereceden denklemler için kesin sonuç vermektedir.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \quad (4.15)$$

Yazılacak olan 3. dereceden interpolasyon polinomu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.16)$$

şeklinindedir. Burada a_0, a_1, a_2, a_3 katsayıları bulunmalıdır.

Bu ifadenin her iki tarafının integrali alınır

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 dx \quad (4.17)$$

olarak bulunmaktadır. Bu ifade daha açık bir şekilde

$$\int_{-1}^1 a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 dx = a_0 \int_{-1}^1 1 dx + a_1 \int_{-1}^1 x dx + a_2 \int_{-1}^1 x^2 dx + a_3 \int_{-1}^1 x^3 dx \quad (4.18)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki $1, x, x^2, x^3$ ifadeleri için ayrı ayrı integraller alındığında

$$\int_{-1}^1 1 dx = c_1 1 + c_2 1 = 2 \quad (4.19)$$

$$\int_{-1}^1 x dx = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad (4.19a)$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \quad (4.19b)$$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \quad (4.19c)$$

şeklinde bulunmaktadır. Bulunan bu ifadeler lineer bir denklem sistemi olarak çözüldüğünde $c_1 = 1, c_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla integrasyon formülü

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (4.19d)$$

olarak bulunur. $n = 5$ ' e kadar olan gauss integrasyon noktaları ve katsayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.1. Gauss İntegrasyon Kökleri ve Katsayıları

n	$Kökler(x_i)$	$Katsayılar (c_i)$
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.6521451549
	0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Örnek 4.3. $\int_{-1}^1 e^x \cos(x) dx$ integrali $n = 3$ için Gauss integrasyonu ile hesaplanacak olursa

$$\int_{-1}^1 e^x \cos(x) dx = 0.5 e^{0.7745966692} \cos(0.7745966692) + 0.8 e^0 \cos(0) + 0.5 e^{-0.7745966692} \cos(-0.7745966692) = 1.9333904 \quad (4.20)$$

olarak bulunmaktadır. İntegralin gerçek değeri ise 1.933421496 dir. Dolayısıyla Gauss İntegrasyonunun bu integral için vermiş olduğu mutlak hata 0.000031096 dir.

4.5. Legendre Polinomları

Gauss integrasyonundaki integrasyon noktalarının hesaplanması hesap nokta sayısı arttıkça daha da zorlaşmaktadır. Bu zorluğun üstesinden gelmek için Gauss integrasyonu yapılırken integrasyon noktaları n. dereceden Legendre polinomu'nun kökleri olarak alınmıştır.

Legendre polinomu genel olarak

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $n = 1$ 'den 7'ye kadar olan Legendre polinomları ve bu polinomlara ait kökler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.2. Legendre Polinomlarının Kökleri

n	<i>Polinom</i>	<i>Kökler</i>
0	1	-
1	x	0
2	$\frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$	$x_1 = 0.5773502691896258$ $x_2 = -0.5773502691896258$
3	$\frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$	$x_1 = 0.7745966692414834$ $x_2 = 0$ $x_3 = -0.7745966692414834$
4	$\frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$	$x_1 = 0.8611363115940526$ $x_2 = -0.3399810435848562$ $x_3 = 0.33998104358485626$ $x_4 = -0.8611363115940526$
5	$\frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)$	$x_1 = -0.9061798459386641$ $x_2 = -0.538469310105683$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0.538469310105683$ $x_5 = 0.9061798459386641$

Çizelge 4.2.(Devam) Legendre Polinomlarının Kökleri

6	$\frac{1}{16}(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$	$x_1 = -0.9324695142031519$ $x_2 = -0.6612093864662646$ $x_3 = -0.2386191860831969$ $x_4 = 0.2386191860831969$ $x_5 = 0.6612093864662646$ $x_6 = 0.9324695142031522$
7	$\frac{1}{16}(-35x + 315x^3 - 693x^5 + 429x^7)$	$x_1 = -0.9491079123427586$ $x_2 = -0.7415311855993945$ $x_3 = -0.4058451513773972$ $x_4 = 0$ $x_5 = 0.4058451513773972$ $x_6 = 0.7415311855993945$ $x_7 = 0.9491079123427586$

Görüldüğü gibi Gauss integrasyonunda bulunan kökler ile Legendre polinomlarının kökleri yaklaşık olarak birbirine eşittir.

BÖLÜM V

KAPALI RUNGE-KUTTA METODLARI

5.1. Genel Bilgiler

Kapalı tip Runge-Kutta metodları açık tip Runge-Kutta metodlarının aksine kararlılık bölgeleri daha geniş olduklarından daha iyi sonuçlar vermektedirler. Bölüm IV’de açık tip Runge-Kutta metodları için kararlılık fonksiyonlarının nasıl bulunduğu ve metodların adım aralığının belirlenmesinde ne kadar etkili rol oynadıkları verilmişti. Bu bölümde ise Kapalı Runge-Kutta metodlarının kararlılık bölgelerinin diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde ne kadar etkili olduğu araştırılmıştır.

Lemma 5.1. Kararlılık bölgesi sınırsız olan açık tip Runge-Kutta metodu yoktur.

İspat 5.1. Açık Tip Runge-Kutta metodlarının kararlılık fonksiyonu

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (5.1)$$

şeklinde ve genel iterasyon formülü

$$y_{n+1} = R(z)y_n, \quad z = h\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \quad (5.2)$$

olduğundan Açık Runge-Kutta metodu aşağıdaki aksiyomu sağlamaktadır.

$$\left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = |R(z)| \leq 1, z = h\lambda. \quad (5.3)$$

Burada $R(z)$ s. dereceden bir polinomdur. Burada s sayısı metodun adım sayısıdır. $R(z)$ polinomu olduğundan $|z| \rightarrow \infty$ için $|R(z)| \rightarrow \infty$ olduğundan kararlılık bölgesi hiçbir zaman sınırsız olmamaktadır.

Kapalı Runge-Kutta metodlarının kararlılık bölgesi rasyonel fonksiyonlardır. Örneğin kapalı Euler metodunun kararlılık fonksiyonunu bulmak için

$$y'(x) = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y(t) = e^{\lambda x}, y(0) = y_0, y \in \mathbb{R}^N \quad (5.4)$$

test denklemini ele alalım. (2.2) formülüne Dahlquist test denklemini uygulanacak olursa

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h\lambda y_{n+1} \quad (5.5)$$

ve buradan

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n \quad (5.6)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem en genel şekilde yazılacak olursa

$$y_{n+1} = \left(\frac{1}{1-h\lambda} \right)^{n+1} y_0 \quad (5.7)$$

dir. Kapalı Euler metodunun kararlı olabilmesi için $Re(\lambda) < 0$ ve $\frac{1}{|1-h\lambda|} < 1$ şartının sağlanması gerekmektedir. Buradan da $|1-h\lambda| > 1$ olarak bulunmaktadır. Görüldüğü üzere kapalı Euler metodunun kararlılık fonksiyonu rasyonel bir fonksiyondur. Her iki tipte de $R(z)$ fonksiyonu e^z 'in bir açılımı olarak yazılabilmektedir. Dolayısıyla $R(z) = e^z + O(z^{p+1})$ dir. Burada bulunan rasyonel fonksiyonlar Padé yaklaşımı olarak bilinmektedir.

Tanım 5.1. e^z 'nin (j, k) şeklindeki Padé yaklaşım formülü

$$R_{jk}(z) = \frac{P_k(z)}{Q_j(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_k z^k}{q_0 + q_1 z + \dots + q_k z^k} \quad (5.8)$$

formundadır. Burada $Q_j(0) = q_0 = 1$ ve $R_{jk} = e^z + O(z^{p+1})$ dir. Buradan yola çıkarak e^z 'nin Taylor seri açılımı ile Padé yaklaşımı birbirine eşit olmaktadır ve bu ifade aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=0}^{k+j} \frac{z^i}{i!} = \frac{\sum_{i=0}^k p_i z^i}{\sum_{i=0}^j q_i z^i} + O(z^{k+j+1}), p_i: i = 0, \dots, k, q_i: i = 0, \dots, j \quad (5.9)$$

Örneğin e^z 'nin $(2,0)$ Padé yaklaşımı bulunacak olursa $j = 2, k = 0$ alınarak Padé yaklaşım formülü uygulanmalıdır. Pade yaklaşım formülünde j ve k değerleri yerine konularak işlem yapılacak olursa

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) (1 + q_1 z + q_2 z^2) = p_0 \quad (5.10)$$

olarak bulunmaktadır. Buradan $p_0 = 1, q_1 = -1, q_2 = \frac{1}{2}$ olarak bulunmaktadır. Buna göre e^z 'nin $(2,0)$ Padé yaklaşım polinomu

$$R_{20}(z) = \frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}} \quad (5.11)$$

dir. Buna ek olarak $e^z = R_{20}(z) + O(z^3)$ tür. Diğer bazı Padé yaklaşımları bazı metodların kararlılık polinomlarını vermektedir. Örneğin (0,1) Euler metodunu , (1,0) Kapalı Euler metodunu , (1,1) Orta nokta metodu ve Yamuk kuralı kararlılık polinomlarını vermektedir. Bazı Padé polinomları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 5.1. j=2, k=2 'ye kadar olan Padé yaklaşımları

	$k = 0$	1	2
$j = 0$	1	$1 + z$	$1 + z + \frac{z^2}{2}$
1	$\frac{1}{1 - z}$	$\frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$	$\frac{1 + \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}{1 - \frac{z}{3}}$
2	$\frac{1}{1 - z + \frac{z^2}{2}}$	$\frac{1 + \frac{z}{3}}{1 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}$	$\frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}{1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12}}$

Tanım 5.2. Bir metodun kararlılık fonksiyonu kompleks düzlemin sol eksenini kaplıyorsa metod A-kararlıdır (Butcher,2008).

Tanım 5.3. Bir nümerik metod A-kararlı ve aynı zamanda $|z| \rightarrow \infty$ için $|R(z)| \rightarrow 0$ oluyorsa metoda L-kararlıdır denir (Butcher,2008)

Padé tablosunun köşegen elemanlarının altında kalan polinomlar L-kararlıdır. Dolayısıyla bu polinomlar aynı zamanda A-kararlıdır (Butcher,2008).

Tanım 5.4. Butcher tablosundaki A matrisinin köşegen ve üstte kalan elemanları 0 ise metodun açık tip olduğu önceki bölümlerde belirtilmişti. Eğer A matrisinin yalnızca köşegeni ve altındaki elemanların yalnızca bir tanesi 0'dan farklı ise bu metoda Köşegensel kapalı tip Runge-Kutta metodu denir. Eğer köşegen elemanlarının hepsi birbirine eşit ise bu metoda tek tip köşegensel kapalı Runge-Kutta metodu denir. Son olarak A matrisinin köşegen elemanları ve üstündeki elemanlardan en az bir tanesi 0 dan farklı ise bu metoda tam kapalı Runge-Kutta metodu denir. Aşağıda bu tip metodların Butcher tablosu şeklindeki gösterimleri verilmiştir (Butcher,2008).

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
	b_1	b_2	b_3	b_4

Şekil 5.1. Kapalı Tip Runge-Kutta Metodu Butcher Tablosu

c_1	a_{11}	0	0	0
c_2	a_{21}	a_{22}	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
	b_1	b_2	b_3	b_4

Şekil 5.2. Köşgensel Kapalı Tip Runge-Kutta Metodu Butcher Tablosu

c_1	r	0	0	0
c_2	a_{21}	r	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	r	0
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	r
	b_1	b_2	b_3	b_4

Şekil 5.3. Tek Tip Köşgensel Kapalı Tip Runge-Kutta Metodu Butcher Tablosu

şeklinde gösterilmektedir. Genel olarak kapalı Runge-Kutta metodlarının elde edilmesi için mertebeye şartları kullanılmaktadır. Mertebeye şartlarından bulunan katsayılar Runge-Kutta metodlarını oluşturmaktadır.

5.2. Mertebeye Şartları

Runge-Kutta metodlarının elde edilmesinde kullanılan bu şartlar Taylor seri açılımından elde edilmektedir. Kapalı Runge-Kutta metodları için Gauss, Radau ve Lobatto ailesi incelenecek olup belirlenen metodların adım sayısı ve mertebesi incelenecektir.

Teorem 5.1. Mertebesi p olan bir kapalı Runge-Kutta metodunun mertebesi $2s$ ya da daha küçüktür (Iserles,2008).

Teorem 5.1. 'den de anlaşılacağı gibi kapalı tip Runge-Kutta metodunun mertebesi en yüksek adım aralığının iki katı kadardır. Kapalı Runge-Kutta metodlarında mertebeye şartları polinomlar ile gösterilecek ve aynı zamanda graf teori yardımıyla köklenmiş ağaçlar denilen yapılarla temsil edilecektir. Bir köklenmiş ağacın yapısı metodların Taylor seri açılımlarından elde edilen ifadelerle bağdaştırılarak oluşturulmuştur. Örneğin, (⊙) şeklindeki bir kök $\sum_{i=1}^s b_i$ ifadesini simgelemektedir. Köklerin birbirine bağlanmasıyla oluşan ağaçlar Runge-Kutta metodlar ailesinin yapısını oluşturmaktadır. Daha önce açık tip 4.mertebeden Runge-Kutta metodunun mertebeye şartları aşağıdaki gibi verilmişti.

$$\sum_{i=1}^4 b_i = 1 \quad (5.12)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i = \frac{1}{2} \quad (5.12a)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \quad (5.12b)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \quad (5.12c)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} c_k = \frac{1}{24} \quad (5.12d)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{1}{8} \quad (5.12e)$$




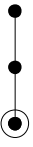
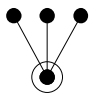



$$\sum_{i=1}^4 b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \quad (5.12f)$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i c_i^3 = \frac{1}{4} \quad (5.12g)$$

Bu bölümde ise bu ifadelerin köklenmiş ağaçlar cinsinden ifadeleri gösterilerek Runge-Kutta metodlarının daha kolay bir şekilde katsayılarının hesaplanması sağlanacaktır.

Aşağıdaki tabloda köklenmiş ağaçlar ve karşılık gelen polinomlar çizelge olarak verilmiştir.

Çizelge 5.2. 4.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebe şartları

<i>Mertebe</i>	<i>Ağaç</i>	<i>İfade</i>	<i>Değer</i>
1		$\sum_{i=1}^s b_i$	1
2		$\sum_{i=1}^s b_i c_i$	$\frac{1}{2}$
3		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2$	$\frac{1}{3}$
3		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{6}$
4		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3$	$\frac{1}{4}$
4		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{8}$
4		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{12}$
4		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{24}$

Yukarıdaki çizelgede Runge-Kutta metodlarının 4. Mertebeye kadar olan mertebe şartları ile her bir mertebe şartını temsil eden köklenmiş ağaçlar verilmiştir. Yukarıdaki verilen tablodaki köklenmiş ağaçlar ve polinomlardan daha yüksek mertebeden denklemler elde edilebilir. Burada temsil edilen köklenmiş ağaçlara yeni kökler ekleyerek metodların ardıl türevleri elde edilmektedir. Kapalı Runge-Kutta metodlarının katsayıları yukarıda verilen köklenmiş ağaçlar ve mertebe şartları vasıtasıyla bulunduğu

daha önce verilmişti. Köklenmiş ağaçlar ve mertebe şartları kullanılarak hesaplanan bazı kapalı Runge-Kutta metodlarının aşamaları aşağıda verildiği gibidir.

Teorem 5.2. s basamaklı bir Gauss metodunun mertebesi 2s dir. (Butcher,2008)

Runge-Kutta Gauss-Legendre metodunun integrasyon noktaları $\frac{\partial^s}{\partial x^s}(x^s(x-1)^s)$ polinomunun kökleridir.

5.3. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=1 , p=2 durumu

Tek adımlı Gauss-Legendre metodu için 2.mertebeye kadar olan köklenmiş ağaçlar ve mertebe şartları yazılarak katsayılar elde edilmektedir. Bu şartlar ve köklenmiş ağaçlar aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=1}^2 b_i = \odot = b_1 + b_2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i = \overset{\cdot}{\odot} = b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

Elde edilen bu denklem sistemi paket programlar vasıtasıyla çözülecek olursa

$b_1 = 1, c_1 = \frac{1}{2}, a_{11} = \frac{1}{2}$ olarak bulunacaktır. Bu katsayılara ait Butcher tablosu

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1

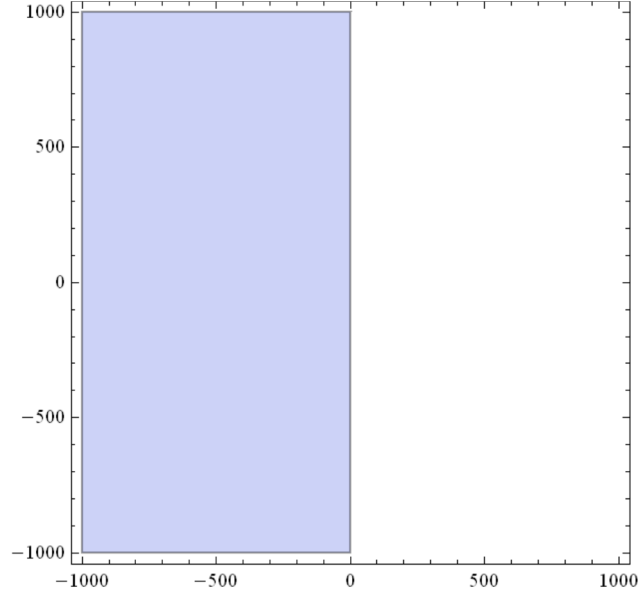
Şekil 5.4. Gauss-Legendre s=1, p=2 durumu için Butcher Tablosu

olarak bulunacaktır. Bu katsayılardan yola çıkarak metod yazılacak olursa

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_1}{2}\right) \quad (5.13a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_1 \quad (5.13b)$$

şeklindedir. Runge-Kutta metodlarının genel kararlılık formülü Bölüm III 'de detaylı olarak verilmişti. Bu formül kullanılarak elde edilen kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{2+z}{2-z}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.5. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=1, p=2 Kararlılık Bölgesi

Grafikten de görüldüğü gibi Tanım 5.2 'den dolayı bu metod A-kararlıdır.

5.4. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=2, p=4 Durumu

2 adımlı 4. Mertebeden bir metodu elde etmek için öncelikle 4. Mertebeye kadar merteye şartları yazılmalıdır. Bu şartların açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=1}^2 b_i = \odot = b_1 + b_2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i = \odot = b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i^2 = \odot = b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^2 b_i a_{ij} c_j = \odot = b_1 a_{11} c_1 + b_1 a_{12} c_2 + b_2 a_{21} c_1 + b_2 a_{22} c_2 = \frac{1}{6}$$

$$\sum_{i=1}^2 b_i c_i^3 = \odot = b_1 c_1^3 + b_2 c_2^3 = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i,j=1}^2 b_i c_i a_{ij} c_j = \odot = b_1 c_1 a_{11} c_1 + b_1 c_1 a_{12} c_2 + b_2 c_2 a_{21} c_1 + b_2 c_2 a_{22} c_2 = \frac{1}{8}$$

$$\sum_{i,j=1}^2 b_i a_{ij} c_j^2 = \odot = b_1 a_{11} c_1^2 + b_1 a_{12} c_2^2 + b_2 a_{21} c_1^2 + b_2 a_{22} c_2^2 = \frac{1}{12}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^2 b_i a_{ij} a_{jk} c_k = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \odot \end{array} = b_1 a_{11} a_{11} c_1 + b_1 a_{11} a_{12} c_2 + b_1 a_{12} a_{21} c_1 + b_1 a_{12} a_{22} c_2 \\ + b_2 a_{21} a_{11} c_1 + b_2 a_{21} a_{12} c_2 + b_2 a_{22} a_{21} c_1 + b_2 a_{22} a_{22} c_2 = \frac{1}{24}$$

şeklindedir. Bulunan bu denklem sistemi yardımcı paket programlar vasıtasıyla çözülecek olursa katsayılar aşağıdaki gibi bulunacaktır.

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, a_{11} = a_{22} = \frac{1}{4}, a_{12} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}, a_{21} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Bulunan bu katsayılara ait Butcher tablosu

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Şekil 5.6. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=2, p=4 durumu için Butcher tablosu

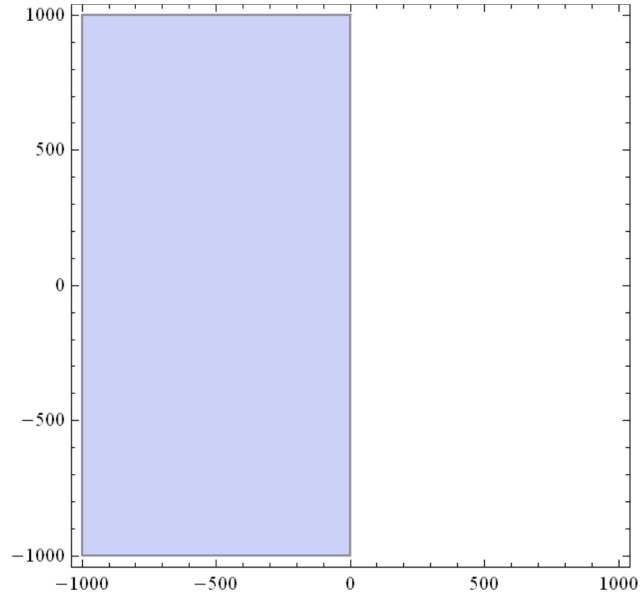
şeklindedir. Bulunan katsayıları ile metod yazılacak olursa

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\left(\frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}k_2\right)\right) \quad (5.14)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\left(\frac{k_1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}k_1 + \frac{k_2}{4}\right)\right) \quad (5.14a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right) \quad (5.14b)$$

şeklinde olacaktır. Bu metoda ait kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.7. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=2, p=4 Kararlılık Bölgesi

Tanım 5.2 ‘den dolayı bu metod A-Kararlıdır.













5.5. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=3, p=6 Durumu

Runge-Kutta Gauss – Legendre s=3, p=6 durumu için köklenmiş ağaçlar ve mertebe şartları aşağıdaki gibidir.












Çizelge 5.3. 6.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebe şartları

Sıra	Mertebe	Ağaç	İfade	Değer
1	1		$\sum_{i=1}^s b_i$	1
2	2		$\sum_{i=1}^s b_i c_i$	$\frac{1}{2}$
3	3		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2$	$\frac{1}{3}$
4	3		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{6}$
5	4		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3$	$\frac{1}{4}$

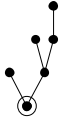

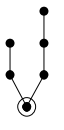

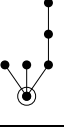




Çizelge 5.3.(Devam) 6.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebe şartları

6	4		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{8}$
7	4		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{12}$
8	4		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{24}$
9	5		$\sum_{i,j,k,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l$	$\frac{1}{120}$
10	5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2$	$\frac{1}{60}$
11	5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$\frac{1}{40}$
12	5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j^3$	$\frac{1}{20}$
13	5		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{30}$
14	5		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{15}$
15	5		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij}^2 c_j^2$	$\frac{1}{20}$
16	5		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^2 a_{ij} c_j$	$\frac{1}{10}$
17	5		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^4$	$\frac{1}{5}$

Çizelge 5.3.(Devam) 6.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebe şartları

18	6		$\sum_{i,j,k,l,m=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} a_{lm} c_m$	$\frac{1}{720}$
19	6		$\sum_{i,j,k,l,m=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l^2$	$\frac{1}{360}$
20	6		$\sum_{i,j,k,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k a_{kl} c_l$	$\frac{1}{240}$
21	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k^3$	$\frac{1}{120}$
22	6		$\sum_{i,j,k,l=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} a_{kl} c_l$	$\frac{1}{180}$
23	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k^2$	$\frac{1}{90}$
24	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk}^2 c_k^2$	$\frac{1}{120}$
25	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j^2 a_{jk} c_k$	$\frac{1}{60}$
26	6		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^4$	$\frac{1}{30}$
27	6		$\sum_{i,j,k,l=1}^s b_i c_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l$	$\frac{1}{144}$
28	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k^2$	$\frac{1}{72}$

Çizelge 5.3.(Devam) 6.mertebeye kadar Runge-Kutta mertebe şartları

29	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$\frac{1}{48}$
30	6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j^3$	$\frac{1}{24}$
31	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{72}$
32	6		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{36}$
33	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i^2 a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{36}$
34	6		$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i^2 a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{18}$
35	6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij}^2 c_j^2$	$\frac{1}{24}$
36	6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^3 a_{ij} c_j$	$\frac{1}{12}$
37	6		$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^5$	$\frac{1}{6}$

Görüldüğü üzere 6.mertebeden mertebe şartlarında 37 adet polinom mevcuttur. Bu ifadeler açılıp bir denklem sistemi haline getirildikten sonra paket programlar vasıtasıyla çözülmektedir. Denklem sistemi çözüldükten sonra bulunan katsayılar

$$b_1 = \frac{5}{18}, b_2 = \frac{4}{9}, b_3 = \frac{5}{18}, c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}, a_{11} = \frac{5}{36}$$

$$a_{12} = \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}, a_{13} = \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}, a_{21} = \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}, a_{22} = \frac{2}{9}, a_{23} = \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$$

$$a_{31} = \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}, a_{32} = \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}, a_{33} = \frac{5}{36}$$

şeklindedir. Bu katsayılar ile yazılacak Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Şekil 5.8. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=3, p=6 Butcher Tablosu

Tablodaki katsayıları kullanarak yazılacak metod

$$k_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h, y_n + h\left(\frac{5}{36}k_1 + \left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}\right)k_2 - \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}\right)k_3\right)\right) \quad (5.15)$$

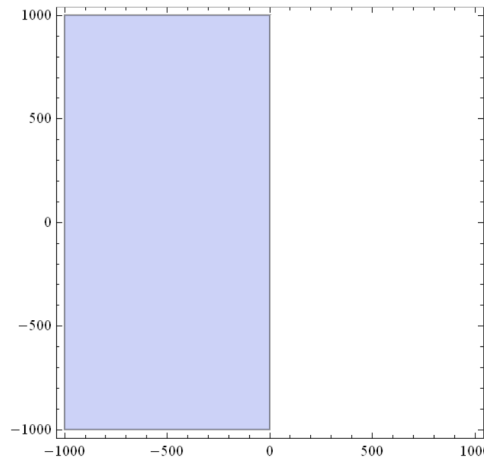
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\left(\left(\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}\right)k_1 + \frac{2}{9}k_2 + \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}\right)k_3\right)\right) \quad (5.15a)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h, y_n + h\left(\left(\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}\right)k_1 + \frac{2}{9}k_2 + \left(\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}\right)k_3\right)\right) \quad (5.15b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{5}{18}k_1 + \frac{4}{9}k_2 + \frac{5}{18}k_3\right) \quad (5.15c)$$

şeklindedir. Bu metoda ait kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{-120-60z-12z^2-z^3}{-120+60z-12z^2+z^3}$ 'dir.

Kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.9. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=3, p=6 Kararlılık Bölgesi

5.6. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=4, p=8 Durumu

Bu duruma ait katsayılar ve bu katsayılarla oluşturulan Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

<u>20796245</u>	<u>1394179</u>	<u>482492</u>	<u>130174</u>	<u>99763</u>
299520274	16031733	18135947	10308801	28061547
<u>33336216</u>	<u>5978900</u>	<u>5187824</u>	<u>332708</u>	<u>50295</u>
101015935	31782691	31820057	11933389	7467151
<u>67679719</u>	<u>3836171</u>	<u>7495277</u>	<u>5187824</u>	<u>354981</u>
101015935	22944715	21175910	31820057	25015054
<u>278724029</u>	<u>5354572</u>	<u>11122572</u>	<u>10329029</u>	<u>1394179</u>
299520274	30169565	35484911	29287524	16031733
	<u>2788358</u>	<u>10375648</u>	<u>10375648</u>	<u>2788358</u>
	16031733	31820057	31820057	16031733

Şekil 5.10. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=4, p=8 Butcher Tablosu

5.7. Runge-Kutta Gauss – Legendre s=5, p=10 Durumu

Bu duruma ait katsayılar ve bu katsayılarla oluşturulan Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

<u>1480733</u>	<u>1537645</u>	<u>4168662</u>	<u>23096</u>	<u>126698</u>	<u>102755</u>
31565350	25959823	213008911	2052175	22649745	64702576
<u>3216007</u>	<u>7481925</u>	<u>3021833</u>	<u>671163</u>	<u>444647</u>	<u>148693</u>
13936265	58383662	25254091	27291797	43093129	53699278
<u>1</u>	<u>1546235</u>	<u>27684683</u>	<u>32</u>	<u>585002</u>	<u>179999</u>
2	13590134	106477645	225	28274193	38402617
<u>10720258</u>	<u>4407393</u>	<u>26644519</u>	<u>12414078</u>	<u>3021833</u>	<u>317638</u>
13936265	36354899	116353616	40170257	25254091	32788225
<u>30084617</u>	<u>4729793</u>	<u>8165298</u>	<u>5045704</u>	<u>3320487</u>	<u>1537645</u>
31565350	40468703	33340249	18469575	12826123	25959823
	<u>3075290</u>	<u>6043666</u>	<u>64</u>	<u>6043666</u>	<u>3075290</u>
	25959823	25254091	225	25254091	25959823

Şekil 5.11. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=5, p=10 Butcher Tablosu

Runge-Kutta Gauss ailesinin içinde sadece Legendre polinomları ile oluşturulan metodlar yoktur diğer bazı polinomlar ile de integrasyon yapılmaktadır. Stiff diferansiyel denklemler için en sağlıklı olanları önceki konularda verilen Legendre





polinomlarından türeyen metodlar, Radau ve Lobatto polinomlarından türeyen metodlardır.

Tanım 5.5. s basamaklı Gauss-Radau metodu $2s-1$ mertebelidir. (Butcher,2008)

5.8. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=2 p=3 Durumu

Bu durum için sol Radau polinomunun kökleri kullanılmaktadır. Sol Radau polinomu $\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}(x^s(x-1)^{s-1})$ şeklindedir. Bu polinomun kökleri $c_1 = 0, c_2 = \frac{2}{3}$ 'dür. Radau I s=2 p=3 metoduna ait mertebeye şartları aşağıdaki gibidir.

Çizelge 5.4. 3.mertebeğe kadar Runge-Kutta Gauss-Radau mertebeye şartları

Sıra	Mertebe	Ağaç	İfade	Değer
1	1		$\sum_{i=1}^s b_i$	1
2	2		$\sum_{i=1}^s b_i c_i$	$\frac{1}{2}$
3	3		$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2$	$\frac{1}{3}$
4	3		$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{6}$

Radau I metodlarında $C(s)$ mertebeye şartının sağlanması gerekmektedir. Mertebeye şartları oluşturulurken köklenmiş ağaçlar haricinde bazı bağlantılar bulunmuştur. Bu bağlantılar elde edilen lineer denklem sistemini daha az değişkene indirgeyerek daha kolay çözülmesini amaçlamıştır. Bunlardan bir tanesi de J.C. Butcher' in tanımlamış olduğu $C(s)$ şartıdır.

$$C(s) = \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, i = 1, \dots, s \text{ ve } k \leq s \quad (5.16)$$

şeklindedir. Mertebeye şartları açıldığında bir denklem sistemi elde edilmektedir. Bu denklem sistemi paket programlar yardımıyla çözüldüğünde sonuçlar $b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{3}{4}, c_1 = 0, c_2 = \frac{2}{3}, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = \frac{1}{3}, a_{22} = \frac{1}{3}$ olarak bulunmaktadır. Bulunan katsayılar ait Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

0	0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Şekil 5.12. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=2, p=3 Butcher Tablosu

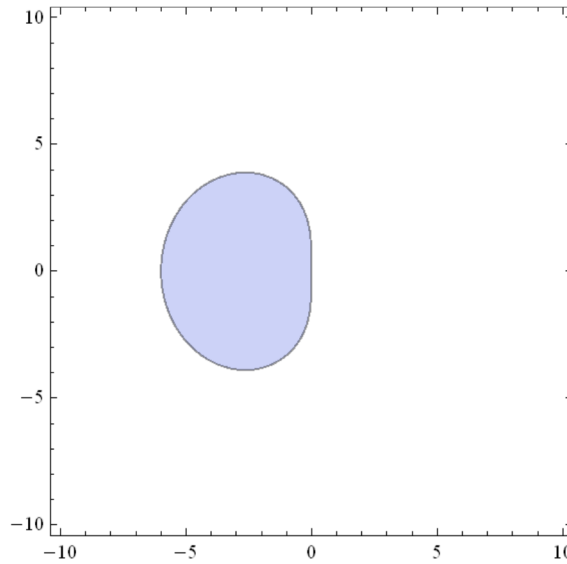
Tablodaki katsayıları kullanarak yazılacak metod

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (5.17)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + h\left(\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}\right)\right) \quad (5.17a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \quad (5.17b)$$

şeklindedir. Bu metoda ait kararlılık fonksiyonu $R(z) = -\frac{6+4z+z^2}{2(-3+z)}$ şeklindedir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi de aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.13. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=2, p=3 Kararlılık Bölgesi

5.9. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=3 p=5 Durumu

Bu durum için sol Radau polinomunun kökleri kullanılmaktadır. s=3 olduğundan 3 kök bulunacaktır. Bu kökler $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{10}(6 - \sqrt{6}), c_3 = \frac{1}{10}(6 + \sqrt{6})$ şeklindedir. C(s) şartı ve 5.mertebe şartları uygulanarak bulunan katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$b_1 = \frac{1}{9}, b_2 = \frac{16+\sqrt{6}}{36}, b_3 = \frac{16-\sqrt{6}}{36}, a_{21} = \frac{9+\sqrt{6}}{75}, a_{22} = \frac{24+\sqrt{6}}{120}, a_{23} = \frac{168-73\sqrt{6}}{600}$$

$$a_{31} = \frac{9-\sqrt{6}}{75}, a_{32} = \frac{168+73\sqrt{6}}{600}, a_{33} = \frac{24-\sqrt{6}}{120}, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{13} = 0$$

Bulunan katsayılar a ait Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

0	0	0	0
$\frac{(6-\sqrt{6})}{10}$	$\frac{9+\sqrt{6}}{75}$	$\frac{24+\sqrt{6}}{120}$	$\frac{168-73\sqrt{6}}{600}$
$\frac{(6+\sqrt{6})}{10}$	$\frac{9-\sqrt{6}}{75}$	$\frac{168+73\sqrt{6}}{600}$	$\frac{24-\sqrt{6}}{120}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$

Şekil 5.14. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=3, p=5 Butcher Tablosu

Bu katsayılar için metod yazılacak olursa,

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{5.18}$$

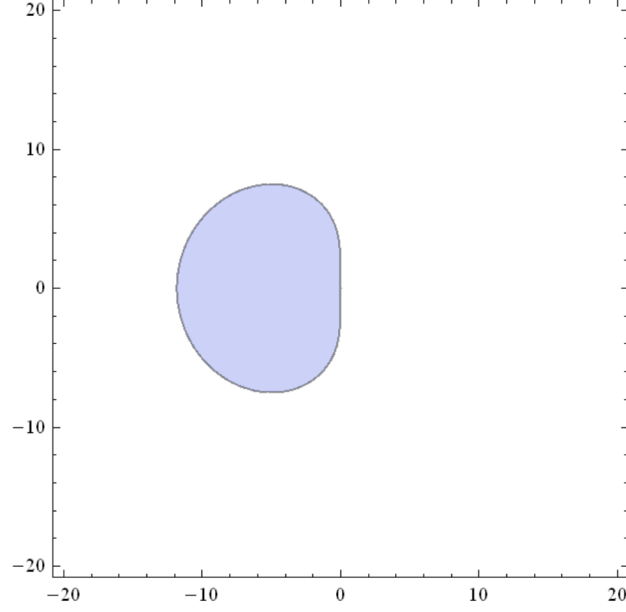
$$k_2 = f\left(x_n + h\frac{(6-\sqrt{6})}{10}, y_n + h\left(\frac{9+\sqrt{6}}{75}k_1 + \frac{24+\sqrt{6}}{120}k_2 + \frac{168-73\sqrt{6}}{600}k_3\right)\right) \tag{5.18a}$$

$$k_3 = f\left(x_n + h\frac{(6+\sqrt{6})}{10}, y_n + h\left(\frac{9-\sqrt{6}}{75}k_1 + \frac{168+73\sqrt{6}}{600}k_2 + \frac{24-\sqrt{6}}{120}k_3\right)\right) \tag{5.18b}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{9}k_1 + \frac{16+\sqrt{6}}{36}k_2 + \frac{16-\sqrt{6}}{36}k_3\right) \tag{5.18c}$$

şeklinde olacaktır. Bulunan bu metod için kararlılık fonksiyonu yazılacak olursa

$R(z) = \frac{60+36z+9z^2+z^3}{60-24z+3z^2}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi



Şekil 5.15. Runge-Kutta Gauss-Radau I s=3, p=5 Kararlılık Bölgesi

5.10. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=2 p=3 Durumu

Bu durum için de aynı şekilde sol Radau polinomunun kökleri kullanılmaktadır. Bu polinomun kökleri $c_1 = 0, c_2 = \frac{2}{3}$ 'dür. Radau IA metoduna ait merteye şartları Çizelge 5.4 'deki gibidir. Burda farklı olarak A matrisini elde ederken $C(s)$ şartı yerine $D(s)$ şartı kullanılmaktadır. $D(s)$ şartı J.C. Butcher tarafından bulunmuştur ve aşağıdaki gibidir.

$$D(s) = \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1} a_{ij} = \frac{b_j (1-c_j)^k}{k}, j = 1, \dots, s \text{ ve } k \leq s \quad (5.19)$$

Mertebe şartları açıldığında bir denklem sistemi elde edilmektedir. Bu denklem sistemi paket programlar yardımıyla çözüldüğünde sonuçlar $b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{3}{4}, c_1 = 0, c_2 = \frac{2}{3}, a_{11} = \frac{1}{4}, a_{12} = -\frac{1}{4}, a_{21} = \frac{1}{4}, a_{22} = \frac{5}{12}$ olarak bulunmaktadır. Bulunan katsayılarla ait

Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Şekil 5.16. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=2, p=3 Butcher Tablosu

Katsayılarına ait metod yazılacak olursa,

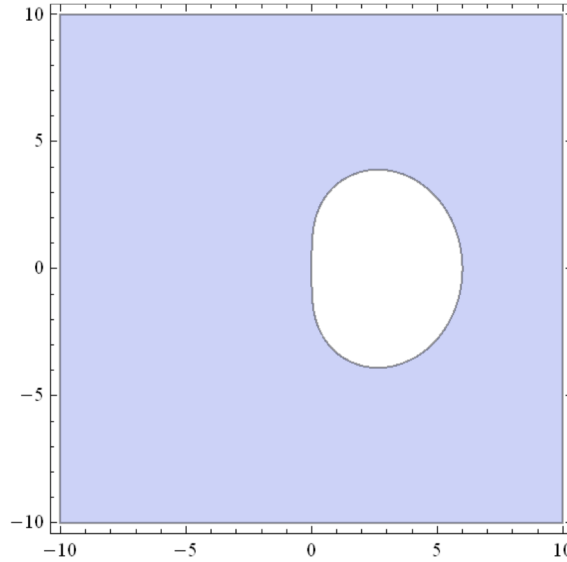
$$k_1 = f\left(x_n, y_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)\right) \quad (5.20)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + h\left(\frac{k_1}{4} + \frac{5k_2}{12}\right)\right) \quad (5.20a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \quad (5.20b)$$

şeklinde olacaktır. Bu metoda ait kararlılık fonksiyonu ise $R(z) = \frac{2(3+z)}{6-4z+z^2}$ şeklindedir.

Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.17. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=2, p=3 Kararlılık Bölgesi

5.11. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=3 p=5 Durumu

Bu durum için de aynı şekilde sol Radau polinomunun kökleri kullanılmaktadır. s=3 olduğundan 3 kök bulunacaktır. Bu kökler $c_1 = 0, c_2 = \frac{6-\sqrt{6}}{10}, c_3 = \frac{6+\sqrt{6}}{10}$ 'dir. Bu durum için de $D(s)$ şartı kullanılacaktır. $D(s)$ şartı ve 5.mertebe Runge-Kutta şartları kullanılarak elde edilen katsayılar $b_1 = \frac{1}{9}, b_2 = \frac{16+\sqrt{6}}{36}, b_3 = \frac{16-\sqrt{6}}{36}, a_{11} = \frac{1}{9}, a_{12} = \frac{-1-\sqrt{6}}{18}, a_{13} = \frac{-1+\sqrt{6}}{18}, a_{21} = \frac{1}{9}, a_{22} = \frac{88+7\sqrt{6}}{360}, a_{23} = \frac{88-43\sqrt{6}}{360}, a_{32} = \frac{88+43\sqrt{6}}{360}, a_{31} = \frac{1}{9}, a_{33} = \frac{88-7\sqrt{6}}{360}$ şeklindedir. Bu katsayılara ait Butcher tablosu

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1-\sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1+\sqrt{6}}{18}$
$\frac{(6-\sqrt{6})}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{(6+\sqrt{6})}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{88+43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$

Şekil 5.18. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=3, p=5 Butcher Tablosu

şeklindedir. Bu katsayılar ile yazılacak metod ise

$$k_1 = f\left(x_n, y_n + h\left(\frac{1}{9}k_1 + \frac{-1-\sqrt{6}}{18}k_2 + \frac{-1+\sqrt{6}}{18}k_3\right)\right) \quad (5.21)$$

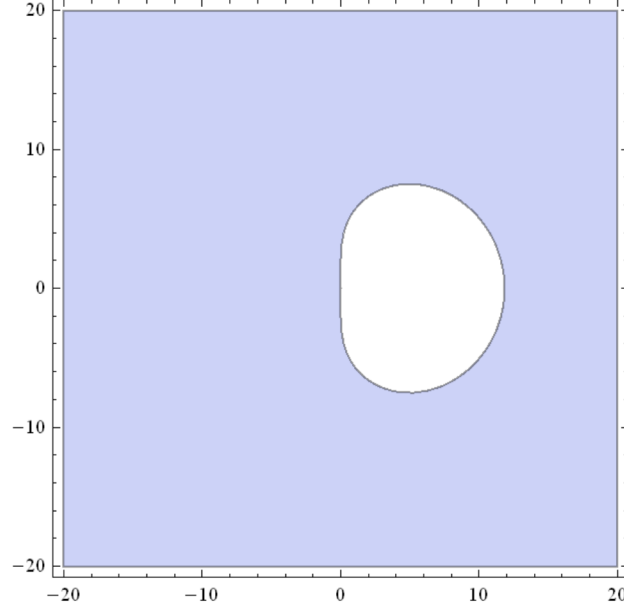
$$k_2 = f\left(x_n + h\frac{(6-\sqrt{6})}{10}, y_n + h\left(\frac{1}{9}k_1 + \frac{88+7\sqrt{6}}{360}k_2 + \frac{88-43\sqrt{6}}{360}k_3\right)\right) \quad (5.21a)$$

$$k_3 = f\left(x_n + h\frac{(6+\sqrt{6})}{10}, y_n + h\left(\frac{1}{9}k_1 + \frac{88+43\sqrt{6}}{360}k_2 + \frac{88-7\sqrt{6}}{360}k_3\right)\right) \quad (5.21b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{9}k_1 + \frac{16+\sqrt{6}}{36}k_2 + \frac{16-\sqrt{6}}{36}k_3\right) \quad (5.21c)$$

şeklinde olacaktır. Bu metodun kararlılık fonksiyonu ise $R(z) = \frac{3(20+8z+z^2)}{-60+36z-9z^2+z^3}$ 'dir.

Kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi



Şekil 5.19. Runge-Kutta Gauss-Radau IA s=3, p=5 Kararlılık Bölgesi

5.12. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=2 p=3 Durumu

Bu durum için sağ Radau polinomunun kökleri kullanılmaktadır. Sağ Radau polinomu $\frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}(x^{s-1}(x-1)^s)$ şeklindedir. Bu polinomun kökleri $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = 1$ 'dir. Radau II s=2 p=3 metoduna ait mertebeye şartları Çizelge 5.4 'deki gibidir. Radau II metodlarında $D(s)$ mertebeye şartının sağlanması gerekmektedir. Gerekli mertebeye şartları yazılarak denklem sistemi çözüldüğünde $b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = \frac{1}{4}, a_{11} = \frac{1}{3}, a_{12} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = 0$ olarak katsayılar bulunmaktadır. Bu katsayılar için Butcher tablosu ise

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	1	0
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Şekil 5.20. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=2, p=3 Butcher Tablosu

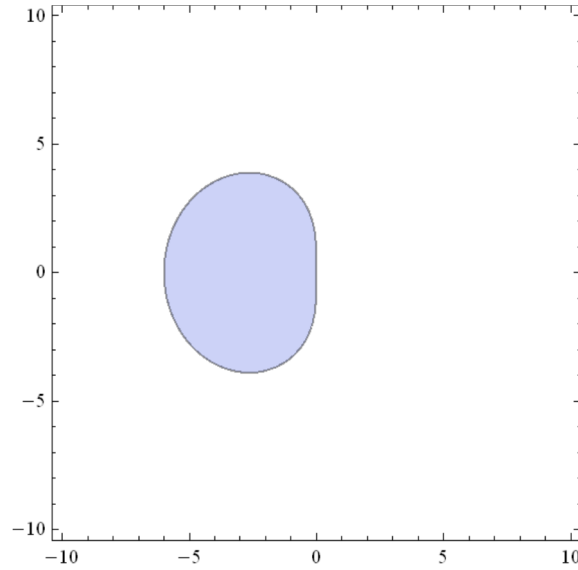
Katsayılar ile yazılacak metod

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + h\left(\frac{1}{3}k_1\right)\right) \quad (5.22)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \quad (5.22a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2) \quad (5.22b)$$

şeklindedir. Bu metoda ait kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{6+4z+z^2}{6-2z}$ 'dir. Kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi ise



Şekil 5.21. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=2, p=3 Kararlılık Bölgesi

5.13. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=3 p=5 Durumu

Radau II metodlarında her zaman sağlanması gereken şart $c_s = 1$ 'dir. Sağ Radau polinomu kullanılarak elde edilen kökler $c_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{10}$, $c_2 = \frac{4+\sqrt{6}}{10}$, $c_3 = 1$ dir. Mertebe şartları ve D(s) şartı kullanılarak elde edilen denklem sistemi çözüldüğünde katsayılar

$$b_1 = \frac{16-\sqrt{6}}{36}, b_2 = \frac{16+\sqrt{6}}{36}, b_3 = \frac{1}{9}, a_{11} = \frac{24-\sqrt{6}}{120}, a_{12} = \frac{24-11\sqrt{6}}{120}, a_{13} = 0, a_{21} = \frac{24+11\sqrt{6}}{120}$$

$a_{22} = \frac{24+\sqrt{6}}{120}, a_{23} = 0, a_{31} = \frac{6-\sqrt{6}}{12}, a_{32} = \frac{6+\sqrt{6}}{12}, a_{33} = 0$ şeklindedir. Bu katsayılarla oluşturulan Butcher tablosu

$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{24-\sqrt{6}}{120}$	$\frac{24-11\sqrt{6}}{120}$	0
$\frac{4+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{24+11\sqrt{6}}{120}$	$\frac{24+\sqrt{6}}{120}$	0
1	$\frac{6-\sqrt{6}}{12}$	$\frac{6+\sqrt{6}}{12}$	0
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Şekil 5.22. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=3, p=5 Butcher Tablosu

Bu katsayılarla yazılacak metod

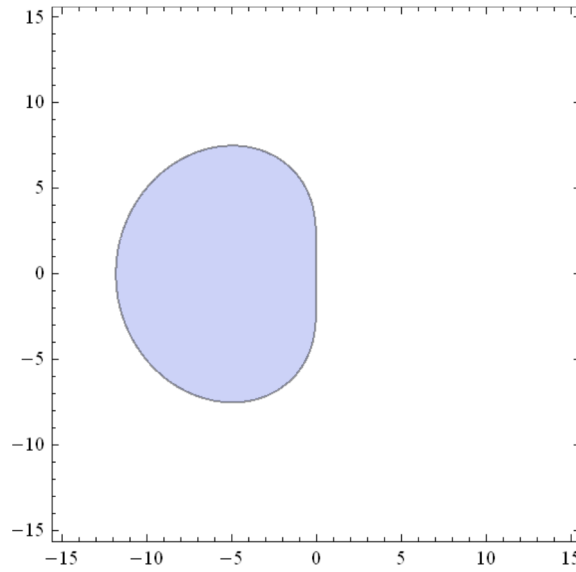
$$k_1 = f\left(x_n + h \frac{4-\sqrt{6}}{10}, y_n + h \left(\frac{24-\sqrt{6}}{120} k_1 + \frac{24-11\sqrt{6}}{120} k_2\right)\right) \quad (5.23)$$

$$k_2 = f\left(x_n + h \frac{4+\sqrt{6}}{10}, y_n + h \left(\frac{24+11\sqrt{6}}{120} k_1 + \frac{24+\sqrt{6}}{120} k_2\right)\right) \quad (5.23a)$$

$$k_3 = f\left(x_n + h, y_n + h \left(\frac{6-\sqrt{6}}{12} k_1 + \frac{6+\sqrt{6}}{12} k_2\right)\right) \quad (5.23b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{16-\sqrt{6}}{36} k_1 + \frac{16+\sqrt{6}}{36} k_2 + \frac{1}{9} k_3\right) \quad (5.23c)$$

şeklinde dir. Ayrıca bu metodun kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{60+36z+9z^2+z^3}{60-24z+3z^2}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.23. Runge-Kutta Gauss-Radau II s=3, p=5 Kararlılık Bölgesi

5.14. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=2 p=3 Durumu

Radau IIA metodları da aynı şekilde Radau II metodları gibi sağ Radau polinomlarını kullanmaktadır fakat metod kurulurken $C(s)$ şartı sağlanmalıdır. Bu metod için sağ Radau polinomu kökleri $c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = 1$ 'dir. Radau IIA s=2 p=3 metoduna ait mertebeye şartları Çizelge 5.4 'deki gibidir. Gerekli mertebeye şartları yazılarak denklem sistemi çözüldüğünde $b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = \frac{1}{4}, a_{11} = \frac{5}{12}, a_{12} = -\frac{1}{12}, a_{21} = \frac{3}{4}, a_{22} = \frac{1}{4}$ olarak katsayılar bulunmaktadır.

Bu katsayılar için yazılacak Butcher tablosu

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Şekil 5.24. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=2, p=3 Butcher Tablosu

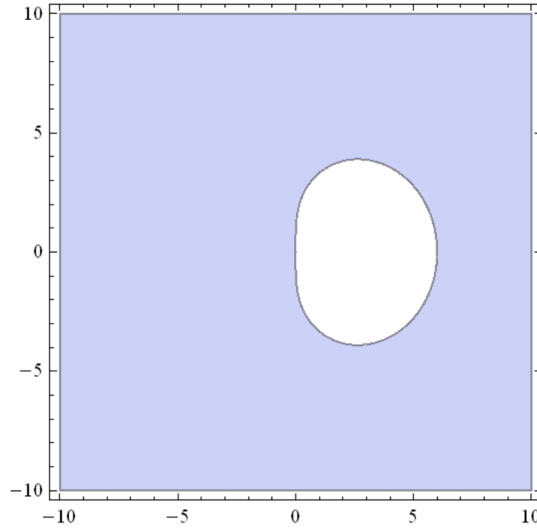
şeklindedir. Bu katsayılarla yazılacak olan metod

$$k_1 = f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + h\left(\frac{5}{12}k_1 - \frac{1}{12}k_2\right)\right) \quad (5.24)$$

$$k_2 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right)\right) \quad (5.24a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \quad (5.24b)$$

şeklindedir. Bu metod için kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{2(3+z)}{6-4z+z^2}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.25. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=2, p=3 Kararlılık Bölgesi

5.15. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=3, p=5 Durumu

Sağ Radau polinomu kullanılarak elde edilen kökler $c_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{10}$, $c_2 = \frac{4+\sqrt{6}}{10}$, $c_3 = 1$ dir.

Mertebe şartları ve C(s) şartı kullanılarak elde edilen denklem sistemi çözüldüğünde

elde edilen Butcher tablosu

$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{206-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{206+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Şekil 5.26. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=3, p=5 Butcher Tablosu

Bu katsayılarla yazılacak metod

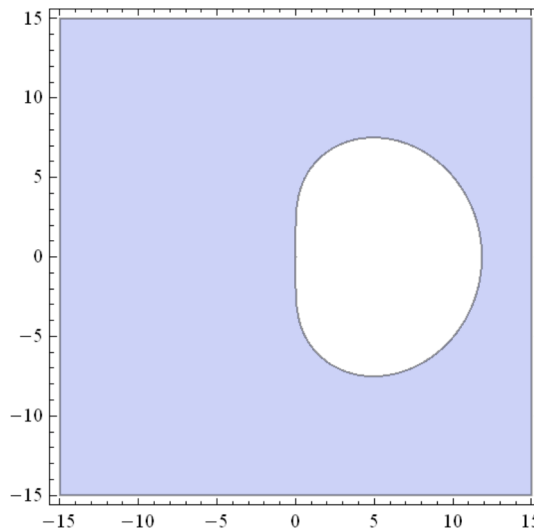
$$k_1 = f\left(x_n + h\frac{4-\sqrt{6}}{10}, y_n + h\left(\frac{88-7\sqrt{6}}{360}k_1 + \frac{206-169\sqrt{6}}{1800}k_2 + \frac{-2+3\sqrt{6}}{225}k_3\right)\right) \quad (5.25)$$

$$k_2 = f\left(x_n + h\frac{4+\sqrt{6}}{10}, y_n + h\left(\frac{206+169\sqrt{6}}{1800}k_1 + \frac{88+7\sqrt{6}}{360}k_2 + \frac{-2-3\sqrt{6}}{225}k_3\right)\right) \quad (5.25a)$$

$$k_3 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\frac{16-\sqrt{6}}{36}k_1 + \frac{16+\sqrt{6}}{36}k_2 + \frac{1}{9}k_3\right)\right) \quad (5.25b)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{16-\sqrt{6}}{36}k_1 + \frac{16+\sqrt{6}}{36}k_2 + \frac{1}{9}k_3\right) \quad (5.25c)$$

şeklinde olacaktır. Bu metodun kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{3(20+8z+z^2)}{-60+36z-9z^2+z^3}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.27. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=3, p=5 Kararlılık Bölgesi

5.16. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=4, p=7 Durumu

s=4, p=7 için Radau IIA metoduna ait Butcher tablosu ve katsayılar aşağıdaki gibidir.

$\frac{25585}{288809}$	$\frac{8464}{74903}$	$-\frac{31729}{787140}$	$\frac{30113}{1167063}$	$-\frac{7688}{776199}$
$\frac{79507}{194172}$	$\frac{45189}{192799}$	$\frac{166797}{806201}$	$-\frac{9237}{193012}$	$\frac{8855}{551802}$
$\frac{127871}{162343}$	$\frac{51359}{237025}$	$\frac{84418}{207863}$	$\frac{58831}{311215}$	$-\frac{9799}{405217}$
1	$\frac{89089}{404101}$	$\frac{67699}{174395}$	$\frac{76210}{231751}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{89089}{404101}$	$\frac{67699}{174395}$	$\frac{76210}{231751}$	$\frac{1}{16}$

Şekil 5.28. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=4, p=7 Butcher Tablosu

5.17. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=5, p=9 Durumu

Bu tezde diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulunurken kullanılacak metodlardan bir tanesi de 9. Mertebeden Radau IIA metodudur. s=5, p=9 için Radau IIA metoduna ait Butcher tablosu ve katsayılar aşağıdaki gibidir.

$\frac{12365}{216534}$	$\frac{24811}{339882}$	$-\frac{20387}{762549}$	$\frac{16587}{888101}$	$-\frac{7696}{597557}$	$\frac{16911}{3353468}$
$\frac{63198}{228281}$	$\frac{31189}{202822}$	$\frac{9437}{64542}$	$-\frac{6247}{171411}$	$\frac{4369}{205764}$	$-\frac{16559}{2086678}$
$\frac{115576}{198043}$	$\frac{50164}{358153}$	$\frac{25385}{84909}$	$\frac{31416}{187463}$	$-\frac{22478}{661719}$	$\frac{4854}{443519}$
$\frac{152678}{177483}$	$\frac{8342}{57573}$	$\frac{86453}{312669}$	$\frac{34257}{105148}$	$\frac{3980}{30911}$	$-\frac{3779}{240564}$
1	$\frac{19202}{133613}$	$\frac{34501}{122624}$	$\frac{11691}{37492}$	$\frac{27863}{124888}$	$\frac{1}{25}$
	$\frac{19202}{133613}$	$\frac{34501}{122624}$	$\frac{11691}{37492}$	$\frac{27863}{124888}$	$\frac{1}{25}$

Şekil 5.29. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=5, p=9 Butcher Tablosu

5.18. Runge-Kutta Gauss-Lobatto Metodları

Lobatto metodları kurulurken Lobatto polinomu olan $\frac{\partial^{s-2}}{\partial x^{s-2}}(x^{s-1}(x-1)^{s-1})$ 'nin kökleri integrasyon noktaları olarak alınmaktadır. Runge-Kutta Gauss-Lobatto

metodları da aynı Radau metodları gibi kendi içinde bazı tiplere ayrılmıştır. Bunlar Lobatto III, Lobatto IIIA, Lobatto IIIB, Lobatto IIIC şeklinde sınıflandırılmışlardır. Lobatto ailesindeki metodlar Butcher tablosundaki A matrisine göre çeşitlilik göstermektedir. Lobatto metodlarının bir diğer özelliği ise integrasyon başlangıç ve bitiş noktalarının belli olmasıdır. Bu da $c_1 = 0$ ve $c_s = 1$ 'dir.

Tanım 5.6. s adımlı Gauss-Lobatto metodu $2s - 2$ mertebelidir. (Butcher,2008)

5.19. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA $s=2$ $p=2$ Durumu

Runge-Kutta Gauss Lobatto IIIA metodları Lobatto polinomunun kökleri kullanılarak kurulmaktadır. Bu metod için kökler $c_1 = 0, c_2 = 1$ şeklindedir. Lobatto IIIA metodu için Butcher tablosundaki A matrisi $C(s)$ mertebe şartı ile hesaplanmaktadır. Bu metod için mertebe şartları Çizelge 5.4 'deki gibidir. Bu metod için mertebe şartları yazılarak denklem sistemi çözüldüğünde $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{2}, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{21} = \frac{1}{2}, a_{22} = \frac{1}{2}$ şeklinde bulunmaktadır. Bu katsayılara ait Butcher tablosu

0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Şekil 5.30. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA $s=2, p=2$ Butcher Tablosu

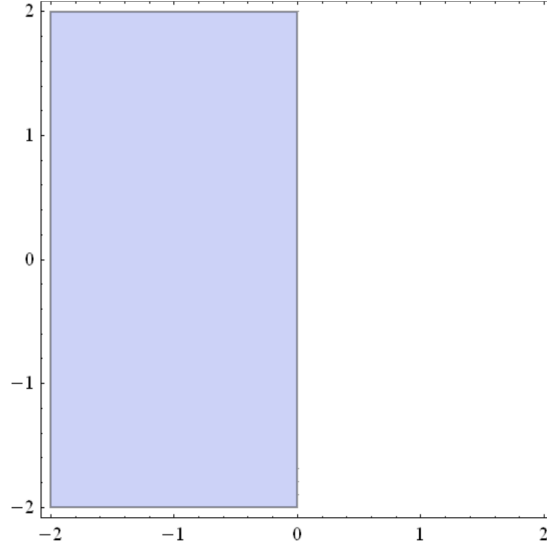
şeklindedir. Bu katsayılarla yazılacak olan metod ise

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (5.26)$$

$$k_2 = f\left(x_n + h, y_n + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\right) \quad (5.26a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (5.26b)$$

şeklindedir. Bu metod için kararlılık fonksiyonu $R(z) = \frac{2+z}{2-z}$ 'dir. Bu kararlılık fonksiyonuna ait kararlılık bölgesi de



Şekil 5.31. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=2, p=2 Kararlılık Bölgesi

5.20. Diğer Runge-Kutta Gauss-Lobatto Metodları

Diğer Runge-Kutta Gauss-Lobatto metodlarının arasındaki farklılıklar yine mertebeye şartları ilelidir.

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Şekil 5.32. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=3, p=4 Butcher Tablosu

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25-13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{120}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11-\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25+13\sqrt{5}}{120}$	$\frac{25+\sqrt{5}}{120}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{120}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

Şekil 5.33. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=4, p=6 Butcher Tablosu

0	0	0	0	0	0
$\frac{7-\sqrt{21}}{14}$	$\frac{119+3\sqrt{21}}{1960}$	$\frac{343-9\sqrt{21}}{2520}$	$\frac{392-96\sqrt{21}}{2205}$	$\frac{343-69\sqrt{21}}{2520}$	$\frac{-21+3\sqrt{21}}{1960}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{320}$	$\frac{392+105\sqrt{21}}{2880}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{392-105\sqrt{21}}{2880}$	$\frac{3}{20}$
$\frac{7+\sqrt{21}}{14}$	$\frac{119-3\sqrt{21}}{1960}$	$\frac{343+9\sqrt{21}}{2520}$	$\frac{392+96\sqrt{21}}{2205}$	$\frac{343+69\sqrt{21}}{2520}$	$\frac{-21-3\sqrt{21}}{1960}$
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{49}{80}$	$\frac{1}{20}$
	$\frac{1}{20}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{49}{80}$	$\frac{1}{20}$

Şekil 5.34. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=5, p=8 Butcher Tablosu

BÖLÜM VI

UYGULAMALAR

6.1. Giriş

Runge-Kutta metodları ilk olarak 1895 yılında Runge adlı Alman matematikçi tarafından çalışılmıştır. Runge Euler metodunu geliştirerek 2 adımlı 2. mertebeden metodu bulmuştur. 1900 yılında Heun 3 adımlı 3.mertebeden Runge metodunu geliştirmiştir. 1901 yılında Kutta 4 adımlı 4.mertebe metodu bulmuştur. Kutta çalışmalarına devam ederek yine aynı yılda 6 adımlı 5.mertebeden metodu bulmuştur. Fakat Kutta'nın bulmuş olduğu metoddaki katsayıların doğru olmadığını iddia eden Nyström 1925 yılında yeni bulduğu 6 adımlı 5.mertebeden metodu literatüre kazandırmıştır. Bununla beraber 1956 yılında Huta 8 adımlı 6.mertebeden metodu bulmuştur. 1964 yılında J. C. Butcher 7 adımlı 6.mertebeden metodu bulmuştur. 1975 ve 1978 yıllarında Curtis ve Hairer 18 adımlı metodları geliştirerek açık tip Runge-Kutta metodlarını literatüre kazandırmışlardır. Yine 1964 yılında J. C. Butcher kapalı metodların nasıl kullanılacağını anlatan bir çalışma yayınlamıştır. (Butcher, J.C, 1964). 1976 yılında kapalı metodların uygulamasına dair yeni çalışmalar ortaya çıkarılmıştır. Bunlardan en popüler olanı yine J. C. Butcher'in yapmış olduğu "kapalı Runge-Kutta metodlarının uygulaması üzerine" adlı çalışmasıdır. (Butcher, J.C, 1976). 1978 'de butcher'in öğrencisi olan Kevin Burrage Stiff diferansiyel denklemler için bazı yeni geliştirmeler yaparak hem açık hem de kapalı metodlar için farklı yaklaşımlar bulmuştur. (Burrage, K., 1978). 1979 yılında kapalı Runge-Kutta metodlarının kararsız davranışları tespit edilmiş ve bunun üstesinden gelmek için bazı kararlılık yapıları incelenmiştir. Kapalı metodların bazı şartlar altında daha iyi sonuç vereceğini Kevin Burrage kararlılık kriterleri adlı çalışmasında bularak kapalı Runge-Kutta metodlarının daha iyi sonuç vermesi için kararlılık kriterlerini geliştirmiştir. (Burrage, K,1979). Böylece artık kapalı metodlar ile denklemler çözülürken kararlılık yapıları incelenerek buna göre nasıl sonuçlar verileceği tahmin edilmeye başlanmıştır. 1993 yılında Runge-Kutta metodları için çalışmalar yapan Hairer ve Wanner J. C. Butcher 'in köklenmiş ağaçlarını geliştirerek bunları Hamilton dinamiğine uygulayarak yeni bir çalışma alanı buldu. (Hairer, E. , Norsett, S.P. ve Wanner G., 1993). 2000'li yıllarda daha çok lineer olmayan diferansiyel denklem ve denklem sistemleri üzerine çalışılmıştır.(M. Calvo, M.P. Laburta ve J.I. Montijano, 2006). Runge-Kutta metodları 2007 yılında

2.mertebeden diferansiyel cebirsel denklemlere uygulanarak bu denklemlerin kararlılık aralıkları incelenmiştir. (Brugnano, L., Magherini,2007). Radau metodlarındaki ilerleme ise 2010 yılında J. Martín-Vaquero ile devam etti. Vaguero 17.mertebeden Radau IIA metodunu hesaplayarak bulmuş olduğu metodu mekanik sistemlere uyguladı. (Vaquero, J. M,2010). 2010 yılından sonra daha çok köşegensel kapalı metodlar ile adi diferansiyel denklemler çözülmüştür. Çünkü her bir denklem sistemi için lineer olmayan denklem sistemi sayısı köşegensel kapalı metodlarda daha az katsayılarla ifade edilmektedir. Bu da hem hesaplama hem de teorik altyapı olarak daha az çaba gerektirdiğinden bu metodlar daha fazla kullanılmaktadır. (Ismail, F.,2010). Aynı zamanda köşegensel kapalı metodlar ile periyodik başlangıç değer problemleri de çözülmüştür. (Ismail, F.,2010).

6.2. Uygulama (Singular Perturbation Problem)

$$y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \quad (6.1)$$

$$\varepsilon y_2'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + \sin(t)$$

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 3, \varepsilon > 0$$

Denklem sistemini gözönüne alalım (Johnson,2005). Buradaki denklem sistemi Singular Perturbation tipinde bir denklem sistemidir. Buradaki ε parametresi sistemin stiffness katsayısını belirleyen parametredir. Bu çalışmada ε üzerinde değişiklik yaparak sistemin zayıf ve güçlü stiffness değerleri için nasıl değer verdiği incelenecektir. Stiffness oranı daha önce de bahsedildiği gibi denklem sistemlerindeki özdeğerler için mutlak değerce en büyük olanın mutlak değerce en küçük olan özdeğere bölünmesiyle elde edilen sayıdır. Bu denklemin yaklaşık çözümü ile analitik çözümlerini kıyaslamak için Gauss, Radau ve Lobatto ailesinin 5 adımlı metodları kullanılacaktır.

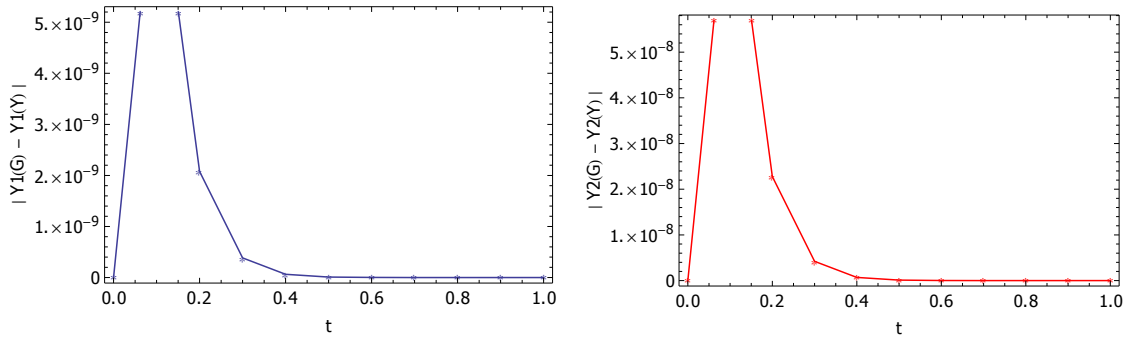
6.2.1. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=5, p=10 ile Yaklaşım

Bu durum için öncelikle [0,1] aralığında h=0.1 adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.1$ için stiffness değeri 10.933538299993835 olmaktadır.

Çizelge 6.1. 6.1 denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.62266495 42292164	2.62266494 58149813	8.4142350864 $6244 \cdot 10^{-9}$	1.48245980 72223778	1.48245989 94117189	9.2189341049 $93082 \cdot 10^{-8}$
0.2	3.21089408 74833674	3.21089408 5404544	2.0788233356 $93869 \cdot 10^{-9}$	1.56993459 81493107	1.56993462 0925604	2.2776293295 $834193 \cdot 10^{-8}$
0.3	3.91174936 53335496	3.91174936 49483586	3.8519099021 $52783 \cdot 10^{-10}$	1.90832285 47252435	1.90832285 8945578	4.2203345262 $94778 \cdot 10^{-9}$
0.4	4.76783774 1676364	4.76783774 161291	6.3454130838 $63605 \cdot 10^{-11}$	2.34109730 44666266	2.34109730 51617385	6.9511196798 $54401 \cdot 10^{-10}$
0.5	5.81392560 55292465	5.81392560 5519447	9.7992725045 $5148 \cdot 10^{-12}$	2.86198839 64094877	2.86198839 6516821	1.0733325339 $62911 \cdot 10^{-10}$
0.6	7.08994357 932656	7.08994357 9325118	1.4415135751 $73303 \cdot 10^{-12}$	3.48610162 01125343	3.48610162 0128449	1.5914825013 $39669 \cdot 10^{-11}$
0.7	8.64388942 8658984	8.64388942 8658785	1.9895196601 $28280 \cdot 10^{-13}$	4.23459209 0208981	4.23459209 0211278	2.2968293933 $44524 \cdot 10^{-12}$
0.8	10.5337571 80726315	10.5337571 80726239	7.6383344094 $21077 \cdot 10^{-14}$	5.13349175 18804275	5.13349175 18807295	3.0198066269 $80426 \cdot 10^{-13}$
0.9	12.8296777 75428442	12.8296777 75428426	1.5987211554 $60225 \cdot 10^{-14}$	6.21443606 5145496	6.21443606 5145537	4.0856207306 $20576 \cdot 10^{-14}$
1.	15.6164875 6367631	15.6164875 6367629	1.9539925233 $40275 \cdot 10^{-14}$	7.51580839 9206167	7.51580839 9206167	0.

Grafikten de görüldüğü gibi hata miktarı önce artarken sonra 0'a yaklaşmaya başlamaktadır. Diğer durumlar için ε parametresinin değişimi ile grafiklerin nasıl değişeceği de ayrıntılı bir biçimde incelenecektir. Bu hata grafiğine ait analitik değerler ve hata sonuçlarını içeren tablo aşağıdaki gibidir.

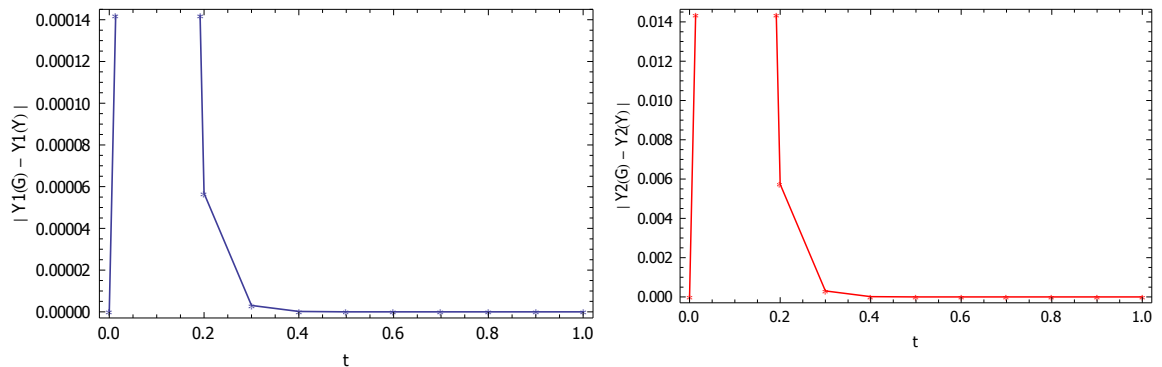


Şekil 6.1. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.01$ için stiffness değeri 100.9925982842603 olmaktadır.

Çizelge 6.2. 6.1 denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.47042628 27593646	2.46936494 9896708	0.0010613328 626565277	1.16253470 8888138	1.26972409 95219028	0.1071893906 3376487
0.2	3.02878610 6171749	3.02884291 6629996	0.0000568104 5824701414	1.60165473 84941762	1.59591716 20790449	0.0057375764 15131285
0.3	3.72231661 43920516	3.72231357 34721104	3.0409199411 884913*10 ⁻⁶	1.98717599 5803614	1.98748311 37380957	0.0003071179 3448179314
0.4	4.57901696 4646009	4.57901712 7418749	1.6277274017 539867*10 ⁻⁷	2.45843237 89826286	2.45841593 9737163	0.0000164392 45465349472
0.5	5.63452726 6682628	5.63452725 7969918	8.7127105530 27136*10 ⁻⁹	3.02585872 67671553	3.02585960 67180874	8.7995093212 00105*10 ⁻⁷
0.6	6.93214944 5835442	6.93214944 6301862	4.6641979167 81632*10 ⁻¹⁰	3.71080505 435463	3.71080500 72527567	4.7101873068 55573*10 ⁻⁸
0.7	8.52462823 0778502	8.52462823 0753622	2.4879653892 63990*10 ⁻¹¹	4.53893965 5897085	4.53893965 8417963	2.5208777287 843986*10 ⁻⁹
0.8	10.4762313 67131085	10.4762313 67132407	1.3216094885 13786*10 ⁻¹²	5.54168376 0387561	5.54168376 0252158	1.3540280008 32841*10 ⁻¹⁰
0.9	12.8652938 31503234	12.8652938 31503756	5.2224891078 36736*10 ⁻¹³	6.75745363 1919621	6.75745363 1926651	7.0308203703 46191*10 ⁻¹²
1.	15.7873228 5689041	15.7873228 5689096	5.4889426337 46774*10 ⁻¹³	8.23320258 319891	8.23320258 3198267	6.4304117586 28907*10 ⁻¹³

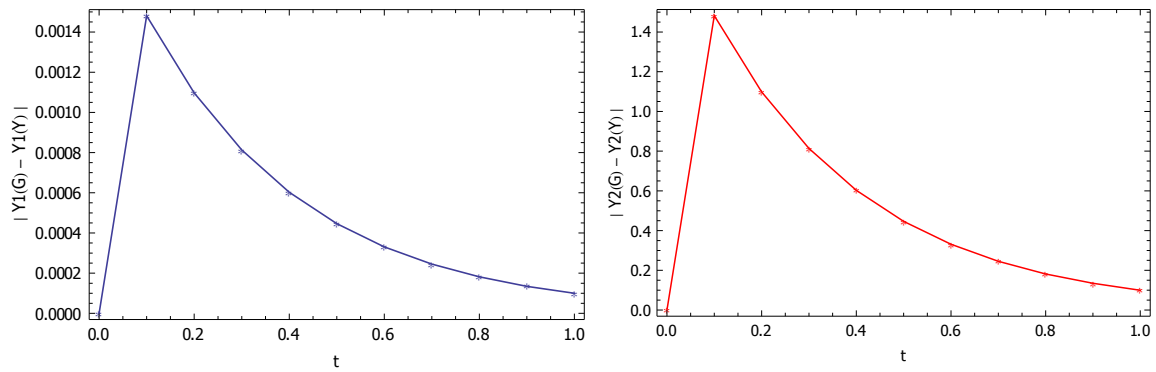


Şekil 6.2. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denkleminin $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.001$ için stiffness değeri yaklaşık olarak 1000.9992509982785 olmaktadır.

Çizelge 6.3. 6.1 denkleminin RK-GL ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.45177098 65950783	2.45029033 4034645	0.0014806525 60433171	- 0.20856734	1.27356512 84209184	1.482132473 83941
0.2	3.00768569 06323637	3.00878281 50449654	0.0010971244 1260168	2.70015053 333077	1.60192954 4211872	1.098220989 118898
0.3	3.70251110 26021826	3.70169816 24110965	0.0008129401 910861311	1.18269597 8643447	1.99644870 46844315	0.813752726 0409845
0.4	4.55790814 0681414	4.55851050 7877245	0.0006023671 958308441	3.07433055 1547547	2.47136128 9713482	0.602969261 834065
0.5	5.61555678 7742231	5.61511044 9572399	0.0004463381 6983186136	2.59734144 31120276	3.04412572 91505934	0.446784286 0385658
0.6	6.91489793 15565935	6.91522865 6346268	0.0003307247 896744414	4.06719132 6930147	3.73613597 9856778	0.331055347 07336925
0.7	8.51242056 4196454	8.51217550 5872545	0.0002450583 239088644	4.32829170 5828939	4.57359496 7942127	0.245303262 11318787
0.8	10.4707850 5921995	10.4709666 4096456	0.0001815817 4461113674	5.77034379 2321338	5.58858055 8665323	0.181763233 65601466
0.9	12.8710543 30186368	12.8709197 82916152	0.0001345472 7021589008	6.68566488 63148935	6.82034663 8300076	0.134681751 98518217
1.	15.8087273 19477308	15.8088270 15454309	0.0000996959 7700099087	8.41670694 1518498	8.31691132 3049466	0.099795618 46903273

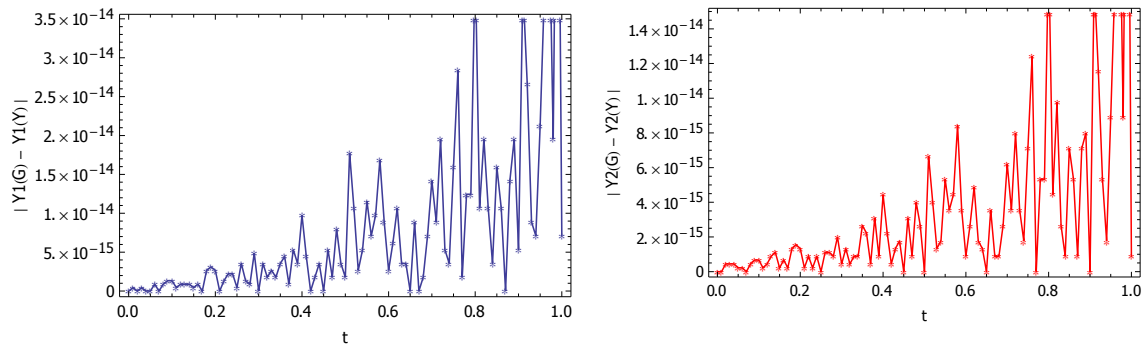


Şekil 6.3. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.1$ için stiffness değeri 10.933538299993835 olmaktadır. Bu hata değerlerini gösteren tablo ise aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.4. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.62266494 58149827	2.62266494 58149813	1.3322676295 50187*10 ⁻¹⁵	1.48245989 94117195	1.48245989 94117189	6.6613381477 50939*10 ⁻¹⁶
0.2	3.21089408 54045467	3.21089408 5404544	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.56993462 09256053	1.56993462 0925604	1.3322676295 50187*10 ⁻¹⁵
0.3	3.91174936 49483537	3.91174936 49483537	0.	1.90832285 89455759	1.90832285 89455763	4.4408920985 00626*10 ⁻¹⁶
0.4	4.76783774 161292	4.76783774 161291	9.7699626167 01378*10 ⁻¹⁵	2.34109730 5161743	2.34109730 51617385	4.4408920985 00626*10 ⁻¹⁵
0.5	5.81392560 5519449	5.81392560 5519447	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵	2.86198839 6516821	2.86198839 6516821	0.
0.6	7.08994357 9325105	7.08994357 9325102	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	3.48610162 0128444	3.48610162 0128443	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶
0.7	8.64388942 865877	8.64388942 8658785	1.4210854715 20200*10 ⁻¹⁴	4.23459209 02112715	4.23459209 0211278	6.2172489379 00877*10 ⁻¹⁵
0.8	10.5337571 80726282	10.5337571 80726239	4.2632564145 60601*10 ⁻¹⁴	5.13349175 1880748	5.13349175 18807295	1.8651746813 70263*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8296777 75428431	12.8296777 75428426	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	6.21443606 5145537	6.21443606 5145537	0.
1.	15.6164875 63676298	15.6164875 6367629	7.1054273576 01002*10 ⁻¹⁵	7.51580839 92061675	7.51580839 9206167	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶



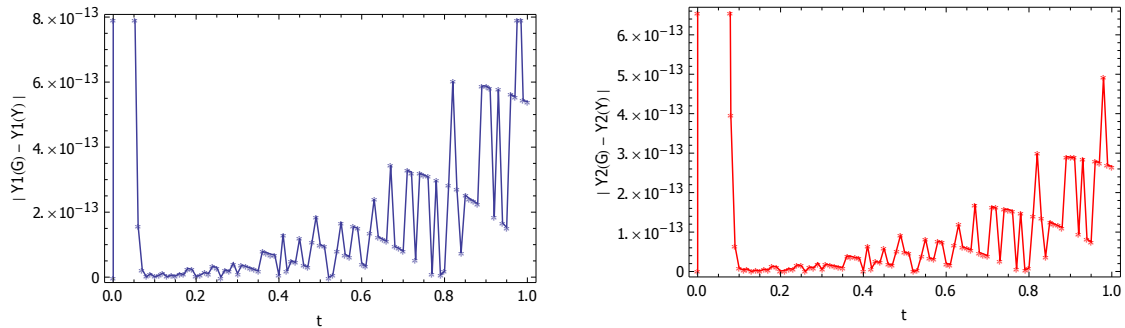
Şekil 6.4. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.01$ için stiffness değeri 100.9925982842603 olmaktadır. Bu verilere ait tablo aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.5. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.46936494 9896709	2.46936494 9896708	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶	1.26972409 95218941	1.26972409 95219028	8.6597395920 76221*10 ⁻¹⁵
0.2	3.02884291 6629998	3.02884291 6629996	2.2204460492 50313*10 ⁻¹⁵	1.59591716 2079046	1.59591716 20790449	1.1102230246 25156*10 ⁻¹⁵
0.3	3.72231357 34720993	3.72231357 34721104	1.1102230246 25156*10 ⁻¹⁴	1.98748311 37380902	1.98748311 37380957	5.5511151231 25783*10 ⁻¹⁵
0.4	4.57901712 7418754	4.57901712 7418749	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	2.45841593 9737166	2.45841593 9737163	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵
0.5	5.63452725 7969818	5.63452725 7969918	9.9475983006 41403*10 ⁻¹⁴	3.02585960 6718039	3.02585960 67180874	4.8405723873 65682*10 ⁻¹⁴
0.6	6.93214944 63018185	6.93214944 6301862	4.3520742565 30613*10 ⁻¹⁴	3.71080500 7252735	3.71080500 7252756	2.0872192862 95294*10 ⁻¹⁴
0.7	8.52462823 0753542	8.52462823 0753622	7.9936057773 01127*10 ⁻¹⁴	4.53893965 8417923	4.53893965 8417963	3.9968028886 50563*10 ⁻¹⁴
0.8	10.4762313 67132424	10.4762313 67132407	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁴	5.54168376 0252167	5.54168376 0252158	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁵
0.9	12.8652938 31503168	12.8652938 31503756	5.8797411384 14829*10 ⁻¹³	6.75745363 1926362	6.75745363 1926651	2.8954616482 22408*10 ⁻¹³
1.	15.7873228 5689042	15.7873228 5689096	5.4001247917 76761*10 ⁻¹³	8.23320258 3198	8.23320258 3198267	2.6645352591 00375*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



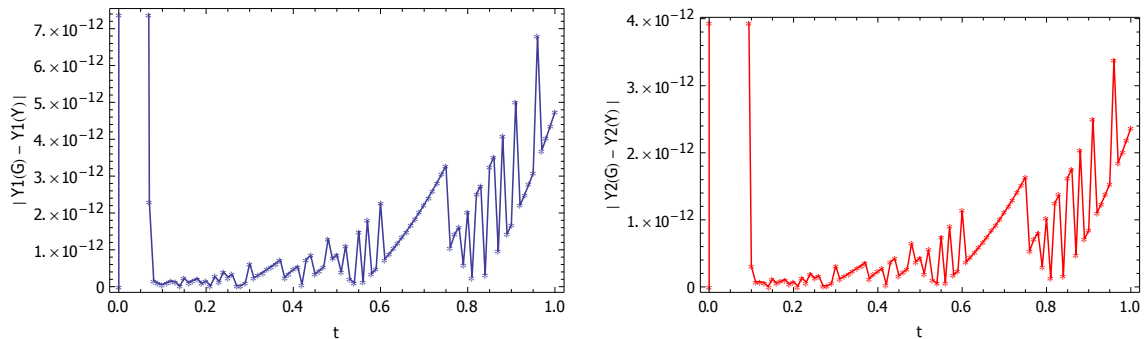
Şekil 6.5. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.001$ için stiffness değeri 1000.9992509982785 olmaktadır.

Çizelge 6.6. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.45029033 4034582	2.45029033 4034645	6.3060667798 70889*10 ⁻¹⁴	1.27356512 84212277	1.27356512 84209184	3.0930813466 05686*10 ⁻¹³
0.2	3.00878281 50448113	3.00878281 50449654	1.5409895581 79717*10 ⁻¹³	1.60192954 42117951	1.60192954 4211872	7.6827433304 06083*10 ⁻¹⁴
0.3	3.70169816 2410472	3.70169816 24110956	6.2350125062 94879*10 ⁻¹³	1.99644870 468412	1.99644870 46844315	3.1152858070 98189*10 ⁻¹³
0.4	4.55851050 7876787	4.55851050 7877245	4.5830006456 52646*10 ⁻¹³	2.47136128 97132533	2.47136128 9713482	2.2870594307 27822*10 ⁻¹³
0.5	5.61511044 9571527	5.61511044 9572399	8.7219120814 5523*10 ⁻¹³	3.04412572 91501578	3.04412572 91505934	4.3565151486 29114*10 ⁻¹³
0.6	6.91522865 6343992	6.91522865 6346267	2.2746249328 52020*10 ⁻¹²	3.73613597 98556415	3.73613597 98567775	1.1359801987 96460*10 ⁻¹²
0.7	8.51217550 5870319	8.51217550 5872545	2.2257751197 68514*10 ⁻¹²	4.57359496 7941015	4.57359496 7942127	1.1119993814 64556*10 ⁻¹²
0.8	10.4709666 40962512	10.4709666 4096456	2.0481394358 28488*10 ⁻¹²	5.58858055 86643	5.58858055 8665323	1.0231815394 94544*10 ⁻¹²
0.9	12.8709197 82914473	12.8709197 82916152	1.6786572132 33236*10 ⁻¹²	6.82034663 8299236	6.82034663 8300076	8.3932860661 66183*10 ⁻¹³
1.	15.8088270 15449571	15.8088270 15454309	4.7375436906 80468*10 ⁻¹²	8.31691132 30471	8.31691132 3049466	2.3661073100 81133*10 ⁻¹²

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



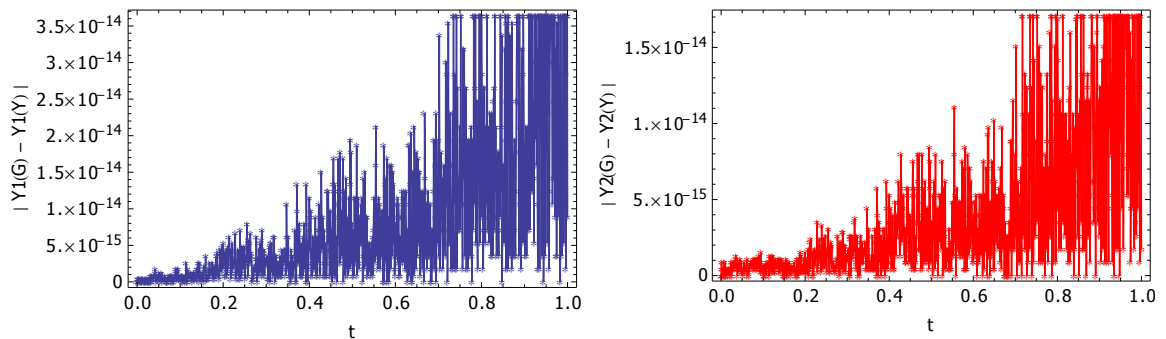
Şekil 6.6. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır. $\varepsilon = 0.1$ için stiffness değeri 10.933538299993835 olmaktadır.

Çizelge 6.7. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.62266494 5814982	2.62266494 58149813	8.8817841970 $01252 \cdot 10^{-16}$	1.48245989 9411719	1.48245989 94117189	2.2204460492 $50313 \cdot 10^{-16}$
0.2	3.21089408 54045493	3.21089408 5404544	5.3290705182 $00751 \cdot 10^{-15}$	1.56993462 09256055	1.56993462 0925604	1.5543122344 $75219 \cdot 10^{-15}$
0.3	3.91174936 49483563	3.91174936 49483537	2.6645352591 $00375 \cdot 10^{-15}$	1.90832285 89455772	1.90832285 89455763	8.8817841970 $01252 \cdot 10^{-16}$
0.4	4.76783774 1612921	4.76783774 161291	1.1546319456 $10162 \cdot 10^{-14}$	2.34109730 5161744	2.34109730 51617385	5.3290705182 $00751 \cdot 10^{-15}$
0.5	5.81392560 551945	5.81392560 5519447	2.6645352591 $00375 \cdot 10^{-15}$	2.86198839 65168227	2.86198839 6516821	1.7763568394 $00255 \cdot 10^{-15}$
0.6	7.08994357 9325104	7.08994357 9325102	1.7763568394 $00255 \cdot 10^{-15}$	3.48610162 0128444	3.48610162 0128443	8.8817841970 $0125 \cdot 10^{-16}$
0.7	8.64388942 8658765	8.64388942 8658785	1.9539925233 $4027 \cdot 10^{-14}$	4.23459209 021127	4.23459209 0211278	7.9936057773 $01 \cdot 10^{-15}$
0.8	10.5337571 80726276	10.5337571 80726239	3.7303493627 $40526 \cdot 10^{-14}$	5.13349175 1880746	5.13349175 18807295	1.6875389974 $30238 \cdot 10^{-14}$
0.9	12.8296777 75428433	12.8296777 75428426	7.1054273576 $01002 \cdot 10^{-15}$	6.21443606 5145534	6.21443606 5145537	2.6645352591 $00375 \cdot 10^{-15}$
1.	15.6164875 636763	15.6164875 6367629	8.8817841970 $01252 \cdot 10^{-15}$	7.51580839 9206168	7.51580839 9206167	1.7763568394 $00250 \cdot 10^{-15}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



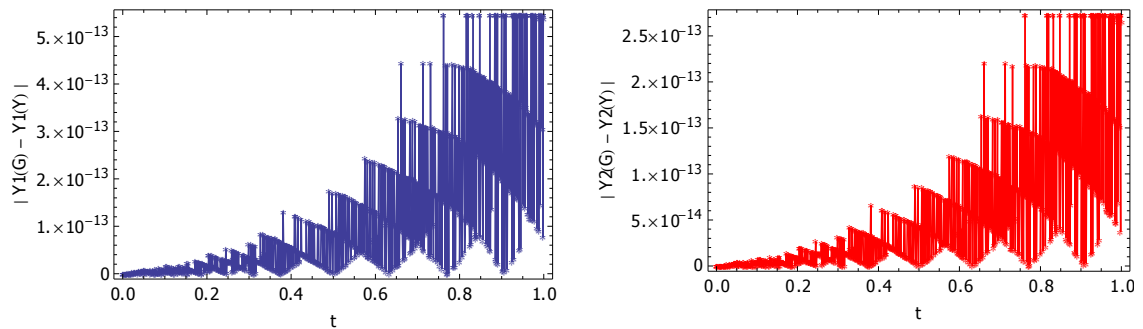
Şekil 6.7. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.8. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.46936494 98967107	2.46936494 9896708	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.26972409 95219037	1.26972409 95219028	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶
0.2	3.02884291 66300017	3.02884291 6629996	5.7731597280 5081*10 ⁻¹⁵	1.59591716 20790475	1.59591716 20790449	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵
0.3	3.72231357 34721047	3.72231357 34721104	5.7731597280 50814*10 ⁻¹⁵	1.98748311 37380926	1.98748311 37380957	3.1086244689 50438*10 ⁻¹⁵
0.4	4.57901712 7418763	4.57901712 7418749	1.4210854715 20200*10 ⁻¹⁴	2.45841593 97371703	2.45841593 9737163	7.1054273576 01002*10 ⁻¹⁵
0.5	5.63452725 7969832	5.63452725 7969918	8.6153306710 91215*10 ⁻¹⁴	3.02585960 6718045	3.02585960 67180874	4.2188474935 75595*10 ⁻¹⁴
0.6	6.93214944 63018345	6.93214944 6301862	2.7533531010 70388*10 ⁻¹⁴	3.71080500 72527434	3.71080500 7252756	1.2434497875 80175*10 ⁻¹⁴
0.7	8.52462823 0753557	8.52462823 0753622	6.5725203057 8092*10 ⁻¹⁴	4.53893965 841793	4.53893965 8417963	3.2862601528 90463*10 ⁻¹⁴
0.8	10.4762313 67132431	10.4762313 67132407	2.4868995751 60350*10 ⁻¹⁴	5.54168376 02521705	5.54168376 0252158	1.2434497875 80175*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8652938 31503175	12.8652938 31503756	5.8086868648 38819*10 ⁻¹³	6.75745363 1926365	6.75745363 1926651	2.8599345114 34403*10 ⁻¹³
1.	15.7873228 56890423	15.7873228 5689096	5.3645976549 88756*10 ⁻¹³	8.23320258 3198002	8.23320258 3198267	2.6467716907 06373*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



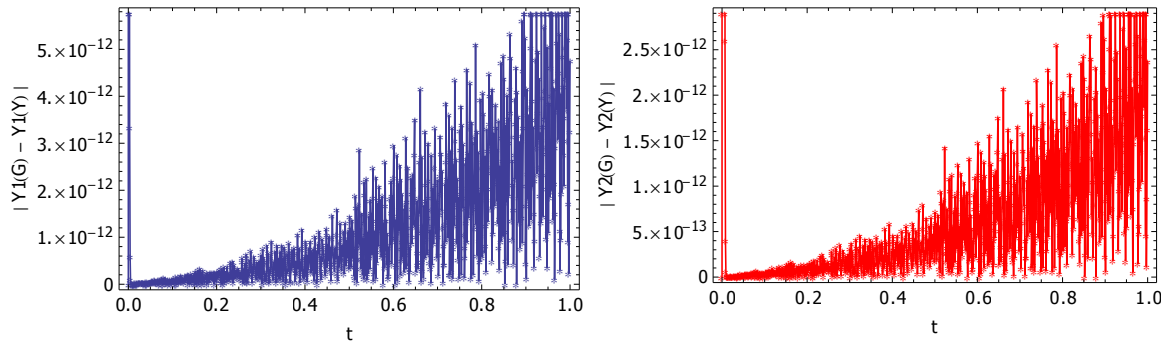
Şekil 6.8. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.9. (6.1) denkleminin RK-GL ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2.	2.	0.	3.	3.	0.
0.1	2.45029033 40345816	2.45029033 4034645	6.3504757008 $55895 \cdot 10^{-14}$	1.27356512 84208869	1.27356512 84209184	3.1530333899 $35444 \cdot 10^{-14}$
0.2	3.00878281 5044811	3.00878281 50449654	1.5454304502 $78218 \cdot 10^{-13}$	1.60192954 4211795	1.60192954 4211872	7.7049477908 $98586 \cdot 10^{-14}$
0.3	3.70169816 2410472	3.70169816 24110956	6.2350125062 $94879 \cdot 10^{-13}$	1.99644870 468412	1.99644870 46844315	3.1152858070 $98189 \cdot 10^{-13}$
0.4	4.55851050 78767825	4.55851050 7877245	4.6274095666 $37652 \cdot 10^{-13}$	2.47136128 9713251	2.47136128 9713482	2.3092638912 $20325 \cdot 10^{-13}$
0.5	5.61511044 9571524	5.61511044 9572399	8.7574392182 $43235 \cdot 10^{-13}$	3.04412572 9150156	3.04412572 91505934	4.3742787170 $23117 \cdot 10^{-13}$
0.6	6.91522865 6343992	6.91522865 6346267	2.2746249328 $52020 \cdot 10^{-12}$	3.73613597 98556415	3.73613597 98567775	1.1359801987 $96460 \cdot 10^{-12}$
0.7	8.51217550 5870324	8.51217550 5872545	2.2204460492 $50313 \cdot 10^{-12}$	4.57359496 7941017	4.57359496 7942127	1.1102230246 $25156 \cdot 10^{-12}$
0.8	10.4709666 40962521	10.4709666 4096456	2.0392576516 $31487 \cdot 10^{-12}$	5.58858055 86643045	5.58858055 8665323	1.0187406473 $96043 \cdot 10^{-12}$
0.9	12.8709197 82914477	12.8709197 82916152	1.6751044995 $54436 \cdot 10^{-12}$	6.82034663 8299239	6.82034663 8300076	8.3666407135 $7518 \cdot 10^{-13}$
1.	15.8088270 15449566	15.8088270 15454309	4.7428727611 $98669 \cdot 10^{-12}$	8.31691132 3047098	8.31691132 3049466	2.3678836669 $20534 \cdot 10^{-12}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.9. (6.1) denkleminin RK-GL metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

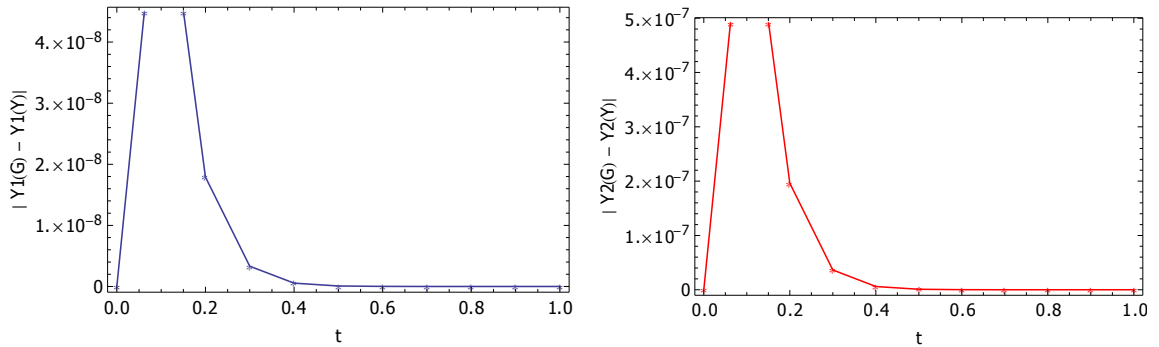
6.2.2. Runge-Kutta Gauss-Radau IIA s=5, p=9 ile Yaklaşım

Bu durum için öncelikle $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır.

Çizelge 6.10. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.62266487 33218827	2.62266494 58149813	7.2493098635 10689*10 ⁻⁸	1.48246069 36719456	1.48245989 94117189	7.9426022669 97056*10 ⁻⁷
0.2	3.21089406 74943742	3.21089408 5404544	1.7910169791 690578*10 ⁻⁸	1.56993481 7155851	1.56993462 0925604	1.9623024694 048752*10 ⁻⁷
0.3	3.91174936 16296857	3.91174936 49483586	3.3186728920 4979*10 ⁻⁹	1.90832289 53061162	1.90832285 8945578	3.6360538135 93776*10 ⁻⁸
0.4	4.76783774 1066315	4.76783774 161291	5.4659476944 60738*10 ⁻¹⁰	2.34109731 11505733	2.34109730 51617385	5.9888347614 38966*10 ⁻⁹
0.5	5.81392560 5435052	5.81392560 5519447	8.4395601618 3256*10 ⁻¹¹	2.86198839 7441571	2.86198839 6516821	9.2475005430 96976*10 ⁻¹⁰
0.6	7.08994357 9312603	7.08994357 9325118	1.2515322111 99446*10 ⁻¹¹	3.48610162 0265523	3.48610162 0128449	1.3707390777 99498*10 ⁻¹⁰
0.7	8.64388942 865698	8.64388942 8658785	1.8047785488 30654*10 ⁻¹²	4.23459209 02310255	4.23459209 0211278	1.9747758983 61258*10 ⁻¹¹
0.8	10.5337571 80726044	10.5337571 80726239	1.9539925233 40275*10 ⁻¹³	5.13349175 1883536	5.13349175 18807295	2.8066438062 52395*10 ⁻¹²
0.9	12.8296777 75428419	12.8296777 75428426	7.1054273576 01002*10 ⁻¹⁵	6.21443606 5145927	6.21443606 5145537	3.8991032624 8355*10 ⁻¹³
1.	15.6164875 63676328	15.6164875 6367629	3.7303493627 40526*10 ⁻¹⁴	7.51580839 9206225	7.51580839 9206167	5.8619775700 20827*10 ⁻¹⁴

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



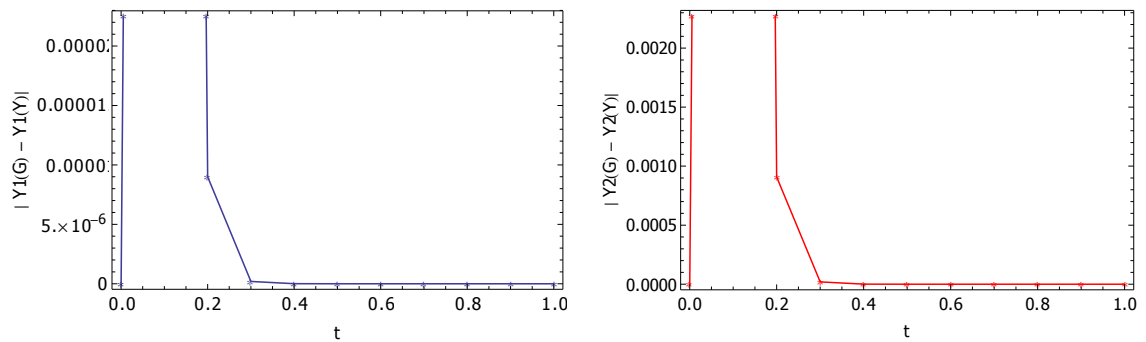
Şekil 6.10. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.11. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.46894251 79556865	2.46936494 9896708	0.0004224319 4102153936	1.31238764 45187141	1.26972409 95219028	0.0426635449 9681135
0.2	3.02883391 6709507	3.02884291 6629996	8.9999204888 61335*10 ⁻⁶	1.59682610 9712061	1.59591716 20790449	0.0009089476 330161883
0.3	3.72231338 1728644	3.72231357 34721104	1.9174346643 779927*10 ⁻⁷	1.98750247 8882805	1.98748311 37380957	0.0000193651 44709349025
0.4	4.57901712 3333662	4.57901712 7418749	4.0850869353 90336*10 ⁻⁹	2.45841635 23117644	2.45841593 9737163	4.1257460114 962896*10 ⁻⁷
0.5	5.63452725 7882794	5.63452725 7969918	8.7124085723 64438*10 ⁻¹¹	3.02585961 5507771	3.02585960 67180874	8.7896836475 92028*10 ⁻⁹
0.6	6.93214944 6299978	6.93214944 6301862	1.8838264281 83965*10 ⁻¹²	3.71080500 74397907	3.71080500 72527567	1.8703394388 80819*10 ⁻¹⁰
0.7	8.52462823 075352	8.52462823 0753622	1.0302869668 52145*10 ⁻¹³	4.53893965 8421666	4.53893965 8417963	3.7028158317 29822*10 ⁻¹²
0.8	10.4762313 67132447	10.4762313 67132407	4.0856207306 20576*10 ⁻¹⁴	5.54168376 0251976	5.54168376 0252158	1.8207657603 85256*10 ⁻¹³
0.9	12.8652938 31503198	12.8652938 31503756	5.5777604757 16786*10 ⁻¹³	6.75745363 1926062	6.75745363 1926651	5.8975047068 08832*10 ⁻¹³
1.	15.7873228 5689046	15.7873228 5689096	4.9915627187 14704*10 ⁻¹³	8.23320258 3197677	8.23320258 3198267	5.8975047068 08832*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



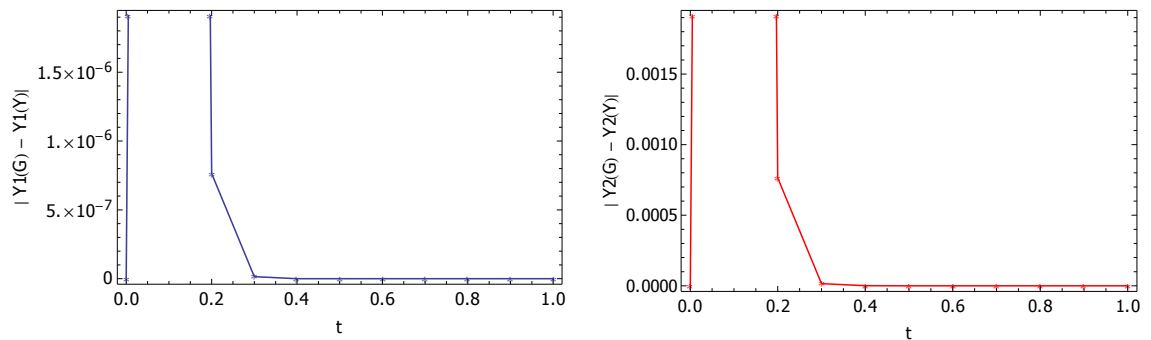
Şekil 6.11. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.12. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.45025126 92546383	2.45029033 4034645	0.0000390647 8000681446	1.31266895 36421654	1.27356512 84209184	0.0391038252 21247
0.2	3.00878205 13491588	3.00878281 50449654	7.6369580659 37449*10 ⁻⁷	1.60269400 31803578	1.60192954 4211872	0.0007644589 684858705
0.3	3.70169814 74806316	3.70169816 24110965	1.4930464864 448822*10 ⁻⁸	1.99646364 9450014	1.99644870 46844315	0.0000149447 65582614039
0.4	4.55851050 758492	4.55851050 78772449	2.9232527509 74825*10 ⁻¹⁰	2.47136158 18754318	2.47136128 97134820	2.9216194974 42407*10 ⁻⁷
0.5	5.61511044 95658295	5.61511044 95723995	6.5698557705 21826*10 ⁻¹²	3.04412573 4861724	3.04412572 91505934	5.7111306794 86587*10 ⁻⁹
0.6	6.91522865 6343893	6.91522865 63462678	2.3749890942 78135*10 ⁻¹²	3.73613597 9967241	3.73613597 98567777	1.1046319414 73144*10 ⁻¹⁰
0.7	8.51217550 5870333	8.51217550 58725456	2.2115642650 53312*10 ⁻¹²	4.57359496 7943131	4.57359496 79421268	1.0036416142 61141*10 ⁻¹²
0.8	10.4709666 40962537	10.4709666 40964560	2.0232704400 76885*10 ⁻¹²	5.58858055 8664271	5.58858055 86653230	1.0524914273 44648*10 ⁻¹²
0.9	12.8709197 82914509	12.8709197 82916152	1.6431300764 45231*10 ⁻¹²	6.82034663 8299163	6.82034663 83000758	9.1304741545 17287*10 ⁻¹³
1.	15.8088270 15449616	15.8088270 15454308	4.6931347696 95462*10 ⁻¹²	8.31691132 3047021	8.31691132 30494657	2.4442670110 14744*10 ⁻¹²

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



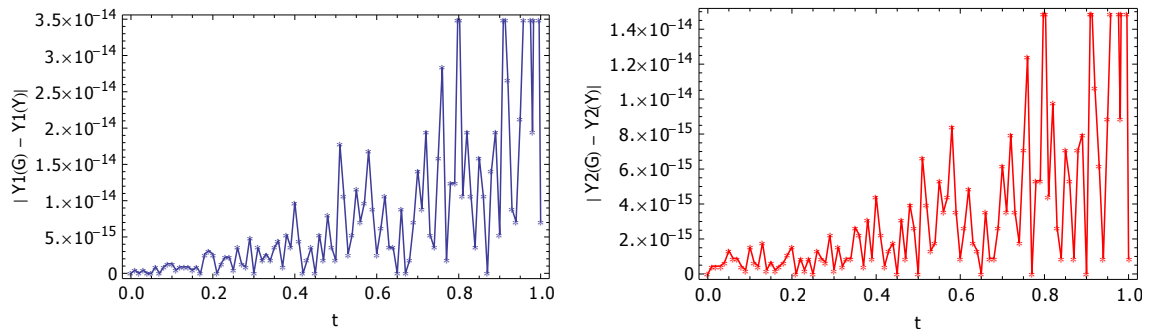
Şekil 6.12. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.13. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.62266494 58149827	2.62266494 58149813	1.3322676295 50187*10 ⁻¹⁵	1.48245989 94117204	1.48245989 94117189	1.5543122344 75219*10 ⁻¹⁵
0.2	3.21089408 54045467	3.21089408 5404544	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.56993462 09256055	1.56993462 0925604	1.5543122344 75219*10 ⁻¹⁵
0.3	3.91174936 49483537	3.91174936 49483537	0.	1.90832285 8945576	1.90832285 89455763	2.2204460492 50313*10 ⁻¹⁶
0.4	4.76783774 161292	4.76783774 161291	9.7699626167 01378*10 ⁻¹⁵	2.34109730 5161743	2.34109730 51617385	4.4408920985 00626*10 ⁻¹⁵
0.5	5.81392560 5519449	5.81392560 5519447	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵	2.86198839 6516821	2.86198839 6516821	0.
0.6	7.08994357 9325105	7.08994357 9325102	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	3.48610162 0128444	3.48610162 0128443	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶
0.7	8.64388942 865877	8.64388942 8658785	1.4210854715 20200*10 ⁻¹⁴	4.23459209 02112715	4.23459209 0211278	6.2172489379 00877*10 ⁻¹⁵
0.8	10.5337571 80726282	10.5337571 80726239	4.2632564145 60601*10 ⁻¹⁴	5.13349175 1880748	5.13349175 18807295	1.8651746813 70263*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8296777 75428431	12.8296777 75428426	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	6.21443606 5145537	6.21443606 5145537	0.
1.	15.6164875 63676298	15.6164875 6367629	7.1054273576 01002*10 ⁻¹⁵	7.51580839 92061675	7.51580839 9206167	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



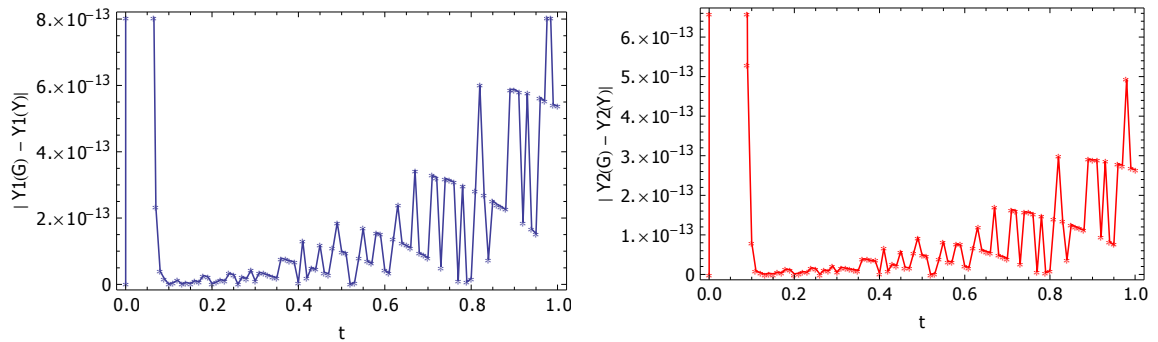
Şekil 6.13. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.14. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.46936494 98967085	2.46936494 9896708	4.4408920985 00626*10 ⁻¹⁶	1.26972409 9521983	1.26972409 95219028	8.0158102377 9363*10 ⁻¹⁴
0.2	3.02884291 66299986	3.02884291 6629996	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.59591716 20790462	1.59591716 20790449	1.3322676295 50187*10 ⁻¹⁵
0.3	3.72231357 34721	3.72231357 34721104	1.0658141036 40150*10 ⁻¹⁴	1.98748311 37380904	1.98748311 37380957	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵
0.4	4.57901712 7418754	4.57901712 7418749	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	2.45841593 9737166	2.45841593 9737163	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵
0.5	5.63452725 7969818	5.63452725 7969918	9.9475983006 41403*10 ⁻¹⁴	3.02585960 6718039	3.02585960 67180874	4.8405723873 65682*10 ⁻¹⁴
0.6	6.93214944 63018185	6.93214944 6301862	4.3520742565 30613*10 ⁻¹⁴	3.71080500 7252735	3.71080500 7252756	2.0872192862 95294*10 ⁻¹⁴
0.7	8.52462823 0753542	8.52462823 0753622	7.9936057773 01127*10 ⁻¹⁴	4.53893965 8417923	4.53893965 8417963	3.9968028886 50563*10 ⁻¹⁴
0.8	10.4762313 67132424	10.4762313 67132407	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁴	5.54168376 0252167	5.54168376 0252158	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁵
0.9	12.8652938 31503168	12.8652938 31503756	5.8797411384 14829*10 ⁻¹³	6.75745363 1926362	6.75745363 1926651	2.8954616482 22408*10 ⁻¹³
1.	15.7873228 56890421	15.7873228 5689096	5.3823612233 82759*10 ⁻¹³	8.23320258 3198002	8.23320258 3198267	2.6467716907 06373*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



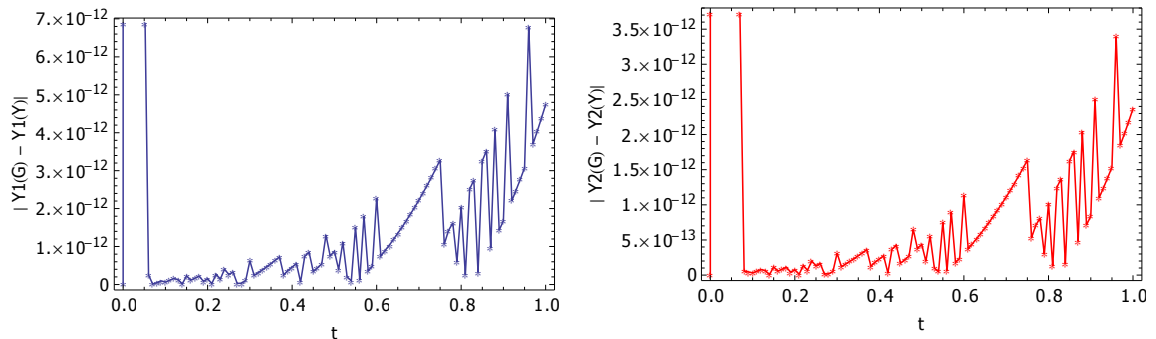
Şekil 6.14. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.15. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.45029033 4034582	2.45029033 4034645	6.3060667798 $7088 \cdot 10^{-14}$	1.27356512 84208869	1.27356512 84209184	3.1530333899 $35444 \cdot 10^{-14}$
0.2	3.00878281 5044811	3.00878281 50449654	1.5454304502 $7821 \cdot 10^{-13}$	1.60192954 4211795	1.60192954 4211872	7.7049477908 $98586 \cdot 10^{-14}$
0.3	3.70169816 24104717	3.70169816 24110956	6.2394533983 $9338 \cdot 10^{-13}$	1.99644870 46841195	1.99644870 46844315	3.1197266991 $9669 \cdot 10^{-13}$
0.4	4.55851050 7876786	4.55851050 787724497	4.5918824298 $49647 \cdot 10^{-13}$	2.47136128 9713253	2.47136128 97134820	2.2915003228 $26323 \cdot 10^{-13}$
0.5	5.61511044 9571526	5.61511044 957239955	8.7307938656 $52231 \cdot 10^{-13}$	3.04412572 91501573	3.04412572 91505934	4.3609560407 $27615 \cdot 10^{-13}$
0.6	6.91522865 6343991	6.91522865 634626693	2.2764012896 $9142 \cdot 10^{-12}$	3.73613597 98556406	3.73613597 98567773	1.1368683772 $16160 \cdot 10^{-12}$
0.7	8.51217550 5870317	8.51217550 587254560	2.2275514766 $0791 \cdot 10^{-12}$	4.57359496 7941014	4.57359496 79421268	1.1128875598 $84257 \cdot 10^{-12}$
0.8	10.4709666 4096251	10.4709666 409645603	2.0499157926 $6788 \cdot 10^{-12}$	5.58858055 86643	5.58858055 86653230	1.0231815394 $94544 \cdot 10^{-12}$
0.9	12.8709197 82914472	12.8709197 829161528	1.6804335700 $7263 \cdot 10^{-12}$	6.82034663 8299236	6.82034663 83000758	8.3932860661 $66183 \cdot 10^{-13}$
1.	15.8088270 15449568	15.8088270 154543086	4.7410964043 $5926 \cdot 10^{-12}$	8.31691132 3047098	8.31691132 30494657	2.3678836669 $20534 \cdot 10^{-12}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



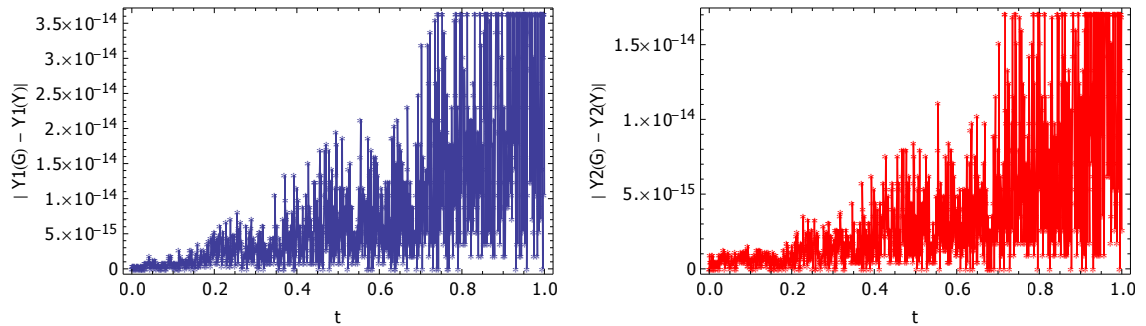
Şekil 6.15. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.16. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.62266494 5814982	2.62266494 58149813	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶	1.48245989 9411719	1.48245989 94117189	2.2204460492 50313*10 ⁻¹⁶
0.2	3.21089408 54045493	3.21089408 5404544	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	1.56993462 09256055	1.56993462 0925604	1.5543122344 75219*10 ⁻¹⁵
0.3	3.91174936 49483563	3.91174936 49483537	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.90832285 89455774	1.90832285 89455763	1.1102230246 25156*10 ⁻¹⁵
0.4	4.76783774 1612921	4.76783774 161291	1.1546319456 10162*10 ⁻¹⁴	2.34109730 5161744	2.34109730 51617385	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵
0.5	5.81392560 551945	5.81392560 5519447	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	2.86198839 65168227	2.86198839 6516821	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵
0.6	7.08994357 9325104	7.08994357 9325102	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵	3.48610162 0128444	3.48610162 0128443	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶
0.7	8.64388942 8658767	8.64388942 8658785	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁴	4.23459209 021127	4.23459209 0211278	7.9936057773 01127*10 ⁻¹⁵
0.8	10.5337571 80726278	10.5337571 80726239	3.9079850466 80551*10 ⁻¹⁴	5.13349175 1880747	5.13349175 18807295	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8296777 75428435	12.8296777 75428426	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁵	6.21443606 5145535	6.21443606 5145537	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵
1.	15.6164875 63676301	15.6164875 6367629	1.0658141036 40150*10 ⁻¹⁴	7.51580839 9206169	7.51580839 9206167	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



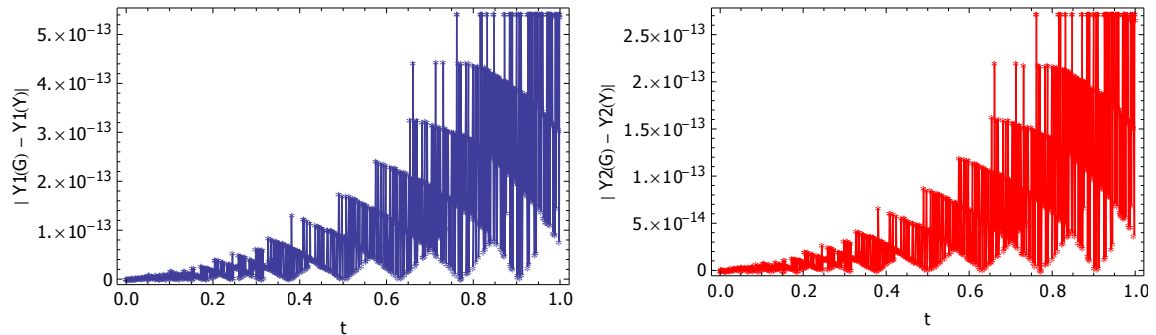
Şekil 6.16. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.17. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.46936494 98967107	2.46936494 9896708	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.26972409 95219037	1.26972409 95219028	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶
0.2	3.02884291 66300017	3.02884291 6629996	5.7731597280 50814*10 ⁻¹⁵	1.59591716 20790475	1.59591716 20790449	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵
0.3	3.72231357 34721047	3.72231357 34721104	5.7731597280 50814*10 ⁻¹⁵	1.98748311 37380926	1.98748311 37380957	3.1086244689 50438*10 ⁻¹⁵
0.4	4.57901712 7418763	4.57901712 7418749	1.4210854715 20200*10 ⁻¹⁴	2.45841593 97371703	2.45841593 9737163	7.1054273576 01002*10 ⁻¹⁵
0.5	5.63452725 7969832	5.63452725 7969918	8.6153306710 91215*10 ⁻¹⁴	3.02585960 6718045	3.02585960 67180874	4.2188474935 75595*10 ⁻¹⁴
0.6	6.93214944 6301835	6.93214944 6301862	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁴	3.71080500 72527434	3.71080500 7252756	1.2434497875 80175*10 ⁻¹⁴
0.7	8.52462823 0753557	8.52462823 0753622	6.5725203057 80927*10 ⁻¹⁴	4.53893965 841793	4.53893965 8417963	3.2862601528 90463*10 ⁻¹⁴
0.8	10.4762313 67132431	10.4762313 67132407	2.4868995751 60350*10 ⁻¹⁴	5.54168376 02521705	5.54168376 0252158	1.2434497875 80175*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8652938 31503175	12.8652938 31503756	5.8086868648 38819*10 ⁻¹³	6.75745363 1926366	6.75745363 1926651	2.8510527272 37402*10 ⁻¹³
1.	15.7873228 56890423	15.7873228 5689096	5.3645976549 88756*10 ⁻¹³	8.23320258 3198002	8.23320258 3198267	2.6467716907 06373*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



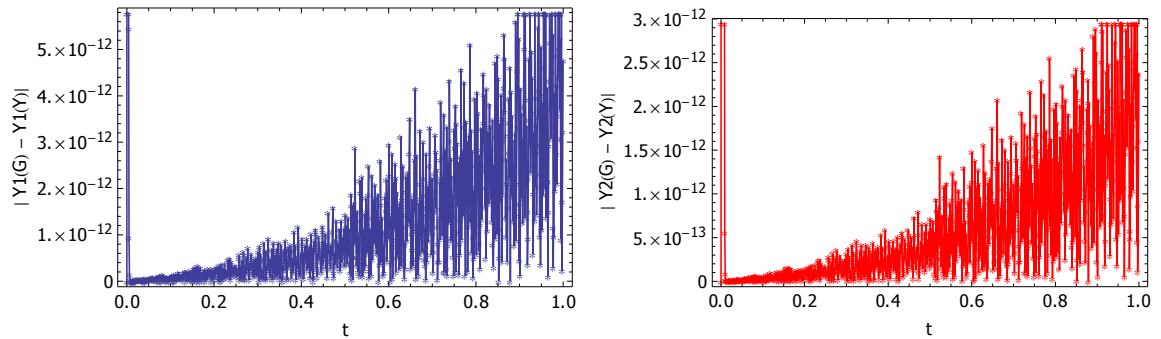
Şekil 6.17. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.18. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.45029033 40345816	2.45029033 4034645	6.3504757008 $55895 \cdot 10^{-14}$	1.27356512 84208869	1.27356512 84209184	3.1530333899 $35444 \cdot 10^{-14}$
0.2	3.00878281 5044811	3.00878281 50449654	1.5454304502 $78218 \cdot 10^{-13}$	1.60192954 42117947	1.60192954 4211872	7.7271522513 $9109 \cdot 10^{-14}$
0.3	3.70169816 2410472	3.70169816 24110956	6.2350125062 $94879 \cdot 10^{-13}$	1.99644870 468412	1.99644870 46844315	3.1152858070 $98189 \cdot 10^{-13}$
0.4	4.55851050 78767825	4.55851050 78772449	4.6274095666 $37652 \cdot 10^{-13}$	2.47136128 9713251	2.47136128 97134820	2.3092638912 $20325 \cdot 10^{-13}$
0.5	5.61511044 9571524	5.61511044 95723995	8.7574392182 $43235 \cdot 10^{-13}$	3.04412572 9150156	3.04412572 91505934	4.3742787170 $23117 \cdot 10^{-13}$
0.6	6.91522865 6343992	6.91522865 63462669	2.2746249328 $52020 \cdot 10^{-12}$	3.73613597 98556415	3.73613597 98567773	1.1359801987 $96460 \cdot 10^{-12}$
0.7	8.51217550 5870324	8.51217550 58725456	2.2204460492 $50313 \cdot 10^{-12}$	4.57359496 7941017	4.57359496 79421268	1.1102230246 $25156 \cdot 10^{-12}$
0.8	10.4709666 40962521	10.4709666 40964560	2.0392576516 $31487 \cdot 10^{-12}$	5.58858055 86643045	5.58858055 86653230	1.0187406473 $96043 \cdot 10^{-12}$
0.9	12.8709197 82914477	12.8709197 82916152	1.6751044995 $54436 \cdot 10^{-12}$	6.82034663 8299239	6.82034663 83000758	8.3666407135 $7518 \cdot 10^{-13}$
1.	15.8088270 15449566	15.8088270 15454308	4.7428727611 $98669 \cdot 10^{-12}$	8.31691132 3047098	8.31691132 30494657	2.3678836669 $20534 \cdot 10^{-12}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.18. (6.1) denkleminin RK-GRDIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

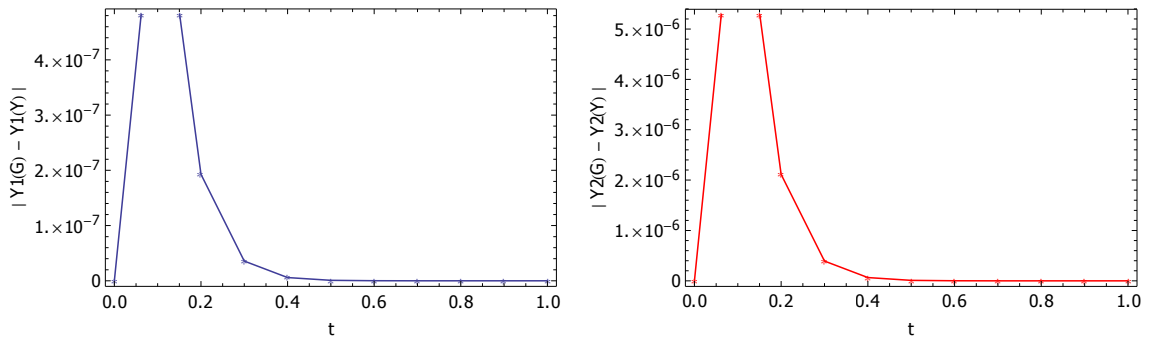
6.2.3. Runge-Kutta Gauss-Lobatto IIIA s=5, p=8 ile Yaklaşım

Bu durum için öncelikle $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar alınmaktadır.

Çizelge 6.19. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.62266416 51955607	2.62266494 58149813	7.8061942065 94341*10 ⁻⁷	1.48246845 2155647	1.48245989 94117189	8.5527439281 9183*10 ⁻⁶
0.2	3.21089389 254133	3.21089408 5404544	1.9286321384 370808*10 ⁻⁷	1.56993673 40026154	1.56993462 0925604	2.1130770113 675368*10 ⁻⁶
0.3	3.91174932 9211002	3.91174936 49483586	3.5737356629 53936*10 ⁻⁸	1.90832325 04947882	1.90832285 8945578	3.9154921016 582023*10 ⁻⁷
0.4	4.76783773 5726394	4.76783774 161291	5.8865161634 00302*10 ⁻⁹	2.34109736 965347	2.34109730 51617385	6.4491731510 68521*10 ⁻⁸
0.5	5.81392560 461011	5.81392560 5519447	9.0933749419 26413*10 ⁻¹⁰	2.86198840 6475112	2.86198839 6516821	9.9582910806 36172*10 ⁻⁹
0.6	7.08994357 9189768	7.08994357 9325118	1.3535039755 65217*10 ⁻¹⁰	3.48610162 1604352	3.48610162 0128449	1.4759029554 056724*10 ⁻⁹
0.7	8.64388942 8638504	8.64388942 8658785	2.0280666035 43266*10 ⁻¹¹	4.23459209 0423576	4.23459209 0211278	2.1229862312 56618*10 ⁻¹⁰
0.8	10.5337571 80722365	10.5337571 80726239	3.8742342667 31946*10 ⁻¹²	5.13349175 1910176	5.13349175 18807295	2.9446667326 73795*10 ⁻¹¹
0.9	12.8296777 75426449	12.8296777 75428426	1.9770851622 52478*10 ⁻¹²	6.21443606 5148901	6.21443606 5145537	3.3635316754 04374*10 ⁻¹²
1.	15.6164875 63674093	15.6164875 6367629	2.1973534103 3811*10 ⁻¹²	7.51580839 9205669	7.51580839 9206167	4.9737991503 20701*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



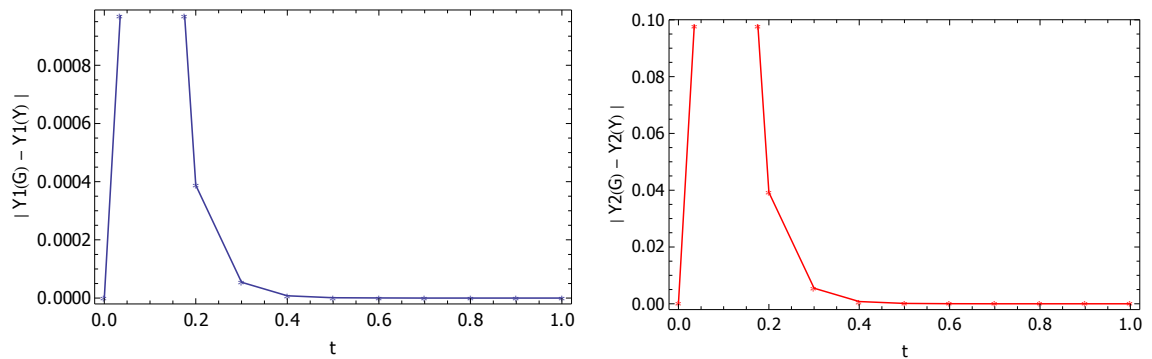
Şekil 6.19. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.20. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.46659118 11909313	2.46936494 9896708	0.0027737687 057767246	1.54986107 42516556	1.26972409 95219028	0.2801369747 2975285
0.2	3.02845488 6366174	3.02884291 6629996	0.0003880302 638217259	1.63510630 71404135	1.59591716 20790449	0.0391891450 6136861
0.3	3.72225929 08335126	3.72231357 34721104	0.0000542826 3859785787	1.99296539 279654	1.98748311 37380957	0.0054822790 58444339
0.4	4.57900953 3668346	4.57901712 7418749	7.5937504027 12374*10 ⁻⁶	2.45918287 10802717	2.45841593 9737163	0.0007669313 431084568
0.5	5.63452619 5658322	5.63452725 7969918	1.0623115960 228802*10 ⁻⁶	3.02596689 48869645	3.02585960 67180874	0.0001072881 6887706216
0.6	6.93214929 7691332	6.93214944 6301862	1.4861053010 406522*10 ⁻⁷	3.71082001 60937406	3.71080500 72527567	0.0000150088 40983821159
0.7	8.52462820 996292	8.52462823 0753622	2.0790702492 945456*10 ⁻⁸	4.53894175 8045533	4.53893965 8417963	2.0996275704 73217*10 ⁻⁶
0.8	10.4762313 64222455	10.4762313 67132407	2.9099513909 61396*10 ⁻⁹	5.54168405 3973542	5.54168376 0252158	2.9372138410 366233*10 ⁻⁷
0.9	12.8652938 3109401	12.8652938 31503756	4.0974512671 70981*10 ⁻¹⁰	6.75745367 3014119	6.75745363 1926651	4.1087467650 4136*10 ⁻⁸
1.	15.7873228 56830375	15.7873228 5689096	6.0584426364 58494*10 ⁻¹¹	8.23320258 8943712	8.23320258 3198267	5.7454450086 42491*10 ⁻⁹

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



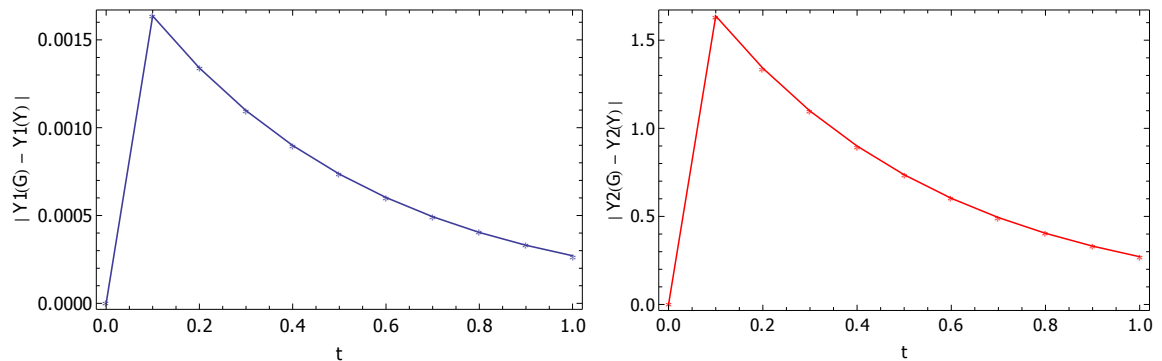
Şekil 6.20. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.21. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA ile $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.44865410 1462595	2.45029033 4034645	0.0016362325 720500337	2.91143311 603264	1.27356512 84209184	1.637867987 6117217
0.2	3.00744301 61278927	3.00878281 50449654	0.0013397989 170726987	2.94306759 10160744	1.60192954 4211872	1.341138046 8042025
0.3	3.70060109 2734309	3.70169816 24110965	0.0010970696 767875765	3.09461490 25646887	1.99644870 46844315	1.098166197 8802573
0.4	4.55761219 2570455	4.55851050 78772449	0.0008983153 067898542	3.37057446 2466794	2.47136128 97134820	0.899213172 7533121
0.5	5.61437488 0621578	5.61511044 95723995	0.0007355689 508212748	3.78042988 0210296	3.04412572 91505934	0.736304151 0597026
0.6	6.91462634 9251526	6.91522865 63462678	0.0006023070 947422937	4.33904507 7826422	3.73613597 98567777	0.602909097 9696443
0.7	8.51168231 7796216	8.51217550 58725456	0.0004931880 763283658	5.06727598 2631021	4.57359496 79421268	0.493681014 68889414
0.8	10.4705628 02987414	10.4709666 40964560	0.0004038379 771458267	5.99282216 83622445	5.58858055 86653230	0.404241609 69692124
0.9	12.8705891 0762267	12.8709197 82916152	0.0003306752 9348151936	7.15135243 7891671	6.82034663 83000758	0.331005799 59159493
1.	15.8085562 48073657	15.8088270 15454308	0.0002707673 80651904	8.58794932 788182	8.31691132 30494657	0.271038004 83235396

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



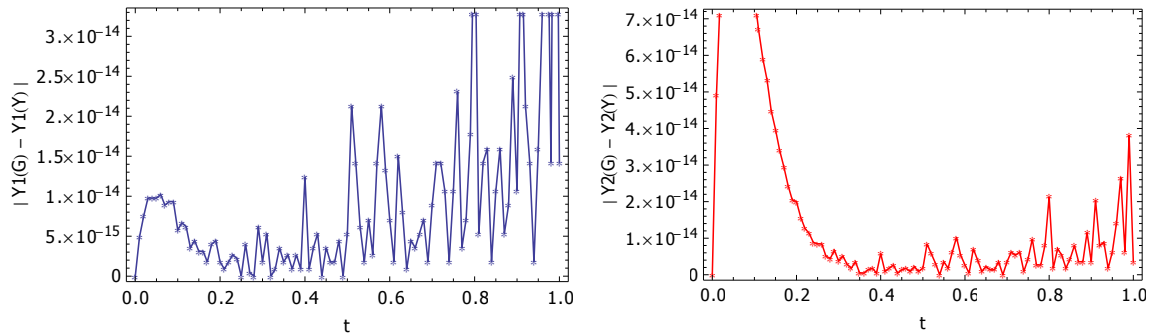
Şekil 6.21. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.22. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.62266494 58149756	2.62266494 58149813	5.7731597280 $50814 \cdot 10^{-15}$	1.48245989 94117948	1.48245989 94117189	7.5939254884 $36071 \cdot 10^{-14}$
0.2	3.21089408 5404546	3.21089408 5404544	1.7763568394 $00250 \cdot 10^{-15}$	1.56993462 0925624	1.56993462 0925604	1.9984014443 $25281 \cdot 10^{-14}$
0.3	3.91174936 49483555	3.91174936 49483537	1.7763568394 $00250 \cdot 10^{-15}$	1.90832285 894558	1.90832285 89455763	3.7747582837 $25532 \cdot 10^{-15}$
0.4	4.76783774 1612922	4.76783774 161291	1.2434497875 $80175 \cdot 10^{-14}$	2.34109730 51617443	2.34109730 51617385	5.7731597280 $50814 \cdot 10^{-15}$
0.5	5.81392560 5519453	5.81392560 5519447	5.3290705182 $00751 \cdot 10^{-15}$	2.86198839 65168227	2.86198839 6516821	1.7763568394 $00250 \cdot 10^{-15}$
0.6	7.08994357 93251095	7.08994357 9325102	7.1054273576 $01002 \cdot 10^{-15}$	3.48610162 01284456	3.48610162 0128443	2.6645352591 $00375 \cdot 10^{-15}$
0.7	8.64388942 8658776	8.64388942 8658785	8.8817841970 $01252 \cdot 10^{-15}$	4.23459209 0211274	4.23459209 0211278	3.5527136788 $00501 \cdot 10^{-15}$
0.8	10.5337571 80726287	10.5337571 80726239	4.7961634663 $80676 \cdot 10^{-14}$	5.13349175 1880751	5.13349175 18807295	2.1316282072 $80300 \cdot 10^{-14}$
0.9	12.8296777 75428436	12.8296777 75428426	1.0658141036 $40150 \cdot 10^{-14}$	6.21443606 5145541	6.21443606 5145537	3.5527136788 $00501 \cdot 10^{-15}$
1.	15.6164875 63676305	15.6164875 6367629	1.4210854715 $20200 \cdot 10^{-14}$	7.51580839 920617	7.51580839 9206167	3.5527136788 $00501 \cdot 10^{-15}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



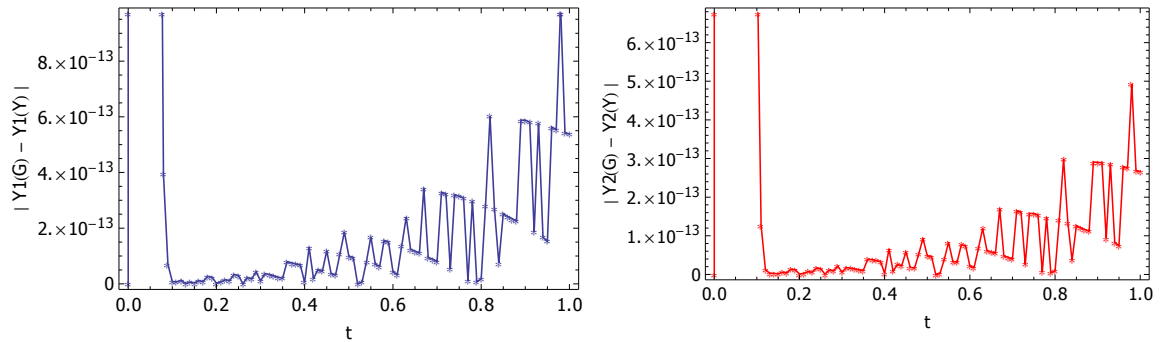
Şekil 6.22. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denkleminin $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.23. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.46936494 98967005	2.46936494 9896708	7.5495165674 $51064 \cdot 10^{-15}$	1.26972409 95227888	1.26972409 95219028	8.8595797365 $08749 \cdot 10^{-13}$
0.2	3.02884291 6629998	3.02884291 6629996	2.2204460492 $50313 \cdot 10^{-15}$	1.59591716 2079046	1.59591716 20790449	1.1102230246 $25156 \cdot 10^{-15}$
0.3	3.72231357 34720993	3.72231357 34721104	1.1102230246 $25156 \cdot 10^{-14}$	1.98748311 37380902	1.98748311 37380957	5.5511151231 $25783 \cdot 10^{-15}$
0.4	4.57901712 7418754	4.57901712 7418749	5.3290705182 $00751 \cdot 10^{-15}$	2.45841593 9737166	2.45841593 9737163	2.6645352591 $00375 \cdot 10^{-15}$
0.5	5.63452725 7969818	5.63452725 7969918	9.9475983006 $41403 \cdot 10^{-14}$	3.02585960 6718039	3.02585960 67180874	4.8405723873 $65682 \cdot 10^{-14}$
0.6	6.93214944 63018185	6.93214944 6301862	4.3520742565 $30613 \cdot 10^{-14}$	3.71080500 72527345	3.71080500 7252756	2.1316282072 $80300 \cdot 10^{-14}$
0.7	8.52462823 0753542	8.52462823 0753622	7.9936057773 $01127 \cdot 10^{-14}$	4.53893965 8417923	4.53893965 8417963	3.9968028886 $50563 \cdot 10^{-14}$
0.8	10.4762313 67132424	10.4762313 67132407	1.7763568394 $00250 \cdot 10^{-14}$	5.54168376 0252167	5.54168376 0252158	8.8817841970 $01252 \cdot 10^{-15}$
0.9	12.8652938 31503168	12.8652938 31503756	5.8797411384 $14829 \cdot 10^{-13}$	6.75745363 1926362	6.75745363 1926651	2.8954616482 $22408 \cdot 10^{-13}$
1.	15.7873228 56890421	15.7873228 5689096	5.3823612233 $82759 \cdot 10^{-13}$	8.23320258 3198	8.23320258 3198267	2.6645352591 $00375 \cdot 10^{-13}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



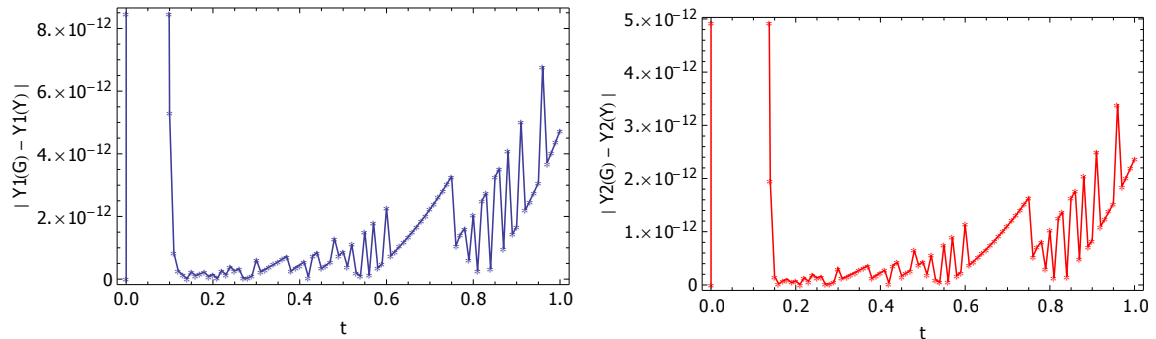
Şekil 6.23. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.24. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.45029033 4029316	2.45029033 4034645	5.3290705182 00751*10 ⁻¹²	1.27356513 369249	1.27356512 84209184	5.2715716236 66205*10 ⁻⁹
0.2	3.00878281 50448113	3.00878281 50449654	1.5409895581 79717*10 ⁻¹³	1.60192954 42117951	1.60192954 4211872	7.6827433304 06083*10 ⁻¹⁴
0.3	3.70169816 2410472	3.70169816 24110956	6.2350125062 94879*10 ⁻¹³	1.99644870 46841197	1.99644870 46844315	3.1175062531 47439*10 ⁻¹³
0.4	4.55851050 7876787	4.55851050 78772449	4.5830006456 52646*10 ⁻¹³	2.47136128 97132533	2.47136128 97134820	2.2870594307 27822*10 ⁻¹³
0.5	5.61511044 9571527	5.61511044 95723995	8.7219120814 5523*10 ⁻¹³	3.04412572 91501578	3.04412572 91505934	4.3565151486 29114*10 ⁻¹³
0.6	6.91522865 63439915	6.91522865 63462669	2.2755131112 71721*10 ⁻¹²	3.73613597 9855641	3.73613597 98567773	1.1364242880 06310*10 ⁻¹²
0.7	8.51217550 5870317	8.51217550 58725456	2.2275514766 07914*10 ⁻¹²	4.57359496 7941014	4.57359496 79421268	1.1128875598 84257*10 ⁻¹²
0.8	10.4709666 4096251	10.4709666 40964560	2.0499157926 67889*10 ⁻¹²	5.58858055 86643	5.58858055 86653230	1.0231815394 94544*10 ⁻¹²
0.9	12.8709197 82914472	12.8709197 82916152	1.6804335700 72637*10 ⁻¹²	6.82034663 8299236	6.82034663 83000758	8.3932860661 66183*10 ⁻¹³
1.	15.8088270 1544957	15.8088270 15454308	4.7393200475 19868*10 ⁻¹²	8.31691132 30471	8.31691132 30494657	2.3661073100 81133*10 ⁻¹²

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



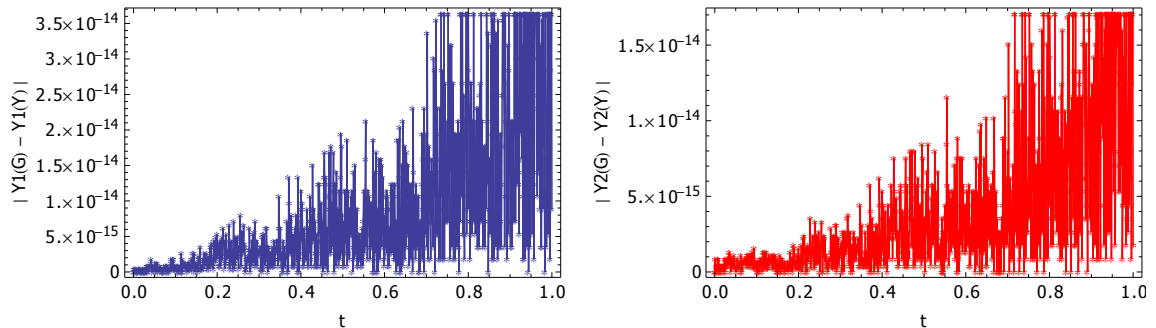
Şekil 6.24. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.1$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.25. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.62266494 5814982	2.62266494 58149813	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁶	1.48245989 9411719	1.48245989 94117189	2.2204460492 50313*10 ⁻¹⁶
0.2	3.21089408 54045493	3.21089408 5404544	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	1.56993462 09256055	1.56993462 0925604	1.5543122344 75219*10 ⁻¹⁵
0.3	3.91174936 49483563	3.91174936 49483537	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	1.90832285 89455774	1.90832285 89455763	1.1102230246 25156*10 ⁻¹⁵
0.4	4.76783774 1612921	4.76783774 161291	1.1546319456 10162*10 ⁻¹⁴	2.34109730 5161744	2.34109730 51617385	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵
0.5	5.81392560 551945	5.81392560 5519447	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵	2.86198839 65168227	2.86198839 6516821	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵
0.6	7.08994357 9325104	7.08994357 9325102	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵	3.48610162 01284443	3.48610162 0128443	1.3322676295 50187*10 ⁻¹⁵
0.7	8.64388942 8658765	8.64388942 8658785	1.9539925233 40275*10 ⁻¹⁴	4.23459209 021127	4.23459209 0211278	7.9936057773 01127*10 ⁻¹⁵
0.8	10.5337571 80726276	10.5337571 80726239	3.7303493627 40526*10 ⁻¹⁴	5.13349175 1880746	5.13349175 18807295	1.6875389974 30238*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8296777 75428433	12.8296777 75428426	7.1054273576 01002*10 ⁻¹⁵	6.21443606 5145534	6.21443606 5145537	2.6645352591 00375*10 ⁻¹⁵
1.	15.6164875 636763	15.6164875 6367629	8.8817841970 01252*10 ⁻¹⁵	7.51580839 9206168	7.51580839 9206167	1.7763568394 00250*10 ⁻¹⁵

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



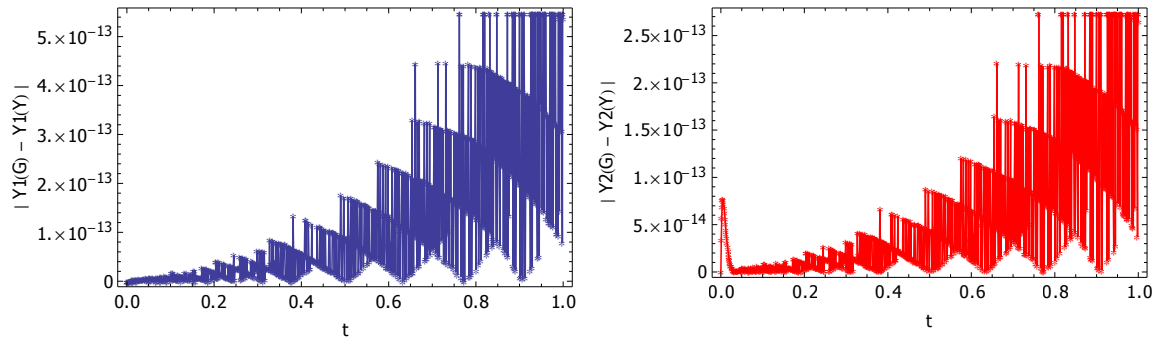
Şekil 6.25. (6.1) denkleminin RK-GLBIIIA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.1$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.01$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.26. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.46936494 98967103	2.46936494 9896708	2.2204460492 50313*10 ⁻¹⁵	1.26972409 95219035	1.26972409 95219028	6.6613381477 50939*10 ⁻¹⁶
0.2	3.02884291 66300013	3.02884291 6629996	5.3290705182 00751*10 ⁻¹⁵	1.59591716 20790473	1.59591716 20790449	2.4424906541 75344*10 ⁻¹⁵
0.3	3.72231357 34721042	3.72231357 34721104	6.2172489379 00877*10 ⁻¹⁵	1.98748311 37380926	1.98748311 37380957	3.1086244689 50438*10 ⁻¹⁵
0.4	4.57901712 7418762	4.57901712 7418749	1.3322676295 50187*10 ⁻¹⁴	2.45841593 973717	2.45841593 9737163	6.6613381477 50939*10 ⁻¹⁵
0.5	5.63452725 7969831	5.63452725 7969918	8.7041485130 61227*10 ⁻¹⁴	3.02585960 67180448	3.02585960 67180874	4.2632564145 60601*10 ⁻¹⁴
0.6	6.93214944 6301834	6.93214944 6301862	2.8421709430 40401*10 ⁻¹⁴	3.71080500 7252743	3.71080500 7252756	1.2878587085 65181*10 ⁻¹⁴
0.7	8.52462823 0753555	8.52462823 0753622	6.7501559897 20952*10 ⁻¹⁴	4.53893965 8417929	4.53893965 8417963	3.3750779948 60476*10 ⁻¹⁴
0.8	10.4762313 6713243	10.4762313 67132407	2.3092638912 20325*10 ⁻¹⁴	5.54168376 025217	5.54168376 0252158	1.1546319456 10162*10 ⁻¹⁴
0.9	12.8652938 31503173	12.8652938 31503756	5.8264504332 32822*10 ⁻¹³	6.75745363 19263645	6.75745363 1926651	2.8688162956 31404*10 ⁻¹³
1.	15.7873228 56890421	15.7873228 5689096	5.3823612233 82759*10 ⁻¹³	8.23320258 3198002	8.23320258 3198267	2.6467716907 06373*10 ⁻¹³

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



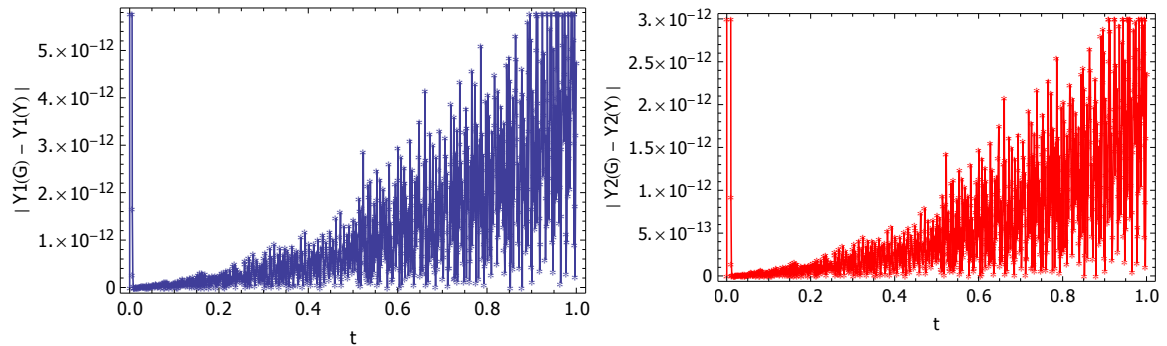
Şekil 6.26. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.01$ için hata grafiği

(6.1) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı ve $\varepsilon = 0.001$ alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.27. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA ile $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	2	2	0	3	3	0
0.1	2.4502903 34034582	2.45029033 4034645	6.2616578588 $85883 \cdot 10^{-14}$	1.27356512 84208873	1.27356512 84209184	3.1086244689 $50438 \cdot 10^{-14}$
0.2	3.0087828 15044811	3.00878281 50449654	1.5365486660 $81216 \cdot 10^{-13}$	1.60192954 42117953	1.60192954 4211872	7.6605388699 $1358 \cdot 10^{-14}$
0.3	3.7016981 62410473	3.70169816 24110956	6.2216898299 $99377 \cdot 10^{-13}$	1.99644870 46841206	1.99644870 46844315	3.1086244689 $50438 \cdot 10^{-13}$
0.4	4.5585105 07876784	4.55851050 78772449	4.6096459982 $4365 \cdot 10^{-13}$	2.47136128 9713252	2.47136128 97134820	2.3003821070 $23324 \cdot 10^{-13}$
0.5	5.6151104 49571526	5.61511044 95723995	8.7307938656 $52231 \cdot 10^{-13}$	3.04412572 91501573	3.04412572 91505934	4.3609560407 $27615 \cdot 10^{-13}$
0.6	6.9152286 56343995	6.91522865 63462669	2.2719603975 $92920 \cdot 10^{-12}$	3.73613597 9855643	3.73613597 98567773	1.1346479311 $6691 \cdot 10^{-12}$
0.7	8.5121755 05870328	8.51217550 58725456	2.2168933355 $71512 \cdot 10^{-12}$	4.57359496 794102	4.57359496 79421268	1.1075584893 $66056 \cdot 10^{-12}$
0.8	10.470966 64096252	10.4709666 40964560	2.0339285811 $13286 \cdot 10^{-12}$	5.58858055 8664307	5.58858055 86653230	1.0160761121 $36943 \cdot 10^{-12}$
0.9	12.870919 78291448	12.8709197 82916152	1.6697754290 $36235 \cdot 10^{-12}$	6.82034663 8299242	6.82034663 83000758	8.3399953609 $84176 \cdot 10^{-13}$
1.	15.808827 01544957	15.8088270 15454308	4.7375436906 $80468 \cdot 10^{-12}$	8.31691132 30471	8.31691132 30494657	2.3661073100 $81133 \cdot 10^{-12}$

Bu tablodaki verilere ait hata grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.27. (6.1) denkleminin RK-GLBİİİA metodu ile $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ ve $\varepsilon = 0.001$ için hata grafiği

6.3. Uygulama (Stiff Problem)

Bu bölümde Runge-Kutta Gauss-Legendre metodlarının adım aralığına ve mertebelerine göre değişimleri verilecektir.

$$y_1'(t) = -y_1(t) + 95y_2(t) \quad (6.2)$$

$$y_2'(t) = y_1(t) - 97y_2(t)$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, 0 \leq t \leq 1$$

şeklinde verilen bir başlangıç değer problemi için stiffness katsayısı 4800'dür. Bu katsayı denklemin yüksek stiffliğini göstermektedir.

6.3.1. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=1, p=2 ile Yaklaşım

(6.2) denklemi [0,1] aralığında h=0.1 adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.28. (6.2) denkleminin RK-GL s=1, p=2 ve h=0.1 için yaklaşık çözümü

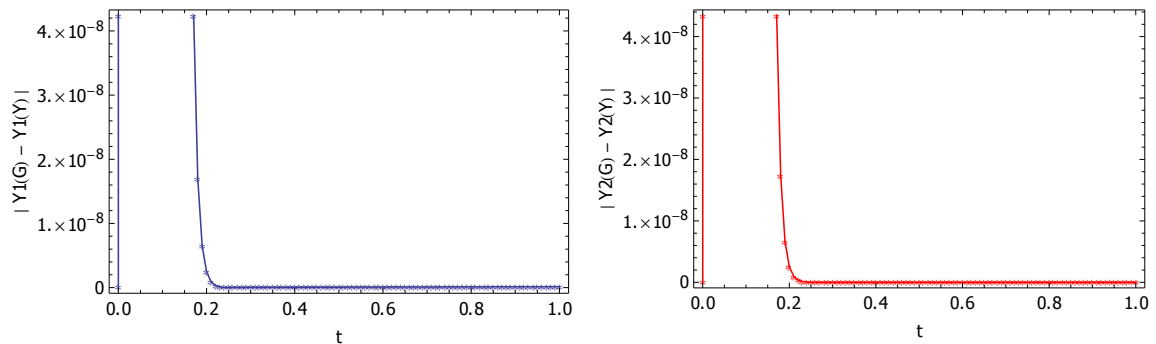
t	y _{1Y}	y _{1G}	y _{1H}	y _{2Y}	y _{2G}	y _{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	2.59017781 54106685	1.95574213 44344712	0.634435680 9761973	- 0.627434377	0.020221525 78649165	0.64765590 34325543
0.2	1.53250700 29919101	1.95180728 31517785	0.419300280 1598684	0.448163520 4884564	0.020125962 87619188	0.42803755 761226453
0.3	2.22496723 57287817	1.94782723 95891378	0.277139996 1396439	- 0.262830058	0.020084919 80745645	0.28291497 82595117
0.4	1.76067732 01953878	1.94385530 90135107	0.183177988 81812286	0.207038966 2968583	0.020043963 450649824	0.18699500 284620849
0.5	2.06096447 9314552	1.93989147 78380036	0.121073001 4765482	- 0.103592808	0.020003090 61055827	0.12359589 920327746
0.6	1.85591151 159983	1.93593572 95468116	0.080024217 94698167	0.101654036 34661332	0.019962301 11671016	0.08169173 522990317
0.7	1.98488070 3643326	1.93198804 76576439	0.052892655 98568216	- 0.034073235	0.019921594 799149192	0.05399483 05550985
0.8	1.89308855 84981467	1.92804841 5721819	0.034959857 22367223	0.055569302 695295475	0.019880971 488265647	0.03568833 120702983
0.9	1.94722380 56057694	1.92411681 73241974	0.023106988 281571983	- 0.003748067	0.019840431 01479566	0.02358849 890739254
1.	1.90492045 86800614	1.92019323 60831133	0.015272777 403051885	0.035390987 11124608	0.019799973 20982053	0.01559101 390142555

(6.2) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.29. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1$, $p=2$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.9557742 237852245	1.9557421 344344712	0.000032089 35075327268	0.02018876 775112492	0.02022152 578649165	0.0000327580 35366731164
0.2	1.9518072 85617331	1.9518072 831517785	2.465552428 88746*10 ⁻⁹	0.02012596 0330733772	0.02012596 287619188	2.5454581081 82963*10 ⁻⁹
0.3	1.9478272 395478757	1.9478272 395891378	4.126210484 4008*10 ⁻¹¹	0.02008491 980687192	0.02008491 980745645	5.8452895301 8193*10 ⁻¹³
0.4	1.9438553 089584016	1.9438553 090135107	5.510902845 1738*10 ⁻¹¹	0.02004396 3450081557	0.02004396 3450649824	5.6826765515 43864*10 ⁻¹³
0.5	1.9398914 77769258	1.9398914 778380036	6.874567581 8604*10 ⁻¹¹	0.02000309 06098494	0.02000309 061055827	7.0886699288 23066*10 ⁻¹³
0.6	1.9359357 294644848	1.9359357 295468116	8.232681203 4239*10 ⁻¹¹	0.01996230 111586125	0.01996230 111671016	8.4891121909 79142*10 ⁻¹³
0.7	1.9319880 475617917	1.9319880 476576439	9.585221505 4037*10 ⁻¹¹	0.01992159 4798160816	0.01992159 4799149192	9.8837604767 25456*10 ⁻¹³
0.8	1.9280484 156124968	1.9280484 15721819	1.093221069 2260*10 ⁻¹⁰	0.01988097 148713838	0.01988097 1488265647	1.1272684175 00104*10 ⁻¹²
0.9	1.9241168 172014609	1.9241168 173241974	1.227364876 3994*10 ⁻¹⁰	0.01984043 1013530068	0.01984043 101479566	1.2655917980 27543*10 ⁻¹²
1.	1.9201932 359470175	1.9201932 360831133	1.360958012 9525*10 ⁻¹⁰	0.01979997 320841718	0.01979997 320982053	1.4033496587 01813*10 ⁻¹²

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



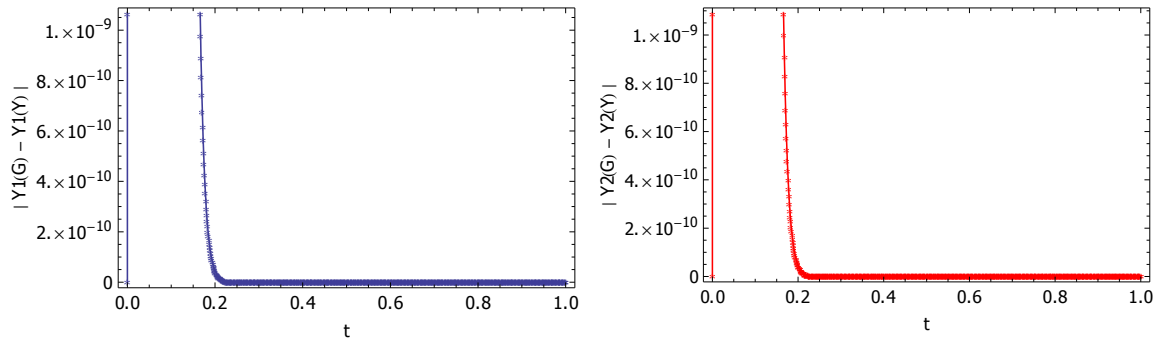
Şekil 6.28. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1$, $p=2$ ve $h=0.01$ için hata grafiği

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.30. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1$, $p=2$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.955742 55142446	1.95574213 44344712	4.169899889 $82763 \cdot 10^{-7}$	0.020221100 10722217	0.020221525 78649165	4.2567926947 $928436 \cdot 10^{-7}$
0.2	1.951807 28319766	1.95180728 31517785	4.588440738 $4733 \cdot 10^{-11}$	0.020125962 82906833	0.020125962 87619188	4.7123551588 $64589 \cdot 10^{-11}$
0.3	1.947827 23958872	1.94782723 95891378	4.085620730 $6205 \cdot 10^{-13}$	0.020084919 807448285	0.020084919 80745645	8.1636086779 $46854 \cdot 10^{-15}$
0.4	1.943855 30901296	1.94385530 90135107	5.497824417 $9437 \cdot 10^{-13}$	0.020043963 45064416	0.020043963 450649824	5.6656068725 $40252 \cdot 10^{-15}$
0.5	1.939891 47783731	1.93989147 78380036	6.870060076 $3804 \cdot 10^{-13}$	0.020003090 61055119	0.020003090 61055827	7.0776717819 $85373 \cdot 10^{-15}$
0.6	1.935935 72954598	1.93593572 95468116	8.231193504 $5709 \cdot 10^{-13}$	0.019962301 11670167	0.019962301 11671016	8.4897366914 $30494 \cdot 10^{-15}$
0.7	1.931988 04765668	1.93198804 76576439	9.590106486 $7121 \cdot 10^{-13}$	0.019921594 799139308	0.019921594 799149192	9.8844543661 $15847 \cdot 10^{-15}$
0.8	1.928048 41572072	1.92804841 5721819	1.093569679 $2557 \cdot 10^{-12}$	0.019880971 48825437	0.019880971 488265647	1.1275702593 $84924 \cdot 10^{-14}$
0.9	1.924116 81732297	1.92411681 73241974	1.227240531 $4206 \cdot 10^{-12}$	0.019840431 014783007	0.019840431 01479566	1.2653073033 $77483 \cdot 10^{-14}$
1.	1.920193 23608175	1.92019323 60831133	1.361355472 $7953 \cdot 10^{-12}$	0.019799973 20980649	0.019799973 20982053	1.4040851814 $55627 \cdot 10^{-14}$

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.29. (6.2) denkleminin RK-GL $s=1$, $p=2$ ve $h=0.001$ için hata grafiği

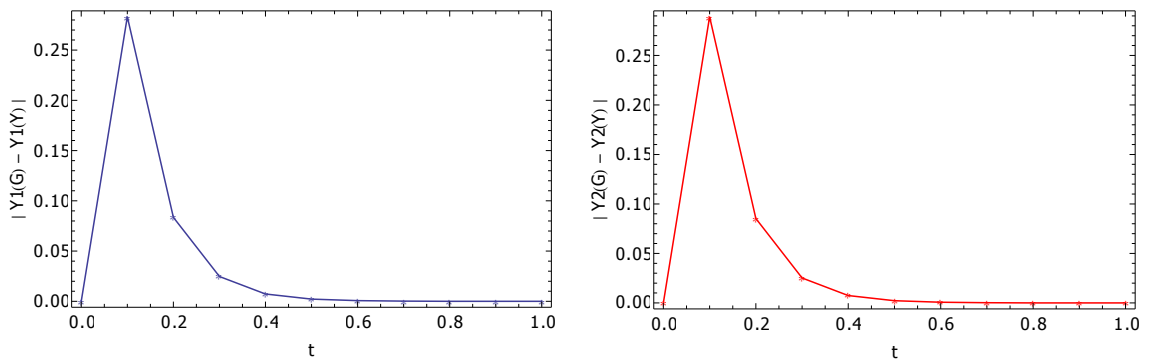
6.3.2. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=2, p=4 ile Yaklaşım

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.31. (6.2) denkleminin RK-GL s=2, p=4 ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.6726001 603995893	1.9557421 344344712	0.2831419740 3488195	0.30926354 546980983	0.02022152 578649165	0.2890420196 8331816
0.2	1.8682479 33764637	1.9518072 831517785	0.0835593493 871416	0.10542650 227028438	0.02012596 287619188	0.0853005393 940925
0.3	1.9231722 921113437	1.9478272 395891378	0.0246549474 77794176	0.04525362 126353222	0.02008491 980745645	0.0251687014 5607577
0.4	1.9365806 423479364	1.9438553 090135107	0.0072746666 65574303	0.02747021 790376632	0.02004396 3450649824	0.0074262544 53116496
0.5	1.9377450 212234635	1.9398914 778380036	0.0021464566 1454016	0.02219427 4581583212	0.02000309 061055827	0.0021911839 71024944
0.6	1.9353023 979853943	1.9359357 295468116	0.0006333315 614173163	0.02060882 98917728	0.01996230 111671016	0.0006465287 750626394
0.7	1.9318011 774157908	1.9319880 476576439	0.0001868702 4185304324	0.02011235 899901167	0.01992159 4799149192	0.0001907641 9986247678
0.8	1.9279932 779560462	1.9280484 15721819	0.0000551377 65772705905	0.01993725 8201793033	0.01988097 1488265647	0.0000562867 13527385623
0.9	1.9241005 484245368	1.9241168 173241974	0.0000162688 99660554226	0.01985703 892195014	0.01984043 101479566	0.0000166079 0715448182
1.	1.9201884 357961883	1.9201932 360831133	4.8002869250 66288*10 ⁻⁶	0.01980487 3523993613	0.01979997 320982053	4.9003141730 82038*10 ⁻⁶

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



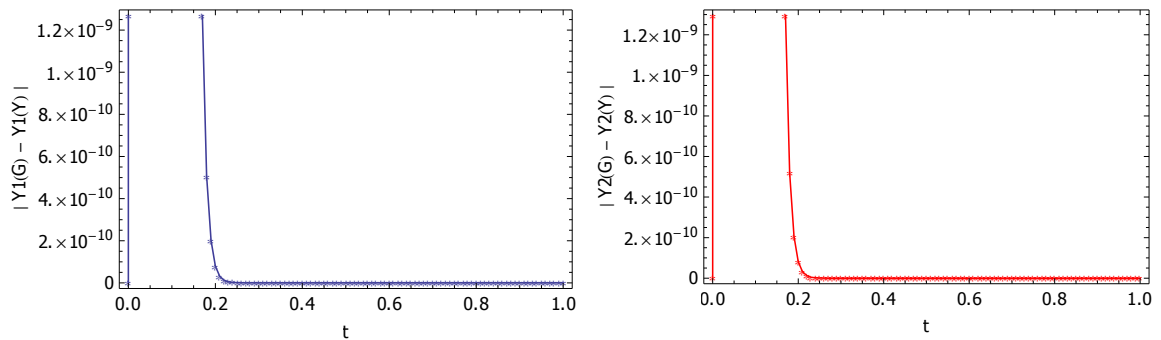
Şekil 6.30. (6.2) denkleminin RK-GL s=2, p=4 ve $h=0.1$ için hata grafiği

(6.2) denkleminin $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibidir.

Çizelge 6.32. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.95574142 2834016	1.95574213 44344712	7.116004552 $27667 \cdot 10^{-7}$	0.020222252 215109322	0.020221525 78649165	7.264286176 $72109 \cdot 10^{-7}$
0.2	1.95180728 30721713	1.95180728 31517785	7.960720971 $311 \cdot 10^{-11}$	0.020125962 957458342	0.020125962 87619188	8.126646230 $9548 \cdot 10^{-11}$
0.3	1.94782723 95891314	1.94782723 95891378	6.439293542 $8259 \cdot 10^{-15}$	0.020084919 807463273	0.020084919 80745645	6.824402154 $4927 \cdot 10^{-15}$
0.4	1.94385530 90135111	1.94385530 90135107	4.440892098 $5006 \cdot 10^{-16}$	0.020043963 450649828	0.020043963 450649824	3.469446951 $9536 \cdot 10^{-18}$
0.5	1.93989147 78380039	1.93989147 78380036	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.020003090 610558272	0.020003090 61055827	3.469446951 $9536 \cdot 10^{-18}$
0.6	1.93593572 95468118	1.93593572 95468116	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.019962301 116710164	0.019962301 11671016	3.469446951 $9536 \cdot 10^{-18}$
0.7	1.93198804 76576439	1.93198804 76576439	0.	0.019921594 799149196	0.019921594 799149192	3.469446951 $9536 \cdot 10^{-18}$
0.8	1.92804841 57218192	1.92804841 5721819	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.019880971 488265654	0.019880971 488265647	6.938893903 $9072 \cdot 10^{-18}$
0.9	1.92411681 73241983	1.92411681 73241974	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.019840431 01479567	0.019840431 01479566	1.040834085 $5860 \cdot 10^{-17}$
1.	1.92019323 60831144	1.92019323 60831133	1.110223024 $6251 \cdot 10^{-15}$	0.019799973 20982054	0.019799973 20982053	1.040834085 $5860 \cdot 10^{-17}$

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



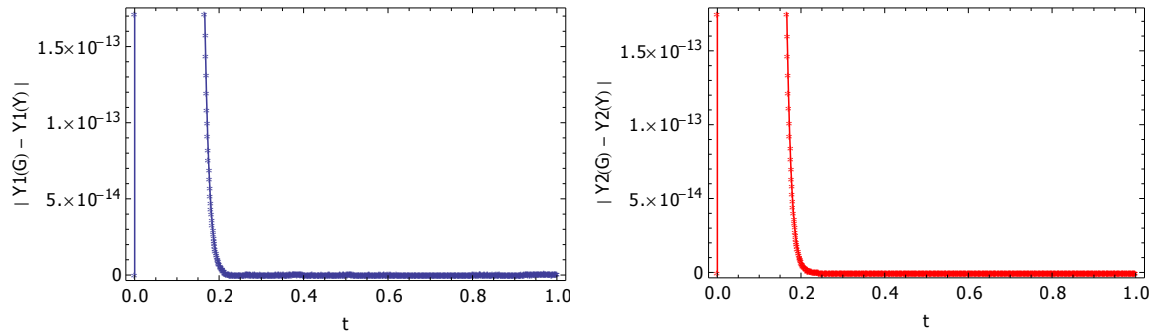
Şekil 6.31. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.01$ için hata grafiği

(6.2) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.33. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.95574213 4367548	1.95574213 44344712	6.692313370 1379*10 ⁻¹¹	0.020221525 854808554	0.020221525 78649165	6.831690421 7047*10 ⁻¹¹
0.2	1.95180728 31517712	1.95180728 31517785	7.327471962 5260*10 ⁻¹⁵	0.020125962 87619947	0.020125962 87619188	7.591149930 8745*10 ⁻¹⁵
0.3	1.94782723 95891378	1.94782723 95891378	0.	0.020084919 807456445	0.020084919 80745645	3.469446951 9536*10 ⁻¹⁸
0.4	1.94385530 90135104	1.94385530 90135107	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.020043963 45064982	0.020043963 450649824	3.469446951 9536*10 ⁻¹⁸
0.5	1.93989147 78380032	1.93989147 78380036	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.020003090 61055827	0.020003090 61055827	0.
0.6	1.93593572 95468111	1.93593572 95468116	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.019962301 116710154	0.019962301 11671016	6.938893903 9072*10 ⁻¹⁸
0.7	1.93198804 76576436	1.93198804 76576439	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.019921594 799149192	0.019921594 799149192	0.
0.8	1.92804841 57218183	1.92804841 5721819	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.019880971 488265647	0.019880971 488265647	0.
0.9	1.92411681 73241971	1.92411681 73241974	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.019840431 01479566	0.019840431 01479566	0.
1.	1.92019323 60831127	1.92019323 60831133	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.019799973 20982052	0.019799973 20982053	1.040834085 5860*10 ⁻¹⁷

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.32. (6.2) denkleminin RK-GL $s=2$, $p=4$ ve $h=0.001$ için hata grafiği

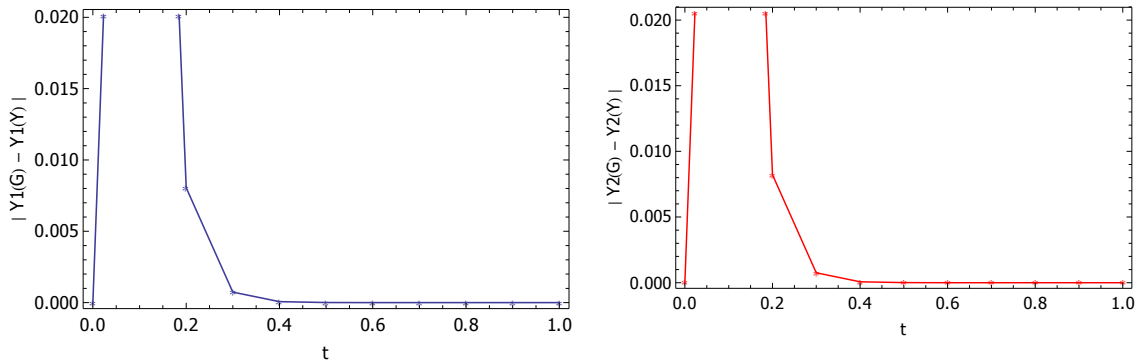
6.3.3. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=3, p=6 ile Yaklaşım

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.34. (6.2) denkleminin RK-GL s=3, p=6 ve $h=0.1$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	2.04369781 82070638	1.955742134 4344712	0.087955683 77259255	- 0.06956695 777167332	0.02022152 578649165	0.0897884835 5816497
0.2	1.94375676 54480818	1.951807283 1517785	0.008050517 703696691	0.02834423 536830294	0.02012596 287619188	0.0082182724 92111059
0.3	1.94856454 50285094	1.947827239 5891378	0.000737305 4393715606	0.01933225 057130453	0.02008491 980745645	0.0007526692 361519149
0.4	1.94378778 30318795	1.943855309 0135107	0.000067525 9816311779	0.02011289 652275386	0.02004396 345064982	0.0000689330 721040382
0.5	1.93989766 21924826	1.939891477 8380036	6.184354478 96637*10 ⁻⁶	0.01999677 738795991	0.02000309 061055827	6.3132225983 5379*10 ⁻⁶
0.6	1.93593516 3153856	1.935935729 5468116	5.663929556 47643*10 ⁻⁷	0.01996287 931202860	0.01996230 111671016	5.7819531844 30533*10 ⁻⁷
0.7	1.93198809 9530637	1.931988047 6576439	5.187299323 41699*10 ⁻⁸	0.01992154 184523840	0.01992159 479914919	5.2953910787 55096*10 ⁻⁸
0.8	1.92804841 097104	1.928048415 721819	4.750778881 40162*10 ⁻⁹	0.01988097 633803972	0.01988097 148826564	4.8497740788 577826*10 ⁻⁹
0.9	1.92411681 77592964	1.924116817 3241974	4.350990678 8585*10 ⁻¹⁰	0.01984043 057063	0.01984043 101479566	4.4416565911 36489*10 ⁻¹⁰
1.	1.92019323 60432648	1.920193236 0831133	3.984856888 9055*10 ⁻¹¹	0.01979997 325049936	0.01979997 320982053	4.0678828361 34018*10 ⁻¹¹

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



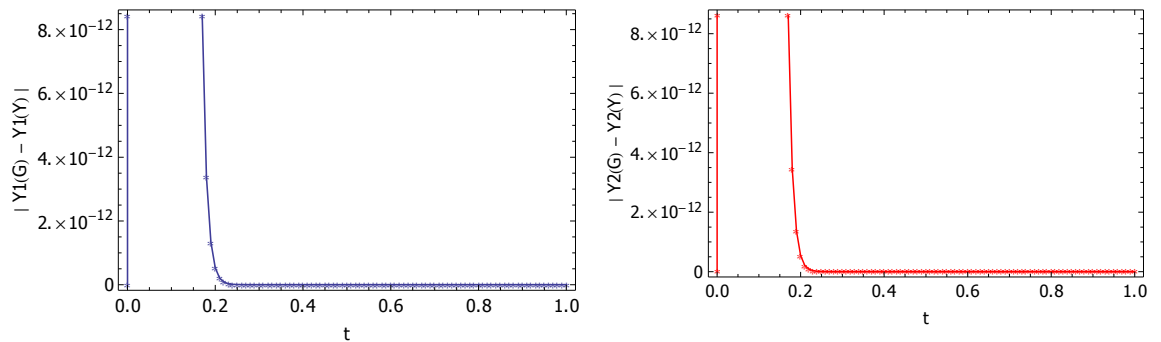
Şekil 6.33. (6.2) denkleminin RK-GL s=3, p=6 ve $h=0.1$ için hata grafiği

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.35. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.95574213 9194132	1.955742134 4344712	4.759660887 $64323 \cdot 10^{-9}$	0.02022152 092765038	0.02022152 578649165	4.8588412633 $61002 \cdot 10^{-9}$
0.2	1.95180728 31523074	1.951807283 1517785	5.289102489 $3142 \cdot 10^{-13}$	0.02012596 287565194	0.02012596 287619188	5.3993962079 $16851 \cdot 10^{-13}$
0.3	1.94782723 95891378	1.947827239 5891378	0.	0.02008491 980745640	0.02008491 980745645	4.5102810375 $3969 \cdot 10^{-17}$
0.4	1.94385530 9013511	1.943855309 0135107	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.02004396 345064982	0.02004396 345064982	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.5	1.93989147 78380036	1.939891477 8380036	0.	0.02000309 061055827	0.02000309 061055827	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.6	1.93593572 95468116	1.935935729 5468116	0.	0.01996230 111671016	0.01996230 111671016	0.
0.7	1.93198804 76576436	1.931988047 6576439	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.01992159 479914919	0.01992159 479914919	0.
0.8	1.92804841 5721819	1.928048415 721819	0.	0.01988097 148826565	0.01988097 148826564	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.9	1.92411681 7324198	1.924116817 3241974	6.661338147 $7509 \cdot 10^{-16}$	0.01984043 101479566	0.01984043 101479566	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$
1.	1.92019323 60831142	1.920193236 0831133	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.01979997 320982053	0.01979997 320982053	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



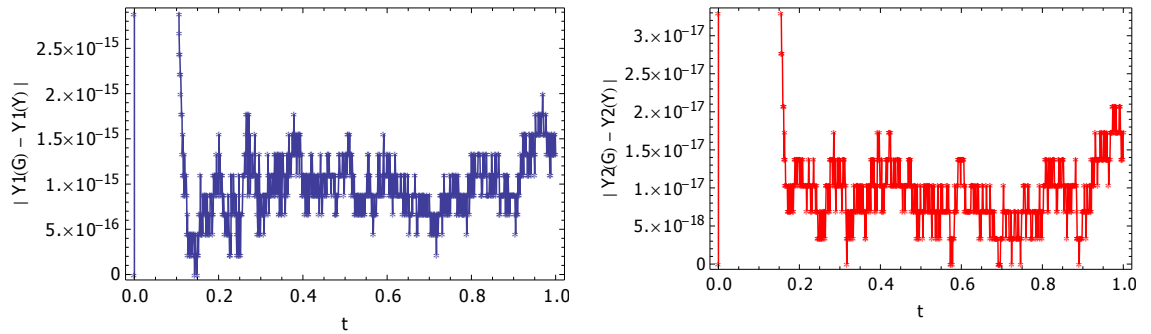
Şekil 6.34. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.01$ için hata grafiği

(6.2) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.36. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.95574213 44344763	1.955742134 4344712	5.107025913 $2757 \cdot 10^{-15}$	0.02022152 578648697	0.02022152 578649165	4.6733450442 $81518 \cdot 10^{-15}$
0.2	1.95180728 31517776	1.951807283 1517785	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.02012596 287619186	0.02012596 287619188	1.3877787807 $81445 \cdot 10^{-17}$
0.3	1.94782723 95891372	1.947827239 5891378	6.661338147 $7509 \cdot 10^{-16}$	0.02008491 980745643	0.02008491 980745645	1.0408340855 $86084 \cdot 10^{-17}$
0.4	1.94385530 90135098	1.943855309 0135107	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.02004396 345064981	0.02004396 345064982	1.0408340855 $86084 \cdot 10^{-17}$
0.5	1.93989147 78380025	1.939891477 8380036	1.110223024 $6251 \cdot 10^{-15}$	0.02000309 061055826	0.02000309 061055827	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$
0.6	1.93593572 95468105	1.935935729 5468116	1.110223024 $6251 \cdot 10^{-15}$	0.01996230 111671014	0.01996230 111671016	1.3877787807 $81445 \cdot 10^{-17}$
0.7	1.93198804 7657643	1.931988047 6576439	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.01992159 479914919	0.01992159 479914919	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.8	1.92804841 57218176	1.928048415 721819	1.332267629 $5501 \cdot 10^{-15}$	0.01988097 148826564	0.01988097 148826564	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$
0.9	1.92411681 73241965	1.924116817 3241974	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.01984043 101479565	0.01984043 101479566	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$
1.	1.92019323 6083112	1.920193236 0831133	1.332267629 $5501 \cdot 10^{-15}$	0.01979997 320982051	0.01979997 320982053	1.7347234759 $76807 \cdot 10^{-17}$

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.35. (6.2) denkleminin RK-GL $s=3$, $p=6$ ve $h=0.001$ için hata grafiği

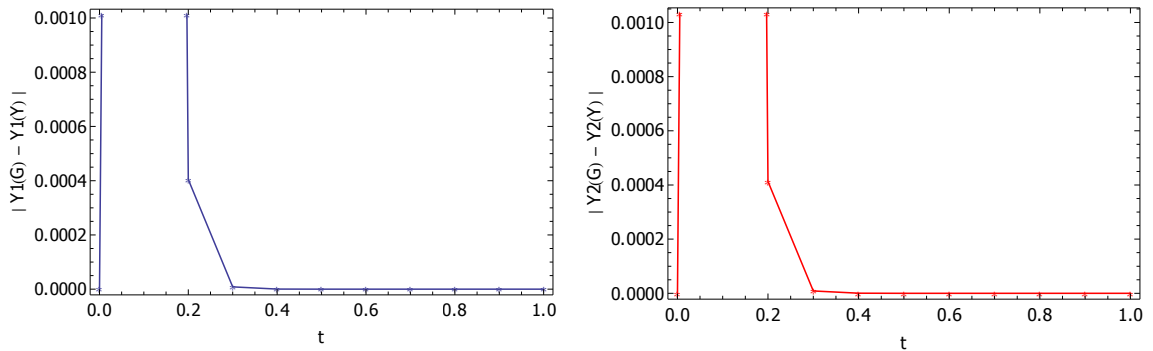
6.3.4. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=4, p=8 ile Yaklaşım

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.37. (6.2) denkleminin RK-GL s=4, p=8 ve h=0.1 için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.93609093 81949525	1.955742134 4344712	0.019651196 23951872	0.04028220 901660828	0.02022152 578649165	0.0200606832 30116633
0.2	1.95140275 21462074	1.951807283 1517785	0.000404531 0055711404	0.02053892 340340934	0.02012596 287619188	0.0004129605 2721746454
0.3	1.94781893 45063053	1.947827239 5891378	8.305082832 56037*10 ⁻⁶	0.02009339 794964548	0.02008491 980745645	8.4781421890 37585*10 ⁻⁶
0.4	1.94385513 85101441	1.943855309 0135107	1.705033665 36678*10 ⁻⁷	0.02004413 750692531	0.02004396 345064982	1.7405627549 33006*10 ⁻⁷
0.5	1.93989147 43375693	1.939891477 8380036	3.500434386 79392*10 ⁻⁹	0.02000309 418393387	0.02000309 061055827	3.5733756023 614838*10 ⁻⁹
0.6	1.93593572 94749477	1.935935729 5468116	7.186384820 5566*10 ⁻¹¹	0.01996230 119007156	0.01996230 111671016	7.3361407226 80184*10 ⁻¹¹
0.7	1.93198804 76561684	1.931988047 6576439	1.475486399 7268*10 ⁻¹²	0.01992159 480065530	0.01992159 479914919	1.5061112079 7172*10 ⁻¹²
0.8	1.92804841 57217885	1.928048415 721819	3.042011087 4729*10 ⁻¹⁴	0.01988097 148829656	0.01988097 148826564	3.0919711235 81061*10 ⁻¹⁴
0.9	1.92411681 7324197	1.924116817 3241974	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.01984043 101479629	0.01984043 101479566	6.3490879220 75114*10 ⁻¹⁶
1.	1.92019323 60831135	1.920193236 0831133	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.01979997 320982054	0.01979997 320982053	1.0408340855 86084*10 ⁻¹⁷

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



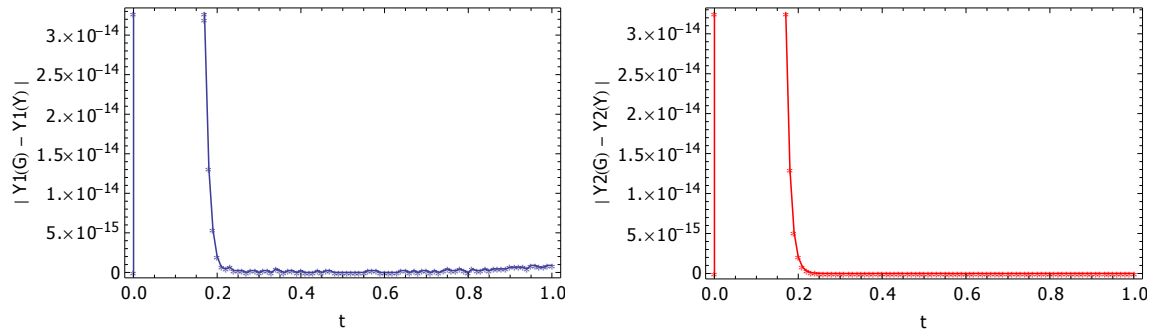
Şekil 6.36. (6.2) denkleminin RK-GL s=4, p=8 ve h=0.1 için hata grafiği

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.38. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.95574213 44165036	1.955742134 4344712	1.796762738 $5928 \cdot 10^{-11}$	0.02022152 580483368	0.02022152 578649165	1.8342036223 $19563 \cdot 10^{-11}$
0.2	1.95180728 31517765	1.951807283 1517785	1.998401444 $3252 \cdot 10^{-15}$	0.02012596 287619391	0.02012596 287619188	2.0365653607 $96771 \cdot 10^{-15}$
0.3	1.94782723 95891378	1.947827239 5891378	0.	0.02008491 980745645	0.02008491 980745645	0.
0.4	1.94385530 9013511	1.943855309 0135107	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.02004396 345064982	0.02004396 345064982	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.5	1.93989147 78380036	1.939891477 8380036	0.	0.02000309 061055827	0.02000309 061055827	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.6	1.93593572 95468116	1.935935729 5468116	0.	0.01996230 111671016	0.01996230 111671016	0.
0.7	1.93198804 76576436	1.931988047 6576439	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.01992159 479914919	0.01992159 479914919	0.
0.8	1.92804841 5721819	1.928048415 721819	0.	0.01988097 148826565	0.01988097 148826564	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.9	1.92411681 7324198	1.924116817 3241974	6.661338147 $7509 \cdot 10^{-16}$	0.01984043 101479566	0.01984043 101479566	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$
1.	1.92019323 60831142	1.920193236 0831133	8.881784197 $0012 \cdot 10^{-16}$	0.01979997 320982053	0.01979997 320982053	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



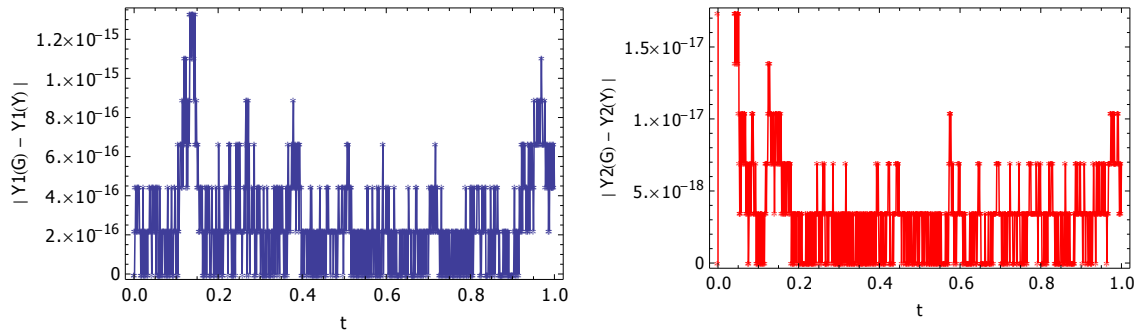
Şekil 6.37. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.01$ için hata grafiği

(6.2) denklemi $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.39. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1	1.	0.	1	1.	0.
0.1	1.95574213 44344712	1.955742134 4344712	0.	0.02022152 578649165	0.02022152 578649165	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.2	1.95180728 31517785	1.951807283 1517785	0.	0.02012596 287619187	0.02012596 287619188	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.3	1.94782723 9589138	1.947827239 5891378	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.02008491 980745645	0.02008491 980745645	0.
0.4	1.94385530 90135107	1.943855309 0135107	0.	0.02004396 345064982	0.02004396 345064982	0.
0.5	1.93989147 78380034	1.939891477 8380036	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.02000309 061055827	0.02000309 061055827	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.6	1.93593572 95468114	1.935935729 5468116	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.01996230 111671015	0.01996230 111671016	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.7	1.93198804 76576439	1.931988047 6576439	0.	0.01992159 479914919	0.01992159 479914919	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.8	1.92804841 57218185	1.928048415 721819	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.01988097 148826565	0.01988097 148826564	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.9	1.92411681 73241974	1.924116817 3241974	0.	0.01984043 101479566	0.01984043 101479566	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
1.	1.92019323 60831129	1.920193236 0831133	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.01979997 320982052	0.01979997 320982053	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.38. (6.2) denkleminin RK-GL $s=4$, $p=8$ ve $h=0.001$ için hata grafiği

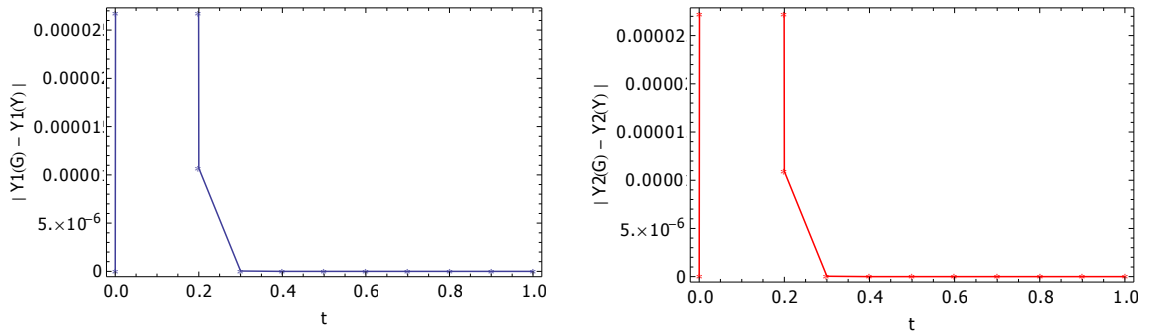
6.3.5. Runge-Kutta Gauss-Legendre s=5, p=10 ile Yaklaşım

(6.2) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.1$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.40. (6.2) denkleminin RK-GL s=5, p=10 ve h=0.1 için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1.	1.	0.	1.	1.	0.
0.1	1.95900053 14101648	1.955742134 4344712	0.003258396 9756936337	0.01689523 110342783	0.02022152 578649165	0.0033262946 83063818
0.2	1.95179658 33255475	1.951807283 1517785	0.000010699 8262310309	0.02013688 566287780	0.02012596 287619188	0.0000109227 86685924751
0.3	1.94782727 53295016	1.947827239 5891378	3.574036377 96238*10 ⁻⁸	0.02008488 332234383	0.02008491 980745645	3.6485112615 1422*10 ⁻⁸
0.4	1.94385530 88941626	1.943855309 0135107	1.193480869 6878*10 ⁻¹⁰	0.02004396 357248526	0.02004396 345064982	1.2183544104 14956*10 ⁻¹⁰
0.5	1.93989147 78384027	1.939891477 8380036	3.990141550 5028*10 ⁻¹³	0.02000309 061015143	0.02000309 061055827	4.0683428847 99847*10 ⁻¹³
0.6	1.93593572 95468107	1.935935729 5468116	8.881784197 0012*10 ⁻¹⁶	0.01996230 111671150	0.01996230 111671016	1.3461454173 58002*10 ⁻¹⁵
0.7	1.93198804 7657644	1.931988047 6576439	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.01992159 479914918	0.01992159 479914919	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸
0.8	1.92804841 57218192	1.928048415 721819	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.01988097 148826565	0.01988097 148826564	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸
0.9	1.92411681 73241978	1.924116817 3241974	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.01984043 101479567	0.01984043 101479566	1.3877787807 81445*10 ⁻¹⁷
1.	1.92019323 60831138	1.920193236 0831133	4.440892098 5006*10 ⁻¹⁶	0.01979997 320982052	0.01979997 320982053	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



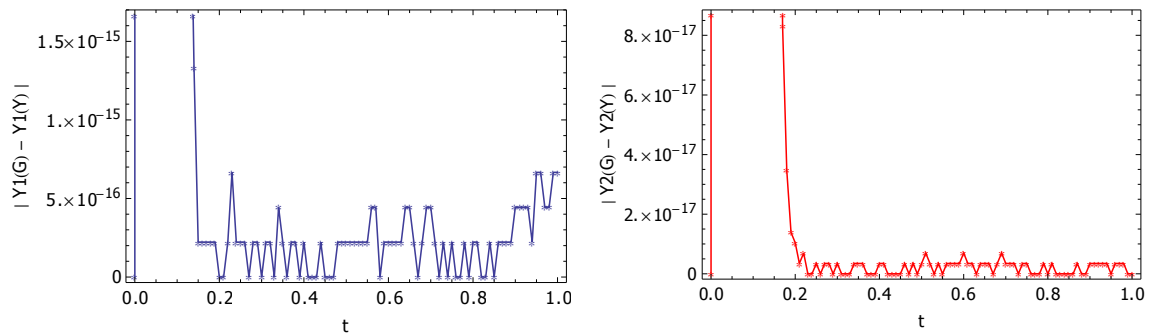
Şekil 6.39. (6.2) denkleminin RK-GL s=5, p=10 ve h=0.1 için hata grafiği

(6.2) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.01$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.41. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.01$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1.	1.	0.	1.	1.	0.
0.1	1.95574213 44345145	1.955742134 4344712	4.329869796 $0381 \cdot 10^{-14}$	0.02022152 578644742	0.02022152 578649165	4.4225040296 $55272 \cdot 10^{-14}$
0.2	1.95180728 31517785	1.951807283 1517785	0.	0.02012596 287619187	0.02012596 287619188	1.0408340855 $86084 \cdot 10^{-17}$
0.3	1.94782723 95891378	1.947827239 5891378	0.	0.02008491 980745644	0.02008491 980745645	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.4	1.94385530 9013511	1.943855309 0135107	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.02004396 345064982	0.02004396 345064982	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.5	1.93989147 78380034	1.939891477 8380036	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.02000309 061055826	0.02000309 061055827	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.6	1.93593572 95468114	1.935935729 5468116	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.01996230 111671015	0.01996230 111671016	6.9388939039 $07228 \cdot 10^{-18}$
0.7	1.93198804 76576434	1.931988047 6576439	4.440892098 $5006 \cdot 10^{-16}$	0.01992159 479914919	0.01992159 479914919	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
0.8	1.92804841 57218187	1.928048415 721819	2.220446049 $2503 \cdot 10^{-16}$	0.01988097 148826564	0.01988097 148826564	0.
0.9	1.92411681 73241978	1.924116817 3241974	4.440892098 $5006 \cdot 10^{-16}$	0.01984043 101479566	0.01984043 101479566	3.4694469519 $53614 \cdot 10^{-18}$
1.	1.92019323 6083114	1.920193236 0831133	6.661338147 $7509 \cdot 10^{-16}$	0.01979997 320982053	0.01979997 320982053	0.

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



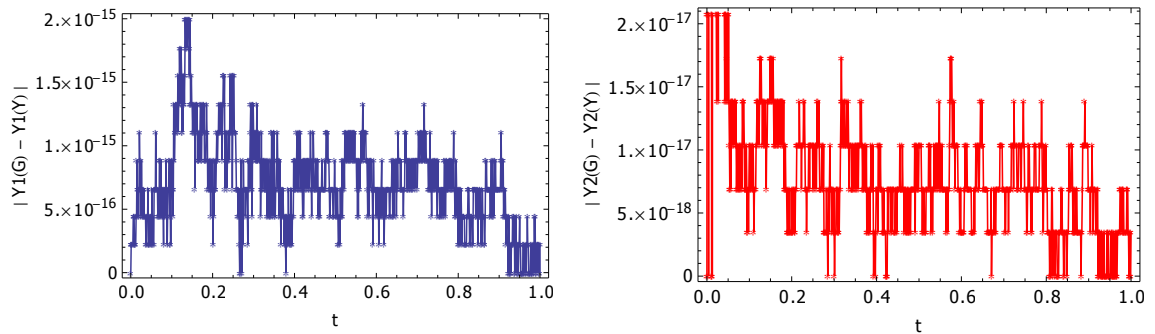
Şekil 6.40. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.01$ için hata grafiği

(6.2) denklemini $[0,1]$ aralığında $h=0.001$ adım aralığı alınarak çözüldüğünde hata grafiği ve çözüme ait değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

Çizelge 6.42. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.001$ için yaklaşık çözümü

t	y_{1Y}	y_{1G}	y_{1H}	y_{2Y}	y_{2G}	y_{2H}
0.	1.	1.	0.	1.	1.	0.
0.1	1.95574213 44344719	1.955742134 4344712	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.02022152 578649166	0.02022152 578649165	1.0408340855 8608*10 ⁻¹⁷
0.2	1.95180728 31517794	1.951807283 1517785	8.881784197 0012*10 ⁻¹⁶	0.02012596 287619188	0.02012596 287619188	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.3	1.94782723 9589139	1.947827239 5891378	1.110223024 6251*10 ⁻¹⁵	0.02008491 980745645	0.02008491 980745645	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.4	1.94385530 90135116	1.943855309 0135107	8.881784197 0012*10 ⁻¹⁶	0.02004396 345064983	0.02004396 345064982	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸
0.5	1.93989147 78380043	1.939891477 8380036	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.02000309 061055828	0.02000309 061055827	1.0408340855 8608*10 ⁻¹⁷
0.6	1.93593572 95468123	1.935935729 5468116	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.01996230 111671016	0.01996230 111671016	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸
0.7	1.93198804 76576445	1.931988047 6576439	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.01992159 47991492	0.01992159 479914919	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸
0.8	1.92804841 57218192	1.928048415 721819	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.01988097 148826565	0.01988097 148826564	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸
0.9	1.92411681 7324198	1.924116817 3241974	6.661338147 7509*10 ⁻¹⁶	0.01984043 101479566	0.01984043 101479566	6.9388939039 07228*10 ⁻¹⁸
1.	1.92019323 60831135	1.920193236 0831133	2.220446049 2503*10 ⁻¹⁶	0.01979997 320982052	0.01979997 320982053	3.4694469519 53614*10 ⁻¹⁸

Bu değerlere ait hata grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.41. (6.2) denkleminin RK-GL $s=5$, $p=10$ ve $h=0.001$ için hata grafiği

SONUÇ

Bu çalışmada Linear Stiff diferansiyel ve Stiff diferansiyel denklem sistemlerinin açık ve kapalı tipteki Runge-Kutta metodları ile yaklaşık çözümleri araştırılmıştır. Bölüm II ve Bölüm III'de 1.mertebeden bir stiff diferansiyel denklemin açık tip metodlarla çözümleri verilerek kararlılık bölgeleri doğrultusunda adım aralığının nasıl seçileceği belirlenmiştir. Kararlılık bölgesi büyüdükçe adım aralığının da daha büyük değerler için doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Dolayısıyla kararlılık bölgesi büyük olan bir açık metod için adım aralığının da büyük seçileceği sayısal veriler neticesinde ispatlanmıştır. Bölüm V 'de kapalı tip Runge-Kutta metodlarının mertebeleri ve kararlılık bölgeleri incelenmiştir. Köklenmiş ağaçlar vasıtasıyla yüksek merteben metodların katsayıları elde edilmiş ve bu metodlar Butcher tabloları ile ifa edilmiştir. Bölüm VI'da kapalı metodların Singular Perturbation problemi üzerine bir uygulaması yapılmıştır. Burada adım aralığı sabit tutulup ε parametresi değiştirilerek yaklaşık çözümler bulunmuştur. ε parametresi küçük iken denklem sisteminin stiffness katsayısı küçük olduğu bulunmuş ve ε büyüdükçe hatanın arttığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla linear bir denklem sisteminde denklemin tipi ve davranışı da göz önünde bulundurularak stiffness katsayısı arttıkça metodların vereceği hatanın da artacağı gözlemlenmiştir. Aynı zamanda adım aralığı büyük iken ve ε küçük iken metodların daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Buradan da adım aralığı küçüldükçe metodların daha iyi sonuç verdikleri gözlenmiştir. Aynı zamanda metodlar arasındaki mertebeler incelenerek bu mertebeler doğrultusunda mertebesi büyük olan metodun daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Örneğin, 5 adımlı Gauss-Legendre metodunun mertebesi 10 iken, 5 adımlı Gauss-Lobatto metodunun mertebesi 8'dir. Uygulamalar kısmındaki verilere bakıldığında aynı adım aralığı ve aynı ε için Gauss-Legendre metodunun daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Uygulama 6.2'de sabit stiffness'a sahip bir denklem sistemi ele alınmıştır. Bu kısımda Gauss-Legendre metodlar ailesi içinde kıyaslama yapılmıştır. Her bir mertebe için aynı adım aralıkları için denklem çözüldüğünde mertebesi en küçük olanın büyük olan metoddan daha kötü sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Bakioğlu, M., Sayısal Analiz, *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 2011.
- Bayram. M., Nümerik Analiz, *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 2009.
- Başarır, M., Türker, E. S., Çözümlü problemlerle diferansiyel denklemler, *Değişim yayınları*, İstanbul, 2003.
- Butcher, J.C., Coefficients fort he study of Runge-Kutta integration process, *J. Austral. Math. Soc.*, 3, 185-201, 1963.
- Butcher, J.C., Implicit Runge-Kutta Process, *Math.Comp.*, 18, 50-64, 1964.
- Butcher, J.C., Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, *Wiley* ., 2008.
- Butcher, J.C., A-Stability property of implicit Runge-Kutta methods, *BIT*, 15, 358-361, 1975.
- Butcher, J.C., On the implementation of implicit Runge-Kutta methods, *BIT*, 16, 237-240 , 1976.
- Butcher, J. C., “Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125, 1-29, 2000.
- Bickard, T.A., An efficient solution process for implicit Runge-Kutta methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 14, 1022-1027, 1977.
- Burrage, K., A special family of Runge-Kutta methods for solving stiff differential equations, *BIT*, 18, 22-41, 1978.
- Burrage, K., Butcher, J.C, Stability criteria for implicit Runge-Kutta methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 16, 46-57, 1979.
- Brugnano, L., Magherini, C., Blended implicit methods for solving ODE and DAE problems, and their extension for second-order problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* , 205, 777-790, 2007.

- Calvo M., Laburta M.P., Montijano J.I., Initializers for RK-Gauss methods based on pseudo-symplecticity, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 189, 228-241, 2006.
- Dahlquist, G., Convergence and the stability in the numerical integration of ordinary differential equations, *Math. Scand.*, 4, 33-53, 1956.
- González-Pinto, S., “Differential systems with semi-stable equilibria and numerical methods”, *Numer. Math.* 96, 253-268, 2003.
- González-Pinto, S., Hernández-Abreu, D., Stable Runge-Kutta integrations for differential systems with semi-stable equilibria, *Numer. Math.* 97, 473-491, 2004.
- Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner G., Solving Ordinary Differential Equations I, *Springer*, Berlin, 1993.
- Iserles, A., A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations, Second Edition, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2008.
- Ismail, F., Diagonally implicit Runge-Kutta Nystrom general method order five for solving second order IVPs, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 9, 550-560, 2010.
- Ismail, F., Senu, N., Suleiman, M., Othman, M., A new diagonally implicit Runge-Kutta-Nyström method for periodic IVPs, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 9, 550-560, 2010.
- Johnson, R. S., Singular perturbation theory, *Springer*, U.S.A, 2005.
- Knapp, R., Sofroniou, M., Wolfram, S., “Advanced Numerical Differential Equation Solving in Mathematica”, *Wolfram Mathematica Documentation Center*, Wolfram Research, Inc., 2012.
- Tahmasbi, A., “Numerical Solutions for Stiff Ordinary Differential Equation Systems”, *International Mathematical Forum* 15, 703-711, 2008.
- Ran, X., Liu, M., Zhu, Q., “Numerical methods for impulsive differential equation”, *Math. Comput. Model.* 48, 46–55, 2008.

Roşca,V., Roşca,O., “Some techniques for solving stiff equations”, *Buletinul Institutului politehnic din iaşi Tomul LI (LV)*, 31-40, 2005.

Vaquero, J. M., A 17th-order Radau IIA method for package RADAU. Applications in mechanical systems, *Computers & Mathematics with Applications*, 59, 2464-2472, 2010.

Wu, X., Xia J., “Extended Runge-Kutta-like formulae”, *Applied numerical mathematics* 56, 1584-1605, 2006.

ÖZ GEÇMİŞ

Cahit KÖME 1988 yılında Mersin’de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Mersin’de tamamladı. 2005 yılında Niğde Üniversitesi Matematik bölümünü kazandı ve 2011 yılında mezun oldu. 2009-2012 yılları arasında Niğde Üniversite Bilgi İşlem Daire Başkanlığında Bologna süreci otomasyon sistemi, anket sistemleri, kurumsal web sayfası, e-dergi yazılımı ve bunun gibi üniversitenin birçok projesini tamamladı. 2011 yılında Niğde Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans programını kazandı. 2012 yılında Nevşehir Üniversitesi Bilgi İşlem Daire Başkanlığı’nda Bilgisayar Programcısı olarak göreve başladı. Halen bu üniversitede görevine devam etmektedir. Matematik alanındaki çalışmaları lineer ve lineer olmayan Stiff diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine devam etmektedir.

