



T.C.  
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ GECİKMELİ BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

UFUK ARIKAN

Ağustos 2018



T.C.  
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ GECİKMELİ BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

UFUK ARIKAN

Yüksek Lisans Tezi

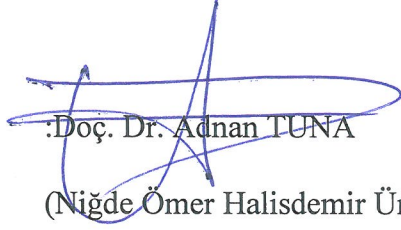
Danışman

Doç. Dr. Adnan TUNA

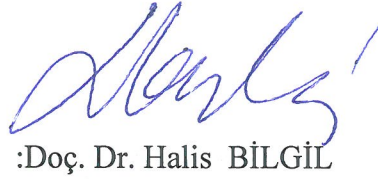
Ağustos 2018

Ufuk ARIKAN tarafından Doç. Dr. Adnan TUNA danışmanlığında hazırlanan “Sürekli Gecikmeli Birinci Mertebeden Nötral Diferansiyel Denklemlerin Salınım Yapmayan Çözümlerinin Varlığı” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

  
:Doç. Dr. Adnan TUNA  
(Niğde Ömer Halisdemir Üni., Fen Edebiyat Fak, Matematik Bölümü)

Üye

  
:Doç. Dr. Halis BİLGİL  
(Aksaray Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

Üye

  
:Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN  
(Niğde Ömer Halisdemir Üni., Fen Edebiyat Fak, Matematik Bölümü)

**ONAY :**

Bu tez Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ...../...../..... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun ...../...../..... tarih ve ...../..... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20....

**Doç. Dr. Murat BARUT**

**MÜDÜR V.**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ufuk ARIKAN

## ÖZET

### SÜREKLİ GECİKMELİ BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

ARIKAN, Ufuk

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Adnan TUNA

Ağustos 2018, 31 sayfa

Bu tezde,

$$\frac{d}{dt}(x(t) + P_1(t)x(t - \tau_1) + P_2(t)x(t + \tau_2)) + \int_a^b q_1(t, \xi)x(t - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(t, \xi)x(t + \xi) d\xi = 0$$

sürekli gecikmeli birinci mertebe nötral diferansiyel denklem incelenerek, salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için gerekli şartlar verildi.

*Anahtar Sözcükler:* Nötral diferansiyel denklemler, sabit nokta, salınım yapmayan çözüm.

## SUMMARY

### EXISTENCE OF NON-OSCILLATORY SOLUTIONS AT FIRST ORDER NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTINUOUS DELAY

ARIKAN, Ufuk

Niğde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Science

Departments of Mathematics

Supervisor :Associate Proffesor Dr. Adnan TUNA

August 2018, 31 pages

In this thesis, the first-order neutral differential equation with continuous delay

$$\frac{d}{dt}(x(t) + P_1(t)x(t - \tau_1) + P_2(t)x(t + \tau_2)) + \int_a^b q_1(t, \xi)x(t - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(t, \xi)x(t + \xi) d\xi = 0$$

is considered and sufficient conditions are given for nonoscillatory solutions.

*Keywords:* Neutral differential equations, fixed point, non-oscillatory solutions.

## ÖN SÖZ

Bu yüksek lisans tezinde

$$\frac{d}{dt}(x(t) + P_1(t)x(t - \tau_1) + P_2(t)x(t + \tau_2)) + \int_a^b q_1(t, \xi)x(t - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(t, \xi)x(t + \xi) d\xi = 0$$

nötral diferansiyel denklemi için salınım yapmayan çözümünün varlığı araştırıldı.

Birinci bölümde ileri ve gecikmeli diferansiyel denklemlerden genel olarak bahsedilmiştir. İkinci bölümde konuyla ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Candan(2016), “Birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemlerin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı” adlı çalışmasında adı geçen

$$\frac{d}{dt}(x(t) + P_1(t)x(t - \tau_1) + P_2(t)x(t + \tau_2)) + Q_1(t)x(t - \sigma_1) - Q_2(t)x(t + \sigma_2) = 0$$

diferansiyel denklemi ile ilgili bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir.

Tez çalışmam esnasında yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Prof. **Dr. Tuncay CANDAN** ve Doç. **Dr Adnan TUNA**'ya ve sevgili eşim **Yasemin ARIKAN**'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGE VE KISALTMALAR.....	ix
BÖLÜM I GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II GENEL BİLGİLER.....	2
2.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler.....	2
2.1.1 İleri fonksiyonel diferansiyel denklemler .....	2
2.1.2 Gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler .....	2
2.1.3 Nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler .....	3
2.1.4 Karma fonksiyonel diferansiyel denklemler .....	3
2.2 Salınım.....	3
2.3 Sabit Nokta .....	3
2.4 Fonksiyonun Sınırlılığı .....	4
2.5 Açık ve Kapalı Yuvar .....	4
2.6 Metrik Uzay .....	5
2.7 Yakınsaklık.....	6
2.8 Cauchy Dizisi.....	6
2.9 Tam Metrik Uzay.....	7
2.10 Kompaktlık.....	7

2.11 Lineer Uzay.....	7
2.12 Kümenin Sınırlığı ve Çapı.....	8
2.13 Süreklilik.....	8
2.14 Banach Uzayı.....	9
2.15 Konveks Küme.....	9
2.16 Lipschitz Koşulu.....	9
2.17 Daralma Dönüşümü.....	9
BÖLÜM III SÜREKLİ GECİKMELİ BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL	
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN	
VARLIĞI.....	10
BÖLÜM IV SONUÇ.....	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZ GEÇMİŞ.....	31

## SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\tau$	Tau
$\xi$	Kısi
$\varepsilon$	Epsilon
$\alpha$	Alfa
$\Lambda$	Lamda
$\Omega$	Omega
$\lambda$	Lamda
$S_x$	Daralma dönüşümü
$\  \cdot \ $	Norm

# BÖLÜM I

## GİRİŞ

Bilimi anlamının yolu çevremizde neler olduğunu anlamaktan ve bu olaylara nelerin sebep olduğunu öğrenmekten geçmektedir. Sonuçlardan çok nedenleri sorgulamak bilime ışık tutacaktır. Her ne kadar diferansiyel denklemler yardımıyla oluşturulan modeldeki değişim miktarı sadece o andaki zamana bağlı olsa da doğru bir matematiksel modelde değişim miktarı geçmişteki zamana bağlı olduğu bilinmektedir. Bu şekilde bir matematik modeli kurmak şüphesiz şu anda meydana gelen olayları analiz edip ileride meydana gelebilecek olası durumları daha iyi anlamamıza yardımcı olacaktır. Öyle ki geçmişten günümüze yapılan birçok çalışma bize fiziksel sistemlerdeki değişimin şimdiki zamanın yanı sıra geçmişle de ilgili olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bütün bunları göz önünde bulundurarak kurulan modeller adi diferansiyel denklemlerden ayrı olarak gecikmeli(delay), nötral, ileri(advanced) denklemler şeklinde adlandırılırlar.

Giriş bölümünde konunun genel hatlarını daha iyi anlamamıza yardımcı olacak kavramlar yer almıştır. Bir sonraki bölümde konumuzla ilgili olarak temel teorem ve tanımlar yer almaktadır. Son bölümde ise birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemler için salınım yapmayan çözümlerin varlığı araştırılıp üzerinde çalışılmıştır.

## BÖLÜM II

### GENEL BİLGİLER

#### 2.1 Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler

Yalnızca  $t$  anında adi diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini hesaplamak mümkündür. Meydana gelen olaylar hem şimdiki zamanla hem de geçmiş ve gelecek zamanla ilgilidir. Böyle denklemlerde  $t$  ile birlikte  $t + \tau$  ya da  $t - \tau$ ,  $\tau > 0$  olarak hesaplanır. Böyle denklemler fonksiyonel diferansiyel denklemler adını alır (Ladde., vd 1987).

##### 2.1.1 İleri fonksiyonel diferansiyel denklemler

$$x'(t) + a(t)x(t + \tau) = 0, \quad \tau > 0$$

denklemine ileri fonksiyonel diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemlerde  $t$  anında en yüksek mertebeden türev hesaplanırken  $t$  ya da  $t'$ 'den sonraki zamanlarda diğer türevler hesaplanır (Ladde., vd 1987).

**Örnek 2.1**  $y'(t) + y\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$  denklemi ileri (advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemlere bir örnek olarak verilebilir.

##### 2.1.2 Gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemler

$$x'(t) + a(t)x(t - \tau) = 0, \quad \tau > 0$$

denklemine gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemlerde  $t$  anında en yüksek mertebeden türev hesaplanırken  $t$  ya da  $t'$ 'den önceki zamanlarda diğer türevler hesaplanır (Ladde., vd 1987).

**Örnek 2.2**  $y'(t) + y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , bir gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemdir.

### 2.1.3 Nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler

Bu tür denklemlerde en yüksek mertebeden türev  $t'$  ye bağlı olmakla birlikte gecikmeli ve ileri kavramlarıyla da ilgilidir (Ladde., vd 1987).

**Örnek 2.3**  $x'(t) + a(t)x(t) + b(t)x'(t - \tau) = 0$ ,  $\tau > 0$  denklemi nötral tipli denklemi fonksiyonel diferansiyel denklemlere birer örnek olarak verilebilir.

### 2.1.4 Karma fonksiyonel diferansiyel denklemler

Gecikmeli ve ileri kavramlarını için de barındıran diferansiyel denklemler karma fonksiyonel diferansiyel denklemlerdir (Ladde., vd 1987).

**Örnek 2.4**  $y'(t) = 2y(t-8) - 3y(t+9) + 1$  ve  $y'(t) = -y(t-2)y(t) - t y(t+2)$  denklemleri bu tür denklemlerdir.

## 2.2 Salınım

**Tanım 2.2.1**  $x(t)$  aşık olmaya bir çözüm sayılırsa ve eğer  $t > t_0$  için  $x(t)$  keyfi büyüklükte sifıra sahipse  $x(t)$  salınımlıdır. Buna göre  $\{t_n\}$  dizisi vardır  $x(t_n) = 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  salınım yapmayan çözüm için bir  $t_1$  sayısı vardır ki  $t > t_1$  iken  $x(t) \neq 0$  olur. Gecikmeli ya da ileri fonksiyonel denklemlerde salınım yapma ve salınım yapmama terimlerine rastlarız.  $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$  ve  $x'(t) - x(t - \pi) = 0$  denklemlerinin çözümleri  $x(t) = \sin t$  ve  $x(t) = \cos t$  şeklinde salınımlı iken  $x'(t) + x(t) = 0$  ve  $x''(t) - x(t) = 0$  denklemlerinin çözümleri  $x(t) = e^{-t}$  ve  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$  olup salınımlı değildir (Ladde., vd 1987).

## 2.3 Sabit Nokta

**Tanım 2.3**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $T : X \rightarrow X$  bir fonksiyon olsun.

$$T_x = x$$

eşitliğini sağlayan  $x \in X$  elemanına  $T$ 'nin bir sabit noktası denir (Soykan, 2008).

**Teorem 2.3.1 (Schauder Sabit Nokta Teoremi)** Bir Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir  $M$  alt kümesini kendisine dönüştüren sürekli  $T$  dönüşümünün  $M$  kümesinde en az bir sabit noktası vardır (Conway, 1990).

**Örnek 2.5**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$  fonksiyonunun 0 ile 1 olmak üzere iki sabit noktası bulunur.

## 2.4 Fonksiyonun Sınırlılığı

**Tanım 2.4.1**  $D \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve  $S \subseteq D$  kümesi verilmiş olsun.

i)  $\forall x \in S$  için  $f(x) \leq M$  olacak şekilde bir  $M$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde üstten sınırlıdır denir.

ii)  $\forall x \in S$  için  $m \leq f(x)$  olacak biçimde bir  $m$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde alttan sınırlıdır denir (Aydın, 1994).

**Tanım 2.4.2**  $D \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve  $S \subseteq D$  kümesi verilmiş olsun.  $\forall x \in S$  için  $|f(x)| \leq K$  olacak biçimde bir  $K$  pozitif reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde sınırlıdır denir (Aydın, 1994).

## 2.5 Açık ve Kapalı Yuvar

**Tanım 2.5**  $(X, d)$  metrik uzay ve  $a \in X$  noktası ve  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  sayısı verilsin.

i)  $B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$  alt kümesine,  $a$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı açık yuvar ya da açık top denir.

ii)  $(X, d)$  metrik uzay ve  $a \in X$  noktası ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.

$B[a, \varepsilon] = \{x \in X \mid d(a, x) \leq \varepsilon\}$  alt kümesine  $a$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı kapalı yuvar ya da kapalı top denir.

iii)  $(X, d)$  metrik uzay ve  $a \in X$  noktası ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.

$B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) = \varepsilon\}$  alt kümesine  $a$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı küre denir (Yüksel, 2011).

## 2.6 Metrik Uzay

**Tanım 2.6** Boş olmayan bir  $X$  kümesi verilsin.  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ve bu fonksiyon sonlu değerler alıyorsa,  $d$  fonksiyonuna  $X$  kümesi üzerinde bir metrik ve  $(X, d)$ 'ye metrik uzay denir.

$$m_1) \forall x, y \in X (x \neq y) \text{ için, } d(x, y) \geq 0$$

$$m_2) \forall x, y \in X \text{ için, } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$m_3) \forall x, y \in X \text{ için, } d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri özelliği)}$$

$$m_4) \forall x, y, z \in X \text{ için, } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği) (Yüksel, 2011).}$$

**Örnek 2.6**  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x = (x_1, x_2), \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  için  $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$  olarak tanımlansın.  $d$  fonksiyonuna  $\mathbb{R}^2$  kümesi üzerinde bir metriktir denir.

Çözüm :

$$m_1) \forall x, y \in \mathbb{R}^2 (x \neq y) \text{ noktaları için,}$$

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$$

dır.

$$m_2) \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ için,}$$

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 = y_2$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

olur.

$m_3) \forall x, y \in \mathbb{R}^2$  için,

$$\begin{aligned}d(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\&= |(-1)(y_1 - x_1)| + |(-1)(x_2 - y_2)| \\&= |-1|(|y_1 - x_1| + |x_2 - y_2|) \\&= |y_1 - x_1| + |x_2 - y_2| \\&= d(y, x)\end{aligned}$$

bulunur.

$m_4) x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$  şeklindeki  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$  noktaları için

$$\begin{aligned}d(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\&= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\&\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\&\leq (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|) \\&\leq d(x, z) + d(z, y)\end{aligned}$$

elde edilir (Yüksel, 2011).

## 2.7 Yakınsaklık

**Tanım 2.7**  $(M, d)$  metrik uzayında, bir dizi  $\{x_n\}$  olsun.  $x \in M$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $\forall n \geq N$  için  $d(x, x_n) < \varepsilon$  olacak biçimde bir  $N \in \mathbb{N}$  varsa  $\{x_n\}$  dizisi  $x \in M$ 'ye yakınsar denir. Bu durumda  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  veya  $x_n \rightarrow x$  yazarız (Soykan, 2008).

## 2.8 Cauchy Dizisi

**Tanım 2.8**  $(X, d)$  metrik bir uzay ve  $X$ 'in içinde bir dizi  $(x_n)$  dizisi verilsin.  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $\forall m, n > n_\varepsilon$  olduğunda  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı bir  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  sayısı varsa,  $(x_n)$  dizisine  $X$  içinde bir Cauchy dizisi adı verilir (Musayev ve Alp, 2000).

## 2.9 Tam Metrik Uzay

**Tanım 2.9**  $(X, d)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bir  $x \in X$  noktasına yakınsar ise  $d$  metriğine  $(X, d)$  uzayı üzerinde tamdır denir. Eğer  $d$  metriği  $(X, d)$  uzayı üzerinde bir tam metrik ise  $(X, d)$  uzayına tam metrik uzay denir (Yüksel, 2011).

## 2.10 Kompaktlık

**Tanım 2.10**  $(M, d)$  bir metrik uzay olsun. Bir  $A \subset M$  kümesindeki her  $\{x_n\}$  dizisi  $A$ 'nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse  $A$ 'ya bir kompakt küme denir (Soykan, 2008).

**Teorem 2.10.1** Bir metrik uzay kompakttır ancak ve ancak bu metrik uzay tamdır ve tamamen sınırlıdır (Soykan, 2008).

**Teorem 2.10.2**  $(M, d)$  bir metrik uzay ve  $A \subset M$  olsun. O zaman

- a)  $A$  tam ise o zaman kapalıdır.
- b)  $M$  tam ise  $A$  tamdır ancak ve ancak  $A$  kapalıdır.
- c)  $A$  kompakt ise o zaman kapalı ve sınırlıdır (Soykan, 2008).

## 2.11 Lineer Uzay

**Tanım 2.11.1** Boş olmayan bir  $X$  kümesi verilsin.  $(K, +, \cdot)$  kümesi  $\mathbb{R}$  ya da  $\mathbb{C}$  olsun.  $(X, \oplus)$  değişmeli grup olmak üzere  $\otimes: K \times X \rightarrow X$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa,  $X$  kümesine lineer (vektör) uzay denir.

- i)  $\forall a \in K$  ve  $\forall x \in X$  için,  $a \otimes x \in X$
- ii)  $\forall a \in K$  ve  $\forall x, y \in X$  için,  $a \otimes (x \oplus y) = (a \otimes x) \oplus (a \otimes y)$
- iii)  $\forall a, b \in K$  ve  $\forall x \in X$  için,  $(a \oplus b) \otimes x = (a \otimes x) \oplus (b \otimes x)$

iv)  $\forall a, b \in K$  ve  $\forall x \in X$  için,  $(a.b) \otimes x = a \otimes (b \otimes x)$

v)  $e \in K$  birim elemanı ise  $\forall x \in X$  için,  $e \otimes x = x$  (Yüksel, 2011).

**Tanım 2.11.2** Boş olmayan bir  $X$  kümesi, reel veya kompleks sayıların  $K$  cismi üzerinde, bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna,  $X$  vektör uzayı üzerinde bir norm  $(X, p)$  ikilisine de normlu uzay denir.

$n_1) \forall x \in X$  için,  $p(x) \geq 0$

$n_2) \forall x \in X$  için,  $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$n_3) \forall a \in K$  ve  $\forall x \in X$  için,  $p(ax) = |a| p(x)$  (pozitif homojenlik)

$n_4) \forall x, y \in X$  için,  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  (alt toplamsallık) (Yüksel, 2011)

**Örnek 2.7**  $C[a, b]$  üzerinde  $f \in C[a, b]$  için

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)| dt$$

biçiminde tanımlanan  $\|\cdot\|$  fonksiyonu bir normdur ve bu norma integral normu denir (Başkan vd., 2006).

## 2.12 Kümenin Sınırlığı ve Çapı

**Tanım 2.12**  $(X, d)$  metrik uzayının boş olmayan bir  $A$  alt kümesi verilsin.

$d(A) = \text{eküs} \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$  sayısına  $A$  kümesinin çapı denir. Eğer  $d(A) < \infty$  ise

$A$  kümesine sınırlı küme denir.  $d(A) = \infty$  ise  $A$  kümesine sınırsız küme denir (Yüksel, 2011).

## 2.13 Süreklilik

**Tanım 2.13**  $D \subseteq \mathbb{R}$  ve  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  olsun. Bu takdirde  $f$ 'nin  $c \in D$  de sürekli olabilmesi için gerek ve yeter şart

$\forall \varepsilon > 0$  için  $x \in D$  ve  $|x - c| < \delta$  iken  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\delta > 0$  sayının mevcut olmasıdır. Bu durumu sembolik olarak  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  ile gösteririz.

Eğer  $f, \forall x \in D$  için sürekli ise  $f$ 'nin  $D$  üzerinde sürekli olduğu söylenir (Çelik 2012).

## 2.14 Banach Uzayı

**Tanım 2.14**  $(X, d)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise  $X$  metrik uzayına tam metrik uzay denir.  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise  $X$  normlu uzayına Banach uzayı denir (Başkan vd., 2006).

## 2.15 Konveks Küme

**Tanım 2.15**  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayının bir  $A$  alt kümesi verilsin.

$$\forall x, y \in A, \quad \forall t \in [0, 1] \ni (1-t)x + ty \in A$$

oluyorsa  $A$  kümesine  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayında konveks küme denir (Yüksel, 2011).

## 2.16 Lipschitz Koşulu

**Tanım 2.16**  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $\forall x, y \in A$  için

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

olacak biçimde bir  $M > 0$  sayısı var ise  $f$  fonksiyonuna  $A$  kümesi üzerinde Lipschitz koşulunu gerçekleştiriyor denir (Bizim vd., 2011).

## 2.17 Daralma Dönüşümü

**Tanım 2.17**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T : X \rightarrow X$  bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\forall x, y \in X \quad d(T_x, T_y) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde bir  $0 < \alpha < 1$  varsa  $T$ 'ye bir daralma (ya da büzülme) fonksiyonu denir (Soykan, 2008).

### BÖLÜM III

#### SÜREKLİ GECİKMELİ BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bu bölüm de Candan ve Dahiya(2010), çalışmış olduğu

$$" \frac{d^k}{dt^k} (x(t) + P(t)x(t-\tau)) + \int_a^b q_1(t, \xi)x(t-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(t, \mu)x(t-\mu) d\mu = 0 "$$

diferansiyel denklemi ile Candan(2016), çalışmış olduğu

$$" \frac{d}{dt} (x(t) + P_1(t)x(t-\tau_1) + P_2(t)x(t+\tau_2)) + Q_1(t)x(t-\sigma_1) - Q_2(t)x(t+\sigma_2) = 0 "$$

nötral diferansiyel denklemlerden yararlanılarak sürekli gecikmeli

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (x(t) + P_1(t)x(t-\tau_1) + P_2(t)x(t+\tau_2)) \\ & + \int_a^b q_1(t, \xi)x(t-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(t, \xi)x(t+\xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

burada  $q_i \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$ ,  $\tau_i > 0$  ve  $0 < a < b$ ,  $0 < c < d$ ,  $i = 1, 2$  olmak üzere, birinci mertebe nötral diferansiyel denklem için salınım yapmayan çözümlerin varlığı ile ilgili teoremler verildi.

**Teorem 1.1** (Banach Daralma Teoremi) Tam metrik uzayda daralma dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

**Teorem 2.1** Farz edelim ki  $0 \leq P_1(t) \leq p_1 < 1$ ,  $0 \leq P_2(t) \leq p_2 < 1 - p_1$  ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds < \infty \quad (2.1)$$

olsun. Bu takdirde (1.1) denkleminin sınırlı, salınım yapmayan çözümü vardır.

**İspat :** (2.1) den dolayı  $t_1 > t_0$ ,

$$t_1 \geq t_0 + \max \{ \tau_1, b, d \} \quad (2.2)$$

yeterli büyüklükte seçilebilir öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{M_2 - \alpha}{M_2}, \quad t \geq t_1 \quad (2.3)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{\alpha - (p_1 + p_2)M_2 - M_1}{M_2}, \quad t \geq t_1, \quad (2.4)$$

burada  $M_1, M_2$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$(p_1 + p_2)M_2 + M_1 < M_2 \quad \text{ve} \quad \alpha \in ((p_1 + p_2)M_2 + M_1, M_2).$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_1 \leq x(t) \leq M_2, \quad t \geq t_0\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha - P_1(t)x(t - \tau_1) - P_2(t)x(t + \tau_2) \\ + \int_t^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x(s + \xi) d\xi \right) ds, & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.3) ve (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\leq \alpha + \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi)x(s - \xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha + M_2 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha + M_2 \frac{M_2 - \alpha}{M_2} \\ &= M_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\geq \alpha - P_1(t)x(t - \tau_1) - P_2(t)x(t + \tau_2) - \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi)x(s + \xi) d\xi ds \\ &\geq \alpha - p_1 M_2 - p_2 M_2 - M_2 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \alpha - p_1 M_2 - p_2 M_2 - M_2 \frac{\alpha - (p_1 + p_2) M_2 - M_1}{M_2} \\ &= M_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned} &|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \\ &= \left| \left( \alpha - P_1(t)x_1(t - \tau_1) - P_2(t)x_1(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_1(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_1(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \alpha - P_1(t)x_2(t - \tau_1) - P_2(t)x_2(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_2(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_2(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right| \\ &\leq P_1(t)|x_1(t - \tau_1) - x_2(t - \tau_1)| + P_2(t)|x_1(t + \tau_2) - x_2(t + \tau_2)| \\ &\quad + \left| \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)(x_1(s - \xi) - x_2(s - \xi)) d\xi + \int_c^d q_2(s, \xi)(x_1(s + \xi) - x_2(s + \xi)) d\xi \right) ds \right| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \left( p_1 + p_2 + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi + \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi \right) ds \right) \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \left( p_1 + p_2 + \frac{M_2 - \alpha}{M_2} + \frac{\alpha - (p_1 + p_2)M_2 - M_1}{M_2} \right) \\ &\leq \left( 1 - \frac{M_1}{M_2} \right) \|x_1 - x_2\| \\ &= \lambda_1 \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

burada  $\lambda_1 = \left( 1 - \frac{M_1}{M_2} \right)$  olup supremum normu kullanılarak  $\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_1 \|x_1 - x_2\|$

elde edilir.  $\lambda_1 < 1$  olduğundan  $S$ ,  $\Omega$  üzerinde daralma dönüşümüdür. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek çözümü olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.2** Farz edelim ki  $0 \leq P_1(t) \leq p_1 < 1$ ,  $p_1 - 1 \leq p_2 \leq P_2(t) \leq 0$  ve (2.1) sağlansın. Bu takdirde (1.1) denkleminin sınırlı salınım yapmayan bir çözümü vardır.

**İspat :** (2.1) den dolayı  $t_1 > t_0$  yeterli büyüklükte seçilebilir öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{N_2 + p_2 N_2 - \alpha}{N_2}, \quad t \geq t_1 \quad (2.5)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{\alpha - p_1 N_2 - N_1}{N_2}, \quad t \geq t_1, \quad (2.6)$$

burada  $N_1$  ve  $N_2$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$N_1 + p_1 N_2 < (1 + p_2) N_2 \text{ ve } \alpha \in (N_1 + p_1 N_2, (1 + p_2) N_2) \text{ dir.}$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_1 \leq x(t) \leq N_2, t \geq t_0\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha - P_1(t)x(t - \tau_1) - P_2(t)x(t + \tau_2) \\ + \int_t^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x(s + \xi) d\xi \right) ds, & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.5) ve (2.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\leq \alpha - P_2(t)x(t + \tau_2) + \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi)x(s - \xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha - p_2 N_2 + N_2 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha - p_2 N_2 + N_2 \frac{N_2 + p_2 N_2 - \alpha}{N_2} \\ &= N_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\geq \alpha - P_1(t)x(t - \tau_1) - \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi)x(s + \xi) d\xi ds \\ &\geq \alpha - p_1 N_2 - N_2 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \end{aligned}$$

$$\geq \alpha - p_1 N_2 - N_2 \frac{\alpha - p_1 N_2 - N_1}{N_2}$$

$$= N_1$$

bulunur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümünün olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned} & |(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \\ &= \left| \left( \alpha - P_1(t)x_1(t - \tau_1) - P_2(t)x_1(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_1(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_1(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right. \\ & \quad \left. - \left( \alpha - P_1(t)x_2(t - \tau_1) - P_2(t)x_2(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_2(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_2(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right| \\ & \leq | -P_1(t)x_1(t - \tau_1) + P_1(t)x_2(t - \tau_1) | + | -P_2(t)x_1(t + \tau_2) + P_2(t)x_2(t + \tau_2) | \\ & \quad + \left| \int_t^\infty \int_a^b q_1(s, \xi)(x_1(s - \xi) - x_2(s - \xi)) d\xi ds \right| \\ & \quad + \left| \int_t^\infty \int_c^d q_2(s, \xi)(-x_1(s + \xi) + x_2(s + \xi)) d\xi ds \right| \\ & \leq \|x_1 - x_2\| \left( p_1 + p_2 + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi + \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi \right) ds \right) \\ & \leq \|x_1 - x_2\| \left( p_1 + p_2 + \frac{N_2 + p_2 N_2 - \alpha}{N_2} + \frac{\alpha - p_1 N_2 - N_1}{N_2} \right) \\ & \leq \left( 1 - \frac{N_1}{N_2} \right) \|x_1 - x_2\| \\ & = \lambda_2 \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

burada  $\lambda_2 = \left( 1 - \frac{N_1}{N_2} \right)$ , olup supremum normu kullanılarak  $\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_2 \|x_1 - x_2\|$

elde edilir.  $\lambda_2 < 1$  olduğundan  $S, \Omega$  üzerinde daralma dönüşümüdür. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Buda ispatı tamamlar.

**Teorem 2.3** Farz edelim ki  $1 < p_1 \leq P_1(t) \leq p_{1_0} < \infty$ ,  $0 \leq P_2(t) \leq p_2 < p_1 - 1$  olsun ve (2.1) sağlansın. Bu takdirde (1.1) denkleminin sınırlı salınım yapmayan bir çözümü vardır.

**İspat :** (2.1) den dolayı,  $t_1 > t_0$ ,

$$t_1 + \tau_1 \geq t_0 + b \quad (2.7)$$

yeterli büyüklükte seçilebilir öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{p_1 M_4 - \alpha}{M_4}, \quad t \geq t_1 \quad (2.8)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{\alpha - p_{1_0} M_3 - (1 + p_2) M_4}{M_4}, \quad t \geq t_1, \quad (2.9)$$

burada  $M_3$  ve  $M_4$  öyle pozitif sabitlerdir ki,

$$p_{1_0} M_3 + (1 + p_2) M_4 < p_1 M_4 \text{ ve } \alpha \in (p_{1_0} M_3 + (1 + p_2) M_4, p_1 M_4).$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_3 \leq x(t) \leq M_4, t \geq t_0\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{p_1(t + \tau_1)} \left( \alpha - x(t + \tau_1) - P_2(t + \tau_1) x(t + \tau_1 + \tau_2) \right. \\ \left. + \int_{t + \tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x(s + \xi) d\xi \right) ds \right), & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.8) ve (2.9) kullanılarak

$$(Sx)(t) \leq \frac{1}{P_1(t + \tau_1)} \left( \alpha + \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) x(s - \xi) d\xi ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha + M_4 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \right) \\
&\leq \frac{1}{P_1} \left( \alpha + M_4 \frac{p_1 M_4 - \alpha}{M_4} \right) \\
&= M_4
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) &\geq \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha - x(t+\tau_1) - P_2(t+\tau_1)x(t+\tau_1+\tau_2) - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi) d\xi ds \right) \\
&\geq \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha - M_4 - p_2 M_4 - M_4 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \right) \\
&\geq \frac{1}{P_{1_0}} \left( \alpha - M_4(1+p_2) - M_4 \frac{\alpha - p_{1_0} M_3 - M_4(1+p_2)}{M_4} \right) \\
&= M_3
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümünün olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned}
&\left| ((Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)) \right| \\
&= \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left| \left( \alpha - x_1(t+\tau_1) - P_2(t+\tau_1)x_1(t+\tau_1+\tau_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_1(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_1(s+\xi) d\xi \right) ds \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \alpha - x_2(t+\tau_1) - P_2(t+\tau_1)x_2(t+\tau_1+\tau_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_2(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_2(s+\xi) d\xi \right) ds \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{P_1} \left( \left| -x_1(t+\tau_1) + x_2(t+\tau_1) \right| + \left| -P_2(t+\tau_1)x_1(t+\tau_1+\tau_2) + P_2(t+\tau_1)x_2(t+\tau_1+\tau_2) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)(x_1(s-\xi) - x_2(s-\xi)) d\xi \right) ds \right| \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_c^d q_2(s, \xi) (-x_1(s+\xi) + x_2(s+\xi)) d\xi \right) ds \right| \\
& \leq \frac{1}{p_1} \|x_1 - x_2\| \left( 1 + p_2 + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_2(s, \xi) d\xi ds \right) \\
& \leq \|x_1 - x_2\| \frac{1}{p_1} \left( 1 + p_2 + \frac{p_1 M_4 - \alpha}{M_4} + \frac{\alpha - p_{1_0} M_3 - (1 + p_2) M_4}{M_4} \right) \\
& = \lambda_3 \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\lambda_3 = 1 - \frac{p_{1_0} M_3}{p_1 M_4}$  olup, supremum normu kullanılarak

$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_3 \|x_1 - x_2\|$  elde edilir.  $\lambda_3 < 1$  olduğundan  $S$ 'nin  $\Omega$  üzerinde daralma dönüşümü vardır. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Buda ispatı tamamlar.

**Teorem 2.4** Kabul edelim ki  $1 < p_1 \leq P_1(t) \leq p_{1_0} < \infty$ ,  $1 - p_1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$  ve (2.1) sağlansın. O halde (1.1) denkleminin sınırlı ve salınım yapmayan çözümü vardır.

**İspat :** (2.1)'den dolayı (2.7)'yi sağlayan yeterli büyüklükte  $t_1 \geq t_0$  seçebiliriz öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{(p_1 + p_2) N_4 - \alpha}{N_4}, \quad t \geq t_1 \quad (2.10)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{\alpha - p_{1_0} N_3 - N_4}{N_4}, \quad t \geq t_1, \quad (2.11)$$

burada  $N_3$  ve  $N_4$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$p_{1_0} N_3 + N_4 < (p_1 + p_2) N_4 \quad \text{ve} \quad \alpha \in (p_{1_0} N_3 + N_4, (p_1 + p_2) N_4).$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_3 \leq x(t) \leq N_4, t \geq t_0\}$$

olarak tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha - x(t+\tau_1) - P_2(t+\tau_1)x(t+\tau_1+\tau_2) \right. \\ \left. + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x(s-\xi)d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi)d\xi \right) ds \right), & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.10) ve (2.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\leq \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha - P_2(t+\tau_1)x(t+\tau_1+\tau_2) + \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi)x(s-\xi) d\xi ds \right) \\ &\leq \frac{1}{p_1} \left( \alpha - p_2 N_4 + N_4 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \right) \\ &\leq \frac{1}{p_1} \left( \alpha - p_2 N_4 + N_4 \left( \frac{(p_1 + p_2)N_4 - \alpha}{N_4} \right) \right) \\ &= N_4 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\geq \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha - x(t+\tau_1) - \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi) d\xi ds \right) \\ &\geq \frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha - N_4 - N_4 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \right) \\ &\geq \frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha - N_4 - N_4 \left( \frac{\alpha - p_{1_0} N_3 - N_4}{N_4} \right) \right) \\ &= N_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned} &|((Sx_1)(t) - (Sx_2)(t))| \\ &= \frac{1}{P_1(t+\tau_1)} \left| \left( \alpha - x_1(t+\tau_1) - P_2(t+\tau_1)x_1(t+\tau_1+\tau_2) \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(t, \xi) x_1(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x_1(s+\xi) d\xi \right) ds \\
& - (\alpha - x_2(t+\tau_1) - P_2(t+\tau_1)x_2(t+\tau_1+\tau_2) \\
& + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x_2(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x_2(s+\xi) d\xi \right) ds \Bigg) \\
& \leq \frac{1}{p_1} \left( |-x_1(t+\tau_1) + x_2(t+\tau_1)| + |-P_2(t+\tau_1)x_1(t+\tau_1+\tau_2) + P_2(t+\tau_1)x_2(t+\tau_1+\tau_2)| \right. \\
& \left. + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) (x_1(s-\xi) - x_2(s-\xi)) d\xi ds \right| \right. \\
& \left. + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) (-x_1(s+\xi) + x_2(s+\xi)) d\xi ds \right| \right) \\
& \leq \frac{1}{p_1} \|x_1 - x_2\| \left( 1 - p_2 + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \right) \\
& \leq \frac{1}{p_1} \|x_1 - x_2\| \left( 1 - p_2 + \int_t^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi + \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi \right) ds \right) \\
& \leq \|x_1 - x_2\| \frac{1}{p_1} \left( 1 - p_2 + \frac{p_1 N_4 + p_2 N_4 - \alpha}{N_4} + \frac{\alpha - p_{1_0} N_3 - N_4}{N_4} \right) \\
& = \lambda_4 \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\lambda_4 = \left( 1 - \frac{p_{1_0} N_3}{p_1 N_4} \right)$  olup supremum normu kullanılarak

$\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_4 \|x_1 - x_2\|$  elde edilir.  $\lambda_4 < 1$  olduğundan  $S, \Omega$  üzerinde daralma dönüşümüdür. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1,1) denkleminin çözümüdür. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.5** Kabul edelim ki  $-1 < p_1 \leq P_1(t) \leq 0$ ,  $0 \leq P_2(t) \leq p_2 \leq 1 + p_1$  ve (2.1) sağlansın. O halde (1.1) denkleminin sınırlı ve salınım yapmayan çözümü vardır.

**İspat :** (2.1)'den dolayı (2.2)'yi sağlayan yeterli büyüklükte  $t_1 \geq t_0$  seçebiliriz öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{(1+p_1)M_6 - \alpha}{M_6}, \quad t \geq t_1 \quad (2.12)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{\alpha - p_2M_6 - M_5}{M_6}, \quad t \geq t_1, \quad (2.13)$$

burada  $M_5$  ve  $M_6$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$M_5 + p_2M_6 < (1+p_1)M_6 \quad \text{ve} \quad \alpha \in (M_5 + p_2M_6, (1+p_1)M_6).$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_5 \leq x(t) \leq M_6, t \geq t_0\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha - P_1(t)x(t-\tau_1) - P_2(t)x(t+\tau_2) \\ + \int_t^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi) d\xi \right) ds, & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.12) ve (2.13) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\leq \alpha - P_1(t)x(t-\tau_1) + \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi)x(s-\xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha - p_1M_6 + M_6 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha - p_1M_6 + M_6 \frac{(1+p_1)M_6 - \alpha}{M_6} \\ &= M_6 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\geq \alpha - P_2(t)x(t+\tau_2) - \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi) d\xi ds \\ &\geq \alpha - p_2M_6 - M_6 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \alpha - p_2 M_6 - M_6 \frac{\alpha - p_2 M_6 - M_5}{M_6} \\ &= M_5 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümünün olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned} &|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \\ &= \left| \left( \alpha - P_1(t)x_1(t - \tau_1) - P_2(t)x_1(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_1(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_1(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \alpha - P_1(t)x_2(t - \tau_1) - P_2(t)x_2(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_2(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_2(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right| \\ &\leq \left| -P_1(t)x_1(t - \tau_1) + P_1(t)x_2(t - \tau_1) \right| + \left| -P_2(t)x_1(t + \tau_2) + P_2(t)x_2(t + \tau_2) \right| \\ &\quad + \left| \int_t^\infty \int_a^b q_1(s, \xi)(x_1(s - \xi) - x_2(s - \xi)) d\xi ds \right| \\ &\quad + \left| \int_t^\infty \int_c^d q_2(s, \xi)(-x_1(s + \xi) + x_2(s + \xi)) d\xi ds \right| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \left( -p_1 + p_2 + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi + \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi \right) ds \right) \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \left( -p_1 + p_2 + \frac{M_6 + p_1 M_6 - \alpha}{M_6} + \frac{\alpha - p_2 M_6 - M_5}{M_6} \right) \\ &= \lambda_5 \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

burada  $\lambda_5 = \left( 1 - \frac{M_5}{M_6} \right)$  olup supremum normu kullanılarak  $\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_5 \|x_1 - x_2\|$

elde edilir.  $\lambda_5 < 1$  olduğundan  $S$ ,  $\Omega$  üzerinde daralma dönüşümüdür. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar.

**Teorem 2.6** Farz edelim ki  $-1 < p_1 \leq P_1(t) \leq 0$ ,  $-1 - p_1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$  ve (2.1) sağlansın. O halde (1.1) denkleminin sınırlı ve salınım yapmayan çözümü vardır.

**İspat :** (2.1)'den dolayı (2.2)'yi sağlayan yeterli büyüklükte  $t_1 > t_0$  seçilebilir öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{(1+p_1+p_2)N_6 - \alpha}{N_6}, \quad t \geq t_1 \quad (2.14)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{\alpha - N_5}{N_6}, \quad t \geq t_1, \quad (2.15)$$

burada  $N_5$  ve  $N_6$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$N_5 < (1+p_1+p_2)N_6 \text{ ve } \alpha \in (N_5, (1+p_1+p_2)N_6) \text{ dir.}$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_5 \leq x(t) \leq N_6, t \geq t_0\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \alpha - P_1(t)x(t-\tau_1) - P_2(t)x(t+\tau_2) \\ + \int_t^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi) d\xi \right) ds, & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.14) ve (2.15) kullanılarak

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\leq \alpha - P_1(t)x(t-\tau_1) - P_2(t)x(t+\tau_2) + \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi)x(s-\xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha - p_1N_6 - p_2N_6 + N_6 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \\ &\leq \alpha - p_1N_6 - p_2N_6 + N_6 \frac{(1+p_1+p_2)N_6 - \alpha}{N_6} \\ &= N_6 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\geq \alpha - \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi)x(s+\xi) d\xi ds \\ &\geq \alpha - N_6 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \alpha - N_6 \frac{\alpha - N_5}{N_6} \\ &= N_5 \end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümünün olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned} &|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \\ &= \left| \left( \alpha - P_1(t)x_1(t - \tau_1) - P_2(t)x_1(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_1(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_1(s + \xi) d\xi \right) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \alpha - P_1(t)x_2(t - \tau_1) - P_2(t)x_2(t + \tau_2) + \int_t^\infty \left( \int_a^b q_1(s, \xi)x_2(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi)x_2(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right) \right| \\ &\leq \left| -P_1(t)x_1(t - \tau_1) + P_1(t)x_2(t - \tau_1) \right| + \left| -P_2(t)x_1(t + \tau_2) + P_2(t)x_2(t + \tau_2) \right| \\ &\quad + \left| \int_t^\infty \int_a^b q_1(s, \xi)(x_1(s - \xi) - x_2(s - \xi)) d\xi ds \right| \\ &\quad + \left| \int_t^\infty \int_c^d q_2(s, \xi)(-x_1(s + \xi) + x_2(s + \xi)) d\xi ds \right| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \left( -p_1 - p_2 + \left| \int_t^\infty \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \right| + \left| \int_t^\infty \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \right| \right) \\ &\leq \|x_1 - x_2\| \left( -p_1 - p_2 + \frac{N_6 + p_1 N_6 + p_2 N_6 - \alpha}{N_6} + \frac{\alpha - N_5}{N_6} \right) \\ &= \lambda_6 \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

burada  $\lambda_6 = \left( 1 - \frac{N_5}{N_6} \right)$  olup supremum normu kullanılarak  $\|Sx - Sy\| \leq \lambda \|x - y\|$

elde edilir.  $\lambda_6 < 1$  olduğundan  $S, \Omega$  üzerinde daralma dönüşümüdür. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Buda ispatı tamamlar.

**Teorem 2.7** Farz edelim ki  $-\infty < p_0 \leq P_1(t) \leq p_1 < -1$ ,  $0 \leq P_2(t) < p_2 < -p_1 - 1$  ve (2.1) sağlansın. O halde (1.1) denkleminin sınırlı salınım yapmayan çözümü vardır.

**İspat :** (2.1)'den dolayı (2.7)'yi sağlayan yeterince büyük  $t_1 \geq t_0$  seçebiliriz öyle ki

$$\int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{p_1 M_7 + \alpha}{M_8}, \quad t \geq t_1 \quad (2.16)$$

ve

$$\int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{(-p_1 - p_2 - 1)M_8 - \alpha}{M_8}, \quad t \geq t_1, \quad (2.17)$$

burada  $M_7$  ve  $M_8$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$-p_1 M_7 < (-p_1 - p_2 - 1)M_8 \text{ ve } \alpha \in (-p_1 M_7, (-p_1 - p_2 - 1)M_8).$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : M_7 \leq x(t) \leq M_8, t \geq t_0\}$$

şeklinde tanımlansın  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nin sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{-1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha + x(t+\tau_1) + P_2(t+\tau_1)x(t+\tau_1+\tau_2) \right. \\ \left. - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x(s+\xi) d\xi \right) ds \right), & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için

(2.17) ve (2.16) ayrı ayrı kullanılarak

$$\begin{aligned} (Sx)(t) &\leq \frac{-1}{P_1(t+\tau_1)} \left( \alpha + x(t+\tau_1) + P_2(t+\tau_1)x(t+\tau_1+\tau_2) + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) x(s+\xi) d\xi ds \right) \\ &\leq -\frac{1}{p_1} \left( \alpha + M_8 + p_2 M_8 + M_8 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \right) \\ &\leq -\frac{1}{p_1} \left( \alpha + M_8 + p_2 M_8 + M_8 \frac{(-p_1 - p_2 - 1)M_8 - \alpha}{M_8} \right) \\ &= M_8 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) &\geq \frac{-1}{p_{1_0}} \left( \alpha - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) x(s-\xi) d\xi ds \right) \\
&\geq -\frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha - M_8 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \right) \\
&\geq -\frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha - M_8 \frac{p_{1_0} M_7 + \alpha}{M_8} \right) \\
&= M_7
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned}
&|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \\
&= \left| \frac{-1}{p_1(t+\tau_1)} \left( (\alpha + x_1(t+\tau_1) + P_2(t+\tau_1)x_1(t+\tau_1+\tau_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x_1(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x_1(s+\xi) d\xi \right) ds \right) \right. \\
&\quad \left. - (\alpha + x_2(t+\tau_1) + P_2(t+\tau_1)x_2(t+\tau_1+\tau_2) \right. \\
&\quad \left. - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x_2(s-\xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x_2(s+\xi) d\xi \right) ds \right) \Big| \\
&\leq \left| -\frac{1}{p_1} \left( |x_1(t+\tau_1) - x_2(t+\tau_1)| + |P_2(t+\tau_1)x_1(t+\tau_1+\tau_2) - P_2(t+\tau_1)x_2(t+\tau_1+\tau_2)| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) (-x_1(s-\xi) + x_2(s-\xi)) d\xi ds \right| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) (x_1(s+\xi) - x_2(s+\xi)) d\xi ds \right| \right) \right| \\
&\leq \|x_1 - x_2\| \left( -\frac{1}{p_1} \left( 1 + p_2 + \frac{p_{1_0} M_7 + \alpha}{M_8} + \frac{-p_1 M_8 - M_8 - p_2 M_8 - \alpha}{M_8} \right) \right) \\
&= \lambda_7 \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Burada  $\lambda_7 = \left(1 - \frac{p_{1_0} M_7}{p_1 M_8}\right)$  olup supremum normu kullanılarak  $\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_7 \|x_1 - x_2\|$

elde edilir.  $\lambda_7 < 1$  olduğundan  $S$ ,  $\Omega$  üzerinde daralma dönüşümüdür. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Buda ispatı tamamlar.

**Teorem 2.8** Farz edelim ki  $-\infty < p_{1_0} \leq P_1(t) \leq p_1 < -1$ ,  $p_1 + 1 < p_2 \leq P_2(t) \leq 0$  ve (2.1) sağlansın. O halde (1.1) denklemini sınırlı salınım yapmayan çözümü vardır.

**İspat :** (2.1)' den dolayı (2.7)'yi sağlayan yeterince büyük  $t_1 \geq t_0$  seçebiliriz, öyle ki

$$\int_a^b \int_t^b q_1(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{p_{1_0} N_7 + p_2 N_8 + \alpha}{N_8}, \quad t \geq t_1 \quad (2.18)$$

ve

$$\int_c^d \int_t^d q_2(s, \xi) d\xi ds \leq \frac{(-p_1 - 1) N_8 - \alpha}{N_8}, \quad t \geq t_1, \quad (2.19)$$

burada  $N_7$  ve  $N_8$  öyle pozitif sabitlerdir ki

$$-p_{1_0} N_7 - p_2 N_8 < (-p_1 - 1) N_8 \quad \text{ve} \quad \alpha \in (-p_{1_0} N_7 - p_2 N_8, (-p_1 - 1) N_8).$$

$\Lambda$ , supremum normuyla  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.  $\Omega$  kümesi,

$$\Omega = \{x \in \Lambda : N_7 \leq x(t) \leq N_8, t \geq t_0\}$$

olarak tanımlansın.  $\Omega$  açıkça  $\Lambda$ 'nın sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.

$S : \Omega \rightarrow \Lambda$  dönüşümü,

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \frac{-1}{P_1(t + \tau_1)} \left( \alpha + x(t + \tau_1) + P_2(t + \tau_1) x(t + \tau_1 + \tau_2) \right. \\ \left. - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x(s + \xi) d\xi \right) ds \right), & t \geq t_1 \\ (Sx)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $Sx$  dönüşümünün sürekli olduğu açıktır.  $t \geq t_1$  ve  $x \in \Omega$  için (2.19) ve (2.18) ayrı ayrı kullanılarak

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) &\leq \frac{-1}{p_1} \left( \alpha + x(t + \tau_1) + \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) x(s + \xi) d\xi ds \right) \\
&\leq -\frac{1}{p_1} \left( \alpha + N_8 + N_8 \int_t^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi ds \right) \\
&\leq -\frac{1}{p_1} \left( \alpha + N_8 + N_8 \frac{(-p_1 - 1)N_8 - \alpha}{N_8} \right) \\
&= N_8
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(Sx)(t) &\geq -\frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha + P_2(t + \tau_1)x(t + \tau_1 + \tau_2) - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) x(s - \xi) d\xi ds \right) \\
&\geq -\frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha + p_2 N_8 - N_8 \int_t^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi ds \right) \\
&\geq -\frac{1}{p_{1_0}} \left( \alpha + p_2 N_8 - N_8 \frac{p_{1_0} N_7 + p_2 N_8 + \alpha}{N_8} \right) \\
&= N_7
\end{aligned}$$

olur. Bu da  $S\Omega \subset \Omega$  olduğunu gösterir. Daralma dönüşümü prensibine başvurabilmek için  $S$ 'nin  $\Omega$  kümesi üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$x_1, x_2 \in \Omega$  ve  $t \geq t_1$  için

$$\begin{aligned}
&|(Sx_1)(t) - (Sx_2)(t)| \\
&= \left| \frac{-1}{P_1(t + \tau_1)} \left( (\alpha + x_1(t + \tau_1) + P_2(t + \tau_1)x_1(t + \tau_1 + \tau_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x_1(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x_1(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \right| \\
&\quad - (\alpha + x_2(t + \tau_1) + P_2(t + \tau_1)x_2(t + \tau_1 + \tau_2) \\
&\quad \left. - \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) x_2(s - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(s, \xi) x_2(s + \xi) d\xi \right) ds \right) \\
&\leq \left| -\frac{1}{P_1} \left( |x_1(t + \tau_1) - x_2(t + \tau_1)| + |P_2(t + \tau_1)x_1(t + \tau_1 + \tau_2) - P_2(t + \tau_1)x_2(t + \tau_1 + \tau_2)| \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_a^b q_1(s, \xi) (-x_1(s-\xi) + x_2(s-\xi)) d\xi ds \right| \\
& + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \int_c^d q_2(s, \xi) (x_1(s+\xi) - x_2(s+\xi)) d\xi ds \right| \\
& \leq -\frac{1}{p_1} \|x_1 - x_2\| \left( 1 + |p_2| + \left| \int_{t+\tau_1}^{\infty} \left( \int_a^b q_1(s, \xi) d\xi + \int_c^d q_2(s, \xi) d\xi \right) ds \right| \right) \\
& \leq -\frac{1}{p_1} \|x_1 - x_2\| \left( 1 - p_2 + \frac{p_{1_0} N_7 + p_2 N_8 + \alpha}{N_8} + \frac{-p_1 N_8 - N_8 - \alpha}{N_8} \right) \\
& = \lambda_8 \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Burada  $\lambda_8 = \left( 1 - \frac{p_{1_0} N_7}{p_1 N_8} \right)$ , olup supremum normu kullanılarak  $\|Sx_1 - Sx_2\| \leq \lambda_8 \|x_1 - x_2\|$

elde edilir.  $\lambda_8 < 1$  olduğundan  $S$ 'nin  $\Omega$  üzerinde daralma dönüşümü vardır. Bu ise  $S$ 'nin pozitif ve sınırlı bir tek noktası olduğunu gösterir ve bu sabit nokta (1.1) denkleminin çözümüdür. Buda ispatı tamamlar.

## BÖLÜM IV

### SONUÇ

Tez çalışmamızda daha önce çalışılmamış

$$\frac{d}{dt} [x(t) + P_1(t)x(t - \tau_1) + P_2(t)x(t + \tau_2)] + \int_a^b q_1(t, \xi)x(t - \xi) d\xi - \int_c^d q_2(t, \xi)x(t + \xi) d\xi = 0,$$

nötral diferansiyel denkleminin salınım yapmayan çözümünün varlığı için yeterli şartlar verildi ve bu şartlar için çözümünün varlığı incelendi.



## KAYNAKLAR

Aydın S., Analize Giriş Birinci Cilt, *Beta Basın Yayın Dağıtım A.Ş.*, İstanbul, 1994.

Başkan T., Bizim O. ve Cangül İ.N., Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara, 2006.

Bizim O., Tekcan A. ve Gezer B., Genel Matematik Diferansiyel ve İntegral Hesap, *Dora Basın-Yayın-Dağıtım*, Bursa, 2011.

Conway, J.B., A Course in Functional Analysis, *Springer*, New York, 1990.

Çelik S., Kısa Teori ve Çözümlü Problemlerle Matematik Analiz 1, *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 2012

Ladde, G.S., Lakshmikantham V. and B.G. Zang, “Oscillation theory for differential equation with deviating arguments”, *Marcel Dekker, Inc.*, New York, 1987.

Musayev B. ve Alp M., Fonksiyonel Analiz, *Balcı Yayınları*, Kütahya, 2000.

Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, *Nobel Yayınları*, Ankara, 2008.

Yüksel Ş., Genel Topoloji, *Eğitim Yayınevi*, Konya, 2011.

Candan, T., “Existence of non-oscillatory solutions to first-order neutral differential equations” *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016

Candan, T. and Dahiya R.S., “Existence of nonoscillatory solutions to first and second order neutral differential equations with distributed deviating arguments” *Journal of The Franklin Institute*, 347, 1309-1316, 2010.

## ÖZ GEÇMİŞ

Ufuk ARIKAN, 20.10.1979 tarihinde Niğde’de dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Niğde’de tamamladı. 2001 yılında Niğde Üniversitesi Kimya bölümünü bitirdi. 2002 yılında yine Niğde’de öğretmenliğe başladı. 2012 yılında Niğde Üniversitesi Matematik bölümünü kazandı. 2016 yılında bölümünü derece ile bitirdi. Şuan da Niğde ilinin Bor ilçesinde Kimya öğretmeni olarak görev yapmaktadır.



