T.C.

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

AHMET MUTLU GEÇGEL

EYLÜL 2013

A. M. GEÇGEL, 2013

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

AHMET MUTLU GEÇGEL

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Eylül 2013

Ahmet Mutlu GEÇGEL tarafından **Doç. Dr. Tuncay CANDAN** danışmanlığında hazırlanan "**Sürekli Gecikmeli Yüksek Mertebeden Nötral Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Salınım Yapmayan Çözümlerin Varlığı**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Tuncay CANDAN, Niğde Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN, Niğde Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK, Selçuk Üniversitesi

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve .... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ahmet Mutlu GEÇGEL

ÖZET

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

GEÇGEL, Ahmet Mutlu
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tuncay CANDAN

Eylül 2013, 69 sayfa

Bu çalışmada, sürekli gecikmeli yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemleri için salınım yapmayan çözümlerin varlığı araştırılmıştır. Schauder sabit nokta teoremi ve daralma prensibi kullanılarak bu sistemin çözümlerinin varlığı için yeterli şartlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Nötral denklemler, Sabit nokta, Yüksek mertebe, Salınım yapmayan çözüm.

SUMMARY

EXISTENCE OF NONOSCILLATORY SOLUTIONS FOR SYSTEM OF HIGHER ORDER NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISTRIBUTED DEVIATING ARGUMENTS

GEÇGEL, Ahmet Mutlu
Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Associate Proffesor Dr. Tuncay CANDAN

September 2013, 69 pages

In this thesis, we consider the existence of nonoscillatory solutions for system of higher order neutral differential equations with distributed deviating arguments. We use the Schauder's fixed point theorem and contraction principle to present new sufficient conditions for the existence of nonoscillatory solutions of these systems.

Keywords: Neutral equation, Fixed point, Higher order, Nonoscillatory solution.

ÖN SÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve deneyimi ile bana yardımcı olan sayın danışmanım Doç. Dr. Tuncay CANDAN'a ve bu süreçte manevi desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ahmet Mutlu GEÇGEL

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv
SUMMARY v
ÖN SÖZ vi
İÇİNDEKİLER vii
SİMGE VE KISALTMALAR viii
BÖLÜM I GİRİŞ 1
BÖLÜM II 2
2.1 Fonksiyonel diferansiyel denklemler 2
2.1.1 Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferansiyel denklemler..............2
2.1.2 İleri (Advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemler 2
2.1.3 Karma (Mixed) fonksiyonel diferansiyel denklemler..................................2
2.1.4 Nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler...3
2.2 Salınım (Oscillation)..3
2.3 Sınırlılık 3
2.4 Sabit Nokta..3
2.5 Metrik Uzay 4
2.6 Daralma Dönüşümü 4
2.7 Yakınsama..4
2.8 Açık ve Kapalı Küme..5
2.9 Cauchy Dizisi..5
2.10 Tam Metrik Uzay 5
2.11 Kompaktlık 5
2.12 Lineer Uzay (Vektör Uzayı) 5
2.13 Konveks Küme..6
2.14 Normlu (Vektör) Uzayı..6
2.15 Süreklilik..7
2.16 Banach Uzayı 7
BÖLÜM III GECİKMELİ NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI 9

BÖLÜM IV YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI 25
BÖLÜM V SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI 38
BÖLÜM VI SONUÇLAR 66
KAYNAKLAR 67
ÖZ GEÇMİŞ 69

SİMGE VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^{+}$: Pozitif reel sayılar kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$C([a,b],\mathbb{R})$: $[a,b]$ kapalı aralığından $\mathbb{R}$ 'ye sürekli fonksiyonların kümesi

T : Daralma dönüşümü

τ : Gecikme parametresi

σ : Gecikme parametresi

ξ : Gecikme parametresi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemler fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda önemli rol oynayarak geleceğin araştırılmasında vazgeçilmez araçlar olarak kullanılmaktadır. Ancak, gelecek hakkında bilgi edinebilmek için geçmişin dinamik yapısı da iyi bir şekilde bilinmeli ve kullanılmalıdır. Geleceğin araştırılmasında, geçmişin göz ardı edilmesi, gerçekliğin de göz ardı edilmesine neden olmaktadır. Bu bağlamda modele zaman gecikmelerinin dâhil edilmesi oldukça önem arz etmektedir.

Bu tezin ikinci bölümünde tezle ilgili temel kavramlar verilmiş, üçüncü bölümde yapılan tez çalışmamıza temel teşkil edecek olan El-Metwally vd.'nin (2003) gecikmeli nötral diferansiyel denklem sistemleri için salınım yapmayan çözümlerin varlığı üzerine yapmış oldukları çalışma incelenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde Candan'ın (2013) yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemleri için salınım yapmayan çözümlerin varlığı üzerine yapmış olduğu çalışma incelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise Candan'ın (2013) yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemleri için salınım yapmayan çözümlerin varlığı adlı makalesi genişletilerek gecikmeler sürekli gecikmeli hale getirilmiş ve salınım yapmayan çözümlerin varlığı incelenmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Fonksiyonel diferansiyel denklemler

Adi diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevleri sadece t anında hesaplanır. Gerçek hayatta bazı olaylar sadece şuan ki zamana değil geçmiş ve gelecek zamana da bağlı olabilir. Bu tür diferansiyel denklemlerde sadece t değil de bilinmeyen fonksiyon ve türevleri $t-\tau$ veya $t+\tau$, $\tau>0$ anında hesaplanır. Bu tür diferansiyel denklemlere fonksiyonel diferansiyel denklemler denir.

2.1.1 Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferansiyel denklemler

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))),\qquad \tau(t)\geq 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerdir. Burada en yüksek dereceden türev t anında, diğerleri ise t veya t 'den daha önceki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 2.1.1 $x'(t)=x(t-7)+tx(3t)+3$ denklemi gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denkleme örnektir.

2.1.2 İleri (Advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemler

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t+\tau(t))),\qquad \tau(t)\geq 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemlerdir. Burada en yüksek dereceden türev t anında, diğerleri t veya t 'den daha ileriki zamanlarda hesaplanır.

Örnek 2.1.2 $x'(t)=-x(t+9)+x(t+\sqrt[3]{t})-5t+3$ denklemi ileri fonksiyonel diferansiyel denklemlere bir örnektir.

2.1.3 Karma (Mixed) fonksiyonel diferansiyel denklemler

Mixed fonksiyonel diferansiyel denklemler hem gecikmeli hem de ileri terimlerin bulunduğu denklemlerdir.

Örnek 2.1.3 $x'(t)=3x(t-1)-8x(t+1)+2$ ve $x'(t)=-x(t-1)x(t)-t\ x(t+1)$

denklemleri karma fonksiyonel diferansiyel denklemlere birer örnektir.

2.1.4 Nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler

Burada en yüksek dereceden türev sadece *t*' ye bağlı değil de hem gecikmeli hem de ileri terimlere bağlı olabilir.

Örnek 2.1.4 $x'(t) = -\frac{1}{2t+1}x'(t-4) + x(t-2) + 3\cos t$ denklemi nötral tipli denklemi fonksiyonel diferansiyel denklemlere birer örnektir.

2.2 Salınım (Oscillation)

$x(t)$**,** keyfi $T > 0$ için (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa $x(t)$ aşikâr olmayan çözümüne salınımlıdır denir.

Örnek 2.1.5 $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$ ve $x'(t) - x(t-\pi) = 0$ denklemlerinin çözümleri $x(t) = \sin t$ ve $x(t) = \cos t$ salınımlıdır.

2.3 Sınırlılık

$f : X \to Y$ ve $\forall x \in X$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa f fonksiyonuna üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu fonksiyonun bir üst sınırı adı verilir. $\forall x \in X$ için $f(x) \geq L$ olacak şekilde bir L reel sayısı varsa bu fonksiyona alttan sınırlıdır denir, L sayısına da bu fonksiyonun bir alt sınırı adı verilir. $\forall x \in X$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

2.4 Sabit Nokta

Bir M kümesinin yine M kümesi içine bir dönüşümüne M nin kendi içine bir dönüşümü denir.
f fonksiyonu M nin kendi içine bir dönüsümü olsun. M nin f (x) = x koşulunu sağlayan bir x elemanına f nin bir sabit noktası denir.

Örnek 2.1.6 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 2x + 2$ fonksiyonunun 1 ile 2 olmak üzere iki sabit noktası vardır.

2.5 Metrik Uzay

X boştan farklı bir küme olsun.

d: $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar ise d ye X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu ve (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

(M1) $\forall$ x.y$\in$ X için $d(x,y) \geq 0$

(M2) x.y$\in$ X için $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(M3) $\forall$ x,y$\in$ X için $d(x,y)= d(y,x)$

(M4) $\forall$ x,y,z$\in$ X için $d(x,z) \leq d(x,z)+d(y,z)$

Örnek 2.1.7 d: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$(x,y) \rightarrow d(x,y) := |x - y|$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

2.6 Daralma Dönüşümü

(M, d) bir metrik uzay ve f fonksiyonu M nin kendi içine bir dönüşümü olsun. M deki her x,y için

$d\left(f(x), f(y)\right) \leq k.d\left(x, y\right)$

ve $0 \leq k < 1$ koşulunu sağlayan bir k sayısı varsa *f* ye bir daralma dönüşümü denir.

2.7 Yakınsama

$\left(X, d\right)$ bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda alınan bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer; $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, başka bir deyişle $\forall \varepsilon > 0$ için $n > N(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$x_n \rightarrow x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

olarak ifade edilir.

2.8 Açık ve Kapalı Küme

(X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

- $B(x_0,r) = \{x \in X:\ d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar veya açık top,
- $\overline{B}(x_0,r) = \{x \in X:\ d(x,x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar veya kapalı top denir.

X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $B(x,r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X te açık küme denir. X in B altkümesinin X teki tümleyeni yani $B' = X - B$, X de açıksa B ye X te kapalı küme denir.

2.9 Cauchy Dizisi

(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda alınan bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > N(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Bu tanımı daha kısa olarak şöyle yazabiliriz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in N \ni \forall m,n > N(\varepsilon)$ için $d(x_n,x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n)$ dizisi Cauchy dizisidir.

2.10 Tam Metrik Uzay

(X,d) bir metrik uzay olsun. X te alınan her (x_n) Cauchy dizisi bu uzayda bir limite yakınsıyorsa (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.11 Kompaktlık

X bir metrik uzay olsun. X teki her bir dizi X te yakınsak olan en az bir alt diziye sahipse X e kompakt denir.

2.12 Lineer Uzay (Vektör Uzayı)

X boş olmayan bir küme ve F cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun ve toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$+ : X \times X \to X$

$\quad (x,y) \to x+y$

- $\cdot : F \times X \to X$

  $(a,x) \to a.x$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X'e F üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A) X, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in X$ için $x + y \in F$ dir.

G2) $\forall x, y, z \in X$ için x+(y+z)=(x+y)+z dir.

G3) $\forall x \in X$ için $x + \theta_x = \theta_x + x = x$ olacak şekilde $\theta_x \in X$ vardır

G4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta_x$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.

G5) $\forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için

L1) $\alpha.x \in X$ dir.

L2) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

L4) $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

L5) $1_F.x = x$ dir (Burada 1_F, F nin birim elemanıdır).

2.13 Konveks Küme

L bir lineer uzay, $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$B = \{ z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \quad 0 \le \alpha \le 1 \} \subseteq A$

ise A kümesine konveks küme denir.

2.14 Normlu (Vektör) Uzayı

X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$

$x \to \|x\|$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

(N1) $\|x\| \ge 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\bullet\|)$ ikilisine bir normlu (vektör) uzayı adı verilir.

Teorem 2.1.1 Her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.8 $C([a,b],\mathbb{R})$ sürekli fonksiyonların kümesini alalım.

$\forall f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

olarak tanımlanırsa;

(a) $C([a,b],\mathbb{R})$ sürekli fonksiyonlar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

(b) $\forall f \in C([a,b],\mathbb{R})$ için

$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$

olarak tanımlanırsa

$\|\bullet\|_\infty : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

fonksiyonu bir normdur.

2.15 Süreklilik

X ve Y normlu uzaylar $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\|x - x_0\|_X < \delta$ olan $\forall x \in X$ için $\|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$ ise T ye x_0 noktasında süreklidir denir. T, X in her noktasında sürekli ise T ye X te süreklidir denir.

Teorem 2.1.1 X sonlu boyutlu bir normlu uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. A nın kompakt olması için gerek ve yeter şart A nın kapalı ve sınırlı olmasıdır.

2.16 Banach Uzayı

Bir $(X, \|\bullet\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, $(X, \|\bullet\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Örnek 2.1.9 $\mathbb{R}^n$ uzayı $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ normuna göre bir reel Banach uzayıdır.

Teorem 2.1.3 (Schauder Sabit Nokta Teoremi) X bir Banach uzayı, A, X in boş olmayan herhangi bir kompakt, konveks alt kümesi ve $f : A \to A$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f en az bir sabit noktaya sahiptir.

BÖLÜM III

GECİKMELİ NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde, yapılan tez çalışmasına temel teşkil edecek olan El-Metwally vd.'nin (2003) gecikmeli nötral diferansiyel denklem sistemleri için salınım yapmayan çözümlerin varlığı üzerine yapmış oldukları çalışmalar incelenmiştir.

Burada $p\in\mathbf{R}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $\tau\in(0,\infty)$, $\sigma\in(0,\infty)$ ve Q sürekli bir matris olmak üzere gecikmeli nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{x}(t)+p\boldsymbol{x}(t-\tau)\big)+Q(t)\boldsymbol{x}(t-\sigma)=0 \qquad (3.1)$$

ve $\mathbf{B}$ bir nonsinguler $n\times n$ matris, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $\tau\in(0,\infty)$, $\sigma\in(0,\infty)$ ve Q, $[t_0,\infty)$ aralığında $n\times n$ boyutunda sürekli bir matris olmak üzere gecikmeli nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\big)+Q(t)\mathbf{x}(t-\sigma)=0 \qquad (3.2)$$

ele alınmıştır.

$m=\max\{\tau,\sigma\}$ olsun. (3.1) ve (3.2) denklemlerinin $t_1\geq t_0$ olmak üzere $\mathbf{y}\in C([t_1-m,\infty),\mathbf{R}^n)$, çözümü denilince $[t_1,\infty)$ aralığında $\mathbf{y}+p\mathbf{y}(t-\tau)$ ve $\mathbf{y}+B\mathbf{y}(t-\tau)$ sürekli diferansiyellenebilir ve $t\geq t_1$ için sırasıyla (3.1) ve (3.2) denklemlerinin sağlanması anlaşılmaktadır.

Teorem 3.1 Kabul edelim ki $p\neq -1$ ve $\|\ \|$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir norm olmak üzere

$$\int^{\infty}\|Q(s)\|ds<\infty$$

olsun. Bu taktirde (3.1) denkleminin salınım yapmayan çözümü vardır (El-Metwally vd., 2003).

İspat

$\mathbf{e}$, $\|\mathbf{e}\|=1$ olacak şekilde bir vektör olsun.

(a) $p\in(0,1)$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$t_1 \geq t_0 + \bar{\sigma}$, $\quad \bar{\sigma} = \max\{\tau, \sigma\}$

ve

$M_1 < 1$, $M_2 > M_1$ pozitif sabitler öyle ki

$$M_1 + M_2 < 2 \text{ ve } 1 - \frac{M_2 + M_1}{2} \leq p < \frac{1 - M_1}{1 - M_2} \tag{3.3}$$

olduğunda

$$\int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \leq \frac{1 - p(1 + M_2) - M_1}{M_2} \tag{3.4}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : M_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq M_2,\ t \geq t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} (1-p)\mathbf{e} - p\mathbf{x}(t-\tau) + \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds, & t \geq t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (3.3) ve (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(T\mathbf{x})(t)\| &= \left\|(1-p)\mathbf{e} - p\mathbf{x}(t-\tau) + \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\ &\leq \|(1-p)\mathbf{e}\| + \|p\mathbf{x}(t-\tau)\| + \left\|\int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\ &\leq (1-p) + p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| + \int_t^{\infty} \|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\| ds \\ &\leq 1 - p + pM_2 + \int_t^{\infty} \|Q(s)\|\|\mathbf{x}(s-\sigma)\| ds \\ &\leq 1 - p + pM_2 + M_2\int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \\ &\leq M_2. \end{aligned}$$

(3.4) ten dolayı

$$\|(T\mathbf{x})(t)\| = \left\|(1-p)\mathbf{e} - \left\{p\mathbf{x}(t-\tau) - \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\}\right\|$$

$$\geq \left\|(1-p)\mathbf{e}\right\| - \left\| p\mathbf{x}(t-\tau) - \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\|$$

$$\geq \left\|(1-p)\mathbf{e}\right\| - \left\| p\mathbf{x}(t-\tau)\right\| - \left\| \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\|$$

$$\geq (1-p) - p\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\| - \int_t^{\infty} \left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\sigma)\right\| ds$$

$$\geq (1-p) - pM_2 - \int_t^{\infty} \left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\sigma)\right\| ds$$

$$\geq (1-p) - pM_2 - M_2\int_{t_1}^{\infty} \left\|Q(s)\right\| ds$$

$$\geq M_1 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\left\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\right\| = \left\| -p[\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)] + \int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds \right\|$$

$$\leq \left\| -p[\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)]\right\| + \left\| \int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds \right\|$$

$$\leq p\left\|\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)\right\| + \int_t^{\infty} \left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)\right\| ds$$

$$\leq p\left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\| + \left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\| \int_t^{\infty} \left\|Q(s)\right\| ds$$

$$\leq q_1 \left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\| .$$

Yani,

$$\left\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\right\| \leq q_1 \left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|$$

dir. (3.3) ve (3.4) ten $q_1 < 1$ olur. Bu da *T* nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\left\|\mathbf{x}\right\| > 0$ olmak üzere **x**, $t \geq t_1$ için *T* dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (a) nın ispatını tamamlar.

(b) $p \in (1, \infty)$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$$t_1 + \tau \geq t_0 + \sigma$$

ve

$N_1 < 1$, $N_2 > N_1$ pozitif sabitler öyle ki

$$N_1 + N_2 < 2 \text{ ve } \frac{1+N_2}{1-N_1} < p \le \frac{2}{2-N_1-N_2} \tag{3.5}$$

olduğunda

$$\int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \le \frac{p-1-pN_1-N_2}{N_2} \tag{3.6}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : N_1 \le \|\mathbf{x}(t)\| \le N_2,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\mathbf{e} - \dfrac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) + \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds, & t \ge t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (3.5) ve (3.6) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(T\mathbf{x})(t)\| &= \left\| \left(1-\frac{1}{p}\right)\mathbf{e} - \frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\le \left\| \left(1-\frac{1}{p}\right)\mathbf{e} \right\| + \left\| \frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) \right\| + \left\| \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\le \left(1-\frac{1}{p}\right)\|\mathbf{e}\| + \frac{1}{p}\|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty} \|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\| ds \\ &\le 1 - \frac{1}{p} + \frac{N_2}{p} + \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty} \|Q(s)\| \|\mathbf{x}(s-\sigma)\| ds \\ &\le 1 - \frac{1}{p} + \frac{N_2}{p} + \frac{N_2}{p}\int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \\ &\le N_2 . \end{aligned}$$

(3.6) dan dolayı

$$\begin{aligned} \|(T\mathbf{x})(t)\| &= \left\| \left(1-\frac{1}{p}\right)\mathbf{e} - \frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\ge \left\| \left(1-\frac{1}{p}\right)\mathbf{e} \right\| - \left\| \frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) \right\| - \left\| \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \end{aligned}$$

$$\geq \left(1-\frac{1}{p}\right)\|\boldsymbol{e}\| - \frac{1}{p}\|\boldsymbol{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\|Q(s)\boldsymbol{x}(s-\sigma)\|ds$$

$$\geq 1-\frac{1}{p}-\frac{N_2}{p}-\frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\|ds$$

$$\geq 1-\frac{1}{p}-\frac{N_2}{p}-\frac{N_2}{p}\int_{t_1}^{\infty}\|Q(s)\|ds$$

$$\geq N_1 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|(T\mathbf{x_1})(t)-(T\mathbf{x_2})(t)\| &= \left\| -\frac{1}{p}[\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)] + \frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds \right\| \\
&\leq \left\| -\frac{1}{p}[\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)] \right\| + \frac{1}{p}\left\| \int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{p}\|\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)\| + \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\|Q(s)\|\|\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)\|ds \\
&\leq \frac{1}{p}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| + \frac{1}{p}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|\int_{t_1}^{\infty}\|Q(s)\|ds \\
&\leq q_2\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| .
\end{aligned}$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\| \leq q_2\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$$

dir. (3.5) ve (3.6) dan $q_2 < 1$ olur. Bu da *T* nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere **x**, $t \geq t_1$ için *T* dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (b) nin ispatını tamamlar.

(c) $p = 1$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$t_1 + \tau \geq t_0 + \sigma$

ve **P** sıfır olmayan sabit vektör ve $P_1 < P_2$ pozitif sabitler olmak üzere

$$P_1 < \|\mathbf{P}\| \le \frac{P_1 + P_2}{2} \tag{3.7}$$

olduğunda

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{t_1+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| ds \le \frac{\|\mathbf{P}\| - P_1}{P_2} \tag{3.8}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : P_1 \le \|\mathbf{x}(t)\| \le P_2,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t) = \begin{cases} \mathbf{P} + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds, & t \ge t_1 \\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (3.7) ve (3.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\| \mathbf{P} + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\le \|\mathbf{P}\| + \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\le \|\mathbf{P}\| + \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\le \|\mathbf{P}\| + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| \|\mathbf{x}(s-\sigma)\| ds \\ &\le \|\mathbf{P}\| + P_2 \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| ds \\ &\le P_2 . \end{aligned}$$

(3.8) den dolayı

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\| \mathbf{P} + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\ge \|\mathbf{P}\| - \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \\ &\ge \|\mathbf{P}\| - \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds \right\| \end{aligned}$$

$$\geq \|\mathbf{P}\| - \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| \|\mathbf{x}(s-\sigma)\| \, ds$$

$$\geq \|\mathbf{P}\| - P_2 \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| \, ds$$

$$\geq P_1 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left\| (T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t) \right\| &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} Q(s) \left[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma) \right] ds \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \left\| Q(s) \left[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma) \right] \right\| ds \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| \|\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)\| \, ds \\
&\leq \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t+(2i-1)\tau}^{t+2i\tau} \|Q(s)\| \, ds \\
&\leq q_3 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| .
\end{aligned}$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq q_3 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$$

dir. (3.7) ve (3.8) den $q_3 < 1$ olur. Bu da *T* nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere **x**, $t \geq t_1$ için *T* dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (c) nin ispatını tamamlar.

(d) $p \in (-1, 0)$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$$t_1 \geq t_0 + \max\{\tau, \sigma\}$$

ve

$L_1 < 1$, $L_2 > L_1$ pozitif sabitler öyle ki

$$2(1+p) < L_1 + L_2 < 2 \text{ ve } \frac{L_1 - 1}{1 + L_2} < p \leq \frac{L_2 + L_1}{2} - 1 \tag{3.9}$$

olduğunda

$$\int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \leq \frac{1 + p(1 + L_2) - L_1}{L_2} \tag{3.10}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in X:\ L_1\le\|\mathbf{x}(t)\|\le L_2,\ t\ge t_0\}$ olsun.

$T:A\to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t)=\begin{cases}(1+p)\mathbf{e}-p\mathbf{x}(t-\tau)+\int_t^\infty Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds, & t\ge t_1\\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (3.9) ve (3.10) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\left\|(1+p)\mathbf{e}-p\mathbf{x}(t-\tau)+\int_t^\infty Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\|\\
&\le\left\|(1+p)\mathbf{e}\right\|+\left\|p\mathbf{x}(t-\tau)\right\|+\left\|\int_t^\infty Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\|\\
&\le(1+p)-p\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\|+\int_t^\infty\left\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\right\|ds\\
&\le 1+p-pL_2+\int_t^\infty\left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\sigma)\right\|ds\\
&\le 1+p-pL_2+L_2\int_{t_1}^\infty\left\|Q(s)\right\|ds\\
&\le L_2.\end{aligned}$$

(3.10) dan dolayı

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\left\|(1+p)\mathbf{e}-\left\{p\mathbf{x}(t-\tau)-\int_t^\infty Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\}\right\|\\
&\ge\left\|(1+p)\mathbf{e}\right\|-\left\|p\mathbf{x}(t-\tau)-\int_t^\infty Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\|\\
&\ge\left\|(1+p)\mathbf{e}\right\|-\left\|p\mathbf{x}(t-\tau)\right\|-\left\|\int_t^\infty Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\|\\
&\ge(1+p)+p\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\|-\int_t^\infty\left\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\right\|ds\\
&\ge(1+p)+pL_2-\int_t^\infty\left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\sigma)\right\|ds\\
&\ge(1+p)+pL_2-L_2\int_{t_1}^\infty\left\|Q(s)\right\|ds\\
&\ge L_1.\end{aligned}$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \left\|-p[\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)] + \int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq \left\|-p[\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)]\right\| + \left\|\int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq -p\left\|\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)\right\| + \left\|\int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq -p\left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\| + \left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|\left\|\int_t^{\infty} Q(s)ds\right\| \\
&\leq q_4\left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|.
\end{aligned}$$

Yani,

$$\left\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\right\| \leq q_4\left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|$$

dir. (3.9) ve (3.10) dan $q_4 < 1$ olur. Bu da *T* nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için *T* dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (d) nin ispatını tamamlar.

(e) $p \in (-\infty, -1)$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$t_1 + \tau \geq t_0 + \sigma$

ve

H_1 ve H_2 pozitif sabitler öyle ki

$$H_1 < H_2 < 1,\ H_1 + H_2 > 1 \text{ ve } \frac{2}{H_1 + H_2 - 2} < p < \frac{1 + H_2}{H_1 - 1} \tag{3.11}$$

olduğunda

$$\int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \leq \frac{pH_1 - 1 - p - H_2}{H_2} \tag{3.12}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : H_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq H_2,\ t \geq t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{p}\right)\mathbf{e} - \dfrac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) + \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds, & t \geq t_1 \\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (3.11) ve (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\left(1+\frac{1}{p}\right)\mathbf{e} - \frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\ &\leq \left\|\left(1+\frac{1}{p}\right)\mathbf{e}\right\| + \left\|\frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau)\right\| + \left\|\frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\ &\leq \left(1+\frac{1}{p}\right)\left\|\mathbf{e}\right\| - \frac{1}{p}\left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\| - \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\right\| ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{p} - \frac{H_2}{p} - \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\right\| ds \\ &\leq 1 + \frac{1}{p} - \frac{H_2}{p} - \frac{H_2}{p}\int_{t_1}^{\infty}\left\|Q(s)\right\| ds \\ &\leq H_2. \end{aligned}$$

(3.12) den dolayı

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\left(1+\frac{1}{p}\right)\mathbf{e} - \frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\ &\geq \left\|\left(1+\frac{1}{p}\right)\mathbf{e}\right\| - \left\|\frac{1}{p}\mathbf{x}(t+\tau)\right\| - \left\|\frac{1}{p}\int_{t}^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\ &\geq \left(1-\frac{1}{p}\right)\left\|\mathbf{e}\right\| + \frac{1}{p}\left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\| - \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\right\| ds \\ &\geq 1 + \frac{1}{p} + \frac{H_2}{p} - \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\sigma)\right\| ds \\ &\geq 1 + \frac{1}{p} + \frac{H_2}{p} + \frac{H_2}{p}\int_{t_1}^{\infty}\left\|Q(s)\right\| ds \\ &\geq H_1. \end{aligned}$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\left\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\right\| = \left\|\frac{1}{p}[\mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau)] - \frac{1}{p}\int_{t+\tau}^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\|$$

$$\leq \left\|\frac{1}{p}[\mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau)]\right\| - \frac{1}{p}\left\|\int_{t}^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\|$$

$$\leq -\frac{1}{p}\left\|\mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau)\right\| - \frac{1}{p}\int_{t}^{\infty} \left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x_1}(s-\sigma) - \mathbf{x_2}(s-\sigma)\right\| ds$$

$$\leq -\frac{1}{p}\left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\| - \frac{1}{p}\left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|\left\|\int_{t}^{\infty} Q(s)ds\right\|$$

$$\leq q_5 \left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|.$$

Yani,

$$\left\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\right\| \leq q_5 \left\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\right\|.$$

dir. (3.11) ve (3.12) den $q_5 < 1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (e) nin ispatını tamamlar.

Örnek 3.1 $Q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) & q_2(t) \\ q_3(t) & q_4(t) \end{bmatrix}$ ve $q_1(t) + q_2(t) = q_3(t) + q_4(t) = 2/(ae^t + e^{\sigma})$, ($a \in \mathbb{R}$)

olmak üzere

$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{x}(t) + e^{-\tau}\boldsymbol{x}(t-\tau)\right) + Q(t)\boldsymbol{x}(t-\sigma) = 0$ denklem sisteminin $[t_0, \infty)$ aralığında

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} a + e^{-\tau} \\ a + e^{-\tau} \end{bmatrix}$ salınım yapmayan çözümü vardır.

Teorem 3.2 Kabul edelim ki $\|\ \|$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir norm olmak üzere

$$\int^{\infty} \|Q(s)\| ds < \infty$$

olsun. Bu taktirde (3.2) denkleminin salınım yapmayan çözümü vardır (El-Metwally vd., 2003).

İspat

$\|\mathbf{B}\| = p$ ve $\mathbf{e}$, $\|\mathbf{e}\| = 1$ olacak şekilde bir vektör olsun.

(a) $p \in (0,1)$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük olsun.

$t_1 \geq t_0 + \bar{\sigma}, \qquad \bar{\sigma} = \max\{\tau, \sigma\}$

ve

$M_1 < 1,\ M_2 > M_1$ pozitif sabitler öyle ki

$$1 - \frac{M_2 + M_1}{2} < p < \frac{1 - M_1}{1 - M_2} \text{ ve } 1 - p < M_1 + M_2 < 2 \tag{3.13}$$

olduğunda

$$\int_{t_1}^{\infty} \|Q(S)\| ds \leq \frac{1 - p(1 + M_2) - M_1}{M_2} \tag{3.14}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : M_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq M_2,\ t \geq t_0\}$ olsun.

$\mathbf{b}$ bir vektör ve $\|\mathbf{b}\| = 1 - p$ olmak üzere $T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{x}(t - \tau) + \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s - \sigma) ds, & t \geq t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (3.13) ve (3.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|(T\mathbf{x})(t)\| &= \left\| \mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{x}(t - \tau) + \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s - \sigma) ds \right\| \\
&\leq \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{B}\mathbf{x}(t - \tau)\| + \left\| \int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s - \sigma) ds \right\| \\
&\leq 1 - p + \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{x}(t - \tau)\| + \int_t^{\infty} \|Q(s)\mathbf{x}(s - \sigma)\| ds \\
&\leq 1 - p + pM_2 + \int_t^{\infty} \|Q(s)\| \|\mathbf{x}(s - \sigma)\| ds \\
&\leq 1 - p + pM_2 + M_2 \int_{t_1}^{\infty} \|Q(s)\| ds \\
&\leq M_2 .
\end{aligned}$$

(3.14) ten dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \left\|\mathbf{b}-\left\{\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)-\int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\}\right\| \\
&\geq \|\mathbf{b}\|-\left\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)-\int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\
&\geq 1-p-\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\|-\left\|\int_t^{\infty} Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\
&\geq 1-p-\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}(t-\tau)\|-\int_t^{\infty}\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\|ds \\
&\geq 1-p-pM_2-\int_t^{\infty}\|Q(s)\|\|\mathbf{x}(s-\sigma)\|ds \\
&\geq 1-p-pM_2-M_2\int_{t_1}^{\infty}\|Q(s)\|ds \\
&\geq M_1 .
\end{aligned}
$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1},\mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t)-(T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \left\|-\mathbf{B}[\mathbf{x_1}(t-\tau)-\mathbf{x_2}(t-\tau)]+\int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq \left\|-\mathbf{B}[\mathbf{x_1}(t-\tau)-\mathbf{x_2}(t-\tau)]\right\|+\left\|\int_t^{\infty} Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq \|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x_1}(t-\tau)-\mathbf{x_2}(t-\tau)\|+\int_t^{\infty}\|Q(s)\|\|\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)\|ds \\
&\leq p\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|+\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|\int_t^{\infty}\|Q(s)\|ds \\
&\leq r_1\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| .
\end{aligned}
$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\| \leq r_1\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$$

dir. (3.13) ve (3.14) ten $r_1 < 1$ olur. Bu da *T* nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için *T* dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (a) nın ispatını tamamlar.

(b) $p \in (1,\infty)$ durumu:

t_1 yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$t_1+\tau \ge t_0+\sigma$

ve

$N_1<1$, $N_2>N_1$ pozitif sabitler öyle ki

$$N_1+N_2\le 2 \text{ ve } \frac{1+N_2}{1-N_1}<p<\frac{2}{2-N_1-N_2} \tag{3.15}$$

olduğunda

$$\int_{t_1}^{\infty}\|Q(S)\|ds\le\frac{p-1-pN_1-N_2}{N_2} \tag{3.16}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in X : N_1\le\|\mathbf{x}(t)\|\le N_2,\ t\ge t_0\}$ olsun.

$\mathbf{c}$ bir vektör ve $\|\mathbf{c}\|=1-\dfrac{1}{p}$ olmak üzere $T:A\to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t)=\begin{cases}\mathbf{c}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(t+\tau)+\mathbf{B}^{-1}\int_{t+\tau}^{\infty}Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds, & t\ge t_1\\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (3.15) ve (3.16) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|(T\mathbf{x})(t)\|&=\left\|\mathbf{c}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(t+\tau)+\mathbf{B}^{-1}\int_{t+\tau}^{\infty}Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\|\\
&\le\|\mathbf{c}\|+\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(t+\tau)\|+\left\|\mathbf{B}^{-1}\int_{t+\tau}^{\infty}Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\|\\
&\le 1-\frac{1}{p}+\|\mathbf{B}^{-1}\|\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\|\mathbf{B}^{-1}\|\int_t^{\infty}\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\|ds\\
&\le 1-\frac{1}{p}+\frac{N_2}{p}+\frac{1}{p}\int_t^{\infty}\|Q(s)\|\|\mathbf{x}(s-\sigma)\|ds\\
&\le 1-\frac{1}{p}+\frac{N_2}{p}+\frac{N_2}{p}\int_{t_1}^{\infty}\|Q(s)\|ds\\
&\le N_2.\end{aligned}$$

(3.16) dan dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \left\|\mathbf{c}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(t+\tau)+\mathbf{B}^{-1}\int_{t+\tau}^{\infty}Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\
&\geq \|\mathbf{c}\|-\left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}(t+\tau)\right\|-\left\|\mathbf{B}^{-1}\int_{t+\tau}^{\infty}Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)ds\right\| \\
&\geq 1-\frac{1}{p}-\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\|-\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\mathbf{x}(s-\sigma)\right\|ds \\
&\geq 1-\frac{1}{p}-\frac{N_2}{p}-\frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\sigma)\right\|ds \\
&\geq 1-\frac{1}{p}-\frac{N_2}{p}-\frac{N_2}{p}\int_{t_1}^{\infty}\left\|Q(s)\right\|ds \\
&\geq N_1 .
\end{aligned}
$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t)-(T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \left\|-\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)]+\mathbf{B}^{-1}\int_{t+\tau}^{\infty}Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq \left\|-\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)]\right\|+\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\int_{t}^{\infty}Q(s)[\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)]ds\right\| \\
&\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)\right\|+\frac{1}{p}\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\right\|\left\|\mathbf{x_1}(s-\sigma)-\mathbf{x_2}(s-\sigma)\right\|ds \\
&\leq \frac{1}{p}\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|+\frac{1}{p}\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|\int_{t}^{\infty}\left\|Q(s)\right\|ds \\
&\leq r_2\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|.
\end{aligned}
$$

Yani,

$\left\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\right\| \leq r_2\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|$

dir. (3.15) ve (3.16) dan $r_2 < 1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da (b) nin ispatını tamamlar.

(c) $p = 1$ için ispat Teorem 3.1 de (c) durumuna benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.2 $\alpha,\beta,b\in R$ ve $\tau>0,\ \sigma\geq 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)+\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha\\ -\beta & \beta\end{bmatrix}x(t-\tau)\right]+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{a+2} & -\dfrac{1}{at^2\left(b(t-\sigma)+1\right)}\\ 0 & \dfrac{t-\sigma}{t^2\left(b(1-\sigma)+1\right)}\end{bmatrix}x(t-\sigma)=0$$

Denklem sisteminin $\left(\max\{\tau,\sigma\}+1,\infty\right)$ aralığında

$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}a+\dfrac{1}{t}\\ a+\dfrac{1}{t}\end{bmatrix}$ salınım yapmayan çözümü vardır.

BÖLÜM IV

YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde, Candan'ın (2013) yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemleri için salınım yapmayan çözümlerin varlığı üzerine yapmış olduğu çalışma incelenmiştir.

$n \geq 1$ bir pozitif tamsayı $P \in C\left([t_0,\infty),\mathbf{R}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $Q_i\,;\left[t_0,\infty\right)$ aralığında sürekli $n \times n$ matris, $i = 1,2.$, $\tau \in (0,\infty)$, $\sigma_1,\sigma_2 \in \left[0,\infty\right)$ olmak üzere yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+P(t)\mathbf{x}(t-\tau)\right)+(-1)^{n-1}\left[Q_1(t)\mathbf{x}(t-\sigma_1)-Q_2(t)\mathbf{x}(t-\sigma_2)\right]=0 \tag{4.1}$$

ve $n \geq 1$ bir pozitif tamsayı, $\mathbf{B}$ bir nonsinguler $n \times n$ matris, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $Q_i\,;\left[t_0,\infty\right)$ aralığında sürekli $n \times n$ matris, $i = 1,2.$, $\tau \in (0,\infty)$, $\sigma_1,\sigma_2 \in \left[0,\infty\right)$ olmak üzere yüksek mertebeden matris katsayılı nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right)+(-1)^{n-1}\left[Q_1(t)\mathbf{x}(t-\sigma_1)-Q_2(t)\mathbf{x}(t-\sigma_2)\right]=0 \tag{4.2}$$

ele alınmıştır.

$m = \max\left\{\tau,\sigma_1,\sigma_2\right\}$ olsun. (4.1) ve (4.2) denklemlerinin $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $x \in C([t_1-m,\infty),\mathbf{R}^n)$, çözümü denilince $\left[t_1,\infty\right)$ aralığında $\mathbf{x}+P(t)\mathbf{x}(t-\tau)$ ve $\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)$ n defa sürekli diferansiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için sırasıyla (4.1) ve (4.2) denklemlerinin sağlanması anlaşılmaktadır.

Teorem 4.1 Kabul edelim ki $0 \leq P(t) \leq p < \frac{1}{2}$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} s^{n-1}\left\|Q_i(s)\right\|ds < \infty,\; i = 1,2. \tag{4.3}$$

olsun. Bu taktirde (4.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır (Candan, 2013).

İspat

$t_1 \geq t_0 + \max\{\tau,\sigma_1,\sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçebiliriz öyle ki

b sabit vektör, M_1 ve M_2 pozitif sabitler öyle ki

$$pM_2 + M_1 < \|\mathbf{b}\| < 2\|\mathbf{b}\| \le M_2 + M_1 \tag{4.4}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right)ds \le \frac{\|\mathbf{b}\| - pM_2 - M_1}{M_2},\ t \ge t_1 \tag{4.5}$$

sağlanır.

Λ, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in \Lambda :\ M_1 \le \|\mathbf{x}(t)\| \le M_2,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to \Lambda$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t) = \begin{cases} \mathbf{b} - P(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds, & t \ge t_1 \\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (4.4) ve (4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\mathbf{b} - P(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\| \\ &\le \|\mathbf{b}\| + \|p\mathbf{x}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\| \\ &\le \|\mathbf{b}\| + \|p\mathbf{x}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \left\|(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds \\ &\le \|\mathbf{b}\| + p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\right)ds \\ &\le \|\mathbf{b}\| + pM_2 + \frac{M_2}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right)ds \\ &\le M_2. \end{aligned}$$

(4.5) ten dolayı

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\mathbf{b} - P(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\| \\ &\ge \|\mathbf{b}\| - \|p\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\| \end{aligned}$$

$$\geq \|\mathbf{b}\| - p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \left\|(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\| ds$$

$$\geq \|\mathbf{b}\| - pM_2 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\right) ds$$

$$\geq \|\mathbf{b}\| - pM_2 - \frac{M_2}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right) ds$$

$$\geq M_1 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. A, Λ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left\|(T\mathbf{x}_1)(t) - (T\mathbf{x}_2)(t)\right\| &= \Bigg\| P(t)\left[\mathbf{x}_1(t-\tau) - \mathbf{x}_2(t-\tau)\right] + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} ds \\ &\quad \times \left[Q_1(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_1) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right) - Q_2(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_2) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right)\right] ds \Bigg\| \\ &\leq P(t)\left\|\mathbf{x}_1(t-\tau) - \mathbf{x}_2(t-\tau)\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} ds \\ &\quad \times \left(\|Q_1(s)\|\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_1) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\|\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_2) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\|\right) ds \\ &\leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|\left(p + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right) ds\right) \\ &\leq q_1\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| .\end{aligned}$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq q_1\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$$

dir. (4.4) ve (4.5) ten $q_1 < 1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2 Kabul edelim ki $2 < p \leq P(t) \leq p_0 < \infty$ ve (4.3) sağlansın. Bu taktirde (4.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır (Candan, 2013).

İspat

$t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçebiliriz öyle ki

$\mathbf{b}$ sabit vektör, M_3 ve M_4 pozitif sabitler öyle ki

$$p_0 M_3 + M_4 < \|\mathbf{b}\| < 2\|\mathbf{b}\| \le pM_4 + p_0 M_3 \tag{4.6}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right)ds \le \frac{\|\mathbf{b}\| - M_4 - p_0 M_3}{M_4},\ t \ge t_1 \tag{4.7}$$

sağlanır.

Λ, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in \Lambda:\ M_3 \le \|\mathbf{x}(t)\| \le M_4,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to \Lambda$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(t+\tau)}\left\{\mathbf{b} - \mathbf{x}(t+\tau) + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{t}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\right.\right. \\ \qquad \left.\left. - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds, \right. \qquad t \ge t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), \qquad t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (4.6) ve (4.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|(T\mathbf{x})(t)\| &\le \frac{1}{p}\left(\left\|\mathbf{b} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\right) \\
&\le \frac{1}{p}\left(\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\right) \\
&\le \frac{1}{p}\left(\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds\right) \\
&\le \frac{1}{p}\left(\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\right)ds\right) \\
&\le \frac{1}{p}\left(\|\mathbf{b}\| + M_4 + \frac{M_4}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right)ds\right) \\
&\le M_4.
\end{aligned}$$

(4.7) den dolayı

$$\begin{aligned}
\|(T\mathbf{x})(t)\| &\ge \frac{1}{p_0}\left(\left\|\mathbf{b} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\right) \\
&\ge \frac{1}{p_0}\left(\|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\right) \\
&\ge \frac{1}{p_0}\left(\|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) - Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds\right)
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{p_0}\left(\|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \left(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\| \right) ds \right)$$
$$\geq \frac{1}{p_0}\left(\|\mathbf{b}\| - M_4 - \frac{M_4}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\| \right) ds \right)$$
$$\geq M_3 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. A, Λ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|(T\mathbf{x}_1)(t) - (T\mathbf{x}_2)(t)\| &\leq \frac{1}{p}\Big\| [\mathbf{x}_1(t+\tau) - \mathbf{x}_2(t+\tau)] + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} ds \\
&\quad \times \left[Q_1(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_1) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right) - Q_2(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_2) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right) \right] ds \Big\| \\
&\leq \frac{1}{p}\Big(\|\mathbf{x}_1(t+\tau) - \mathbf{x}_2(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} ds \\
&\quad \times \left(\|Q_1(s)\| \|\mathbf{x}_1(s-\sigma_1) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\| \|\mathbf{x}_1(s-\sigma_2) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\| \right) ds \Big) \\
&\leq \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{p}\left(1 + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\| \right) ds \right) \\
&\leq q_2 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| .
\end{aligned}$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq q_2 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$$

dir. (4.6) ve (4.7) den $q_2 < 1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3 Kabul edelim ki $-\frac{1}{2} \leq p \leq P(t) < 0$ ve (4.3) sağlansın. Bu taktirde (4.1) denkleminin salınım yapmayan çözümü vardır (Candan, 2013).

İspat

$t_1 \geq t_0 + \max\{\tau, \sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$\mathbf{b}$ sabit vektör, M_5 ve M_6 pozitif sabitler öyle ki

$$|p| M_6 + M_5 < \|\mathbf{b}\| < 2\|\mathbf{b}\| \leq M_6 + M_5 \tag{4.8}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\right)ds \le \frac{\|\mathbf{b}\|-|p|M_6-M_5}{M_6},\ t\ge t_1 \tag{4.9}$$

sağlanır.

Λ, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in\Lambda:\ M_5\le\|\mathbf{x}(t)\|\le M_6,\ t\ge t_0\}$ olsun.

$T:A\to\Lambda$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t)=\begin{cases}\mathbf{b}-P(t)\mathbf{x}(t-\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds, & t\ge t_1\\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0\le t\le t_1\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (4.8) ve (4.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\left\|\mathbf{b}-P(t)\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\le\|\mathbf{b}\|+\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\le\|\mathbf{b}\|+\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \left\|(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds\\
&\le\|\mathbf{b}\|+|p|\|\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\|+\|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\right)ds\\
&\le\|\mathbf{b}\|+|p|M_6+\frac{M_6}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\right)ds\\
&\le M_6.\end{aligned}$$

(4.9) dan dolayı

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\left\|\mathbf{b}-P(t)\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\ge\|\mathbf{b}\|-\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\ge\|\mathbf{b}\|-\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \left\|(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds\\
&\ge\|\mathbf{b}\|-\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\|+\|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\right)ds\\
&\ge\|\mathbf{b}\|-|p|M_6-\frac{M_6}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\right)ds\\
&\ge M_5.\end{aligned}$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. A, Λ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left\|(T\mathbf{x}_1)(t) - (T\mathbf{x}_2)(t)\right\| &= \Bigg\| P(t)\left[\mathbf{x}_1(t-\tau) - \mathbf{x}_2(t-\tau)\right] + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} ds \\ &\quad \times \left[Q_1(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_1) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right) - Q_2(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_2) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right)\right] ds \Bigg\| \\ &\leq |P(t)| \left\|\mathbf{x}_1(t-\tau) - \mathbf{x}_2(t-\tau)\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} ds \\ &\quad \times \left(\|Q_1(s)\| \left\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_1) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right\| + \|Q_2(s)\| \left\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_2) - \mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right\|\right) ds \\ &\leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \left(|p| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right) ds \right) \\ &\leq q_3 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|.\end{aligned}$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq q_3 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$$

dir. (4.8) ve (4.9) ten $q_3 < 1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4 Kabul edelim ki $-\infty < p_0 \leq P(t) \leq p < -2$ ve (4.3) sağlansın. Bu taktirde (4.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır (Candan, 2013).

İspat

$t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$\mathbf{b}$ sabit vektör, M_7 ve M_8 pozitif sabitler öyle ki

$$|p_0| M_7 + M_8 < \|\mathbf{b}\| < 2\|\mathbf{b}\| \leq |p| M_8 + |p_0| M_7 \text{ olduğunda} \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^\infty (s-t-\tau)^{n-1} \left(\|Q_1(s)\| + \|Q_2(s)\|\right) ds \leq \frac{\|\mathbf{b}\| - M_8 - |p_0| M_7}{M_8}, \ t \geq t_1 \tag{4.11}$$

sağlanır.

Λ, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in \Lambda : M_7 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq M_8, \ t \geq t_0\}$ olsun.

$T:A\to\Lambda$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{P(t+\tau)}\Big\{\mathbf{b}-\mathbf{x}(t+\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\\ \quad -Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\Big\}, \qquad t\ge t_1\\ (T\mathbf{x})(t_1), \qquad t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (4.10) ve (4.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|(T\mathbf{x})(t)\| &\le \frac{1}{|p|}\left(\left\|\mathbf{b}-\mathbf{x}(t+\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right\|\right)\\
&\le \frac{1}{|p|}\left(\|\mathbf{b}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right\|\right)\\
&\le \frac{1}{|p|}\left(\|\mathbf{b}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)\right\|ds\right)\\
&\le \frac{1}{|p|}\left(\|\mathbf{b}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\|+\|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\big)ds\right)\\
&\le \frac{1}{|p|}\left(\|\mathbf{b}\|+M_8+\frac{M_8}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\big)ds\right)\\
&\le M_8\,.\end{aligned}$$

(4.11) den dolayı

$$\begin{aligned}\|(T\mathbf{x})(t)\| &\ge \frac{1}{|p_0|}\left(\left\|\mathbf{b}-\mathbf{x}(t+\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right\|\right)\\
&\ge \frac{1}{|p_0|}\left(\|\mathbf{b}\|-\|\mathbf{x}(t+\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right\|\right)\\
&\ge \frac{1}{|p_0|}\left(\|\mathbf{b}\|-\|\mathbf{x}(t+\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)\right\|ds\right)\\
&\ge \frac{1}{|p_0|}\left(\|\mathbf{b}\|-\|\mathbf{x}(t+\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\|+\|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\|\big)ds\right)\\
&\ge \frac{1}{|p_0|}\left(\|\mathbf{b}\|-M_8-\frac{M_8}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\big)ds\right)\\
&\ge M_7\,.\end{aligned}$$

Böylece $TA\subset A$ olduğu ispatlanır. A,Λ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere

$$\left\|(T\mathbf{x}_1)(t)-(T\mathbf{x}_2)(t)\right\| \leq \frac{1}{|p|}\left\|\left[\mathbf{x}_1(t+\tau)-\mathbf{x}_2(t+\tau)\right]+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}ds\right.$$

$$\left.\times\left[Q_1(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_1)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right)-Q_2(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_2)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right)\right]ds\right\|$$

$$\leq \frac{1}{|p|}\left(\left\|\mathbf{x}_1(t+\tau)-\mathbf{x}_2(t+\tau)\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}ds\right.$$

$$\left.\times\left(\left\|Q_1(s)\right\|\left\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_1)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\left\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_2)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right\|\right)ds\right)$$

$$\leq \frac{\left\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right\|}{|p|}\left(1+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\right)ds\right)$$

$$\leq q_4\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|.$$

Yani,

$$\left\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\right\| \leq q_4\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|$$

dir. (4.10) ve (4.11) den $q_4 < 1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.5 Kabul edelim ki $0 < \|\mathbf{B}\| < \frac{1}{2}$ ve (4.3) sağlansın. Bu taktirde (4.2) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır (Candan, 2012).

İspat

$t_1 \geq t_0 + \max\{\tau, \sigma_1, \sigma_2\}$ olmak üzere $t_1 > t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$\mathbf{b}$ sabit vektör, M_1 ve M_2 pozitif sabitler öyle ki

$$\|B\| N_2 + N_1 < \|\mathbf{b}\| < 2\|\mathbf{b}\| \leq N_2 + N_1 \tag{4.12}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t}^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\right)ds \leq \frac{\|\mathbf{b}\|-\|\mathbf{B}\|N_2-N_1}{N_2},\ t \geq t_1 \tag{4.13}$$

sağlanır.

Λ, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in \Lambda :\ N_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq N_2,\ t \geq t_0\}$ olsun.

$T : A \to \Lambda$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t)=\begin{cases}\mathbf{b}-\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds, & t\ge t_1\\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0\le t\le t_1\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (4.12) ve (4.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\left\|\mathbf{b}-\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\le\left\|\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\le\left\|\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\left\|(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds\\
&\le\left\|\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}\right\|\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\right\|+\left\|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right\|\right)ds\\
&\le\left\|\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}\right\|N_2+\frac{N_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\right)ds\\
&\le N_2\,.\end{aligned}$$

(4.13) ten dolayı

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\left\|\mathbf{b}-\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\ge\left\|\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right\|-\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)ds\right\|\\
&\ge\left\|\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\left\|(s-t)^{n-1}\left(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right)\right\|ds\\
&\ge\left\|\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}\right\|\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)\right\|+\left\|Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\right\|\right)ds\\
&\ge\left\|\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}\right\|N_2-\frac{N_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\right)ds\\
&\ge N_1\,.\end{aligned}$$

Böylece $TA\subset A$ olduğu ispatlanır. A,Λ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere

$$\left\|(T\mathbf{x}_1)(t)-(T\mathbf{x}_2)(t)\right\| = \Big\| \mathbf{B}\left[\mathbf{x}_1(t-\tau)-\mathbf{x}_2(t-\tau)\right] + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}ds$$

$$\times\left[Q_1(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_1)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right)-Q_2(s)\left(\mathbf{x}_1(s-\sigma_2)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right)\right]ds\Big\|$$

$$\leq \Bigg(\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}_1(t-\tau)-\mathbf{x}_2(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}ds$$

$$\times\left(\|Q_1(s)\|\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_1)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\| + \|Q_2(s)\|\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_2)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\|\right)ds\Bigg)$$

$$\leq \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|\left(\|\mathbf{B}\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\right)ds\right)$$

$$\leq q_5\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|.$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\| \leq q_5\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$$

dir. (4.12) ve (4.13) ten $q_5<1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\|>0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.6 Kabul edelim ki $0<\|\mathbf{B}^{-1}\|<\frac{1}{2}$ ve (4.3) sağlansın. Bu taktirde (4.2) denkleminin salınım yapmayan çözümü vardır (Candan, 2013).

İspat

$t_1+\tau \geq t_0+\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$ olmak üzere $t_1>t_0$ yeterince büyük seçilebilir öyle ki

$\mathbf{b}$ sabit vektör, N_3 ve N_4 pozitif sabitler öyle ki

$$\|\mathbf{B}^{-1}\|N_4+N_3<\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\|<2\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\|\leq N_4+N_3 \tag{4.14}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^\infty (s-t-\tau)^{n-1}\left(\|Q_1(s)\|+\|Q_2(s)\|\right)ds \leq \frac{\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\|-N_3-N_4\|\mathbf{B}^{-1}\|}{N_4\|\mathbf{B}^{-1}\|},\ t\geq t_1 \tag{4.15}$$

sağlanır.

Λ, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in\Lambda:\ N_3\leq\|\mathbf{x}(t)\|\leq N_4,\ t\geq t_0\}$ olsun.

$T:A\rightarrow\Lambda$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$
\left(T\mathbf{x}\right)(t)=\begin{cases}\mathbf{B}^{-1}\Big\{\mathbf{b}-\mathbf{x}(t+\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1) \\ \quad -Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\Big\}, \qquad t\ge t_1 \\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), \qquad t_0\le t\le t_1.\end{cases}
$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (4.14) ve (4.15) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{b}-\mathbf{x}(t+\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right)\right\| \\
&\le \left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\|+\left\|\frac{\mathbf{B}^{-1}}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right\| \\
&\le \left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|N_4+\frac{\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\left\|Q_1(s)\right\|N_4+\left\|Q_2(s)\right\|N_4\big)ds \\
&\le \left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right\|+\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left(N_4+\frac{N_4}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\big)ds\right) \\
&\le N_4 .
\end{aligned}
$$

(4.15) ten dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{b}-\mathbf{x}(t+\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right)\right\| \\
&\ge \left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\|-\left\|\frac{\mathbf{B}^{-1}}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(Q_1(s)\mathbf{x}(s-\sigma_1)-Q_2(s)\mathbf{x}(s-\sigma_2)\big)ds\right\| \\
&\ge \left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|N_4-\frac{\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\left\|Q_1(s)\right\|N_4+\left\|Q_2(s)\right\|N_4\big)ds \\
&\ge \left\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right\|-\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left(N_4+\frac{N_4}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\big(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\big)ds\right) \\
&\ge N_3 .
\end{aligned}
$$

Böylece $TA\subset A$ olduğu ispatlanır. A, Λ' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(T\mathbf{x}_1\right)(t)-\left(T\mathbf{x}_2\right)(t)\right\| = \Bigg\|\mathbf{B}^{-1}\Bigg(&\left[\mathbf{x}_1(t+\tau)-\mathbf{x}_2(t+\tau)\right]+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}ds \\
&\times\left[Q_1(s)\big(\mathbf{x}_1(s-\sigma_1)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\big)-Q_2(s)\big(\mathbf{x}_1(s-\sigma_2)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\big)\right]ds\Bigg)\Bigg\|
\end{aligned}
$$

$$\le\left(\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{x}_1(t+\tau)-\mathbf{x}_2(t+\tau)\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}ds\right.$$
$$\left.\times\left(\left\|Q_1(s)\right\|\left\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_1)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_1)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\left\|\mathbf{x}_1(s-\sigma_2)-\mathbf{x}_2(s-\sigma_2)\right\|\right)ds\right)$$
$$\le\left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right\|\left(1+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\left\|Q_1(s)\right\|+\left\|Q_2(s)\right\|\right)ds\right)$$
$$\le q_6\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|.$$

Yani,

$$\left\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\right\|\le q_6\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|$$

dir. (4.14) ve (4.15) ten $q_6<1$ olur. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\|>0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t\ge t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 4.1 n=5, $P(t)=\frac{e^{-\tau}}{2}$

$$Q_1(t)=\frac{1}{2(2ae^t+e^{\sigma_1}+e^{\sigma_2})}\begin{pmatrix}4 & -1\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix},\ Q_2(t)=\frac{1}{2(2ae^t+e^{\sigma_1}+e^{\sigma_2})}\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{7}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(\mathbf{x}(t)+P(t)\mathbf{x}(t-\tau)\right)^{(5)}+Q_1(t)\mathbf{x}(t-\sigma_1)-Q_2(t)\mathbf{x}(t-\sigma_2)=0$$

denklemin sisteminin (4.3) şartını sağladığı aşikardır ve salınım yapmayan

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\alpha+e^{-t}\\ \alpha+e^{-t}\end{pmatrix},\ a\in R$$

çözümü vardır.

Örnek 4.2 n=3

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{e^{-\tau}}{2} & e^{-\tau}\\ e^{-\tau} & -\frac{e^{-\tau}}{2}\end{pmatrix},\ Q_1(t)=\frac{1}{2(2ae^t+e^{\sigma_1}+e^{\sigma_2})}\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ Q_2(t)=\frac{1}{2(2ae^t+e^{\sigma_1}+e^{\sigma_2})}\begin{pmatrix}4 & -1\\ \frac{7}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right)^{(3)}+Q_1(t)\mathbf{x}(t-\sigma_1)-Q_2(t)\mathbf{x}(t-\sigma_2)=0$$

denklemin sisteminin (4.3) şartını sağladığı aşikardır ve salınım yapmayan

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\alpha+e^{-t}\\ \alpha+e^{-t}\end{pmatrix},\ a\in R$$

çözümü vardır.

BÖLÜM V

SÜREKLİ GECİKMELİ YÜKSEK MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN SALINIM YAPMAYAN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde, dördüncü bölümde verilen Candan (2013) tarafından çalışılan (4.1) ve (4.2) denklem sistemlerinden daha genel olan denklem çalışılmıştır.

$n \geq 1$ bir pozitif tamsayı $P \in C\left([t_0,\infty),R\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in (0,\infty)$, Q_i; $[t_0,\infty)\times[a_i,b_i]$, $i=1,2.$, Q_i; $[t_0,\infty)\times[a_i,b_i]$, $i=1,2.$, Q_i; $[t_0,\infty)\times[a_i,b_i]$, $i=1,2.$, aralığında sürekli matris, $0 \leq a_i < b_i$, $i=1,2.$, olmak üzere sürekli gecikmeli yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+P(t)\mathbf{x}(t-\tau)\right)+(-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi\right]=0 \qquad (5.1)$$

ve $n \geq 1$ bir pozitif tamsayı, $\mathbf{B}$ $n\times n$ nonsinguler sabit matris, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in (0,\infty)$, Q_i; $[t_0,\infty)\times[a_i,b_i]$, $i=1,2.$, aralığında sürekli matris, $0 \leq a_i < b_i$, $i=1,2.$, olmak üzere sürekli gecikmeli yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\right)+(-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi\right]=0 \qquad (5.2)$$

ve $n \geq 1$ bir pozitif tamsayı $\tilde{p} \in C\left([t_0,\infty),R\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, Q_i; $[t_0,\infty)\times[a_i,b_i]$, $i=1,2.$, aralığında sürekli matris, $0 \leq a_i < b_i$, $i=1,2,3.$, olmak üzere sürekli gecikmeli yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+\int_{a_3}^{b_3}\tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)+(-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi\right]=0 \quad (5.3)$$

ve $n \geq 1$ bir pozitif tamsayı, $\mathbf{B}$ $n\times n$ nonsinguler sabit matris, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, Q_i; $[t_0,\infty)\times[a_i,b_i]$, $i=1,2.$, aralığında sürekli matris, $0 \leq a_i < b_i$, $i=1,2,3.$, olmak üzere sürekli gecikmeli yüksek mertebeden nötral diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)+(-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi\right]=0 \, (5.4)$$

ele alınmış ve dördüncü bölümde incelenen durumlar sırasıyla (4.1) ve (4.2) denklemleri için genelleştirilmiştir.

$m = \max\{b_1, b_2\}$ olsun. (5.1) ve (5.2) denklemlerinin $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $\mathbf{x} \in C([t_1 - m, \infty), \mathbf{R}^n)$, çözümü denilince $[t_1, \infty)$ aralığında $\mathbf{x} + P(t)\mathbf{x}(t-\tau)$, $\mathbf{x} + B\mathbf{x}(t-\tau)$ n defa sürekli diferansiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için sırasıyla (5.1) ve (5.2) denklemleri sağlanması anlaşılmaktadır.

Benzer şekilde $m = \max\{b_1, b_2, b_3\}$ olsun. (5.3) ve (5.4) denklemlerinin $t_1 \geq t_0$ olmak üzere $\mathbf{x} \in C([t_1 - m, \infty), \mathbf{R}^n)$, çözümü denilince $[t_1, \infty)$ aralığında $\mathbf{x} + \int_{a_1}^{b_1} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi$ ve $\mathbf{x} + \mathbf{B}\int_{a_1}^{b_1} \mathbf{x}(t-\xi)d\xi$ n defa sürekli diferansiyellenebilir ve $t \geq t_1$ için sırasıyla (5.3) ve (5.4) denklemleri sağlanması anlaşılmaktadır.

Teorem 5.1 Kabul edelim ki $0 \leq P(t) \leq p < \frac{1}{2}$ ve $\|\ \|$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir norm olmak üzere

$$\int^{\infty} s^{n-1} \int_{a_i}^{b_i} \|Q_i(s,\xi)\| d\xi ds < \infty,\ i = 1,2. \tag{5.5}$$

olsun. Bu durumda (5.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 \geq t_0 + \max\{\tau, b_1, b_2\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, M_1 ve M_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$pM_2 + M_1 < \|\boldsymbol{\alpha}\| < 2\|\boldsymbol{\alpha}\| \leq M_2 + M_1 \tag{5.6}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1}^{\infty} (s-t)^{n-1} \left(\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right) ds \leq \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| - pM_2 - M_1}{M_2} \tag{5.7}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : M_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq M_2,\ t \geq t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$
(T\mathbf{x})(t)=\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}-P(t)\mathbf{x}(t-\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_t^\infty (s-t)^{n-1} & \\ \qquad\times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds, & t\geq t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0\leq t\leq t_1. \end{cases}
$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\geq t_1$ olmak üzere (5.6) ve (5.7) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \Bigg\|\boldsymbol{\alpha}-P(t)\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+p\|\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \Bigg\|(s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\Bigg\|ds \\
&\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+p\|\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|+\left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds \\
&\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+pM_2+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds \\
&\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+pM_2+\frac{M_2}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds \\
&\leq M_2.
\end{aligned}
$$

(5.6) dan dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \Bigg\|\boldsymbol{\alpha}-P(t)\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\geq\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|p\mathbf{x}(t-\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\|
\end{aligned}
$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - pM_2 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - pM_2 - \frac{M_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\geq M_1 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.7) den

$$\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\| = \left\|P(t)[\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)] + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\right.$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right.$$

$$\left.\left. - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right]ds\right\|$$

$$\leq p\|\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\|d\xi\right.$$

$$\left. + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\leq \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|\left(p + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)\right)$$

$$\leq \|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}\|\left(p + \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| - pM_2 - M_1}{M_2}\right).$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq r_1\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$$

dir. (5.6) ve (5.7) den $r_1 < 1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.2 Kabul edelim ki $2 < p \le P(t) \le p_0 < \infty$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 + \tau \ge t_0 + \max\{b_1, b_2\}$ yeteri kadar büyük şeçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, M_3 ve M_4 pozitif sabitler olmak üzere

$$p_0 M_3 + M_4 < \|\boldsymbol{\alpha}\| < 2\|\boldsymbol{\alpha}\| \le pM_4 + p_0 M_3 \tag{5.8}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)ds \le \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| - M_4 - p_0 M_3}{M_4} \tag{5.9}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : M_3 \le \|\mathbf{x}(t)\| \le M_4,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(t+\tau)}\left\{\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right. \\ \qquad \left.\times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\}, & t \ge t_1 \\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (5.8) ve (5.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\}\right\| \\ &\le \frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\|\right\} \end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\right\| ds\right\}$$

$$\le \frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.$$
$$\left.\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right] ds\right\}$$

$$\le \frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right] ds\right\}$$

$$\le \frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| + M_4 + \frac{M_4}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right] ds\right\}$$

$$\le M_4 .$$

(5.9) dan dolayı

$$\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| = \left\|\frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right] ds\right\}\right\|$$

$$\ge \frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right] ds\right\|\right\}$$

$$\ge \frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\right\| ds\right\}$$

$$\ge \frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.$$
$$\left.\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right] ds\right\}$$

$$\geq \frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|\mathbf{x}(t+\tau)\|-\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|\,d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|\,d\xi\right]ds\right\}$$

$$\geq \frac{1}{p_0}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|-M_4-\frac{M_4}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\,d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\,d\xi\right]ds\right\}$$

$$\geq M_3.$$

Böylece $TA\subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\in A$ ve $t\geq t_1$ olmak üzere (5.9) dan

$$\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t)-(T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \left\|\frac{1}{P(t+\tau)}[\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)]+\frac{1}{P(t+\tau)}\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\\
&\quad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right.\\
&\quad\left.\left.-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right]ds\right\|\\
&\leq \frac{1}{p}\|\mathbf{x_1}(t+\tau)-\mathbf{x_2}(t+\tau)\|+\frac{1}{p}\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\\
&\quad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)\|\,d\xi\right.\\
&\quad\left.+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\mu)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)\|\,d\xi\right]ds\\
&\leq \frac{\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|}{p}\left(1+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\\
&\quad\left.\times\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)ds\right)\\
&\leq \frac{\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|}{p}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|-M_4-p_0M_3}{M_4}\right).
\end{aligned}$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\|\leq r_2\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$$

dir. (5.8) ve (5.9) dan $r_2<1$ dir. Bu da *T* nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\|>0$ olmak üzere ***x***, $t\geq t_1$ için *T* dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.3 Kabul edelim ki $\frac{-1}{2} < p \le P(t) < 0$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 \ge t_0 + \max\{\tau, b_1, b_2\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, M_5 ve M_6 pozitif sabitler olmak üzere

$$-pM_6 + M_5 < \|\boldsymbol{\alpha}\| < 2\|\boldsymbol{\alpha}\| \le M_6 + M_5 \tag{5.10}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1}^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\,d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\,d\xi\right)ds \le \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| + pM_6 - M_5}{M_6} \tag{5.11}$$

olsun.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : M_5 \le \|\mathbf{x}(t)\| \le M_6,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} - P(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} & \\ \qquad\times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi\right]ds, & t \ge t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (5.10) ve (5.11) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(T\mathbf{x})(t)\| &= \Bigg\|\boldsymbol{\alpha} - P(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi\right]ds\Bigg\| \\ &\le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|p\mathbf{x}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi\right]ds\Bigg\| \\ &\le \|\boldsymbol{\alpha}\| - p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\Bigg\|(s-t)^{n-1} \\ &\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\,d\xi\right]ds\Bigg\| \end{aligned}$$

$$\le \|\boldsymbol{\alpha}\| - p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds$$

$$\le \|\boldsymbol{\alpha}\| - pM_6 + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\le \|\boldsymbol{\alpha}\| - pM_6 + \frac{M_6}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\le M_6 .$$

(5.10) dan dolayı

$$\|(T\mathbf{x})(t)\| = \left\|\boldsymbol{\alpha} - P(t)\mathbf{x}(t-\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}ds\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\|$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|p\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\|$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| + p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \left\|(s-t)^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\right\|ds$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| + p\|\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| + pM_6 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_a^b \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi + \int_c^d \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| + pM_6 - \frac{M_6}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\ge M_5 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. A, X' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (5.11) den

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t)-(T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \Bigg\| P(t)[\mathbf{x_1}(t-\tau)-\mathbf{x_2}(t-\tau)]+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right. \\
&\quad \left.-\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\le -p\left\|\mathbf{x_1}(t-\tau)-\mathbf{x_2}(t-\tau)\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\|\left\|\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)\right\|d\xi\right. \\
&\quad \left.+\int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\|\left\|\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)\right\|d\xi\right]ds \\
&\le \left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|\left(-p+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\|d\xi\right)\right) \\
&\le \left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|\left(-p+\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|+pM_6-M_5}{M_6}\right).
\end{aligned}
$$

Yani,

$\left\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\right\|\le r_3\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|$

dir. (5.10) ve (5.11) den $r_3<1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\|>0$ olmak üzere x, $t\ge t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4 Kabul edelim ki $-\infty<p_0\le P(t)\le p<-2$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.1) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1+\tau\ge t_0+\max\{b_1,b_2\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, M_7 ve M_8 pozitif sabitler olmak üzere

$$-p_0M_7+M_8<\|\boldsymbol{\alpha}\|<2\|\boldsymbol{\alpha}\|\le -pM_8-p_0M_7 \tag{5.12}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1+\tau}^\infty (s-t-\tau)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\|d\xi\right)ds\le\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|-M_8+p_0M_7}{M_8} \tag{5.13}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in X:\ M_7\le\|\mathbf{x}(t)\|\le M_8,\ t\ge t_0\}$ olsun.

$T:A\to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{P(t+\tau)}\left\{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{x}(t+\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\\ \qquad\left.\times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\}, & t\ge t_1\\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (5.12) ve (5.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|(T\mathbf{x})(t)\|&=\left\|\frac{1}{P(t+\tau)}\left\{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{x}(t+\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\}\right\|\\
&\le-\frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\|\right\}\\
&\le-\frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}\left\|(s-t-\tau)^{n-1}\right.\right.\\
&\qquad\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\right\|ds\\
&\le-\frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\\
&\qquad\left.\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|+\left\|\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds\right\}\\
&\le-\frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{x}(t+\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.\\
&\qquad\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds\right\}\\
&\le-\frac{1}{p}\left\{\|\boldsymbol{\alpha}\|+M_8+\frac{M_8}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds\right\}\\
&\le M_8\,.\end{aligned}$$

(5.13) ten dolayı

$$\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| = \left\| \frac{1}{P(t+\tau)} \left\{ \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \right\} \right\|$$

$$\geq -\frac{1}{p_0} \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \right\| \right\}$$

$$\geq -\frac{1}{p_0} \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \left\| (s-t-\tau)^{n-1} \right.\right\}$$

$$\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] \right\| ds \right\}$$

$$\geq -\frac{1}{p_0} \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\left\| \int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| + \left\| \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| \right] ds \right\}$$

$$\geq -\frac{1}{p_0} \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi \right] ds \right\}$$

$$\geq -\frac{1}{p_0} \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - M_8 - \frac{M_8}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right] ds \right\}$$

$$\geq M_7 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.13) ten

$$\left\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\right\| = \left\| \frac{1}{P(t+\tau)} [\mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau)] + \frac{1}{P(t+\tau)} \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)] d\xi \right.$$

$$\left.\left. - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)] d\xi \right] ds \right\|$$

$$\leq -\frac{1}{p} \|\mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau)\| + \frac{1}{p} \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1}$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\| d\xi \right.$$

$$\left. + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| \|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\| d\xi \right] ds$$

$$\leq -\frac{\|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\|}{p}\left(1+\frac{1}{(n-1)!}\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\right.$$
$$\left.\times\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)\right)$$
$$\leq -\frac{\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|}{p}\left(1+\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|-M_8+p_0M_7}{M_8}\right).$$

Yani,

$\|T\boldsymbol{x_1}-T\boldsymbol{x_2}\|\leq r_4\|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\|$

dir. (5.12) ve (5.13) ten $r_4<1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\|>0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t\geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 5.1 $n=3$, $P(t)=-\frac{1}{5}$, $a_1=\frac{7}{30}$, $b_1=\frac{11}{15}$, $a_2=1$, $b_2=e^{\frac{1}{15}}$

$$Q_1(t,\xi)=\frac{\left(6+6\ln t+2(\ln t)^2\right)\ln(t-\xi)}{\left(\alpha t^3\ln(t-\xi)+t^3\right)\left(\ln t\right)^4}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

$$Q_2(t,\xi)=\frac{\left(6+6\ln(t-\tau)+2(\ln(t-\tau))^2\right)\ln(t-\xi)}{\xi\left(\alpha(t-\tau)^3\ln(t-\xi)+(t-\tau)^3\right)\left(\ln(t-\tau)\right)^4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\boldsymbol{x}(t)+P(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)\right)+(-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(t,\xi)\boldsymbol{x}(t-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(t,\xi)\boldsymbol{x}(t-\xi)d\xi\right]=0$$

denklem sisteminin $\left(\max\{\tau,\xi\}+1,\infty\right)$ aralığında salınım yapmayan

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\alpha+\frac{1}{\ln t}\\ \alpha+\frac{1}{\ln t}\end{pmatrix},\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

çözümü vardır.

Teorem 5.5 Kabul edelim ki $0<\|\mathbf{B}\|<\frac{1}{2}$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.2) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1\geq t_0+\max\{\tau,b_1,b_2\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, N_1 ve N_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$\|\mathbf{B}\|N_2+N_1<\|\boldsymbol{\alpha}\|<2\|\boldsymbol{\alpha}\|\leq N_2+N_1 \tag{5.14}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1}^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\,d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\,d\xi\right)ds\le\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|\mathbf{B}\|N_2-N_1}{N_2} \tag{5.15}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in X:\ N_1\le\|\mathbf{x}(t)\|\le N_2,\ t\ge t_0\}$ olsun.

$T:A\to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t)=\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)+\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} & \\ \qquad\times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds, & t\ge t_1\\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (5.14) ve (5.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\|&=\Bigg\|\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\|\\&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\|\\&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\Bigg\|(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\Bigg\|ds\\&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}(t-\tau)\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|+\left\|\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds\\&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{B}\|N_2+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds\\&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\mathbf{B}\|N_2+\frac{N_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds\\&\le N_2\,.\end{aligned}$$

(5.14) ten dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \Bigg\| \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau) + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \Bigg\| \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\Bigg\| \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \Bigg\| \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x}(t-\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty \Bigg\|(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] \Bigg\| ds \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| N_2 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \left[\left\| \int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| + \left\| \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| \right] ds \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| N_2 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi \right] ds \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| N_2 - \frac{N_2}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right] ds \\
&\geq N_1 .
\end{aligned}
$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.15) ten

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \Bigg\| \mathbf{B}[\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)] + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \Bigg[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \\
&\quad - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \Bigg] ds \Bigg\| \\
&\leq \|\mathbf{B}\|\|\mathbf{x_1}(t-\tau) - \mathbf{x_2}(t-\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\infty (s-t)^{n-1} \\
&\quad \times \Bigg[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\| d\xi \\
&\quad - \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\| d\xi \Bigg] ds
\end{aligned}
$$

$$\leq \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| \left(\|\mathbf{B}\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)\right)$$

$$\leq \|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\| \left(\|\mathbf{B}\| + \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| N_2 - N_1}{N_2}\right).$$

Yani,

$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq r_5 \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$

dir. (5.14) ve (5.15) ten $r_5 < 1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.6 Kabul edelim ki $0 < \|\mathbf{B}^{-1}\| < \frac{1}{2}$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.2) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 + \tau \geq t_0 + \max\{b_1, b_2\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, N_3 ve N_4 pozitif sabitler olmak üzere

$$\|\mathbf{B}^{-1}\| N_4 + N_3 < \|\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\| < 2\|\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\| \leq N_4 + N_3 \tag{5.16}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)ds \leq \frac{\|\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\| - N_3 - N_4\|\mathbf{B}^{-1}\|}{N_4\|\mathbf{B}^{-1}\|} \tag{5.17}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : N_3 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq N_4,\ t \geq t_0\}$ olsun.

$T : A \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} \mathbf{B}^{-1}\left\{\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty}(s-t-\tau)^{n-1} \right. \\ \qquad \left. \times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\}, & t \geq t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.16) ve (5.17) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \Bigg\| \mathbf{B}^{-1} \Bigg\{ \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \Bigg\} \Bigg\| \\
&\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \Bigg\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!} \Bigg\| \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \Bigg\| \Bigg\} \\
&\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \Bigg\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \Bigg\| (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] \Bigg\| ds \Bigg\} \\
&\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \Bigg\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\left\| \int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| + \left\| \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| \right] ds \Bigg\} \\
&\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \Bigg\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{x}(t+\tau)\| + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi \right] ds \Bigg\} \\
&\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \Bigg\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| + N_4 + \frac{N_4}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right] ds \Bigg\} \\
&\leq N_4 .
\end{aligned}
$$

(5.17) den dolayı

$$
\begin{aligned}
\left\|(Tx)(t)\right\| &= \Bigg\| \mathbf{B}^{-1} \Bigg\{ \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{x}(t+\tau) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \Bigg\} \Bigg\| \\
&\geq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \Bigg\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \Bigg\| \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \\
&\qquad \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \Bigg\| \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$\geq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} \left\| (s-t-\tau)^{n-1} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] \right\| ds \right\}$$

$$\geq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\left\| \int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| + \left\| \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| \right] ds \right\}$$

$$\geq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{x}(t+\tau)\| - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi \right] ds \right\}$$

$$\geq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \left\{ \|\boldsymbol{\alpha}\| - N_4 - \frac{N_4}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right] ds \right\}$$

$$\geq N_3 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. A, X' in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.17) den

$$\left\| (T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t) \right\| = \left\| \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau)] + \mathbf{B}^{-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)] d\xi \right.$$

$$\left.\left. - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)] d\xi \right] ds \right\|$$

$$\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \left\| \mathbf{x_1}(t+\tau) - \mathbf{x_2}(t+\tau) \right\| + \frac{1}{p} \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1}$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\| d\xi \right.$$

$$\left. + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| \|\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)\| d\xi \right] ds$$

$$\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| \left(1 + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t+\tau}^{\infty} (s-t-\tau)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right) ds \right)$$

$$\leq \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\| \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| \left(1 + \frac{\left\|\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right\| - N_3 - N_4 \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|}{N_4 \left\|\mathbf{B}^{-1}\right\|} \right).$$

Yani,

$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \le r_6 \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$

dir. (5.16) ve (5.17) ten $r_6 < 1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \ge t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 5.2 $n = 7$, $a_1 = 2$, $b_1 = 4$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $b_2 = \frac{9}{2}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{2e^{-\tau}}{15} & \frac{e^{-\tau}}{15} \\ \frac{e^{-\tau}}{25} & \frac{4e^{-\tau}}{25} \end{pmatrix}$$

$$Q_1(t,\xi) = \frac{\xi}{\alpha e^t + e^\xi}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ Q_2(t,\xi) = \frac{\xi}{\alpha e^t + e^\xi}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{16}{45} \\ \frac{12}{65} & \frac{8}{13} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\big(\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{x}(t-\tau)\big) + (-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(t,\xi)\boldsymbol{x}(t-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(t,\xi)\boldsymbol{x}(t-\xi)d\xi\right] = 0$$

denklem sisteminin $[t_0,\infty)$ aralığında salınım yapmayan

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha + e^{-t} \\ \alpha + e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

çözümü vardır.

Teorem 5.7 Kabul edelim ki $0 \le \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \le p < \frac{1}{2}$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.3) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 \ge t_0 + \max\{b_1, b_2, b_3\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, K_1 ve K_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$pK_2 + K_1 < \|\boldsymbol{\alpha}\| < 2\|\boldsymbol{\alpha}\| \le K_2 + K_1 \tag{5.18}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1}^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right)ds \le \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| - pK_2 - K_1}{K_2} \tag{5.19}$$

sağlanır.

X, $[t_0,\infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A=\{\mathbf{x}\in X:\ K_1\le\|\mathbf{x}(t)\|\le K_2,\ t\ge t_0\}$ olsun.

$T:A\to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t)=\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}-\int_{a_3}^{b_3}\tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} & \\ \qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds, & t\ge t_1\\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall\mathbf{x}\in A$ ve $t\ge t_1$ olmak üzere (5.18) ve (5.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|(T\mathbf{x})(t)\|&=\Big\|\boldsymbol{\alpha}-\int_{a_3}^{b_3}\tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Big\|\\
&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\left\|\int_{a_3}^{b_3}\tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\Big\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Big\|\\
&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+\int_{a_3}^{b_3}\tilde{p}(t,\xi)\|\mathbf{x}(t-\xi)\|\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\Big\|(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\Big\|ds\\
&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+K_2\int_{a_3}^{b_3}\tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|+\left\|\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds\\
&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+pK_2+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds\\
&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+pK_2+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\\&\qquad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\|d\xi\right]ds\\
&\le\|\boldsymbol{\alpha}\|+pK_2+\frac{K_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds\\
&\le K_2\,.\end{aligned}$$

(5.18) den dolayı

$$\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x})(t)\right\| &= \Bigg\|\boldsymbol{\alpha} - \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \left\|\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| - \frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\left\|\mathbf{x}(t-\xi)\right\|\mathrm{d}\xi - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - K_2\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} \left\|Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\right\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \left\|Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)\right\|d\xi\right]ds \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - pK_2 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} \left\|Q_1(s,\xi)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\xi)\right\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \left\|Q_2(s,\xi)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\xi)\right\|d\xi\right]ds \\
&\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - pK_2 - \frac{K_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} \left\|Q_1(s,\xi)\right\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \left\|Q_2(s,\xi)\right\|d\xi\right]ds \\
&\geq K_1\,.
\end{aligned}$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.19) den

$$\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \Bigg\|\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)[\mathbf{x_1}(t-\xi) - \mathbf{x_2}(t-\xi)]\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\Bigg[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \\
&\quad - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\Bigg]ds\Bigg\| \\
&\leq \left\|\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)[\mathbf{x_1}(t-\xi) - \mathbf{x_2}(t-\xi)]\,\mathrm{d}\xi\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad \times\Bigg[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \\
&\quad - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\Bigg]ds\Bigg\|
\end{aligned}$$

$$\le \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\left\|[\mathbf{x_1}(t-\xi)-\mathbf{x_2}(t-\xi)]\right\| \mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\|\left\|[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]\right\| d\xi\right.$$

$$\left.+\int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\|\left\|[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]\right\| d\xi\right] ds$$

$$\le p\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}$$

$$\times\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|\left[\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\| d\xi\right] ds$$

$$\le \left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|\left(p+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\| d\xi\right] ds\right.$$

$$\le \left\|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\right\|\left(p+\frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\|-pM_2-M_1}{M_2}\right).$$

Yani,

$\left\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\right\| \le r_7\left\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\right\|$

dir. (5.18) ve (5.19) dan $r_7 < 1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\left\|\mathbf{x}\right\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \ge t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.8 Kabul edelim ki $\frac{-1}{2} < p \le \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi < 0$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.3) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 \ge t_0 + \max\{b_1, b_2, b_3\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, K_3 ve K_4 pozitif sabitler olmak üzere

$$-pK_4 + K_3 < \left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| < 2\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| \le K_4 + K_3 \tag{5.20}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1}^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left\|Q_1(s,\xi)\right\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\left\|Q_2(s,\xi)\right\| d\xi\right) ds \le \frac{\left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| + pK_4 - K_3}{K_4} \tag{5.21}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$A = \{\mathbf{x} \in X : K_3 \le \left\|\mathbf{x}(t)\right\| \le K_4,\ t \ge t_0\}$ olsun.

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(T\mathbf{x}\right)(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} - \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \dfrac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ \qquad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds, & t \ge t_1 \\ \left(T\mathbf{x}\right)(t_1), & t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (5.20) ve (5.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\boldsymbol{\alpha} - \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\right. \\ &\qquad \left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\| \\ &\le \left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| + \left\|\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\right. \\ &\qquad \left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\| \\ &\le \left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| + \int_{a_2}^{b_2} \tilde{p}(t,\xi)\left\|\mathbf{x}(t-\xi)\right\|\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\left\|(s-t)^{n-1}\right. \\ &\qquad \left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\right\|ds \\ &\le \left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| + K_4\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad \times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds \\ &\le \left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| - pK_4 + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad \times\left[\int_{a_1}^{b_1} \left\|Q_1(s,\xi)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\xi)\right\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \left\|Q_2(s,\xi)\right\|\left\|\mathbf{x}(s-\xi)\right\|d\xi\right]ds \\ &\le \left\|\boldsymbol{\alpha}\right\| - pK_4 + \frac{K_4}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} \left\|Q_1(s,\xi)\right\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \left\|Q_2(s,\xi)\right\|d\xi\right]ds \\ &\le K_4\,. \end{aligned}$$

(5.20) den dolayı

$$\begin{aligned} \left\|\left(T\mathbf{x}\right)(t)\right\| &= \left\|\boldsymbol{\alpha} - \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}ds\right. \\ &\qquad \left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\right\| \end{aligned}$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \left\| \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi \right\| - \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] ds \right\|$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\|\mathbf{x}(t-\xi)\|\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} \left\|(s-t)^{n-1}\right.$$

$$\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right] \right\| ds$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| - K_4 \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}$$

$$\times \left[\left\| \int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| + \left\| \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi \right\| \right] ds$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| + pK_4 - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| \|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi \right] ds$$

$$\geq \|\boldsymbol{\alpha}\| + pK_4 - \frac{K_4}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi \right] ds$$

$$\geq K_3 \,.$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için *T* nin *A* üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.21) den

$$\left\| (T\mathbf{x_1})(t) - (T\mathbf{x_2})(t) \right\| = \left\| \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)[\mathbf{x_1}(t-\xi) - \mathbf{x_2}(t-\xi)]\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} \right.$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \right.$$

$$\left. \left. - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \right] ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)[\mathbf{x_1}(t-\xi) - \mathbf{x_2}(t-\xi)]\,\mathrm{d}\xi \right\| + \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} \right.$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \right.$$

$$\left. \left. - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi \right] ds \right\|$$

$$\leq \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi) \|[\mathbf{x_1}(t-\xi) - \mathbf{x_2}(t-\xi)]\|\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}$$

$$\times \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| \|[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]\| d\xi \right.$$

$$\left. + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\mu)\| \|[\mathbf{x_1}(s-\xi) - \mathbf{x_2}(s-\xi)]\| d\xi \right] ds$$

$$\leq \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)d\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1}$$

$$\times \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| \left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds$$

$$\leq \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| \left(-p + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \right.$$

$$\left. \times \left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds \right)$$

$$\leq \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\| \left(-p + \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| + pK_4 - K_3}{K_4} \right).$$

Yani,

$\|T\mathbf{x_1} - T\mathbf{x_2}\| \leq r_8 \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$

dir. (5.20) ve (5.21) den $r_8 < 1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\| > 0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t \geq t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 5.3 $n = 2$, $\tilde{p}(t,\xi) = \frac{1}{6}$, $a_1 = 4$, $b_1 = 10$, $a_2 = \frac{7}{2}$, $b_2 = 5$, $a_3 = 0$, $b_3 = 2$

$$Q_1(t,\xi) = \frac{(t-\xi)(2\ln t - \frac{t\ln t}{6} + \frac{t}{6} - 3)}{\alpha t^4 - \alpha t^3 \xi + t^3 \ln(t-\xi)} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix},$$

$$Q_2(t,\xi) = \frac{\left(1-\ln(t-2)\right)\left(t-\xi\right)}{\left(\alpha t - \alpha\xi + \ln(t-\xi)\right)\left(t-2\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & \frac{-8}{9} \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t) + \int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\right) + (-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi\right] = 0$$

denklem sisteminin $\left(\max\{\xi,2\}+1,\infty\right)$ aralığında salınım yapmayan

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \dfrac{\ln t}{t} \\ \alpha + \dfrac{\ln t}{t} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

çözümü vardır.

Teorem 5.9 Kabul edelim ki $0 < \|\mathbf{B}\|(b_3 - a_3) < \frac{1}{2}$ ve (5.5) sağlansın. Bu durumda (5.4) denkleminin salınım yapmayan sınırlı çözümü vardır.

İspat

$t_1 \geq t_0 + \max\{b_1, b_2, b_3\}$ yeteri kadar büyük seçilebilir öyle ki

$\boldsymbol{\alpha}$ sabit vektör, L_1 ve L_2 pozitif sabitler olmak üzere

$$\|\mathbf{B}\|(b_3 - a_3)L_2 + L_1 < \|\boldsymbol{\alpha}\| < 2\|\boldsymbol{\alpha}\| \leq L_2 + L_1 \tag{5.22}$$

olduğunda

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_1}^{\infty}(s-t)^{n-1}\left(\int_{a_1}^{b_1}\|q_1(s,\xi)\|\,d\xi + \int_{a_2}^{b_2}\|q_2(s,\xi)\|\,d\xi\right)ds \leq \frac{\|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\|L_2(b_3 - a_3) - L_1}{L_2} \tag{5.23}$$

sağlanır.

X, $[t_0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm sınırlı ve sürekli vektör fonksiyonlarının kümesi olsun.

$$A = \{\mathbf{x} \in X : L_1 \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq L_2,\ t \geq t_0\}$$

$T : A \to X$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T\mathbf{x})(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{B}\displaystyle\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} & \\ \quad \times\left[\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds, & t \geq t_1 \\ (T\mathbf{x})(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

$T\mathbf{x}$ dönüşümünün sürekli olduğu aşikardır. $\forall \mathbf{x} \in A$ ve $t \geq t_1$ olmak üzere (5.22) ve (5.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(T\mathbf{x})(t)\| &= \Bigg\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad \times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\ &\leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \left\|\mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\Bigg\|\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad \times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]ds\Bigg\| \\ &\leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{B}\|\left\|\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}\Bigg\|(s-t)^{n-1} \\ &\qquad \times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\Bigg\|ds \\ &\leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{B}\|\left\|\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\ &\qquad \times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right]ds \end{aligned}$$

$$\le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{B}\| L_2(b_3 - a_3) + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \|q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi\right] ds$$

$$\le \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\mathbf{B}\| L_2(b_3 - a_3) + \frac{L_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi\right] ds$$

$$\le L_2 .$$

(5.22) den dolayı

$$\|(T\mathbf{x})(t)\| = \left\|\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3} \mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right] ds\right\|$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| - \left\|\mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3} \mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| - \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right] ds\right\|$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\|\left\|\int_{a_3}^{b_3} \mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\| - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} \left\|(s-t)^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\left[\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi - \int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right]\right\| ds$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| L_2(b_3 - a_3) - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\left\|\int_{a_1}^{b_1} Q_1(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\| + \left\|\int_{a_2}^{b_2} Q_2(s,\xi)\mathbf{x}(s-\xi)d\xi\right\|\right] ds$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| L_2(b_3 - a_3) - \frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1}$$

$$\times\left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x}(s-\xi)\| d\xi\right] ds$$

$$\ge \|\boldsymbol{\alpha}\| - \|\mathbf{B}\| L_2(b_3 - a_3) - \frac{L_2}{(n-1)!}\int_t^{\infty} (s-t)^{n-1} \left[\int_{a_1}^{b_1} \|Q_1(s,\xi)\| d\xi + \int_{a_2}^{b_2} \|Q_2(s,\xi)\| d\xi\right] ds$$

$$\ge L_1 .$$

Böylece $TA \subset A$ olduğu ispatlanır. *A, X'* in sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesidir. Daralma prensibini kullanabilmek için T nin A üzerinde daralma dönüşümü olduğu gösterilmelidir.

$\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$ ve $t \ge t_1$ olmak üzere (5.23) ten

$$
\begin{aligned}
\left\|(T\mathbf{x_1})(t)-(T\mathbf{x_2})(t)\right\| &= \Bigg\| \mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3}[\mathbf{x_1}(t-\xi)-\mathbf{x_2}(t-\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right. \\
&\quad\left.-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(s,\xi)[\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)]d\xi\right]ds\Bigg\| \\
&\le \|\mathbf{B}\|\left\|\int_{a_3}^{b_3}[\mathbf{x_1}(t-\xi)-\mathbf{x_2}(t-\xi)]\,\mathrm{d}\,\xi\right\|+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)\|d\xi\right. \\
&\quad\left.+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|\|\mathbf{x_1}(s-\xi)-\mathbf{x_2}(s-\xi)\|d\xi\right]ds \\
&\le \|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|\|\mathbf{B}\|(b_3-a_3)+\frac{1}{(n-1)!}\int_t^{\infty}(s-t)^{n-1} \\
&\quad\times\left[\int_{a_1}^{b_1}\|Q_1(s,\xi)\|d\xi+\int_{a_2}^{b_2}\|Q_2(s,\xi)\|d\xi\right]ds \\
&\le \|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}\|\left(\|\mathbf{B}\|(b_3-a_3)+\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|-\|\mathbf{B}\|L_2(b_3-a_3)-L_1}{L_2}\right).
\end{aligned}
$$

Yani,

$$\|T\mathbf{x_1}-T\mathbf{x_2}\|\le r_{10}\|\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}\|$$

dir. (5.22) ve (5.23) ten $r_{10}<1$ dir. Bu da T nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\|\mathbf{x}\|>0$ olmak üzere $\mathbf{x}$, $t\ge t_1$ için T dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 5.4 $n=5$, $a_1=\ln 2$, $b_1=\ln 6$, $a_2=\frac{1}{15}$, $b_2=\frac{1}{6}$, $a_3=0$, $b_3=1$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{30} & \frac{2}{15}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{24}\end{pmatrix},$$

$$Q_1(t,\xi)=\frac{e^{\xi}(1+t-\xi)(29-t)}{(1+t)^6}\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{7}{8}\\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix},\quad Q_2(t,\xi)=\frac{\xi-1-t}{t^5}\begin{pmatrix}4 & 36\\ 16 & 24\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\int_{a_3}^{b_3}\mathbf{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\right)+(-1)^{n-1}\left[\int_{a_1}^{b_1}Q_1(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi-\int_{a_2}^{b_2}Q_2(t,\xi)\mathbf{x}(t-\xi)d\xi\right]=0$$

denklem sisteminin $(2,\infty)$ aralığında salınım yapmayan

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+t}\\ \frac{1}{1+t}\end{pmatrix}$$

çözümü vardır.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Bu çalışmada daha önce çalışılmamış olan (5.1), (5.2), (5.3) ve (5.4) denklem sistemlerinin salınım yapmayan çözümlerinin varlığı için yeterli şartlar verildi. (5.1) denklem sisteminde *P(t)* fonksiyonunun dört farklı durumu için, (5.2) denklem sisteminde ise **B** matris fonksiyonunun iki farklı durumu için, (5.3) denklem sisteminde $\int_{a_3}^{b_3} \tilde{p}(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi$ fonksiyonunun iki farklı durumu için, (5.4) denklem sisteminde ise **B** matris fonksiyonunun bir durumu için salınım yapmayan çözümlerin varlığı incelendi.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Grace, S.R. and O'Regan, D., Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, ***Kluwer Academic***, 2000

Bainov, D. D. and Mishev, D. P., Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay, ***Adam Hilger***, 1991

Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, ***Gazi Kitapevi***, Bursa, 1998

Candan, T. and Dahiya, R.S., Existence of nonoscillatory solutions of first and second order neutral differential equations with distributed deviating arguments, ***Journal of the Franklin Institute***, 347, 1309-1316, 2010

Candan, T., Existence of nonoscillatory solutions for system of higher order neutral differential equations, ***Mathematical and Computer Modelling***, 57, 375-381, 2013

El-Metwally, H., Kulenović, M. R. S. and Hadžiomerspahić, S., Nonoscillatory Solution for System of Neutral Delay Equation, ***Nonlinear Analysis***, 54, 63-81, 2003

Erbe, L. H., Kong, Q. K. and Zhang, B. G., Oscillation Theory for Functional Differential Equations, ***Marcel Dekker, Inc***., New York, 1995

Györi, I. and Ladas, G., Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, ***Clarendon Pres***, Oxford, 1991

Hanuštiaková, L. and Olach, R., Nonoscillatory bounded solutions of neutral differential systems, ***Nonlinear Analysis***, 68, 1816-1824, 2008

Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, ***John Wiley & Sons, Inc.***, 1978

Kulenovic, M.R.S., Ladas, G. and Meimaridou, A., On oscillation of nonlinear delay differential equations, ***Quart. Appl. Math.***, 45, 155–164, 1987

Kulenovic, M.R.S. and Hadziomerspahic, S., Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay equation, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 228, 436–448, 1998

Kulenovic, M.R.S. and Hadziomerspahic, S., Existence of nonoscillatory solution for linear neutral delay equation, ***Fasc. Math.***, 32 , 61–72, 2001

Yu, J.S., Wang, Z.C. and Qian, C., Oscillation and nonoscillation of neutral differential equations, ***Bull. Aust. Math. Soc.***, 45, 195–200, 1992

Yu, J. and Wang, Z., Nonoscillation of a neutral delay differential equation, ***Radovi Mat.***, 8, 127–133, 1992–96

Zeidler, E., Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I: Fixed-Point Theorems, ***Springer-Verlag***, 1986

Zhang, W., Feng, W., Yan, J. and Song, J., Existence of nonoscillatory solutions of first-order linear neutral delay differential equations, ***Computers and Mathematics with Applications***, 49, 1021-1027, 2005

Zhou, Y. and Zhang, B. G., Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral differential equations with positive and negative coefficients, ***Applied Mathematics Letters***, 15, 867-874, 2002

ÖZ GEÇMİŞ

Ahmet Mutlu GEÇGEL, 05.08.1988 tarihinde Seyhan/Adana'da doğdu. İlköğretim ve lise öğretimini Adana'da tamamladı. 2006 yılında girdiği Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden Haziran 2010'da mezun oldu ve aynı yıl Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı.