



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA
YÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLER

TUĞBA TAMIRCI

Eylül 2014

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA
YÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLER

TUĞBA TAMİRCİ

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Eylül 2014

Tuğba TAMİRCİ tarafından Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT danışmanlığında hazırlanan “Üç Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayında Yüzeyler Üzerinde Eğriler” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN
(Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)



Üye : Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT
(Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL
(Erciyes Üniversitesi Fen Fak. Matematik Bölümü / Kayseri)



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından .../.../20... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun .../.../20... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tuğba TAMİRCİ



ÖZET

ÜÇ BOYUTLU LORENTZ-MINKOWSKI UZAYINDA YÜZEYLER ÜZERİNDE EĞRİLER

TAMİRCİ, Tuğba
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman :Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Eylül 2014, 125 sayfa

Bu yüksek lisans çalışmasında, ilk kez üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında de Sitter ve hiperbolik uzaydaki Smarandache eğrileri Sabban çatısına göre tanımlanmıştır. Bu uzaylardaki Smarandache eğrileri arasındaki dualitenin varlığı gösterilmiştir. İlave olarak bu eğriler örnekler ve şekiller ile ifade edilmiştir. Bu çalışma 4 (dört) bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, ikinci bölümde temel bilgiler, üçüncü bölümde S_1^2 ve H_0^2 'deki Smarandache eğrileri ve son olarak dördüncü bölümde ise sonuç ve tartışmalar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Lorentz-Minkowski uzay, de Sitter uzay, Hiperbolik uzay, Sabban çatısı, Smarandache eğrisi

SUMMARY

CURVES ON SURFACE IN THE THREE DIMENSIONAL LORENTZ-MINKOWSKI SPACE

TAMIRCI, Tuğba

Nigde University

Graduate Scholl Of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Associate Professor Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

September 2014, 125 pages

In this master science thesis, we define Smarandache curves based on Sabban frame on de Sitter and hyperbolic space in three dimensional Lorentz- Minkowski space. The existence of duality between these curves is shown. Moreover, we give examples and figures our curves. This thesis is consist of four sections. In the first and second sections, introduction and basic concepts are given, respectively. In the third section, Smarandache curves are presented on S_1^2 and H_0^2 . In the last section results and discussions are given.

Keywords: Lorentz-Minkowski space, de Sitter space, Hyperbolic space, Sabban frame, Smarandache curves

ÖN SÖZ

Bu yüksek lisans çalışmasında, üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında Smarandache eğrileri araştırılmıştır. De Sitter (S_1^2) ve hiperbolik (H_0^2) yüzeyler üzerindeki eğrilerin Sabban çatısına göre Smarandache eşlenikleri elde edilmiştir. Öncelikle S_1^2 üzerindeki eğrilerin timelike (zaman benzeri) ve spacelike (uzay benzeri) olmasına göre Smarandache eşlenikleri ifade edilmiş daha sonrada H_0^2 'deki dual Smarandache eşlenikleri verilmiştir. H_0^2 'deki eğrilerin S_1^2 'deki dual Smarandache eşlenikleri de ayrıca ifade edilmiştir. Her iki uzayda da, eğrilerin Sabban çatısına göre Smarandache eşleniklerinin Frenet benzeri çatıları ve jeodezik eğrilikleri formülize edilmiştir.

Yüksek lisans tez çalışmam süresince, engin deneyimi ve bilgi birikimi ile yol haritamın oluşmasını sağlayan, fikirleri ve yol göstericiliği ile çalışmamın gelişmesine imkan tanıyan, eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen ve bana her türlü desteği veren tez danışmanım, değerli hocam Sayın Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT'a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Araştırma sürecinde kıymetli vaktini ayırıp, bilgi ve deneyimleri ile bu çalışmaya önemli katkısı bulunan ve bu fedakar tutumundan dolayı hayatım boyunca örnek alacağım Sayın Doç. Dr. Serkan KADER hocama, ayrıca Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi, tüm hayatım boyunca bana her türlü desteği veren, maddi ve manevi koruyuculuğumu üstlenen babam Ahmet TAMİRCİ, annem Neziha TAMİRCİ ve kardeşim Mustafa TAMİRCİ'ye ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR.....	x
BÖLÜM I GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II TEMEL BİLGİLER.....	2
2.1. Üç Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı.....	2
BÖLÜM III SMARANDACHE EĞRİLERİ.....	9
3.1. S_1^2 'de Zaman Benzeri Eğriler İçin Sabban Çatısı.....	9
3.1.1. S_1^2 'de zaman benzeri eğrilerin zaman benzeri Smarandache eşlenik eğrileri.....	13
3.1.2. S_1^2 'de zaman benzeri eğrilerin uzay benzeri Smarandache eşlenik eğrileri.....	28
3.1.3. S_1^2 'de zaman benzeri eğrilerin hiperbolik Smarandache eşlenik eğrileri.....	42
3.2. S_1^2 'de Uzay Benzeri Eğriler İçin Sabban Çatısı.....	71
3.2.1. S_1^2 'de uzay benzeri eğrilerin zaman benzeri Smarandache eşlenik eğrileri.....	72
3.2.2. S_1^2 'de uzay benzeri eğrilerin uzay benzeri Smarandache eşlenik eğrileri.....	75

3.2.3. S_1^2 'de uzay benzeri eğrilerin hiperbolik Smarandache eşlenik eğrileri.....	79
3.3. H_0^2 'de Hiperbolik Eğriler İçin Sabban Çatısı	87
3.3.1. H_0^2 'de hiperbolik eğrilerin zaman benzeri Smarandache eşlenik eğrileri.....	91
3.3.2. H_0^2 'de hiperbolik eğrilerin uzay benzeri Smarandache eşlenik eğrileri.....	105
BÖLÜM IV SONUÇ.....	121
KAYNAKLAR	122
ÖZ GEÇMİŞ	124
TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER	125

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Zaman benzeri α eğrisinin Smarandache eşlenik eğrileri	70
Şekil 3.2. Uzay benzeri α eğrisinin Smarandache eşlenik eğrileri.....	86

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler		Açıklama
\vec{x}	:	Vektör
\mathbb{R}^n	:	n-boyutlu vektör uzayı
\mathbb{R}_1^n	:	n-boyutlu Lorentz uzayı
E_1^n	:	n-boyutlu Lorentz uzayı
$\ \cdot \ _L$:	Lorentz norm fonksiyonu
d_L	:	Lorentz uzaklık fonksiyonu
C^{n-1}	:	Light-koni (ışık konisi)
S_1^n	:	n-boyutlu de Sitter uzay
H_0^n	:	n-boyutlu hiperbolik uzay
\wedge	:	pseudo-vektör çarpım
$\langle \cdot, \cdot \rangle_L$:	Lorentz iç çarpım
κ_g	:	Jeodezik eğrilik
δ_{ij}	:	Kroneker delta

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik tarihi boyunca diferansiyel geometrinin konusu olarak eğriler, araştırmacılar için ilgi çekici bir alan olmuştur. Diferansiyel geometride eğriler teorisinde regüler eğriler önemli bir rol oynar. Eğriler teorisinde geometri çalışanların ilgilendiği Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri, involüt ve evolüt eğrileri ve pedal eğrileri gibi bazı özel eğriler önemli yer tutar. Bu eğrilerin karakterizasyonları, iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişki göz önüne alınarak incelenir. Bertrand ve Mannheim eğrileri bu durum için mükemmel bir örnektir. Uzay eğrilerinin temel teori ve karakterizasyonu çalışmalarında, eğriler arasında aynı ilişki olması ilginç bir problemdir. Son zamanlarda Turgut ve Yılmaz tarafından (2008) Minkowski uzayında, Sabban çatısına göre birim Euclidean küresinde Smarandache eğrileri tanımı yapılmıştır. Ahmad T. Ali (2010) Sabban çatısına göre Euclidean 3-uzayında Smarandache eğrisini çalışmıştır. Taşköprü ve Tosun (2014), S^2 'de Smarandache eğrisini çalışmışlardır. Daha birçok kişi tarafından Smarandache eğrileri çalışılmıştır. Smarandache eğrileri, Smarandache geometrinin çok önemli bir parçasıdır. Smarandache geometri, relativite teorisinde ve paralel evren çalışmalarında önemli bir role sahiptir. Euclidean ve Minkowski uzayında Smarandache eğrileri ile ilgili yapılmış birçok çalışma vardır. Smarandache eğrileri hiperbolik uzayda kısmen çalışılmış fakat de Sitter uzayda çalışılmamıştır. Smarandache eğrisini Turgut ve Yılmaz (2008), Minkowski uzayında regüler bir eğrinin yer vektörü, bir diğer regüler eğrinin Frenet çatısı vektörleri ile ifade edilebiliyorsa bu eğriye Smarandache eğrisi denir şeklinde tanımlamışlardır.

Bu çalışmada, Minkowski 3-uzayında $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısına göre de Sitter ve hiperbolik yüzeyler üzerinde Smarandache eğrileri tanımları yapıldı. Bu eğrilerin eğrilikleri ve Sabban çatıları için ifadeler verildi. Ayrıca tanımlanan Smarandache eğrilerinin bazı örnekleri verilerek şekilleri gösterildi.

BÖLÜM II

TEMEL BİLGİLER

2.1. Üç Boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı

Tanım 2.1. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ iki vektör ve $n > 1$ olsun. \vec{x} ve \vec{y} 'nin Lorentz iç çarpımı

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Lorentz iç çarpım ile birlikte \mathbb{R}^n vektör uzayının oluşturduğu $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ uzayına Lorentz n-uzay denir ve \mathbb{R}_1^n ile gösterilir (Ratcliffe, 1994).

$n = 3$ için $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ uzayı üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı olarak adlandırılır ve \mathbb{R}_1^3 veya E_1^3 ile gösterilir.

Tanım 2.2. \mathbb{R}_1^n uzayında bir \vec{x} vektörünün Lorentz normu

$$\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L|}$$

ile, \vec{x} ve \vec{y} vektörleri arası Lorentz uzunluk

$$d_L(x, y) = \|x - y\|_L$$

şeklinde tanımlanır (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.3. \mathbb{R}_1^n Lorentz uzayında, $\vec{x} \neq \vec{0}$ olmak üzere $\|\vec{x}\|_L = 0$ olacak şekildeki bütün \vec{x} 'lerin kümesine, yani

$$C^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n : x_1^2 = x_2^2 + \dots + x_n^2\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye ışık koni (light-koni) denir. $\|\vec{x}\|_L = 0$ ise \vec{x} vektörüne ışık benzeri (light-like veya null) vektör denir. Eğer $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ise \vec{x} vektörüne pozitif (negatif) ışık benzeri vektör denir (Ratcliffe, 1994; Vinberg, 1993).

Tanım 2.4. $\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için $\|\vec{x}\|_L > 0$ ya da $\vec{x} = \vec{0}$ ise \vec{x} vektörüne uzay benzeri (spacelike) vektör denir. C^{n-1} ışık konisinin dışı, \mathbb{R}_1^n 'nin uzay benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir (O'Neill, 1983; Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.5. $\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ için $\|\vec{x}\|_L < 0$ ise \vec{x} vektörüne zaman benzeri (timelike) vektör denir. C^{n-1} ışık konisinin içi, \mathbb{R}_1^n 'nin zaman benzeri vektörlerden oluşan açık alt kümesidir. Eğer $x_1 > 0$ ($x_1 < 0$) ise \vec{x} vektörüne pozitif (negatif) zaman benzeri denir (O'Neill, 1983; Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.6. $\vec{x} \in \mathbb{R}_1^n$ ve $\vec{y} \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = 0$ ise \vec{x} ve \vec{y} vektörlerine Lorentz ortogonaldır denir. (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.7. \mathbb{R}_1^n 'nin $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ bazı Lorentz ortonormaldir denir gerek ve yeter şart $\langle V_i, V_j \rangle_L = -1$ ve diğer durumlarda $\langle V_i, V_j \rangle_L = \delta_{ij}$ şeklinde tanımlanır.

\mathbb{R}_1^n 'nin $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standart bazı Lorentz ortonormaldir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.8. $\alpha = \alpha(s) \in E_1^n$ olmak üzere her $s \in I$ için $\|\alpha'(s)\|_L \neq 0$ ise α 'ya regüler bir eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.9. $S_1^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_1^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

kümesine üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında de Sitter uzayı (pseduo-küresel uzay),

$H_0^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_1^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_1 > 0\}$

kümesine üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında hiperbolik uzay,

$C^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_1^3 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

kümesine üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında light-koni (ışık konisi) denir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.10. $\alpha = \alpha(s) \in E_1^3$ bir eğri olmak üzere her $s \in I$ için α 'nın hız vektörü olan $\alpha'(s)$ vektörü uzay benzeri (spacelike), zaman benzeri (timelike), ışık benzeri (lightlike/null) ise sırasıyla α eğrisine uzay benzeri, zaman benzeri ve ışık benzeri eğri denir (O'Neill, 1983).

s pseudo-yay uzunluk parametresi olmak üzere $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ regüler eğrisi uzay benzeri (zaman benzeri)'dir ve $\alpha'(s)$ teğet vektörü birim uzunluktadır. Yani; sırasıyla $\forall s \in I \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 1$ ($\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = -1$).

Tanım 2.11. $\{e_1, e_2, e_3\}$, \mathbb{R}_1^3 'ün standart bazı olmak üzere her $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ için \vec{x} ve \vec{y} 'nin pseudo-vektör çarpımı

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (-x_2y_3 + x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.12. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olsun.

\wedge , \mathbb{R}_1^3 uzayında pseudo-vektör çarpımı olmak üzere bu takdirde

(i) $x \wedge y = -y \wedge x$,

(ii) $\langle \vec{x} \wedge \vec{y}, \vec{z} \rangle_L = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$,

(iii) $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L \vec{z} - \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle_L \vec{y}$,

(iv) $\langle \vec{x} \wedge \vec{y}, \vec{z} \wedge \vec{w} \rangle_L = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle_L & \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_L \\ \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle_L & \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle_L \end{vmatrix}$

dır (Ratcliffe, 1994).

Lemma 2.13. \mathbb{R}_1^3 üç boyutlu Minkowski uzayında aşağıdakiler geçerlidir.

- i) İki zaman benzeri vektör asla ortogonal olamaz.
- ii) İki ışık benzeri vektör ortogondur gerek ve yeter şart bu iki vektör lineer bağımlıdır.
- iii) Zaman benzeri vektör ışık benzeri vektöre asla ortogonal olamaz (O'Neill, 1983).

Teorem 2.14. \vec{x} ve \vec{y} vektörleri \mathbb{R}_1^3 'te sıfırdan farklı Lorentz ortogonal iki vektör olsun. Eğer \vec{x} vektörü zaman benzeri ise \vec{y} vektörü uzay benzeridir (Ratcliffe, 1994).

Önerme 2.15. \mathbb{R}_1^3 'ün bir V alt vektör uzayının

- (i) Zaman benzeri olması için gerek ve yeter şart V 'nin en az bir zaman benzeri vektöre sahip olmasıdır.
- (ii) Uzay benzeri olması için gerek ve yeter şart V 'deki sıfırdan farklı her vektörün uzay benzeri olmasıdır.
- (iii) Işık benzeri olması için gerek ve yeter şart V 'deki sıfırdan farklı her vektör için $\|\vec{x}\|_L = 0$ olmasıdır (Ratcliffe, 1994; Vinberg, 1993).

Tanım 2.16. Minkowski üç uzayında bulunan birim hızlı regüler bir $\beta(s^*(s))$ eğrisinin yer vektörü, bir diğer $\alpha(s)$ regüler eğrisinin Sabban çatısına göre birim hızlı olacak şekilde ifade edilebiliyorsa, β eğrisine α eğrisinin Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008).

Bu tanıma göre $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi $s \in I$ yay parametresi olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile verildiği zaman, α 'nın (I, α) koordinat komşuluğuna göre Sabban çatısı $\{\alpha(s), T(s), \xi(s)\}$ olmak üzere $\beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi α 'nın Sabban çatısına göre birim hızlı olacak şekilde ifade edilebiliyorsa β eğrisi, α eğrisinin Smarandache eğrisi olarak adlandırılır.

Smarandache eğrileri üç durumda incelenebilir.

Durum 1: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler eğrisi her $s \in I$ için S_1^2 'de bulunan zaman benzeri bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın yer vektörü uzay benzeri birim vektör, $\alpha' = T$ zaman benzeri birim vektör ve ξ uzay benzeri birim vektördür. Bu takdirde $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ ($\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$) Smarandache eğrisi S_1^2 veya H_0^2 'de bulunan birim hızlı regüler eğridir ve α 'nın Smarandache eğrisi için aşağıdaki durumlar vardır.

a) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi S_1^2 'de zaman benzeri bir eğri olabilir.

b) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi S_1^2 'de uzay benzeri bir eğri olabilir.

c) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi H_0^2 'de hiperbolik bir eğri olabilir.

Buna göre α eğrisinin ortonormal Sabban çatısı $\{\alpha(s), T(s), \xi(s)\}$ 'tir ve $\xi(s) = \alpha(s) \wedge T(s)$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Frenet formüllerine göre α 'nın Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ T' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & \kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

α 'nın yay uzunluk parametresi s olmak üzere, üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında S_1^2 'de α 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g(s) = \det(\alpha(s), T(s), T'(s))$$

şeklinde tanımlanır. Vektörler arasında ise

$$\alpha = T \wedge \xi, \quad T = \alpha \wedge \xi, \quad \xi = \alpha \wedge T$$

bağıntısı vardır.

Durum 2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler eğrisi her $s \in I$ için S_1^2 'de bulunan uzay benzeri bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın yer vektörü uzay benzeri birim vektör, $\alpha' = T$ uzay benzeri birim vektör ve ξ zaman benzeri birim vektördür. Bu takdirde $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ ($\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$) Smarandache eğrisi S_1^2 veya H_0^2 'de bulunan birim hızlı regüler eğridir ve α 'nın Smarandache eğrisi için aşağıdaki durumlar vardır.

a) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi S_1^2 'de zaman benzeri bir eğri olabilir.

b) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi S_1^2 'de uzay benzeri bir eğri olabilir.

c) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi H_0^2 'de hiperbolik bir eğri olabilir.

Bu durumda α eğrisinin ortonormal Sabban çatısı $\{\alpha(s), T(s), \xi(s)\}$ 'tir ve $\xi(s) = \alpha(s) \wedge T(s)$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Frenet formüllerine göre α 'nın Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ T' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

α 'nın yay uzunluk parametresi s olmak üzere üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında S_1^2 'de α 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g(s) = \det(\alpha(s), T(s), T'(s))$$

şeklinde tanımlanır. Vektörler arasında ise

$$-\alpha = T \wedge \xi, \quad T = \alpha \wedge \xi, \quad \xi = \alpha \wedge T$$

bağıntısı vardır.

Durum 3: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler eğrisi her $s \in I$ için H_0^2 'de bulunan hiperbolik bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın yer vektörü zaman benzeri birim vektör, $\alpha' = T$ uzay benzeri birim vektör ve ξ uzay benzeri birim vektördür. Bu takdirde $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ ($\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$) Smarandache eğrisi S_1^2 veya H_0^2 'de bulunan birim hızlı regüler eğridir ve α 'nın Smarandache eğrisi için aşağıdaki durumlar vardır.

- a) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi S_1^2 'de zaman benzeri bir eğri olabilir.
- b) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi S_1^2 'de uzay benzeri bir eğri olabilir.
- c) $\beta = \beta(s^*(s))$ Smarandache eğrisi H_0^2 'de hiperbolik bir eğri olabilir (Öztürk vd., 2013).

O halde α eğrisinin ortonormal Sabban çatısı $\{\alpha(s), T(s), \xi(s)\}$ 'tir ve $\xi(s) = \alpha(s) \wedge T(s)$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Frenet formüllerine göre α 'nın Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ T' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

α 'nın yay uzunluk parametresi s olmak üzere üç boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında S_1^2 'de α 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g(s) = \det(\alpha(s), T(s), T'(s))$$

şeklinde tanımlanır. Vektörler arasında ise

$$-\alpha = T \wedge \xi, \quad T = \xi \wedge \alpha, \quad \xi = \alpha \wedge T$$

bağıntısı vardır.

BÖLÜM III

SMARANDACHE EĞRİLERİ

3.1. S_1^2 'de Zaman Benzeri Eğriler İçin Sabban Çatısı

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler eğrisi her $s \in I$ için S_1^2 'de bulunan zaman benzeri bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın yer vektörü uzay benzeri birim vektör, α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü olan $\alpha' = T$ vektörü zaman benzeri birim vektör ve $\xi = \alpha \wedge T$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle_L &= 1, \langle \alpha', \alpha' \rangle_L = \langle T, T \rangle_L = -1, \langle \xi, \xi \rangle_L = 1, \\ \langle \alpha, T \rangle_L &= 0, \langle \alpha, \xi \rangle_L = \langle \alpha, \alpha \wedge T \rangle_L = 0, \langle T, \xi \rangle_L = \langle T, \alpha \wedge T \rangle_L = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır.

Serret- Frenet formüllerinden

$$\alpha'(s) = T(s)$$

ve

$$T'(s) = \lambda \alpha(s) + \mu T(s) + \gamma \xi(s) \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Her $s \in I$ için (3.1) denkleminin her iki tarafının α ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \alpha, T' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, \alpha \rangle_L + \mu \langle \alpha, T \rangle_L + \gamma \langle \alpha, \xi \rangle_L \\ \lambda &= \langle \alpha, T' \rangle_L \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilir.

$\langle \alpha, \alpha' \rangle_L = 0$ eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle_L + \langle \alpha, \alpha'' \rangle_L = 0$$

$$\langle T, T \rangle_L + \langle \alpha, T' \rangle_L = 0$$

$$-1 + \langle \alpha, T' \rangle_L = 0$$

$$\langle \alpha, T' \rangle_L = 1$$

dir. Bulunan bu eşitlik (3.2) denkleminde yerine yazılırsa $\lambda = 1$ bulunur. Her $s \in I$ için (3.1) denkleminin her iki tarafının T ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle T, T' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, T \rangle_L + \mu \langle T, T \rangle_L + \gamma \langle T, \xi \rangle_L \\ \langle T, T' \rangle_L &= -\mu\end{aligned}\tag{3.3}$$

olur.

$\langle T, T \rangle_L = -1$ eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle T', T \rangle_L = 0$$

bulunur. Bulunan eşitlik (3.3) denkleminde yerine yazılırsa $\mu = 0$ olur. (3.1) denkleminin her iki tarafının ξ ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \xi, T' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, \xi \rangle_L + \mu \langle T, \xi \rangle_L + \gamma \langle \xi, \xi \rangle_L \\ \gamma &= \langle \xi, T' \rangle_L \\ &= \langle \alpha \wedge T, T' \rangle_L \\ &= \det(\alpha, T, T') \\ &= \kappa_g(s)\end{aligned}$$

dir. Elde edilen katsayılar (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$T'(s) = \alpha(s) + \kappa_g(s)\xi(s)$$

şeklinde bulunur. Serret-Frenet formüllerinden

$$\xi'(s) = \lambda \alpha(s) + \mu T(s) + \gamma \xi(s)\tag{3.4}$$

olarak ifade edilir. Her $s \in I$ için (3.4) denkleminin her iki tarafının α ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \xi' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, \alpha \rangle_L + \mu \langle \alpha, T \rangle_L + \gamma \langle \alpha, \xi \rangle_L \\ \lambda &= \langle \alpha, \xi' \rangle_L\end{aligned}\tag{3.5}$$

elde edilir.

$$\xi = \alpha \wedge T$$

eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha' \wedge T + \alpha \wedge T' \\ &= \alpha \wedge T'\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (3.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda &= \langle \alpha, \alpha \wedge T' \rangle_L \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. (3.4) denkleminin her iki tarafının T ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle T, \xi' \rangle_L &= \lambda \langle T, \alpha \rangle_L + \mu \langle T, T \rangle_L + \gamma \langle T, \xi \rangle_L \\ -\mu &= \langle T, \xi' \rangle_L \\ &= \langle T, \alpha \wedge T' \rangle_L \\ &= \det(T, \alpha, T') \\ &= -\det(\alpha, T, T')\end{aligned}$$

yani

$$\mu = \kappa_g(s)$$

olur. (3.4) denkleminin her iki tarafının ξ ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi' \rangle_L &= \lambda \langle \xi, \alpha \rangle_L + \mu \langle \xi, T \rangle_L + \gamma \langle \xi, \xi \rangle_L \\ \gamma &= \langle \xi, \xi' \rangle_L \\ &= \langle \alpha \wedge T, \alpha \wedge T' \rangle_L \\ &= \begin{vmatrix} \langle \alpha, T' \rangle_L & \langle \alpha, \alpha \rangle_L \\ \langle T, T' \rangle_L & \langle T, \alpha \rangle_L \end{vmatrix} \\ &= \langle \alpha, T' \rangle_L \langle T, \alpha \rangle_L - \langle \alpha, \alpha \rangle_L \langle T, T' \rangle_L \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (3.4) denklemini

$$\xi'(s) = \kappa_g(s)T(s)$$

şeklinde yazılır. Teorem 2.12. (iii) ifadesi dikkate alınarak

$$\xi = \alpha \wedge T$$

denkleminin her iki tarafının T ile soldan pseudo vektör çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
T \wedge \xi &= T \wedge (\alpha \wedge T) \\
&= \langle T, \alpha \rangle_L T - \langle T, T \rangle_L \alpha \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan denklemin her iki tarafının soldan ξ ile pseudo vektör çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\xi \wedge \alpha &= \xi \wedge (T \wedge \xi) \\
&= \langle \xi, T \rangle_L \xi - \langle \xi, \xi \rangle_L T \\
&= -T
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\alpha \wedge \xi = T$$

bulunur. Bütün bunlardan $\alpha = \alpha(s)$ zaman benzeri eğrisinin Sabban çatısı

$$\begin{cases} \alpha'(s) = T(s) \\ T'(s) = \alpha(s) + \kappa_g(s)\xi(s) \\ \xi'(s) = \kappa_g(s)T(s) \end{cases} \quad (3.6)$$

olarak ifade edilir. (3.6) ifadesi matris formunda yazılırsa zaman benzeri eğriler için Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ T' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & \kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

dır ve vektörler arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} \xi = \alpha \wedge T \\ \alpha = T \wedge \xi \\ T = \alpha \wedge \xi \end{cases} \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir.

3.1.1. S_1^2 'de zaman benzeri eğrilerin zaman benzeri Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi, birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü uzay benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü zaman benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = 1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = -1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = 1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerde zaman benzeri eğriler için $\delta = 1$ alınır.

Tanım 3.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.2. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \frac{c_2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_1\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{c_1\kappa_g - c_2}{|c_1 + c_2\kappa_g|} \right) \quad (3.10)$$

şeklindedir.

İspat: (3.8) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.8) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 + c_2 \kappa_g) T \quad (3.11)$$

olur. (3.11) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1 + c_2 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L$$

eşitliğinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{|c_1 + c_2 \kappa_g|}{\sqrt{2}} \quad (3.12)$$

bulunur. (3.12) denklemi (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} T_\beta &= \frac{c_1 + c_2 \kappa_g}{|c_1 + c_2 \kappa_g|} T \\ &= \varepsilon T \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada

$$c_1 + c_2 \kappa_g > 0 \text{ ise } \varepsilon = 1$$

$$c_1 + c_2 \kappa_g < 0 \text{ ise } \varepsilon = -1$$

olarak alınır. (3.13) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \varepsilon^2 \langle T, T \rangle_L \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.13) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \varepsilon T'$$

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \varepsilon(\alpha + \kappa_g \xi) \quad (3.14)$$

dir. (3.14) denkleminde (3.12) denklemi yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{|c_1 + c_2 \kappa_g|} \varepsilon(\alpha + \kappa_g \xi) \quad (3.15)$$

elde edilir.

$$\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-(-c_2 \varepsilon) \alpha + (c_1 \varepsilon) \xi)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} (c_2 \alpha + c_1 \xi) \quad (3.16)$$

bulunur. (3.16) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = \frac{\varepsilon^2}{2} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$= \frac{c_1^2 + c_2^2}{2}$$

$$= 1$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.8), (3.13) ve (3.16) ifadelerinden (3.9) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.10) eşitliği

$$\kappa_g^\beta = \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta))$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{|c_1 + c_2 \kappa_g|} \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g \end{vmatrix}$$

$$= \frac{c_1 \kappa_g - c_2}{|c_1 + c_2 \kappa_g|}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.3. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 < 2$ olmak üzere α 'nın αT -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 \alpha(s) + c_2 T(s)) \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.4. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise, bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c_2}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2 \kappa_g}{\sqrt{4 - 2c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{-c_1 c_2 \kappa_g}{\sqrt{4 - 2c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{2}{\sqrt{4 - 2c_2^2 \kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 < 2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1 (2 - c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2)(2 - c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(2 - c_2^2 \kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{5/2}} (c_2^2 \kappa_g \lambda_1 - c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 + 2 \lambda_3) \right) \quad (3.19)$$

şeklindedir.

İspat: (3.17) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2)$$

$$c_1^2 - c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.17) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 T')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.20)$$

bulunur. (3.20) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$- \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_1^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2}{2}}$$

ifadesinde $c_1^2 - c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2 - c_2^2 \kappa_g^2}{2}} \quad (3.21)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$, in tanımlı olması için

$$2 - c_2^2 \kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$c_2^2 \kappa_g^2 < 2$$

olmalıdır. (3.21) denklemini (3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.22) denkleminde s yay parametresine göre türev alınır

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds} \frac{ds^*}{ds} &= -\frac{(-2c_2^2 \kappa_g \kappa_g')(c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)}{2(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{3/2}} + \frac{(c_2 \alpha' + c_1 T' + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g \xi')}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} \\ T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{3/2}} (c_2^2 \kappa_g \kappa_g' (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) + (2 - c_2^2 \kappa_g^2)(c_2 T + c_1(\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g^2 T)) \\ &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{3/2}} \left((c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1(2 - c_2^2 \kappa_g^2)) \alpha + (c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2)(2 - c_2^2 \kappa_g^2)) T \right. \\ &\quad \left. + (c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(2 - c_2^2 \kappa_g^2)) \xi \right) \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1(2 - c_2^2 \kappa_g^2) \\ \lambda_2 &= c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2)(2 - c_2^2 \kappa_g^2) \\ \lambda_3 &= c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(2 - c_2^2 \kappa_g^2) \end{aligned}$$

olarak alınır

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.23)$$

dir. (3.23) denkleminde (3.21) denklemini yerine yazılırsa

$$T_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.24)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} (-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT + (c_1^2 - c_2^2)\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} (-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT + 2\xi) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.25) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(4-2c_2^2\kappa_g^2)} (c_2^4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2c_2^2\kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + 4\langle \xi, \xi \rangle_L) \\
&= \frac{1}{(4-2c_2^2\kappa_g^2)} (c_2^2\kappa_g^2(c_2^2 - c_1^2) + 4) \\
&= \frac{1}{(4-2c_2^2\kappa_g^2)} (-2c_2^2\kappa_g^2 + 4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.17), (3.22) ve (3.25) ifadelerinden (3.18) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.19) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta)) \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} (c_1(c_1\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1)) \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} (c_2^2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\kappa_g\lambda_2 + 2\lambda_3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.5. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 < 2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 T(s) + c_2 \xi(s)) \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.6. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} & \frac{c_2\kappa_g}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} & \frac{c_1\kappa_g}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} \\ \frac{2\kappa_g}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} & \frac{c_1c_2}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} & \frac{-c_1^2}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 < 2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -2c_1\kappa_g\kappa_g' + c_2\kappa_g(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_2 = -2c_2\kappa_g^2\kappa_g' + (c_1 + c_2\kappa_g' + c_1\kappa_g^2)(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_3 = -2c_1\kappa_g^2\kappa_g' + (c_2\kappa_g^2 + c_1\kappa_g')(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} (-2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 - c_1^2\lambda_3) \right) \quad (3.28)$$

şeklindedir.

İspat: (3.26) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.26) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T' + c_2 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \quad (3.29)$$

olup (3.29) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$- \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} (c_1^2 - \kappa_g^2 (c_2^2 - c_1^2))$$

ifadesinde $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa_g^2 - c_1^2}{2}} \quad (3.30)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$2\kappa_g^2 - c_1^2 > 0,$$

yani

$$c_1^2 < 2\kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.30) denklemi (3.29) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.31) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)} \left(c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)} \left(c_1^2 - \kappa_g^2 (c_2^2 - c_1^2) \right) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)} (c_1^2 - 2\kappa_g^2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.31) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \left(-\frac{(4\kappa_g \kappa_g')(c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi)}{2(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} + \frac{(c_1 \alpha' + c_2 \kappa_g' T + c_2 \kappa_g T' + c_1 \kappa_g' \xi + c_1 \kappa_g \xi')}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} \right) \\
T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \frac{((-2\kappa_g \kappa_g')(c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) + (2\kappa_g^2 - c_1^2)(c_1 T + c_2 \kappa_g' T + c_2 \kappa_g (\alpha + \kappa_g \xi) + c_1 \kappa_g' \xi + c_1 \kappa_g^2 T))}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} \left((-2c_1 \kappa_g \kappa_g' + c_2 \kappa_g (2\kappa_g^2 - c_1^2)) \alpha + (-2c_2 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 + c_2 \kappa_g' + c_1 \kappa_g^2)(2\kappa_g^2 - c_1^2)) T \right. \\
&\quad \left. + (-2c_1 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_2 \kappa_g^2 + c_1 \kappa_g')(2\kappa_g^2 - c_1^2)) \xi \right)
\end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -2c_1 \kappa_g \kappa_g' + c_2 \kappa_g (2\kappa_g^2 - c_1^2) \\
\lambda_2 &= -2c_2 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 + c_2 \kappa_g' + c_1 \kappa_g^2)(2\kappa_g^2 - c_1^2) \\
\lambda_3 &= -2c_1 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_2 \kappa_g^2 + c_1 \kappa_g')(2\kappa_g^2 - c_1^2)
\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.32)$$

olup (3.32) denkleminde (3.30) denklemi yerine yazılırsa

$$T_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.33)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta &= \frac{1}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2\kappa_g & c_1\kappa_g \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \left((-c_1^2 + c_2^2)\kappa_g\alpha + c_1c_2T - c_1^2\xi \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \left(2\kappa_g\alpha + c_1c_2T - c_1^2\xi \right) \tag{3.34}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.34) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(4\kappa_g^2 - 2c_1^2)} \left(4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^4 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\
&= \frac{1}{(4\kappa_g^2 - 2c_1^2)} \left(4\kappa_g^2 - c_1^2c_2^2 + c_1^4 \right) \\
&= \frac{1}{2(2\kappa_g^2 - c_1^2)} \left(2(2\kappa_g^2 - c_1^2) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.26), (3.31) ve (3.34) ifadelerinden (3.27) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.28) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \delta \left(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \right) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2\kappa_g & c_1\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} \left(-c_1(c_1\lambda_3 - c_1\kappa_g\lambda_1) + c_2(c_1\lambda_2 - c_2\kappa_g\lambda_1) \right) \\
&= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} \left(-2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 - c_1^2\lambda_3 \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.7. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3 \quad \text{ve} \quad (c_1 + c_3\kappa_g)^2 > c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2$$

olmak üzere α 'nın $\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1\alpha(s) + c_2T(s) + c_3\xi(s)) \quad (3.35)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.8. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1 + c_3\kappa_g}{\sqrt{(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_2\kappa_g}{\sqrt{(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2\kappa_g + c_3(c_1 + c_3\kappa_g)}{\sqrt{3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3}{\sqrt{3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2}{\sqrt{3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 + c_3\kappa_g)^2 > c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = c_2 \left(-c_3\kappa_g'(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (c_1 + c_3\kappa_g) \left((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right)$$

$$\lambda_2 = (c_1 + c_3\kappa_g) \left(-c_3\kappa_g'(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (c_2 + c_3\kappa_g' + c_2\kappa_g^2) \left((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right)$$

$$\lambda_3 = c_2\kappa_g \left(-c_3\kappa_g'(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (\kappa_g(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2\kappa_g') \left((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{\lambda_1(c_2^2\kappa_g - c_3^2\kappa_g - c_1c_3) + \lambda_2(-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3) + \lambda_3(c_1^2 + c_1c_3\kappa_g - c_2^2)}{\left((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right)^{3/2}} \right) \quad (3.37)$$

şeklinde dir.

İspat: (3.35) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_3^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{3} (c_1^2 - c_2^2 + c_3^2)$$

$$c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$$

elde edilir. (3.35) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 \alpha' + c_2 T' + c_3 \xi')$$

$$\begin{aligned} T_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_3 \kappa_g T) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (c_2 \alpha + (c_1 + c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi) \end{aligned} \quad (3.38)$$

bulunur. (3.38) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{3} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$-\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{3} (c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

den

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2}{3}} \quad (3.39)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 > c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.39) denklemini (3.38) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} (c_2 \alpha + (c_1 + c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.40) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)} \left(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\
&= \frac{1}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)} \left(c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.40) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)^{3/2}} \left(2(c_1 + c_3 \kappa_g) c_3 \kappa_g' - 2c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) \left(c_2 \alpha + (c_1 + c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)}} \left(c_2 \alpha' + c_3 \kappa_g' T + (c_1 + c_3 \kappa_g) T' + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g \xi' \right) \end{array} \right) \\
T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)^{3/2}} \left(\begin{array}{l} \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) \left(c_2 \alpha + (c_1 + c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi \right) \\ + \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \left(\begin{array}{l} c_2 T + c_3 \kappa_g' T + (c_1 + c_3 \kappa_g) (\alpha + \kappa_g \xi) \\ + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g T \end{array} \right) \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)^{3/2}} \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} c_2 \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) \\ + (c_1 + c_3 \kappa_g) \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \end{array} \right) \alpha \\ + \left(\begin{array}{l} (c_1 + c_3 \kappa_g) \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) \\ + \left(c_2 + c_3 \kappa_g' + c_2 \kappa_g^2 \right) \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \end{array} \right) T \\ + \left(\begin{array}{l} c_2 \kappa_g \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) \\ + \left(\kappa_g (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2 \kappa_g' \right) \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \end{array} \right) \xi \end{array} \right)
\end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= c_2 \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (c_1 + c_3 \kappa_g) \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\
\lambda_2 &= (c_1 + c_3 \kappa_g) \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (c_2 + c_3 \kappa_g' + c_2 \kappa_g^2) \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\
\lambda_3 &= c_2 \kappa_g \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + \left(\kappa_g (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2 \kappa_g' \right) \left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)
\end{aligned}$$

olarak alınır

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.41)$$

olup (3.41) denkleminde (3.39) denklemi yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{3}}{\left((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2\right)^2} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.42)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_\beta = \beta \wedge T_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 + c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{-(c_2^2\kappa_g - c_3(c_1 + c_3\kappa_g))\alpha - (c_1c_2\kappa_g - c_2c_3)T + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi}{\sqrt{3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \\ &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)\alpha + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)T + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi}{\sqrt{3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

bulunur. (3.43) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)^2 \langle \xi, \xi \rangle_L}{3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 - (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)^2}{3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= \frac{(c_1^2 - c_2^2 + c_3^2)(c_1^2 + 2c_1c_3\kappa_g + c_3^2\kappa_g^2 - c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2)}{3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= \frac{3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2)}{3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.35), (3.40) ve (3.43) ifadelerinden (3.36)

ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.37) eşitliği

$$\kappa_g^\beta = \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta))$$

$$= \frac{1}{\left((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2\right)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 + c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(c_1 \left(\lambda_3 (c_1 + c_3 \kappa_g) - c_2 \kappa_g \lambda_2 \right) - c_2 \left(c_2 \lambda_3 - c_2 \kappa_g \lambda_1 \right) \right) \\
&\quad + c_3 \left(c_2 \lambda_2 - \lambda_1 (c_1 + c_3 \kappa_g) \right) \\
&= \frac{\lambda_1 \left(c_2^2 \kappa_g - c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3 \right) + \lambda_2 \left(-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3 \right) + \lambda_3 \left(c_1^2 + c_1 c_3 \kappa_g - c_2^2 \right)}{\left((c_1 + c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

3.1.2. S_1^2 'de zaman benzeri eğrilerin uzay benzeri Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi, birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü uzay benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü uzay benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü zaman benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = 1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = 1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = -1$ ' dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerde zaman benzeri eğriler için $\delta = 1$ alınır.

Teorem 3.9. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın $\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi eğer varsa bu

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 \alpha(s) + c_2 \xi(s)) \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir. (3.44) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.44) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 + c_2 \kappa_g) T$$

olur. Bulunan denklemin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1 + c_2 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L$$

ve buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{-\frac{(c_1 + c_2 \kappa_g)^2}{2}}$$

çelişkisi elde edilir. Buna göre α birim hızlı regüler zaman benzeri eğrisinin $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi yoktur.

Tanım 3.10. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 > 2$ olmak üzere α 'nın αT - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha(s) + c_2 T(s)) \quad (3.45)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.11. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} & \frac{c_1}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} \\ \frac{-c_2^2 \kappa_g}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} & \frac{-c_1 c_2 \kappa_g}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} & \frac{2}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 > 2$ olmak üzere β 'nın jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1 (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_2 = -c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2) (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_3 = -c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g') (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} (c_2^2 \kappa_g \lambda_1 - c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 + 2 \lambda_3) \right) \quad (3.47)$$

şeklindedir.

İspat: (3.45) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2)$$

$$c_1^2 - c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.45) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta'(s^*(s)) &= \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha' + c_2T') \\
T_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1T + c_2(\alpha + \kappa_g \xi)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(c_2\alpha + c_1T + c_2\kappa_g \xi)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

olur. (3.48) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{2}(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\
\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 &= \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\
\frac{ds^*}{ds} &= \sqrt{\frac{c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2}{2}}
\end{aligned}$$

ifadesinde $c_1^2 - c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}{2}} \tag{3.49}$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_2^2 \kappa_g^2 - 2 > 0,$$

yani

$$c_2^2 \kappa_g^2 > 2$$

olmalıdır. (3.48) denkleminde (3.49) denklemi yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}}(c_2\alpha + c_1T + c_2\kappa_g \xi) \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.50) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)}(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)}(c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)} (-2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$= 1$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.50) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(-\frac{(2c_2^2 \kappa_g \kappa_g')(c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)}{2(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} + \frac{(c_2 \alpha' + c_1 T' + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g \xi')}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} \right)$$

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} \left(-c_2^3 \kappa_g \kappa_g' (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) + (c_2^2 \kappa_g^2 - 2) (c_2 T + c_1 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g^2 T) \right)$$

$$= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} \left(\begin{aligned} &(-c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1 (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)) \alpha + (-c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2) (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)) T \\ &+ (-c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g') (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)) \xi \end{aligned} \right)$$

ifadesinde

$$\lambda_1 = -c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1 (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_2 = -c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2) (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_3 = -c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g') (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

olarak alınır

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.51) denkleminde (3.49) denklemini yerine yazılırsa

$$T_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.52)$$

olur.

$$\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 \kappa_g \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} (-c_2^2 \kappa_g \alpha - c_1 c_2 \kappa_g T + (c_1^2 - c_2^2) \xi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 - 4}} \left(-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT + 2\xi \right) \quad (3.53)$$

bulunur. (3.53) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2c_2^2\kappa_g^2 - 4)} \left(c_2^4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2c_2^2\kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + 4\langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\ &= \frac{1}{(2c_2^2\kappa_g^2 - 4)} \left(c_2^2\kappa_g^2(c_2^2 - c_1^2) + 4 \right) \\ &= \frac{1}{(2c_2^2\kappa_g^2 - 4)} \left(-2c_2^2\kappa_g^2 + 4 \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.45), (3.50) ve (3.53) ifadelerinden (3.46) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.47) eşitliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \delta \left(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \right) \\ &= \frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 - 2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 - 2)^{5/2}} \left(c_1(c_1\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1) \right) \\ &= \frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 - 2)^{5/2}} \left(c_2^2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\kappa_g\lambda_2 + 2\lambda_3 \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.12. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 > 2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1T(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.54)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.13. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} & \frac{c_2\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} & \frac{c_1\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} \\ \frac{2\kappa_g}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} & \frac{c_1c_2}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} & \frac{-c_1^2}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 > 2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = 2c_1\kappa_g\kappa_g' + c_2\kappa_g(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = 2c_2\kappa_g^2\kappa_g' + (c_1 + c_2\kappa_g' + c_1\kappa_g^2)(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = 2c_1\kappa_g^2\kappa_g' + (c_2\kappa_g^2 + c_1\kappa_g')(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (-2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 - c_1^2\lambda_3) \right) \quad (3.56)$$

şeklindedir.

İspat: (3.54) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.54) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta'(s^*(s)) &= \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T' + c_2 \xi') \\
T_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g T) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

(3.57) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\
\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 &= \frac{1}{2} (c_1^2 - \kappa_g^2 (c_2^2 - c_1^2))
\end{aligned}$$

ifadesinde $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_1^2 - 2\kappa_g^2}{2}} \tag{3.58}$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_1^2 - 2\kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$c_1^2 > 2\kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.58) denklemini (3.57) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \tag{3.59}$$

elde edilir. (3.59) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)} (c_1^2 - \kappa_g^2 (c_2^2 - c_1^2)) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)} (c_1^2 - 2\kappa_g^2)
\end{aligned}$$

$$=1$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.59) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \left(-\frac{(-4\kappa_g \kappa'_g)(c_1\alpha + c_2\kappa_g T + c_1\kappa_g \xi)}{2(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} + \frac{(c_1\alpha' + c_2\kappa'_g T + c_2\kappa_g T' + c_1\kappa'_g \xi + c_1\kappa_g \xi')}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} \right) \\ T'_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{(2\kappa_g \kappa'_g)(c_1\alpha + c_2\kappa_g T + c_1\kappa_g \xi) + (c_1^2 - 2\kappa_g^2)(c_1 T + c_2\kappa'_g T + c_2\kappa_g(\alpha + \kappa_g \xi) + c_1\kappa'_g \xi + c_1\kappa_g^2 T)}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\begin{aligned} &\left((2c_1\kappa_g \kappa'_g + c_2\kappa_g(c_1^2 - 2\kappa_g^2))\alpha \right. \\ &+ (2c_2\kappa_g^2 \kappa'_g + (c_1 + c_2\kappa'_g + c_1\kappa_g^2)(c_1^2 - 2\kappa_g^2))T \\ &\left. + (2c_1\kappa_g^2 \kappa'_g + (c_2\kappa_g^2 + c_1\kappa'_g)(c_1^2 - 2\kappa_g^2))\xi \right) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\lambda_1 = 2c_1\kappa_g \kappa'_g + c_2\kappa_g(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = 2c_2\kappa_g^2 \kappa'_g + (c_1 + c_2\kappa'_g + c_1\kappa_g^2)(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = 2c_1\kappa_g^2 \kappa'_g + (c_2\kappa_g^2 + c_1\kappa'_g)(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

olarak alınırsa

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1\alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.60)$$

olup (3.60) denkleminde (3.58) denklemi yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1\alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.61)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2\kappa_g & c_1\kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} (-\kappa_g(c_1^2 - c_2^2)\alpha - (-c_1c_2)T - c_1^2\xi) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} (2\kappa_g \alpha + c_1 c_2 T - c_1^2 \xi) \quad (3.62)$$

elde edilir. (3.62) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2c_1^2 - 4\kappa_g^2)} (4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^4 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(2c_1^2 - 4\kappa_g^2)} (4\kappa_g^2 - c_1^2 c_2^2 + c_1^4) \\ &= \frac{1}{(2c_1^2 - 4\kappa_g^2)} (4\kappa_g^2 - c_1^2 (c_2^2 - c_1^2)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.54), (3.59) ve (3.62) ifadelerinden (3.55)

ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.56) eşitliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta)) \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \kappa_g & c_1 \kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (-c_1(c_1 \lambda_3 - c_1 \kappa_g \lambda_1) + c_2(c_1 \lambda_2 - c_2 \kappa_g \lambda_1)) \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (\kappa_g (c_1^2 - c_2^2) \lambda_1 + c_1 c_2 \lambda_2 - c_1^2 \lambda_3) \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (-2\kappa_g \lambda_1 + c_1 c_2 \lambda_2 - c_1^2 \lambda_3) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.14. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 < c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T \xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 \alpha(s) + c_2 T(s) + c_3 \xi(s)) \quad (3.63)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.15. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T \xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1 + c_3 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2 \kappa_g + c_3(c_1 + c_3 \kappa_g)}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 + c_3 \kappa_g) - c_2^2}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 < c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_2 \left(c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (c_1 + c_3 \kappa_g) \left(c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 + c_3 \kappa_g) \left(c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (c_2 + c_3 \kappa_g' + c_2 \kappa_g^2) \left(c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_3 &= c_2 \kappa_g \left(c_3 \kappa_g' (c_1 + c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (\kappa_g (c_1 + c_3 \kappa_g) + c_2 \kappa_g') \left(c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right) \end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{\lambda_1 (c_2^2 \kappa_g - c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3) + \lambda_2 (-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3) + \lambda_3 (c_1^2 + c_1 c_3 \kappa_g - c_2^2)}{(c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2)^{5/2}} \right) \quad (3.65)$$

şeklindedir.

İspat: (3.63) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} \left(c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_3^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right)$$

$$1 = \frac{1}{3} (c_1^2 - c_2^2 + c_3^2)$$

$$c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$$

elde edilir. (3.63) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\beta'(s^*(s)) &= \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1\alpha' + c_2T' + c_3\xi') \\ T_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1T + c_2(\alpha + \kappa_g\xi) + c_3\kappa_gT) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(c_2\alpha + (c_1 + c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)\end{aligned}\quad (3.66)$$

(3.66) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{3}(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 + c_3\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2\kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 &= \frac{1}{3}(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)\end{aligned}$$

olup buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}{3}}\quad (3.67)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$(c_1 + c_3\kappa_g)^2 < c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.67) denklemini (3.66) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}}(c_2\alpha + (c_1 + c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)\quad (3.68)$$

elde edilir. (3.68) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)}(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 + c_3\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2\kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)}(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \\ &= 1\end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.68) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds} \frac{ds^*}{ds} &= \left(\frac{\left((-2c_3\kappa'_g)(c_1 + c_3\kappa_g) + 2c_2^2\kappa_g\kappa'_g \right) (c_2\alpha + (c_1 + c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)}{2(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(c_2\alpha' + c_3\kappa'_gT + (c_1 + c_3\kappa_g)T' + c_2\kappa'_g\xi + c_2\kappa_g\xi')}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}} \right) \\ T'_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\frac{(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g)(c_2\alpha + (c_1 + c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(c_2T + c_3\kappa'_gT + (c_1 + c_3\kappa_g)(\alpha + \kappa_g\xi))}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \right) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\frac{\left(c_2(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \right)}{\left(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right)} \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left((c_1 + c_3\kappa_g)(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \right)}{\left(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right)} T \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(c_2\kappa_g(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \right)}{\left(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right)} \xi \right) \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_2(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (c_1 + c_3\kappa_g)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \\ \lambda_2 &= (c_1 + c_3\kappa_g)(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (c_2 + c_3\kappa'_g + c_2\kappa_g^2)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \\ \lambda_3 &= c_2\kappa_g(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (\kappa_g(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2\kappa'_g)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.69)$$

olup (3.69) denkleminde (3.67) denklemi yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{3}}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.70)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 + c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\
&= \frac{-(c_2^2\kappa_g - c_3(c_1 + c_3\kappa_g))\alpha - (c_1c_2\kappa_g - c_2c_3)T + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \\
&= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)\alpha + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)T + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.71) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)^2 \langle \xi, \xi \rangle_L}{(3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2)} \\
&= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 - (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)^2}{(3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2)} \\
&= \frac{(c_1^2 - c_2^2 + c_3^2)(c_1^2 + 2c_1c_3\kappa_g + c_3^2\kappa_g^2 - c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2)}{(3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2)} \\
&= \frac{3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2)}{3(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \\
&= -1
\end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.63), (3.68) ve (3.71) ifadelerinden (3.64) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.65) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta)) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 + c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(c_1(\lambda_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1) \right. \\
&\quad \left. + c_3(c_2\lambda_2 - \lambda_1(c_1 + c_3\kappa_g)) \right) \\
&= \frac{\lambda_1(c_2^2\kappa_g - c_3^2\kappa_g - c_1c_3) + \lambda_2(-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3) + \lambda_3(c_1^2 + c_1c_3\kappa_g - c_2^2)}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

3.1.3. S_1^2 'de zaman benzeri eğrilerin hiperbolik Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi, birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü zaman benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü uzay benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = -1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = 1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = 1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerde zaman benzeri eğriler için $\delta = 1$ alınır.

Teorem 3.16. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi eğer varsa bu

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.72)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir. $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için (3.72) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2}(c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$-1 = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = -2$$

çelişkisi elde edilir. Buna göre α birim hızlı regüler zaman benzeri eğrisinin hiperbolik $\alpha\xi$ - Smarandache eşlenik eğrisi yoktur.

Tanım 3.17. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın αT - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2T(s)) \quad (3.73)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir.

Teorem 3.18. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2\kappa_g^2 + 2}} & \frac{c_1}{\sqrt{c_2^2\kappa_g^2 + 2}} & \frac{c_2\kappa_g}{\sqrt{c_2^2\kappa_g^2 + 2}} \\ \frac{-c_2^2\kappa_g}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 + 4}} & \frac{-c_1c_2\kappa_g}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 + 4}} & \frac{-2}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 + 4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere β 'nın jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -c_2^3\kappa_g\kappa_g' + c_1(c_2^2\kappa_g^2 + 2)$$

$$\lambda_2 = -c_1c_2^2\kappa_g\kappa_g' + (c_2 + c_2\kappa_g^2)(c_2^2\kappa_g^2 + 2)$$

$$\lambda_3 = -c_2^3\kappa_g^2\kappa_g' + (c_1\kappa_g + c_2\kappa_g')(c_2^2\kappa_g^2 + 2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 + 2)^{5/2}} (c_2^2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\kappa_g\lambda_2 - 2\lambda_3) \right) \quad (3.75)$$

şeklindedir.

İspat: (3.73) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L)$$

$$-1 = \frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.73) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 T')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.76)$$

(3.76) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2}{2}}$$

ifadesinde $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 \kappa_g^2 + 2}{2}} \quad (3.77)$$

olur. (3.76) denklemde (3.77) denklemi yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 + 2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.78)$$

elde edilir. (3.78) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)} \left(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)} (c_2^2 - c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)} (2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.78) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \left(-\frac{(2c_2^2 \kappa_g \kappa_g')(c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)}{2(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)^{3/2}} + \frac{(c_2 \alpha' + c_1 T' + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g \xi')}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 + 2}} \right) \\
T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)^{3/2}} \left((-c_2^3 \kappa_g \kappa_g')(c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) + (c_2^2 \kappa_g^2 + 2)(c_2 T + c_1(\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g^2 T) \right) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)^{3/2}} \left((-c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1(c_2^2 \kappa_g^2 + 2))\alpha + (-c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2)(c_2^2 \kappa_g^2 + 2))T \right) \\
&\quad \left(+ (-c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(c_2^2 \kappa_g^2 + 2))\xi \right)
\end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1(c_2^2 \kappa_g^2 + 2) \\
\lambda_2 &= -c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 + c_2 \kappa_g^2)(c_2^2 \kappa_g^2 + 2) \\
\lambda_3 &= -c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)
\end{aligned}$$

olarak alınır

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.79)$$

elde edilir. (3.79) denkleminde (3.77) denklemini yerine yazılırsa

$$T_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(c_2^2 \kappa_g^2 + 2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.80)$$

olur.

$$\begin{aligned}
\xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 + 4}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 + 4}} (-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT + (c_1^2 - c_2^2)\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2\kappa_g^2 + 4}} (-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT - 2\xi) \tag{3.81}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.81) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2c_2^2\kappa_g^2 + 4)} (c_2^4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2c_2^2\kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + 4\langle \xi, \xi \rangle_L) \\
&= \frac{1}{(2c_2^2\kappa_g^2 + 4)} (c_2^2\kappa_g^2(c_2^2 - c_1^2) + 4) \\
&= \frac{1}{(2c_2^2\kappa_g^2 + 4)} (2c_2^2\kappa_g^2 + 4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.73), (3.78) ve (3.81) ifadelerinden (3.74) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.75) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta)) \\
&= \frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 + 2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 + 2)^{5/2}} (c_1(c_1\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1)) \\
&= \frac{1}{(c_2^2\kappa_g^2 + 2)^{5/2}} (c_2^2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\kappa_g\lambda_2 - 2\lambda_3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.19. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 T(s) + c_2 \xi(s)) \quad (3.82)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir.

Teorem 3.20. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} & \frac{c_1 \kappa_g}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} \\ \frac{-2\kappa_g}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} & \frac{-c_1^2}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $c_1^2 - c_2^2 = 2$ olmak üzere β 'nın jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -2c_1 \kappa_g \kappa_g' + c_2 \kappa_g (c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = -2c_2 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 + c_2 \kappa_g' + c_1 \kappa_g^2)(c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = -2c_1 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_2 \kappa_g^2 + c_1 \kappa_g')(c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{5/2}} (2\kappa_g \lambda_1 + c_1 c_2 \lambda_2 - c_1^2 \lambda_3) \right) \quad (3.84)$$

şeklindedir.

İspat: (3.82) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$-1 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$c_1^2 - c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.82) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T' + c_2 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \quad (3.85)$$

bulunur. (3.85) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} (c_1^2 + \kappa_g^2 (c_1^2 - c_2^2))$$

ifadesinde $c_1^2 - c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_1^2 + 2\kappa_g^2}{2}} \quad (3.86)$$

olur. (3.86) denklemi (3.85) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \quad (3.87)$$

elde edilir. (3.87) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)} (c_1^2 - \kappa_g^2 (c_2^2 - c_1^2))$$

$$= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)} (c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$= 1$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.87) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(-\frac{4\kappa_g \kappa_g' (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi)}{2(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{3/2}} + \frac{(c_1 \alpha' + c_2 \kappa_g' T + c_2 \kappa_g T' + c_1 \kappa_g' \xi + c_1 \kappa_g \xi')}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} \right)$$

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{-2\kappa_g \kappa_g' (c_1 \alpha + c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) + (c_1^2 + 2\kappa_g^2) (c_1 T + c_2 \kappa_g' T + c_2 \kappa_g (\alpha + \kappa_g \xi) + c_1 \kappa_g' \xi + c_1 \kappa_g^2 T)}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (-2c_1 \kappa_g \kappa_g' + c_2 \kappa_g (c_1^2 + 2\kappa_g^2)) \alpha \\ + (-2c_2 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 + c_2 \kappa_g' + c_1 \kappa_g^2) (c_1^2 + 2\kappa_g^2)) T \\ + (-2c_1 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_2 \kappa_g^2 + c_1 \kappa_g') (c_1^2 + 2\kappa_g^2)) \xi \end{pmatrix}$$

ifadesinde

$$\lambda_1 = -2c_1 \kappa_g \kappa_g' + c_2 \kappa_g (c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = -2c_2 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 + c_2 \kappa_g' + c_1 \kappa_g^2) (c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = -2c_1 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_2 \kappa_g^2 + c_1 \kappa_g') (c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

olarak alınır

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.88)$$

olup (3.88) denkleminde (3.86) denklemini yerine yazılırsa

$$T_\beta' = \frac{\sqrt{2}}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.89)$$

elde edilir.

$$\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \kappa_g & c_1 \kappa_g \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} \left(-\kappa_g(c_1^2 - c_2^2)\alpha - (-c_1c_2)T - c_1^2\xi \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} \left(-2\kappa_g\alpha + c_1c_2T - c_1^2\xi \right) \tag{3.90}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.90) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2c_1^2 + 4\kappa_g^2)} \left(4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^4 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\
&= \frac{1}{(2c_1^2 + 4\kappa_g^2)} \left(4\kappa_g^2 - c_1^2 c_2^2 + c_1^4 \right) \\
&= \frac{1}{(2c_1^2 + 4\kappa_g^2)} \left(4\kappa_g^2 + c_1^2 (c_1^2 - c_2^2) \right) \\
&= \frac{1}{2(c_1^2 + 2\kappa_g^2)} 2(2\kappa_g^2 + c_1^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.82), (3.87) ve (3.90) ifadelerinden (3.83) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.84) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \delta \left(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \right) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2\kappa_g & c_1\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(-c_1(c_1\lambda_3 - c_1\kappa_g\lambda_1) + c_2(c_1\lambda_2 - c_2\kappa_g\lambda_1) \right) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(\kappa_g(c_1^2 - c_2^2)\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 - c_1^2\lambda_3 \right) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 - c_1^2\lambda_3 \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.21. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$ ve $(c_1 + c_3\kappa_g)^2 < c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1\alpha(s) + c_2T(s) + c_3\xi(s)) \quad (3.91)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir.

Teorem 3.22. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1 + c_3\kappa_g}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_2\kappa_g}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2\kappa_g + c_3(c_1 + c_3\kappa_g)}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$ ve $(c_1 + c_3\kappa_g)^2 < c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_2 \left(c_3\kappa_g'(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (c_1 + c_3\kappa_g) \left(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 + c_3\kappa_g) \left(c_3\kappa_g'(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (c_2 + c_3\kappa_g' + c_2\kappa_g^2) \left(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \\ \lambda_3 &= c_2\kappa_g \left(c_3\kappa_g'(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (\kappa_g(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2\kappa_g') \left(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{\lambda_1 (c_2^2\kappa_g - c_3^2\kappa_g - c_1c_3) + \lambda_2 (-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3) + \lambda_3 (c_1^2 + c_1c_3\kappa_g - c_2^2)}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \right) \quad (3.93)$$

şeklinde dir.

İspat: (3.91) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_3^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$-1 = \frac{1}{3} (c_1^2 - c_2^2 + c_3^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$$

elde edilir. (3.91) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 \alpha' + c_2 T' + c_3 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_3 \kappa_g T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (c_2 \alpha + (c_1 + c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.94)$$

(3.94) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{3} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{3} (c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

olup buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2}{3}} \quad (3.95)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$(c_1 + c_3 \kappa_g)^2 < c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.95) denklemini (3.94) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} (c_2 \alpha + (c_1 + c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.96)$$

elde edilir. (3.96) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 + c_3\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2\kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} (c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \\ &= 1\end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.96) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{dT_\beta}{ds} \frac{ds^*}{ds} &= \left(\begin{array}{c} \frac{((-2c_3\kappa'_g)(c_1 + c_3\kappa_g) + 2c_2^2\kappa_g\kappa'_g)(c_2\alpha + (c_1 + c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)}{2(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \\ + \frac{(c_2\alpha' + c_3\kappa'_gT + (c_1 + c_3\kappa_g)T' + c_2\kappa'_g\xi + c_2\kappa_g\xi')}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2}} \end{array} \right) \\ T'_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\begin{array}{c} (c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g)(c_2\alpha + (c_1 + c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi) \\ + (c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \left(\begin{array}{c} c_2T + c_3\kappa'_gT + (c_1 + c_3\kappa_g)(\alpha + \kappa_g\xi) \\ + c_2\kappa'_g\xi + c_2\kappa_g^2T \end{array} \right) \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} c_2(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \\ + (c_1 + c_3\kappa_g)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \end{array} \right) \alpha \\ + \left(\begin{array}{c} (c_1 + c_3\kappa_g)(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \\ + (c_2 + c_3\kappa'_g + c_2\kappa_g^2)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \end{array} \right) T \\ + \left(\begin{array}{c} c_2\kappa_g(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \\ + (\kappa_g(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2\kappa'_g)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \end{array} \right) \xi \end{array} \right)\end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c_2(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (c_1 + c_3\kappa_g)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \\ \lambda_2 &= (c_1 + c_3\kappa_g)(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (c_2 + c_3\kappa'_g + c_2\kappa_g^2)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2) \\ \lambda_3 &= c_2\kappa_g(c_3\kappa'_g(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (\kappa_g(c_1 + c_3\kappa_g) + c_2\kappa'_g)(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.97)$$

olup (3.97) denkleminde (3.95) denklemini yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{3}}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.98)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 + c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{-(c_2^2\kappa_g - c_3(c_1 + c_3\kappa_g))\alpha - (c_1c_2\kappa_g - c_2c_3)T + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \\ &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)\alpha + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)T + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 + c_3\kappa_g)^2 + 3c_2^2\kappa_g^2}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

olur. (3.99) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)^2 \langle \xi, \xi \rangle_L}{3(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= \frac{(c_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 - (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 + (c_1(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2^2)^2}{3(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= \frac{(c_1^2 - c_2^2 + c_3^2)(c_1^2 + 2c_1c_3\kappa_g + c_3^2\kappa_g^2 - c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2)}{3(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= \frac{-3((c_1 + c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2)}{3(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.91), (3.96) ve (3.99) ifadelerinden (3.92)

ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.93) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \delta(\det(\beta, T_\beta, T'_\beta)) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 + c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(c_1(\lambda_3(c_1 + c_3\kappa_g) - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1) \right. \\
&\quad \left. + c_3(c_2\lambda_2 - \lambda_1(c_1 + c_3\kappa_g)) \right) \\
&= \frac{\lambda_1(c_2^2\kappa_g - c_3^2\kappa_g - c_1c_3) + \lambda_2(-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3) + \lambda_3(c_1^2 + c_1c_3\kappa_g - c_2^2)}{(c_2^2 - (c_1 + c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \cosh s, \sinh s)$$

eğrisi S_1^2 'de tanımlı birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu durumda

$$\alpha'(s) = T(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \sinh s, \cosh s)$$

ve

$$\begin{aligned}
\xi(s) = \alpha(s) \wedge T(s) &= \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ \sqrt{2} \sinh s & \cosh s & \sinh s \\ \sqrt{2} \cosh s & \sinh s & \cosh s \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(\cosh^2 s - \sinh^2 s)\alpha - (\sqrt{2} \sinh s \cosh s - \sqrt{2} \sinh s \cosh s)T \\ +(\sqrt{2} \sinh^2 s - \sqrt{2} \cosh^2 s)\xi \end{pmatrix} \\
&= -\alpha - \sqrt{2}\xi \\
&= (-1, 0, -\sqrt{2})
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan eşitliklerden α 'nın $\{\alpha(s), T(s), \xi(s)\}$ ortonormal Sabban çatısı

$$\begin{cases} \alpha(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \cosh s, \sinh s) \\ T(s) = (\sqrt{2} \cosh s, \sinh s, \cosh s) \\ \xi(s) = (-1, 0, -\sqrt{2}) \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca

$$T'(s) = (\sqrt{2} \sinh s, \cosh s, \sinh s)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L &= -2 \sinh^2 s + \cosh^2 s + \sinh^2 s \\ &= \cosh^2 s - \sinh^2 s = 1 \end{aligned}$$

olup α 'nın yer vektörü uzay benzeri birim vektördür.

$$\begin{aligned} \langle T(s), T(s) \rangle_L &= -2 \cosh^2 s + \sinh^2 s + \cosh^2 s \\ &= -\cosh^2 s + \sinh^2 s = -1 \end{aligned}$$

olduğundan α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü zaman benzeri birim vektördür.

$$\langle \xi(s), \xi(s) \rangle_L = -1 + 2 = 1$$

olup $\xi(s)$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. α 'nın jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_g(s) = \det(\alpha, T, T') &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} \sinh s & \cosh s & \sinh s \\ \sqrt{2} \cosh s & \sinh s & \cosh s \\ \sqrt{2} \sinh s & \cosh s & \sinh s \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi S_1^2 'de verilen zaman benzeri α eğrisi için zaman benzeri $\alpha\xi$, αT , $\alpha T\xi$ Smarandache eşlenik eğrilerini bulalım.

Zaman Benzeri $\alpha\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.8)'ten $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ alınırsa

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} \sinh s - 1, \cosh s, \sinh s - \sqrt{2})$$

olur.

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_L &= \frac{1}{2} \left(-(\sqrt{2} \sinh s - 1)^2 + \cosh^2 s + (\sinh s - \sqrt{2})^2 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup β uzay benzeri birim vektördür. (3.13)'ten

$$T_\beta(s^*(s)) = (\sqrt{2} \cosh s, \sinh s, \cosh s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= -2 \cosh^2 s + \sinh^2 s + \cosh^2 s \\ &= -1 \end{aligned}$$

olduğundan T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.16)'dan

$$\xi_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} \sinh s - 1, \cosh s, \sinh s - \sqrt{2})$$

dir.

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{2} \left(-(\sqrt{2} \sinh s - 1)^2 + \cosh^2 s + (\sinh s - \sqrt{2})^2 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan ξ_β uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda $\alpha\xi$ - Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.9)'dan

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.15)'ten

$$T'_\beta(s^*(s)) = \sqrt{2}(\sqrt{2} \sinh s, \cosh s, \sinh s)$$

olur. Bu takdirde (3.10)'dan β 'nin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = -1$$

ya da

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta(s) = \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} \sinh s - 1 & \cosh s & \sinh s - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cosh s & \sinh s & \cosh s \\ \sqrt{2} \sinh s & \cosh s & \sinh s \end{vmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Zaman benzeri αT -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.17)'den $c_1 = 3$ ve $c_2 = \sqrt{7}$ alınırsa

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s, 3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s, 3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s \right)$$

olur.

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_L &= \frac{1}{2} \left(-(3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s)^2 + (3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s)^2 + (3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s)^2 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan β uzay benzeri birim vektördür. (3.22)'den

$$T_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s, \sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{2} \left(-(\sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s)^2 + (\sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s)^2 + (\sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s)^2 \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.25)'ten

$$\begin{aligned} \xi_\beta(s^*(s)) &= \xi(s) \\ &= (-1, 0, -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

dir.

$$\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = -1 + 2 = 1$$

olduğundan ξ_β uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda αT -Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.18)'den

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.24)'ten

$$\lambda_1 = 6$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{7}$$

$$\lambda_3 = 0$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s, 3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s, 3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s)$$

olur. Bu takdirde (3.19)'dan β 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = 0$$

ya da

$$\kappa_g^\beta(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s & 3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s & 3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s \\ \sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s & \sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s & \sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s \\ 3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s & 3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s & 3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

olarak bulunur.

Zaman benzeri $\alpha T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.35)'ten $c_1 = 2$, $c_2 = \sqrt{2}$ ve $c_3 = 1$ alınırsa

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (2\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s - 1, 2 \cosh s + \sqrt{2} \sinh s, 2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - \sqrt{2})$$

olur.

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} \left(-(2\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s - 1)^2 + (2 \cosh s + \sqrt{2} \sinh s)^2 + (2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - \sqrt{2})^2 \right)$$

$$= 1$$

olduğundan β uzay benzeri birim vektördür. (3.40)'tan

$$T_\beta(s^*(s)) = (\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s, \cosh s + \sqrt{2} \sinh s, \sinh s + \sqrt{2} \cosh s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \left(-(\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s)^2 + (\cosh s + \sqrt{2} \sinh s)^2 + (\sinh s + \sqrt{2} \cosh s)^2 \right) \\ &= -1\end{aligned}$$

olduğundan T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.43)'ten

$$\xi_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - \sqrt{2}, \sqrt{2} \cosh s + \sinh s, \sqrt{2} \sinh s + \cosh s - 2 \right)$$

olup

$$\begin{aligned}\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{3} \left(-(2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} \cosh s + \sinh s)^2 + (\sqrt{2} \sinh s + \cosh s - 2)^2 \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan ξ_β uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda $\alpha T\xi$ - Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.36)'dan

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.42)'den

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 4 \\ \lambda_2 &= 2\sqrt{2} \\ \lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s, 2 \cosh s + \sqrt{2} \sinh s, 2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s \right)$$

olur. Bu takdirde (3.37)'den β 'nin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ya da

$$\kappa_g^\beta(s) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s - 1 & 2 \cosh s + \sqrt{2} \sinh s & 2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s & \cosh s + \sqrt{2} \sinh s & \sinh s + \sqrt{2} \cosh s \\ 2\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s & 2 \cosh s + \sqrt{2} \sinh s & 2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi S_1^2 'de verilen zaman benzeri α eğrisi için uzay benzeri $T\xi$ ve $\alpha T\xi$ Smarandache eşlenik eğrilerini bulalım.

Uzay benzeri $T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.54)'den $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = 2$ alınırsa

$$\beta(s^*(s)) = (\sqrt{2}(\cosh s - 1), \sinh s, \cosh s - 2)$$

olur.

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = -2(\cosh s - 1)^2 + \sinh^2 s + (\cosh s - 2)^2$$

$$= 1$$

olduğundan β uzay benzeri birim vektördür. (3.59)'dan

$$T_\beta(s^*(s)) = (\sqrt{2} \sinh s, \cosh s, \sinh s)$$

elde edilir.

$$\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = -2 \sinh^2 s + \cosh^2 s + \sinh^2 s$$

$$= 1$$

olduğundan T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.62)'den

$$\xi_\beta(s^*(s)) = (2 \cosh s + 1, \sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2}(\cosh s + 1))$$

olup

$$\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = -(2 \cosh s + 1)^2 + (\sqrt{2} \sinh s)^2 + (\sqrt{2}(\cosh s + 1))^2$$

$$= -1$$

olduğundan ξ_β zaman benzeri birim vektördür. Bu durumda $T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.55)'ten

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.61)'den

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2\sqrt{2}$$

$$\lambda_3 = 0$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = (\sqrt{2} \cosh s, \sinh s, \cosh s)$$

olur. Bu takdirde (3.56)'dan β 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \sqrt{2}$$

ya da

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta(s) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2}(\cosh s - 1) & \sinh s & \cosh s - 2 \\ \sqrt{2} \sinh s & \cosh s & \sinh s \\ \sqrt{2} \cosh s & \sinh s & \cosh s \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Uzay benzeri $\alpha T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.63)'ten $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{2}$ ve $c_3 = 2$ alınır

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s - 2, \cosh s + \sqrt{2} \sinh s, \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - 2\sqrt{2} \right)$$

olur.

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} \left(-(\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s - 2)^2 + (\cosh s + \sqrt{2} \sinh s)^2 + (\sinh s + \sqrt{2} \cosh s - 2\sqrt{2})^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(\sinh^2 s - \cosh^2 s - 4 + 8) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan β uzay benzeri birim vektördür. (3.68)'den

$$T_\beta(s^*(s)) = (2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \cosh s + \sinh s, \sqrt{2} \sinh s + \cosh s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \left(-(2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s)^2 + (\sqrt{2} \cosh s + \sinh s)^2 + (\sqrt{2} \sinh s + \cosh s)^2 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.71)'den

$$\xi_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{2} \sinh s + 4 \cosh s + 1, 2 \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s, 2 \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s + \sqrt{2})$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{3} \left(-(2\sqrt{2} \sinh s + 4 \cosh s + 1)^2 + (2 \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s)^2 \right. \\
&\quad \left. + (2 \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s + \sqrt{2})^2 \right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

olduğundan ξ_β zaman benzeri birim vektördür. Bu durumda αT^ξ -Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.64)'ten

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.70)'den

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= \sqrt{2} \\
\lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = \sqrt{3} \left(\sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s, \cosh s + \sqrt{2} \sinh s, \sinh s + \sqrt{2} \cosh s \right)$$

şeklindedir. Bu takdirde (3.65)'ten β 'nin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = 2$$

ya da

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta(s) &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s - 2 & \cosh s + \sqrt{2} \sinh s & \sinh s + \sqrt{2} \cosh s - 2\sqrt{2} \\ 2 \sinh s + \sqrt{2} \cosh s & \sqrt{2} \cosh s + \sinh s & \sqrt{2} \sinh s + \cosh s \\ \sqrt{2} \sinh s + 2 \cosh s & \cosh s + \sqrt{2} \sinh s & \sinh s + \sqrt{2} \cosh s \end{vmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi S_1^2 'de verilen zaman benzeri α eğrisi için hiperbolik αT , $T\xi$, $\alpha T\xi$ Smarandache eşlenik eğrilerini bulalım.

Hiperbolik αT -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.73)'ten $c_1 = \sqrt{7}$ ve $c_2 = 3$ alınırsa

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s, \sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s \right)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_L &= \frac{1}{2} \left(-(\sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s)^2 + (\sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s)^2 + (\sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s)^2 \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olduğundan β zaman benzeri birim vektördür. (3.78)'den

$$T_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s, 3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s, 3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s \right)$$

olup

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{2} \left(-(3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s)^2 + (3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s)^2 + (3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s)^2 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.81)'den

$$\begin{aligned}\xi_\beta(s^*(s)) &= -\xi(s) \\ &= (1, 0, \sqrt{2})\end{aligned}$$

bulunur.

$$\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = -1 + 2 = 1$$

olduğundan ξ_β uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda αT - Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.74)'ten

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.80)'den

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\sqrt{7} \\ \lambda_2 &= 6 \\ \lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s, \sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s, \sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s)$$

bulunur. Bu takdirde (3.75)'ten β 'nin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = 0$$

ya da

$$\begin{aligned}\kappa_g^\beta(s) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s & \sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s & \sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s \\ 3\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{14} \cosh s & 3 \cosh s + \sqrt{7} \sinh s & 3 \sinh s + \sqrt{7} \cosh s \\ \sqrt{14} \sinh s + 3\sqrt{2} \cosh s & \sqrt{7} \cosh s + 3 \sinh s & \sqrt{7} \sinh s + 3 \cosh s \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Hiperbolik $T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.82)'den $c_1 = 2$, $c_2 = \sqrt{2}$ alınır

$$\beta(s^*(s)) = (2 \cosh s - 1, \sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2}(\cosh s - 1))$$

olur.

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta \rangle_L &= -(2 \cosh s - 1)^2 + 2 \sinh^2 s + 2(\cosh s - 1)^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

olduğundan β zaman benzeri birim vektördür. (3.87)'den

$$\begin{aligned} T_\beta(s^*(s)) &= \alpha(s) \\ &= (\sqrt{2} \sinh s, \cosh s, \sinh s) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= -2 \sinh^2 s + \cosh^2 s + \sinh^2 s \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.90)'dan

$$\xi_\beta(s^*(s)) = (\sqrt{2}(\cosh s + 1), \sinh s, \cosh s + 2)$$

olup

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= -2(\cosh s + 1)^2 + \sinh^2 s + (\cosh s + 2)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan ξ_β uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda $T\xi$ - Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.83)'ten

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.89)'dan

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 8 \\ \lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} \cosh s, \sinh s, \cosh s)$$

bulunur. Bu takdirde (3.84)'ten β 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ya da

$$\begin{aligned}\kappa_g^\beta(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 2 \cosh s - 1 & \sqrt{2} \sinh s & \sqrt{2}(\cosh s - 1) \\ \sqrt{2} \sinh s & \cosh s & \sinh s \\ \sqrt{2} \cosh s & \sinh s & \cosh s \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Hiperbolik αT^ξ -Smarandache eşlenik eğrisi

(3.91)'den $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = 2\sqrt{2}$ ve $c_3 = \sqrt{3}$ alınırsa

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 \sinh s + 4 \cosh s - \sqrt{3}, \sqrt{2} \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s - \sqrt{6})$$

olur.

$$\begin{aligned}\langle \beta, \beta \rangle_L &= \frac{1}{3} \left(-(2 \sinh s + 4 \cosh s - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s)^2 + (\sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s - \sqrt{6})^2 \right) \\ &= -1\end{aligned}$$

olduğundan β zaman benzeri birim vektördür. (3.96)'dan

$$T_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{2} \cosh s, 2 \cosh s + \sinh s, 2 \sinh s + \cosh s)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{3} \left(-(2\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{2} \cosh s)^2 + (2 \cosh s + \sinh s)^2 + (2 \sinh s + \cosh s)^2 \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.99)'dan

$$\xi_\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s + \sqrt{6}, \cosh s + 2 \sinh s, \sinh s + 2 \cosh s + 2\sqrt{3} \right)$$

olup

$$\begin{aligned}\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{3} \left(-(\sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s + \sqrt{6})^2 + (\cosh s + 2 \sinh s)^2 + (\sinh s + 2 \cosh s + 2\sqrt{3})^2 \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğundan ξ_β uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda $\alpha T\xi$ - Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı (3.92)'den

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (3.98)'den

$$\lambda_1 = 6\sqrt{2}$$

$$\lambda_2 = 12\sqrt{2}$$

$$\lambda_3 = 0$$

eşitlikleri ile birlikte

$$T'_\beta(s^*(s)) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(2 \sinh s + 4 \cosh s, \sqrt{2} \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s, \sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s \right)$$

bulunur. Bu takdirde (3.93)'ten β 'nın jeodezik eğriliği

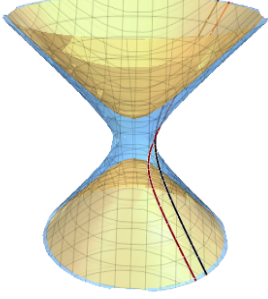
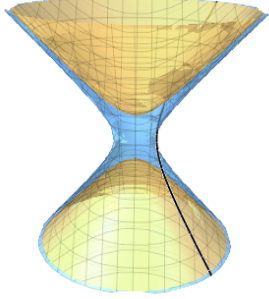
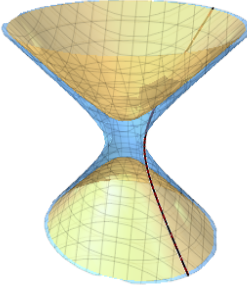
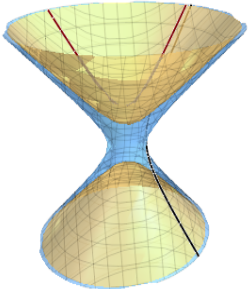
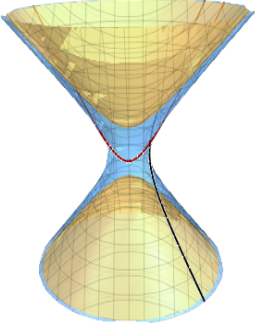
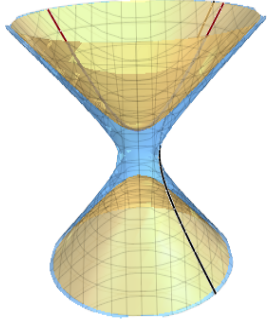
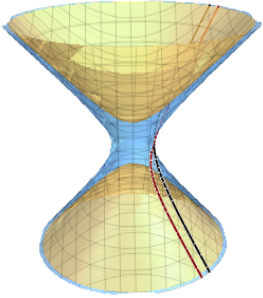
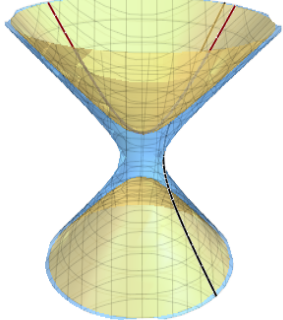
$$\kappa_g^\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ya da

$$\kappa_g^\beta(s) = \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 2 \sinh s + 4 \cosh s - \sqrt{3} & \sqrt{2} \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s & \sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s - \sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} \sinh s + \sqrt{2} \cosh s & 2 \cosh s + \sinh s & 2 \sinh s + \cosh s \\ 2 \sinh s + 4 \cosh s & \sqrt{2} \cosh s + 2\sqrt{2} \sinh s & \sqrt{2} \sinh s + 2\sqrt{2} \cosh s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

şeklinde elde edilir.

β zaman benzeri eğri	β hiperbolik eğri
 <p>$\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi</p>	 <p>$\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi (tanımsız)</p>
 <p>αT -Smarandache eğrisi</p>	 <p>αT -Smarandache eğrisi</p>
 <p>$T\xi$ -Smarandache eğrisi (β uzay benzeri)</p>	 <p>$T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>
 <p>$\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>	 <p>$\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>

Şekil 3.1. Zaman benzeri α eğrisinin Smarandache eşlenik eğrileri

3.2. S_1^2 'de Uzak Benzeri Eğriler İçin Sabban Çatısı

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler eğrisi her $s \in I$ için S_1^2 'de bulunan uzak benzeri bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın yer vektörü uzak benzeri birim vektör, α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki $\alpha' = T$ teğet vektörü uzak benzeri birim vektör ve $\xi = \alpha \wedge T$ vektörü zaman benzeri birim vektördür. Bu durumda

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_L = 1, \langle \alpha', \alpha' \rangle_L = \langle T, T \rangle_L = 1, \langle \xi, \xi \rangle_L = -1$$

$$\langle \alpha, T \rangle_L = 0, \langle \alpha, \xi \rangle_L = \langle \alpha, \alpha \wedge T \rangle_L = 0, \langle T, \xi \rangle_L = \langle T, \alpha \wedge T \rangle_L = 0$$

eşitlikleri vardır.

S_1^2 'de zaman benzeri eğriler için Smarandache eğrileri bölümünde olduğu gibi, Serret-Frenet benzeri formüller kullanılarak $\alpha = \alpha(s)$ uzak benzeri eğrisinin Sabban çatısı

$$\begin{cases} \alpha'(s) = T(s) \\ T'(s) = -\alpha(s) - \kappa_g(s)\xi(s) \\ \xi'(s) = -\kappa_g(s)T(s) \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu ifade matris formunda yazılırsa uzak benzeri eğriler için Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ T' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

dır ve S_1^2 'de zaman benzeri eğriler için Smarandache eğrilerinde vektörler arasındaki bağıntıya benzer şekilde, S_1^2 'de uzak benzeri eğrisinin vektörler arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} \xi = \alpha \wedge T \\ -\alpha = T \wedge \xi \\ T = \alpha \wedge \xi \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Bu bölümde ifade edilecek olan S_1^2 'de uzak benzeri eğri için zaman benzeri, uzak benzeri ve hiperbolik Smarandache eşlenik eğrileri kısmında verilen teoremlerin

ispatları, S_1^2 'de zaman benzeri eğri için zaman benzeri, uzay benzeri ve hiperbolik Smarandache eşlenik eğrileri bölümünde verilen teorem ispatlarına benzer şekilde yapıldığı için verilmemiştir.

3.2.1. S_1^2 'de uzay benzeri eğrilerin zaman benzeri Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi, birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü uzay benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü zaman benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = 1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = -1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = 1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerde uzay benzeri eğriler için $\delta = -1$ alınır.

Teorem 3.23. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi yoktur.

Tanım 3.24. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 > 2$ olmak üzere α 'nın αT - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2T(s)) \quad (3.100)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.25. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-c_2}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} & \frac{c_1}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} & \frac{-c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} \\ \frac{c_2^2 \kappa_g}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} & \frac{c_1 c_2 \kappa_g}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} & \frac{2}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 > 2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = c_2^3 \kappa_g \kappa_g' - c_1 (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_2 = -c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (-c_2 + c_2 \kappa_g^2) (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_3 = c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (-c_1 \kappa_g - c_2 \kappa_g') (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} (-c_2^2 \kappa_g \lambda_1 + c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 + 2 \lambda_3) \right) \quad (3.102)$$

şeklindedir.

Tanım 3.26. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 < 2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T(s) + c_2 \xi(s)) \quad (3.103)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.27. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı

regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ -

Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban

çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-c_1}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} & \frac{-c_2\kappa_g}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} & \frac{-c_1\kappa_g}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} \\ \frac{2\kappa_g}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} & \frac{-c_1c_2}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} & \frac{c_1^2}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.104)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 < 2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = 2c_1\kappa_g\kappa_g' + c_2\kappa_g(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_2 = 2c_2\kappa_g^2\kappa_g' + (-c_1 - c_2\kappa_g' + c_1\kappa_g^2)(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_3 = 2c_1\kappa_g^2\kappa_g' + (c_2\kappa_g^2 - c_1\kappa_g')(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} (-2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\lambda_2 + c_1^2\lambda_3) \right) \quad (3.105)$$

şeklindedir.

Tanım 3.28. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$ ve $(c_1 - c_3\kappa_g)^2 < c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T \xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1\alpha(s) + c_2T(s) + c_3\xi(s)) \quad (3.106)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.29. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T \xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{-c_2}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2}} & \frac{c_1 - c_3 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2}} & \frac{-c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2}} \\ \frac{c_2^2 \kappa_g + c_3(c_1 - c_3 \kappa_g)}{\sqrt{3c_2^2 \kappa_g^2 - 3c_2^2 - 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2}} & \frac{c_1 c_2 \kappa_g - c_2 c_3}{\sqrt{3c_2^2 \kappa_g^2 - 3c_2^2 - 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2}} & \frac{c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2}{3c_2^2 \kappa_g^2 - 3c_2^2 - 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.107)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$ ve $(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 < c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -c_2 \left(-c_2^2 \kappa_g \kappa_g' - c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) \right) + (-c_1 + c_3 \kappa_g) \left(c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 - c_3 \kappa_g) \left(-c_2^2 \kappa_g \kappa_g' - c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) \right) + (-c_2 - c_3 \kappa_g' + c_2 \kappa_g^2) \left(c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 \right) \\ \lambda_3 &= -c_2 \kappa_g \left(-c_2^2 \kappa_g \kappa_g' - c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) \right) + (-\kappa_g (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2 \kappa_g') \left(c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 \right) \end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{\lambda_1 (-c_2^2 \kappa_g + c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3) + \lambda_2 (c_1 c_2 \kappa_g - c_2 c_3) + \lambda_3 (c_1^2 - c_1 c_3 \kappa_g + c_2^2)}{(c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2)^{3/2}} \right) \quad (3.108)$$

şeklindedir.

3.2.2. S_1^2 'de uzay benzeri eğrilerin uzay benzeri Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi, birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü uzay benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü uzay benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü zaman benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = 1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = 1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = -1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olmak üzere bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerde uzay benzeri eğriler için $\delta = -1$ alınır.

Tanım 3.30. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.109)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.31. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \frac{c_2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_1\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{-c_1\kappa_g + c_2}{|c_1 - c_2\kappa_g|} \right) \quad (3.111)$$

şeklindedir.

Tanım 3.32. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2\kappa_g^2 < 2$ olmak üzere α 'nın αT - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2T(s)) \quad (3.112)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.33. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-c_2}{\sqrt{2-c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1}{\sqrt{2-c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{-c_2\kappa_g}{\sqrt{2-c_2^2\kappa_g^2}} \\ \frac{c_2^2\kappa_g}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1c_2\kappa_g}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{2}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2\kappa_g^2 < 2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -c_2^3\kappa_g\kappa_g' - c_1(2 - c_2^2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = c_1c_2^2\kappa_g\kappa_g' + (-c_2 + c_2\kappa_g^2)(2 - c_2^2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = -c_2^3\kappa_g^2\kappa_g' + (-c_1\kappa_g - c_2\kappa_g')(2 - c_2^2\kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(2 - c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} (-c_2^2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\kappa_g\lambda_2 + 2\lambda_3) \right) \quad (3.114)$$

şeklindedir.

Tanım 3.34. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 > 2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1T(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.115)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.35. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-c_1}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} & \frac{-c_2\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} & \frac{-c_1\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} \\ \frac{2\kappa_g}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} & \frac{-c_1c_2}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} & \frac{c_1^2}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.116)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 - c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 > 2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -2c_1\kappa_g\kappa_g' + c_2\kappa_g(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = -2c_2\kappa_g^2\kappa_g' + (-c_1 - c_2\kappa_g' + c_1\kappa_g^2)(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = -2c_1\kappa_g^2\kappa_g' + (c_2\kappa_g^2 - c_1\kappa_g')(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (-2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\lambda_2 + c_1^2\lambda_3) \right) \quad (3.117)$$

şeklinindedir.

Tanım 3.36. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$ ve $c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2 < (c_1 - c_3\kappa_g)^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T \xi$ -

Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1\alpha(s) + c_2T(s) + c_3\xi(s)) \quad (3.118)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.37. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı

regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T \xi$ -

Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban

çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{-c_2}{\sqrt{c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1 - c_3\kappa_g}{\sqrt{c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{-c_2\kappa_g}{\sqrt{c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2}} \\ \frac{c_2^2\kappa_g + c_3(c_1 - c_3\kappa_g)}{\sqrt{3c_2^2 + 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1c_2\kappa_g - c_2c_3}{\sqrt{3c_2^2 + 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2}{\sqrt{3c_2^2 + 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.119)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 3$ ve $c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2 < (c_1 - c_3\kappa_g)^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -c_2 \left(c_3\kappa_g'(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (-c_1 + c_3\kappa_g) \left(c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 - c_3\kappa_g) \left(c_3\kappa_g'(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (-c_2 - c_3\kappa_g' + c_2\kappa_g^2) \left(c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right) \\ \lambda_3 &= -c_2\kappa_g \left(c_3\kappa_g'(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa_g' \right) + (-\kappa_g(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2\kappa_g') \left(c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2 \right) \end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{\lambda_1(-c_2^2\kappa_g + c_3^2\kappa_g - c_1c_3) + \lambda_2(c_1c_2\kappa_g - c_2c_3) + \lambda_3(c_1^2 + c_2^2 - c_1c_3\kappa_g)}{(c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \right) \quad (3.120)$$

şeklinindedir.

3.2.3. S_1^2 'de uzay benzeri eğrilerin hiperbolik Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi, birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü zaman benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü uzay benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = -1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = 1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = 1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir. Bu bölümde ifade edilen teoremlerde uzay benzeri eğriler için $\delta = -1$ alınır.

Tanım 3.38. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.121)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir.

Teorem 3.39. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \frac{c_2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_1\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere β 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{-c_1\kappa_g + c_2}{|c_1 - c_2\kappa_g|} \right) \quad (3.123)$$

şeklindedir.

Teorem 3.40. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın αT - Smarandache eğrisi olan hiperbolik $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi yoktur.

Tanım 3.41. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1T(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.124)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir.

Teorem 3.42. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-c_1}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} & \frac{-c_2\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} & \frac{-c_1\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 + 2\kappa_g^2}} \\ \frac{-2\kappa_g}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} & \frac{-c_1c_2}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} & \frac{c_1^2}{\sqrt{2c_1^2 + 4\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.125)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere β 'nın jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = 2c_1\kappa_g\kappa_g' + c_2\kappa_g(c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = 2c_2\kappa_g^2\kappa_g' + (-c_1 - c_2\kappa_g' + c_1\kappa_g^2)(c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = 2c_1\kappa_g^2\kappa_g' + (c_2\kappa_g^2 - c_1\kappa_g')(c_1^2 + 2\kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{1}{(c_1^2 + 2\kappa_g^2)^{5/2}} (2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\lambda_2 + c_1^2\lambda_3) \right) \quad (3.126)$$

şeklindedir.

Tanım 3.43. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2 < (c_1 - c_3\kappa_g)^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1\alpha(s) + c_2T(s) + c_3\xi(s)) \quad (3.127)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisidir.

Teorem 3.44. S_1^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T \xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{-c_2}{\sqrt{c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1 - c_3 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{-c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} \\ \frac{c_2^2 \kappa_g + c_3(c_1 - c_3 \kappa_g)}{\sqrt{3c_2^2 + 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1 c_2 \kappa_g - c_2 c_3}{\sqrt{3c_2^2 + 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2}{\sqrt{3c_2^2 + 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 \kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.128)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 - c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 < (c_1 - c_3 \kappa_g)^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -c_2 \left(c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (-c_1 + c_3 \kappa_g) \left(c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 - c_3 \kappa_g) \left(c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (-c_2 - c_3 \kappa_g' + c_2 \kappa_g^2) \left(c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_3 &= -c_2 \kappa_g \left(c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (-\kappa_g (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2 \kappa_g') \left(c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \delta \left(\frac{\lambda_1 (-c_2^2 \kappa_g + c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3) + \lambda_2 (c_1 c_2 \kappa_g - c_2 c_3) + \lambda_3 (c_1^2 + c_2^2 - c_1 c_3 \kappa_g)}{(c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{5/2}} \right) \quad (3.129)$$

şeklinde dir.

Örnek 2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$

$$s \rightarrow \alpha(s) = \left(\frac{(s-1)^2}{2}, \frac{(s-1)^2}{2} - 1, s-1 \right)$$

eğrisi S_1^2 'de tanımlı birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın $\{\alpha(s), T(s), \xi(s)\}$ ortonormal Sabban çatısı

$$\begin{cases} \alpha(s) = \left(\frac{(s-1)^2}{2}, \frac{(s-1)^2}{2} - 1, s-1 \right) \\ T(s) = (s-1, s-1, 1) \\ \xi(s) = \left(\frac{(s-1)^2}{2} + 1, \frac{(s-1)^2}{2}, s-1 \right) \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca α 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g(s) = -1$$

olarak bulunur.

İlk olarak $c_1 = 2$ ve $c_2 = \sqrt{2}$ alınrsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin uzay benzeri $\alpha\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right) (s-1)^2 + 1, \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right) (s-1)^2 - \sqrt{2}, (\sqrt{2}+1)(s-1) \right)$$

olup $\alpha\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

ve jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = -1$$

olarak hesaplanır. Eğer $c_1 = \sqrt{2}$ ve $c_2 = 2$ alınrsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin hiperbolik Smarandache eşlenik eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) (s-1)^2 + \sqrt{2}, \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) (s-1)^2 - 1, (s-1)(1+\sqrt{2}) \right)$$

bulunur.

İkinci olarak $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ alınırsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin uzay benzeri αT - Smarandache eşlenik eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(s-1)^2}{2} + s - 1, \frac{(s-1)^2}{2} + s - 2, s \right)$$

elde edilir. Burada hiperbolik αT -Smarandache eşlenik eğrisi yoktur.

Üçüncü olarak $c_1 = 2$ ve $c_2 = \sqrt{2}$ alınırsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin uzay benzeri $T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \left(\frac{(s-1)^2}{2} + \sqrt{2}(s-1) + 1, \frac{(s-1)^2}{2} + \sqrt{2}(s-1), s - 1 + \sqrt{2} \right)$$

olur. Eğer $c_1 = \sqrt{2}$ ve $c_2 = 2$ alınırsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin hiperbolik $T\xi$ - Smarandache eşlenik eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(s-1)^2 + (s-1) + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(s-1)^2 + s - 1, \sqrt{2}(s-1) + 1 \right)$$

elde edilir.

Son olarak $c_1 = 2$, $c_2 = \sqrt{2}$ ve $c_3 = \sqrt{3}$ alınırsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin uzay benzeri $\alpha T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

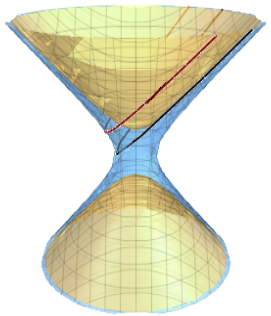
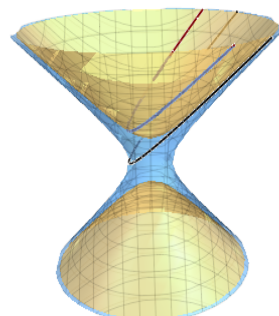
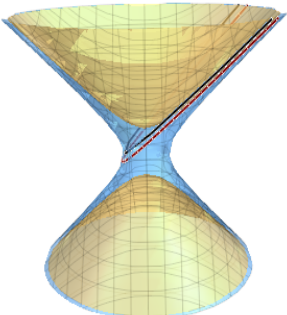
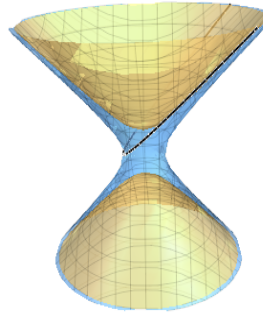
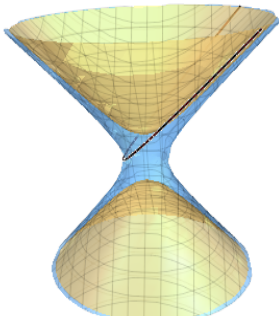
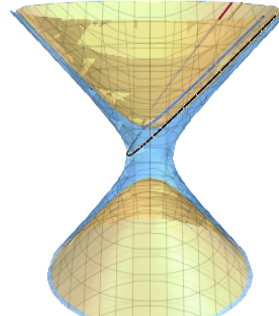
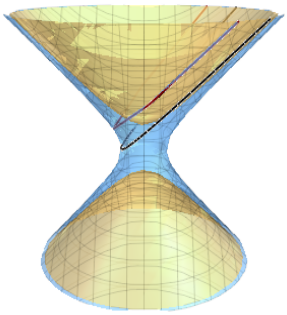
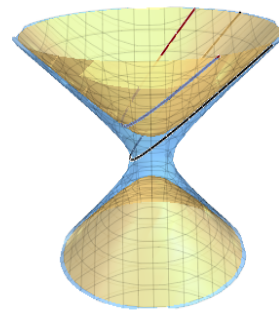
$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (s-1)^2 + \sqrt{2}(s-1) + \sqrt{3}, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (s-1)^2 + \sqrt{2}(s-1) - 2, (2 + \sqrt{3})(s-1) + \sqrt{2} \right)$$

bulunur. Eğer $c_1 = 2$, $c_2 = \sqrt{2}$ ve $c_3 = 3$ alınırsa S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin hiperbolik $\alpha T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{5}{2}(s-1)^2 + \sqrt{2}(s-1) + 3, \frac{5}{2}(s-1)^2 + \sqrt{2}(s-1) - 2, 5(s-1) + \sqrt{2} \right)$$

olarak elde edilir.

S_1^2 'de uzay benzeri α eğrisinin uzay benzeri $\alpha\xi$ -Smarandache eşlenik eğrisinin Sabban çatısı ve jeodezik eğrilik hesabına benzer şekilde, uzay benzeri αT , $T\xi$, $\alpha T\xi$ - Smarandache eşlenik eğrilerinin ve de hiperbolik $\alpha\xi$, $T\xi$, $\alpha T\xi$ -Smarandache eşlenik eğrilerinin Sabban çatıları ve jeodezik eğrilikleri hesaplanır.

β uzay benzeri eğri	β hiperbolik eğri
 <p>$\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi</p>	 <p>$\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi</p>
 <p>αT -Smarandache eğrisi</p>	 <p>αT -Smarandache eğrisi (tanımsız)</p>
 <p>$T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>	 <p>$T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>
 <p>$\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>	 <p>$\alpha T\xi$ -Smarandache eğrisi</p>

Şekil 3.2. Uzay benzeri α eğrisinin Smarandache eşlenik eğrileri

3.3. H_0^2 'de Hiperbolik Eğriler İçin Sabban Çatısı

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler eğrisi her $s \in I$ için H_0^2 'de bulunan hiperbolik bir eğri olsun. Bu durumda α 'nın yer vektörü zaman benzeri birim vektör, α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü olan $\alpha' = T$ vektörü uzay benzeri birim vektör ve $\xi = \alpha \wedge T$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Bu durumda

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_L = -1, \langle \alpha', \alpha' \rangle_L = \langle T, T \rangle_L = 1, \langle \xi, \xi \rangle_L = 1$$

$$\langle \alpha, T \rangle_L = 0, \langle \alpha, \xi \rangle_L = \langle \alpha, \alpha \wedge T \rangle_L = 0, \langle T, \xi \rangle_L = \langle T, \alpha \wedge T \rangle_L = 0$$

eşitlikleri vardır.

Serret- Frenet formüllerinden

$$\alpha'(s) = T(s)$$

ve

$$T'(s) = \lambda \alpha(s) + \mu T(s) + \gamma \xi(s) \quad (3.130)$$

olarak ifade edilir. Her $s \in I$ için (3.130) denkleminin her iki tarafının α ile Lorentz iç çarpımını yapılırsa

$$\langle \alpha, T' \rangle_L = \lambda \langle \alpha, \alpha \rangle_L + \mu \langle \alpha, T \rangle_L + \gamma \langle \alpha, \xi \rangle_L$$

$$-\lambda = \langle \alpha, T' \rangle_L \quad (3.131)$$

eşitliği elde edilir.

$\langle \alpha, \alpha' \rangle_L = 0$ eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle_L + \langle \alpha, \alpha'' \rangle_L = 0$$

$$\langle T, T \rangle_L + \langle \alpha, T' \rangle_L = 0$$

$$1 + \langle \alpha, T' \rangle_L = 0$$

$$\langle \alpha, T' \rangle_L = -1$$

bulunur. Bulunan bu eşitlik (3.131) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda = -1$$

eşitliğinden

$$\lambda = 1$$

olur. Her $s \in I$ için (3.130) denkleminin her iki tarafının T ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle T, T' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, T \rangle_L + \mu \langle T, T \rangle_L + \gamma \langle T, \xi \rangle_L \\ \langle T, T' \rangle_L &= \mu\end{aligned}\tag{3.132}$$

olur.

$\langle T, T \rangle_L = 1$ eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle T, T' \rangle_L = 0$$

bulunur. Bulunan eşitlik (3.132) denkleminde yerine yazılırsa $\mu = 0$ elde edilir. (3.130) denkleminin her iki tarafının ξ ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \xi, T' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, \xi \rangle_L + \mu \langle T, \xi \rangle_L + \gamma \langle \xi, \xi \rangle_L \\ \gamma &= \langle \xi, T' \rangle \\ &= \langle \alpha \wedge T, T' \rangle_L \\ &= \det(\alpha, T, T') \\ &= \kappa_g(s)\end{aligned}$$

olur. Elde edilen katsayılar (3.130) denkleminde yerine yazılırsa

$$T'(s) = \alpha(s) + \kappa_g(s)\xi(s)$$

olarak bulunur. Serret-Frenet formüllerinden

$$\xi'(s) = \lambda \alpha(s) + \mu T(s) + \gamma \xi(s)\tag{3.133}$$

olarak ifade edilir. Her $s \in I$ için (3.133) denkleminin her iki tarafının α ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \xi' \rangle_L &= \lambda \langle \alpha, \alpha \rangle_L + \mu \langle \alpha, T \rangle_L + \gamma \langle \alpha, \xi \rangle_L \\ -\lambda &= \langle \alpha, \xi' \rangle_L\end{aligned}\tag{3.134}$$

olur.

$\xi = \alpha \wedge T$ eşitliğinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha' \wedge T + \alpha \wedge T' \\ &= \alpha \wedge T'\end{aligned}$$

olup bu eşitlik (3.134) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda = \langle \alpha, \alpha \wedge T' \rangle_L$$

buradan $\lambda = 0$ elde edilir. (3.133) denkleminin her iki tarafının T ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle T, \xi' \rangle_L = \lambda \langle T, \alpha \rangle_L + \mu \langle T, T \rangle_L + \gamma \langle T, \xi \rangle_L$$

$$\mu = \langle T, \xi' \rangle_L$$

$$= \langle T, \alpha \wedge T' \rangle_L$$

$$= \det(T, \alpha, T')$$

$$= -\det(\alpha, T, T')$$

yani

$$\mu = -\kappa_g(s)$$

bulunur. (3.133) denkleminin her iki tarafının ξ ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \xi, \xi' \rangle_L = \lambda \langle \xi, \alpha \rangle_L + \mu \langle \xi, T \rangle_L + \gamma \langle \xi, \xi \rangle_L$$

$$\gamma = \langle \xi, \xi' \rangle_L$$

$$= \langle \alpha \wedge T, \alpha \wedge T' \rangle_L$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \alpha, T' \rangle_L & \langle \alpha, \alpha \rangle_L \\ \langle T, T' \rangle_L & \langle T, \alpha \rangle_L \end{vmatrix}$$

$$= \langle \alpha, T' \rangle_L \langle T, \alpha \rangle_L - \langle \alpha, \alpha \rangle_L \langle T, T' \rangle_L$$

$$= 0$$

elde edilir. Bu durumda (3.133) denklemi

$$\xi'(s) = -\kappa_g(s)T(s)$$

şeklinde yazılır. Teorem 2.12. (iii) ifadesi göz önüne alınarak

$$\xi = \alpha \wedge T$$

denkleminin her iki tarafının T ile soldan pseudo vektör çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
T \wedge \xi &= T \wedge (\alpha \wedge T) \\
&= \langle T, \alpha \rangle_L T - \langle T, T \rangle_L \alpha \\
&= -\alpha
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\alpha = \xi \wedge T$$

elde edilir. Bulunan denklemin her iki tarafının soldan ξ ile pseudo vektör çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\xi \wedge \alpha &= \xi \wedge (\xi \wedge T) \\
&= \langle \xi, \xi \rangle_L T - \langle \xi, T \rangle_L \xi \\
&= T
\end{aligned}$$

olur. Bütün bunlardan $\alpha = \alpha(s)$ hiperbolik eğrisinin Sabban çatası

$$\begin{cases}
\alpha'(s) = T(s) \\
T'(s) = \alpha(s) + \kappa_g(s)\xi(s) \\
\xi'(s) = -\kappa_g(s)T(s)
\end{cases} \quad (3.135)$$

olarak ifade edilir. (3.135) ifadesi matris formunda yazılırsa hiperbolik eğriler için Sabban çatası

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ T' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}$$

dır ve hiperbolik eğriler için vektörler arasındaki bağıntı

$$\begin{cases}
-\alpha = T \wedge \xi \\
T = \xi \wedge \alpha \\
\xi = \alpha \wedge T
\end{cases} \quad (3.136)$$

şeklinde ifade edilir. (Öztürk vd., 2013)

3.3.1. H_0^2 'de hiperbolik eğrilerin zaman benzeri Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler zaman benzeri bir eğri olsun. Bu durumda β 'nin yer vektörü uzay benzeri birim vektör, β 'nin $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü zaman benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü uzay benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = 1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = -1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = 1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir.

Teorem 3.45. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde α 'nın $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi eğer varsa bu

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.137)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir. (3.137) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2}(c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2}(-c_1^2 + c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.137) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha' + c_2\xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 - c_2\kappa_g)T$$

olur ve bu denklemin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2}(c_1 - c_2\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L$$

eşitliğinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{(c_1 - c_2\kappa_g)^2}{2}}$$

çelişkisi elde edilir. Buna göre α birim hızlı regüler hiperbolik eğrisinin zaman benzeri $\alpha\xi$ - Smarandache eğrisi yoktur.

Tanım 3.46. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2\kappa_g^2 < 2$ olmak üzere α 'nın αT - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2T(s)) \quad (3.138)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.47. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı,

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c_2}{\sqrt{2 - c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_1}{\sqrt{2 - c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{c_2\kappa_g}{\sqrt{2 - c_2^2\kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2\kappa_g}{\sqrt{4 - 2c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{-c_1c_2\kappa_g}{\sqrt{4 - 2c_2^2\kappa_g^2}} & \frac{-2}{\sqrt{4 - 2c_2^2\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.139)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 < 2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1 (2 - c_2^2 \kappa_g^2) \\ \lambda_2 &= c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 - c_2 \kappa_g^2) (2 - c_2^2 \kappa_g^2) \\ \lambda_3 &= c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g') (2 - c_2^2 \kappa_g^2)\end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{5/2}} (c_2^2 \kappa_g \lambda_1 - c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 - 2 \lambda_3) \quad (3.140)$$

şeklindedir.

İspat: (3.138) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.138) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\begin{aligned}\beta'(s^*(s)) &= \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 T') \\ T_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)\end{aligned} \quad (3.141)$$

(3.141) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{2} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ -\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 &= \frac{1}{2} (-c_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2)\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 - c_1^2 - c_2^2 \kappa_g^2}{2}}$$

bulunur. Burada $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2 - c_2^2 \kappa_g^2}{2}} \quad (3.142)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$2 - c_2^2 \kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$2 > c_2^2 \kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.142) denklemini (3.141) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.143)$$

elde edilir. (3.143) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (-c_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\ &= \frac{1}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (-2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.143) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \left(-\frac{(-2c_2^2 \kappa_g \kappa_g') (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)}{2(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{3/2}} + \frac{(c_2 \alpha' + c_1 T' + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g \xi')}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} \right) \\ T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \left(\frac{c_2^2 \kappa_g \kappa_g' (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)}{(2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{3/2}} + \frac{(c_2 T + c_1 (\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g' \xi - c_2 \kappa_g^2 T)}{\sqrt{2 - c_2^2 \kappa_g^2}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\begin{aligned} & (c_2^3\kappa_g\kappa'_g + c_1(2-c_2^2\kappa_g^2))\alpha + (c_1c_2^2\kappa_g\kappa'_g + (c_2-c_2\kappa_g^2)(2-c_2^2\kappa_g^2))T \\ & + (c_2^3\kappa_g^2\kappa'_g + (c_1\kappa_g + c_2\kappa'_g)(2-c_2^2\kappa_g^2))\xi \end{aligned} \right)$$

ifadesinde

$$\lambda_1 = c_2^3\kappa_g\kappa'_g + c_1(2-c_2^2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = c_1c_2^2\kappa_g\kappa'_g + (c_2-c_2\kappa_g^2)(2-c_2^2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = c_2^3\kappa_g^2\kappa'_g + (c_1\kappa_g + c_2\kappa'_g)(2-c_2^2\kappa_g^2)$$

olarak alınır

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.144)$$

elde edilir. (3.144) denkleminde (3.142) denklemini yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.145)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \xi_\beta = \beta \wedge T_\beta &= \frac{1}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} (-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT + (c_1^2 - c_2^2)\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-2c_2^2\kappa_g^2}} (-c_2^2\kappa_g\alpha - c_1c_2\kappa_gT - 2\xi) \end{aligned} \quad (3.146)$$

olur. (3.146) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(4-2c_2^2\kappa_g^2)} (c_2^4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2c_2^2\kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + 4\langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(4-2c_2^2\kappa_g^2)} (c_2^2\kappa_g^2(c_1^2 - c_2^2) + 4) \\ &= \frac{1}{(4-2c_2^2\kappa_g^2)} (-2c_2^2\kappa_g^2 + 4) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.138), (3.143) ve (3.146) ifadelerinden (3.139) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.140) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} (c_1(c_1\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1)) \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} (c_2^2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\kappa_g\lambda_2 + (c_1^2 - c_2^2)\lambda_3) \\
&= \frac{1}{(2-c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} (c_2^2\kappa_g\lambda_1 - c_1c_2\kappa_g\lambda_2 - 2\lambda_3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.48. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 > 2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1T(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.147)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.49. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} & \frac{-c_2\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} & \frac{c_1\kappa_g}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} \\ \frac{-2\kappa_g}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} & \frac{c_1c_2}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} & \frac{-c_1^2}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.148)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 > 2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = 2c_1\kappa_g\kappa_g' - c_2\kappa_g(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = -2c_2\kappa_g^2\kappa_g' + (c_1 - c_2\kappa_g' - c_1\kappa_g^2)(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = 2c_1\kappa_g^2\kappa_g' + (c_1\kappa_g' - c_2\kappa_g^2)(c_1^2 - 2\kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 + c_1^2\lambda_3) \quad (3.149)$$

şeklindedir.

İspat: (3.147) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2}(c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.147) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1T' + c_2\xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1(\alpha + \kappa_g\xi) - c_2\kappa_gT)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha - c_2\kappa_gT + c_1\kappa_g\xi) \quad (3.150)$$

(3.150) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$-\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + \kappa_g^2 (c_1^2 + c_2^2))$$

ifadesinde $c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_1^2 - 2\kappa_g^2}{2}} \quad (3.151)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_1^2 - 2\kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$c_1^2 > 2\kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.151) denklemi (3.150) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} (c_1 \alpha - c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \quad (3.152)$$

bulunur. (3.152) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)} (-c_1^2 + \kappa_g^2 (c_1^2 + c_2^2)) \\ &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)} (-c_1^2 + 2\kappa_g^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.152) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \left(-\frac{(-4\kappa_g \kappa_g') (c_1 \alpha - c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi)}{2(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} + \frac{(c_1 \alpha' - c_2 \kappa_g' T - c_2 \kappa_g T' + c_1 \kappa_g' \xi + c_1 \kappa_g \xi')}{\sqrt{c_1^2 - 2\kappa_g^2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
T'_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(2\kappa_g \kappa'_g (c_1 \alpha - c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \right. \\
&\quad \left. + (c_1^2 - 2\kappa_g^2) (c_1 T - c_2 \kappa'_g T - c_2 \kappa_g (\alpha + \kappa_g \xi) + c_1 \kappa'_g \xi - c_1 \kappa_g^2 T) \right) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} \left((2c_1 \kappa_g \kappa'_g - c_2 \kappa_g (c_1^2 - 2\kappa_g^2)) \alpha \right. \\
&\quad \left. + (-2c_2 \kappa_g^2 \kappa'_g + (c_1 - c_2 \kappa'_g - c_1 \kappa_g^2) (c_1^2 - 2\kappa_g^2)) T \right. \\
&\quad \left. + (2c_1 \kappa_g^2 \kappa'_g + (c_1 \kappa'_g - c_2 \kappa_g^2) (c_1^2 - 2\kappa_g^2)) \xi \right)
\end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2c_1 \kappa_g \kappa'_g - c_2 \kappa_g (c_1^2 - 2\kappa_g^2) \\
\lambda_2 &= -2c_2 \kappa_g^2 \kappa'_g + (c_1 - c_2 \kappa'_g - c_1 \kappa_g^2) (c_1^2 - 2\kappa_g^2) \\
\lambda_3 &= 2c_1 \kappa_g^2 \kappa'_g + (c_1 \kappa'_g - c_2 \kappa_g^2) (c_1^2 - 2\kappa_g^2)
\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.153)$$

bulunur. (3.153) denkleminde (3.151) denklemi yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.154)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2 \kappa_g & c_1 \kappa_g \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} (-\kappa_g (c_1^2 + c_2^2) \alpha - (-c_1 c_2) T - c_1^2 \xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2c_1^2 - 4\kappa_g^2}} (-2\kappa_g \alpha + c_1 c_2 T - c_1^2 \xi) \quad (3.155)
\end{aligned}$$

olur. (3.155) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2c_1^2 - 4\kappa_g^2)} \left(4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^4 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\
&= \frac{1}{(2c_1^2 - 4\kappa_g^2)} \left(-4\kappa_g^2 + c_1^2 (c_1^2 + c_2^2) \right) \\
&= \frac{1}{(2c_1^2 - 4\kappa_g^2)} \left(-4\kappa_g^2 + 2c_1^2 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.147), (3.152) ve (3.155) ifadelerinden (3.148) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.149) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2\kappa_g & c_1\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(-c_1(c_1\lambda_3 - c_1\kappa_g\lambda_1) + c_2(c_1\lambda_2 + c_2\kappa_g\lambda_1) \right) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} \left(\kappa_g(c_1^2 + c_2^2)\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 + c_1^2\lambda_3 \right) \\
&= \frac{1}{(c_1^2 - 2\kappa_g^2)^{5/2}} (2\kappa_g\lambda_1 + c_1c_2\lambda_2 + c_1^2\lambda_3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.50. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 - c_3\kappa_g)^2 < c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1\alpha(s) + c_2T(s) + c_3\xi(s)) \quad (3.156)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.51. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T \xi$ -Smarandache eğrisi $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1 - c_3 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2 \kappa_g + c_3(c_1 - c_3 \kappa_g)}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 \kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.157)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 < c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_2 \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (c_1 - c_3 \kappa_g) \left(c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 - c_3 \kappa_g) \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (c_2 - c_3 \kappa_g' - c_2 \kappa_g^2) \left(c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_3 &= c_2 \kappa_g \left(-c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2^2 \kappa_g \kappa_g' \right) + (\kappa_g (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2 \kappa_g') \left(c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 \right) \end{aligned}$$

için

$$\kappa_g^\beta = \frac{(c_2^2 \kappa_g + c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3) \lambda_1 + (-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3) \lambda_2 + (c_1^2 - c_1 c_3 \kappa_g - c_2^2) \lambda_3}{(c_2^2 - (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2)^{5/2}} \quad (3.158)$$

şeklindedir.

İspat: (3.156) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} \left(c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_3^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right)$$

$$1 = \frac{1}{3} (-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3$$

elde edilir. (3.156) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta'(s^*(s)) &= \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1\alpha' + c_2T' + c_3\xi') \\
T_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1T + c_2(\alpha + \kappa_g\xi) - c_3\kappa_gT) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)
\end{aligned} \tag{3.159}$$

(3.159) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{3} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\
-\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 &= \frac{1}{3} (-c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2)
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}{3}} \tag{3.160}$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$(c_1 - c_3\kappa_g)^2 < c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.160) denklemini (3.159) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2}} (c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi) \tag{3.161}$$

bulunur. (3.161) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 \kappa_g^2)} (-c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

olup T_β zaman benzeri birim vektördür. (3.161) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{dT_\beta}{ds} \frac{ds^*}{ds} = \left(\begin{array}{c} \frac{(2c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) - 2c_2^2\kappa_g\kappa'_g)(c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)}{2(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \\ + \frac{(c_2\alpha' - c_3\kappa'_gT + (c_1 - c_3\kappa_g)T' + c_2\kappa'_g\xi + c_2\kappa_g\xi')}{\sqrt{c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2}} \end{array} \right)$$

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\begin{array}{c} (-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g)(c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi) \\ + (c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2) \left(\begin{array}{c} c_2T - c_3\kappa'_gT + (c_1 - c_3\kappa_g)(\alpha + \kappa_g\xi) \\ + c_2\kappa'_g\xi - c_2\kappa_g^2T \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} c_2(-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \\ + (c_1 - c_3\kappa_g)(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2) \end{array} \right) \alpha \\ + \left(\begin{array}{c} (c_1 - c_3\kappa_g)(-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \\ + (c_2 - c_3\kappa'_g - c_2\kappa_g^2)(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2) \end{array} \right) T \\ + \left(\begin{array}{c} c_2\kappa_g(-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \\ + (\kappa_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2\kappa'_g)(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2) \end{array} \right) \xi \end{array} \right)$$

ifadesinde

$$\lambda_1 = c_2(-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (c_1 - c_3\kappa_g)(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = (c_1 - c_3\kappa_g)(-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (c_2 - c_3\kappa'_g - c_2\kappa_g^2)(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = c_2\kappa_g(-c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2^2\kappa_g\kappa'_g) + (\kappa_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2\kappa'_g)(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)$$

olarak alınır

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{3/2}} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.162)$$

bulunur. (3.162) denkleminde (3.160) denklemini yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{3}}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^2} (\lambda_1\alpha + \lambda_2T + \lambda_3\xi) \quad (3.163)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 - c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \begin{pmatrix} -(c_2^2\kappa_g - c_3(c_1 - c_3\kappa_g))\alpha - (c_1c_2\kappa_g - c_2c_3)T \\ (c_1(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2}} \begin{pmatrix} (c_3(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)\alpha + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)T \\ (c_1(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2)\xi \end{pmatrix} \quad (3.164)
\end{aligned}$$

olur. (3.164) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2)} \begin{pmatrix} (c_3(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L \\ (c_1(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2)^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2)} \left(-(c_3(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g)^2 + (c_2c_3 - c_1c_2\kappa_g)^2 + (c_1(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2)^2 \right) \\
&= \frac{1}{(3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2)} \left(-(-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \right) (c_1^2 - 2c_1c_3\kappa_g + c_3^2\kappa_g^2 + c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2) \\
&= \frac{1}{(3c_2^2 - 3(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - 3c_2^2\kappa_g^2)} (-3) \left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 - c_2^2 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olup ξ_β uzay benzeri birim vektördür. (3.156), (3.161) ve (3.164) ifadelerinden (3.157) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.158) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 - c_3\kappa_g & c_2\kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}} \begin{pmatrix} (c_1(\lambda_3(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2\kappa_g\lambda_2) - c_2(c_2\lambda_3 - c_2\kappa_g\lambda_1)) \\ +c_3(c_2\lambda_2 - \lambda_1(c_1 - c_3\kappa_g)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{(c_2^2\kappa_g + c_3^2\kappa_g - c_1c_3)\lambda_1 + (-c_1c_2\kappa_g + c_2c_3)\lambda_2 + (c_1^2 - c_1c_3\kappa_g - c_2^2)\lambda_3}{(c_2^2 - (c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2\kappa_g^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

3.3.2. H_0^2 'de hiperbolik eğrilerin uzay benzeri Smarandache eşlenik eğrileri

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik eğrisinin Smarandache eşleniği olan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi birim hızlı regüler uzay benzeri bir eğri olsun. Bu durumda β 'nın yer vektörü uzay benzeri birim vektör, β 'nın $\beta(s^*(s))$ noktasındaki T_β teğet vektörü uzay benzeri birim vektör ve $\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta$ vektörü zaman benzeri birim vektördür. Yani $\langle \beta, \beta \rangle_L = 1$, $\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = 1$ ve $\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L = -1$ 'dir.

α ve β eğrilerinin Sabban çatıları sırasıyla $\{\alpha, T, \xi\}$ ve $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ olsun. Bu takdirde Smarandache eğrilerinin aşağıdaki tanımları yapılabilir.

Tanım 3.52. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ olmak üzere α 'nın $\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1\alpha(s) + c_2\xi(s)) \quad (3.165)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.53. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha\xi$ -Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nın $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ \frac{c_2\varepsilon}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_1\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere β 'nın jeodezik eğriliği

$$\kappa_g^\beta = \frac{c_1\kappa_g - c_2}{|c_1 - c_2\kappa_g|} \quad (3.167)$$

şeklindedir.

İspat: (3.165) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.165) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T - c_2 \kappa_g T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 - c_2 \kappa_g) T \quad (3.168)$$

(3.168) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1 - c_2 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L$$

olup buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{|c_1 - c_2 \kappa_g|}{\sqrt{2}} \quad (3.169)$$

olur. (3.169) denklemi (3.168) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{c_1 - c_2 \kappa_g}{|c_1 - c_2 \kappa_g|} T$$

$$= \varepsilon T \quad (3.170)$$

bulunur. Burada

$$c_1 - c_2 \kappa_g > 0 \text{ ise } \varepsilon = 1$$

$$c_1 - c_2 \kappa_g < 0 \text{ ise } \varepsilon = -1$$

olarak alınır. (3.170) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \varepsilon^2 \langle T, T \rangle_L = 1$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.170) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \varepsilon T' \\ T'_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \varepsilon(\alpha + \kappa_g \xi) \end{aligned} \quad (3.171)$$

bulunur. (3.171) denkleminde (3.169) denklemi yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{|c_1 - c_2 \kappa_g|} \varepsilon(\alpha + \kappa_g \xi) \quad (3.172)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left(-\frac{c_2 \varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \alpha + \left(\frac{c_1 \varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \xi \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} (c_2 \alpha + c_1 \xi) \end{aligned} \quad (3.173)$$

olur. (3.173) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{\varepsilon^2}{2} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} = -1 \end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.165), (3.170) ve (3.173) ifadelerinden (3.166) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.167) eşitliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\ &= \frac{\varepsilon^2}{|c_1 - c_2 \kappa_g|} \begin{vmatrix} c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \kappa_g \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon^2}{|c_1 - c_2 \kappa_g|} (c_1 \kappa_g - c_2) \\
&= \frac{c_1 \kappa_g - c_2}{|c_1 - c_2 \kappa_g|}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.54. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 > 2$ olmak üzere α 'nın αT - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 \alpha(s) + c_2 T(s)) \quad (3.174)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.55. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı

regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın αT -

Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban

çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} & \frac{c_1}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} \\ \frac{-c_2^2 \kappa_g}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} & \frac{-c_1 c_2 \kappa_g}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} & \frac{-2}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.175)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_2^2 \kappa_g^2 > 2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1 (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_2 = -c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 - c_2 \kappa_g^2)(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_3 = -c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} (c_2^2 \kappa_g \lambda_1 - c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 - 2 \lambda_3) \quad (3.176)$$

şeklindedir.

İspat: (3.174) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + c_2^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.174) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha' + c_2 T')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.177)$$

bulunur. (3.177) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} (-c_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{-c_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2}{2}}$$

ifadesinde $-c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınır

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}{2}} \quad (3.178)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$c_2^2 \kappa_g^2 - 2 > 0,$$

yani

$$c_2^2 \kappa_g^2 > 2$$

olmalıdır. (3.178) denklemini (3.177) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.179)$$

elde edilir. (3.179) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)} (-c_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)} (-2 + c_2^2 \kappa_g^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.179) denkleminde s yay parametresine göre türev alınır

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= -\frac{2c_2^2 \kappa_g \kappa_g' (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi)}{2(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} + \frac{(c_2 \alpha' + c_1 T' + c_2 \kappa_g' \xi + c_2 \kappa_g \xi')}{\sqrt{c_2^2 \kappa_g^2 - 2}} \\ T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \frac{-c_2^2 \kappa_g \kappa_g' (c_2 \alpha + c_1 T + c_2 \kappa_g \xi) + (c_2^2 \kappa_g^2 - 2)(c_2 T + c_1(\alpha + \kappa_g \xi) + c_2 \kappa_g' \xi - c_2 \kappa_g^2 T)}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} \left(\begin{aligned} &(-c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1(c_2^2 \kappa_g^2 - 2))\alpha + (-c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 - c_2 \kappa_g^2)(c_2^2 \kappa_g^2 - 2))T \\ &+ (-c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(c_2^2 \kappa_g^2 - 2))\xi \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\lambda_1 = -c_2^3 \kappa_g \kappa_g' + c_1(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_2 = -c_1 c_2^2 \kappa_g \kappa_g' + (c_2 - c_2 \kappa_g^2)(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

$$\lambda_3 = -c_2^3 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g + c_2 \kappa_g')(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)$$

olarak alınır

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.180)$$

elde edilir. (3.180) denkleminde (3.178) denklemini yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.181)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \xi_\beta = \beta \wedge T_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 \kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} (-c_2^2 \kappa_g \alpha - c_1 c_2 \kappa_g T + (c_1^2 - c_2^2) \xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2c_2^2 \kappa_g^2 - 4}} (-c_2^2 \kappa_g \alpha - c_1 c_2 \kappa_g T - 2\xi) \end{aligned} \quad (3.182)$$

olur. (3.182) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2c_2^2 \kappa_g^2 - 4)} (c_2^4 \kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + 4 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(2c_2^2 \kappa_g^2 - 4)} (c_2^2 \kappa_g^2 (c_1^2 - c_2^2) + 4) \\ &= \frac{1}{(2c_2^2 \kappa_g^2 - 4)} (-2c_2^2 \kappa_g^2 + 4) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.174), (3.179) ve (3.182) ifadelerinden (3.175) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.176) eşitliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\ &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 \kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} (c_1(c_1 \lambda_3 - c_2 \kappa_g \lambda_2) - c_2(c_2 \lambda_3 - c_2 \kappa_g \lambda_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} (c_2^2 \kappa_g \lambda_1 - c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 + (c_1^2 - c_2^2) \lambda_3) \\
&= \frac{1}{(c_2^2 \kappa_g^2 - 2)^{5/2}} (c_2^2 \kappa_g \lambda_1 - c_1 c_2 \kappa_g \lambda_2 - 2 \lambda_3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.56. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 < 2\kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $T\xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T(s) + c_2 \xi(s)) \quad (3.183)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.57. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı

regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $T\xi$ -

Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban

çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{\sqrt{2}} & \frac{c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} & \frac{-c_2 \kappa_g}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} & \frac{c_1 \kappa_g}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} \\ \frac{-2\kappa_g}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} & \frac{-c_1^2}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.184)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_1^2 + c_2^2 = 2$ ve $c_1^2 < 2\kappa_g^2$ olmak üzere β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = -2c_1 \kappa_g \kappa_g' - c_2 \kappa_g (2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_2 = 2c_2 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 - c_2 \kappa_g' - c_1 \kappa_g^2)(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

$$\lambda_3 = -2c_1 \kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 \kappa_g' - c_2 \kappa_g^2)(2\kappa_g^2 - c_1^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} (2\kappa_g \lambda_1 + c_1 c_2 \lambda_2 - c_1^2 \lambda_3) \quad (3.185)$$

şeklindedir.

İspat: (3.183) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = 2$$

elde edilir. (3.183) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 T' + c_2 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 (\alpha + \kappa_g \xi) - c_2 \kappa_g T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1 \alpha - c_2 \kappa_g T + c_1 \kappa_g \xi) \quad (3.186)$$

bulunur. (3.186) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{2} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} (-c_1^2 + \kappa_g^2 (c_1^2 + c_2^2))$$

ifadesinde $c_1^2 + c_2^2 = 2$ eşitliği göz önüne alınır

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa_g^2 - c_1^2}{2}} \quad (3.187)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'in tanımlı olması için

$$2\kappa_g^2 - c_1^2 > 0,$$

yani

$$2\kappa_g^2 > c_1^2$$

olmalıdır. (3.187) denklemi (3.186) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} (c_1\alpha - c_2\kappa_g T + c_1\kappa_g \xi) \quad (3.188)$$

bulunur. (3.188) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılrırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)} \left(c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\ &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)} \left(-c_1^2 + \kappa_g^2 (c_1^2 + c_2^2) \right) \\ &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)} (-c_1^2 + 2\kappa_g^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.188) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \left(-\frac{4\kappa_g \kappa_g' (c_1\alpha - c_2\kappa_g T + c_1\kappa_g \xi)}{2(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} + \frac{(c_1\alpha' - c_2\kappa_g' T - c_2\kappa_g T' + c_1\kappa_g' \xi + c_1\kappa_g \xi')}{\sqrt{2\kappa_g^2 - c_1^2}} \right) \\ T_\beta' \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} \left(-2\kappa_g \kappa_g' (c_1\alpha - c_2\kappa_g T + c_1\kappa_g \xi) \right. \\ &\quad \left. + (2\kappa_g^2 - c_1^2) (c_1 T - c_2\kappa_g' T - c_2\kappa_g (\alpha + \kappa_g \xi) + c_1\kappa_g' \xi - c_1\kappa_g^2 T) \right) \\ &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} \left((-2c_1\kappa_g \kappa_g' - c_2\kappa_g (2\kappa_g^2 - c_1^2)) \alpha + (2c_2\kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 - c_2\kappa_g' - c_1\kappa_g^2) (2\kappa_g^2 - c_1^2)) T \right. \\ &\quad \left. + (-2c_1\kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1\kappa_g' - c_2\kappa_g^2) (2\kappa_g^2 - c_1^2)) \xi \right) \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2c_1\kappa_g \kappa_g' - c_2\kappa_g (2\kappa_g^2 - c_1^2) \\ \lambda_2 &= 2c_2\kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1 - c_2\kappa_g' - c_1\kappa_g^2) (2\kappa_g^2 - c_1^2) \\ \lambda_3 &= -2c_1\kappa_g^2 \kappa_g' + (c_1\kappa_g' - c_2\kappa_g^2) (2\kappa_g^2 - c_1^2) \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$T_\beta' \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.189)$$

olup (3.189) denkleminde (3.187) denklemini yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.190)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_\beta &= \beta \wedge T_\beta = \frac{1}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2 \kappa_g & c_1 \kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} (-\kappa_g (c_1^2 + c_2^2) \alpha - (-c_1 c_2) T - c_1^2 \xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\kappa_g^2 - 2c_1^2}} (-2\kappa_g \alpha + c_1 c_2 T - c_1^2 \xi) \end{aligned} \quad (3.191)$$

olur. (3.191) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{(4\kappa_g^2 - 2c_1^2)} (4\kappa_g^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_1^2 c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_1^4 \langle \xi, \xi \rangle_L) \\ &= \frac{1}{(4\kappa_g^2 - 2c_1^2)} (-4\kappa_g^2 + c_1^2 (c_1^2 + c_2^2)) \\ &= \frac{1}{(4\kappa_g^2 - 2c_1^2)} (-4\kappa_g^2 + 2c_1^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.183), (3.188) ve (3.191) ifadelerinden (3.184) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.185) eşitliği

$$\begin{aligned} \kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\ &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2 \kappa_g & c_1 \kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} (-c_1 (c_1 \lambda_3 - c_1 \kappa_g \lambda_1) + c_2 (c_1 \lambda_2 + c_2 \kappa_g \lambda_1)) \\ &= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} (\kappa_g (c_1^2 + c_2^2) \lambda_1 + c_1 c_2 \lambda_2 - c_1^2 \lambda_3) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\kappa_g^2 - c_1^2)^{5/2}} (2\kappa_g \lambda_1 + c_1 c_2 \lambda_2 - c_1^2 \lambda_3)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.58. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri olsun. Bu takdirde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 > c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2$ olmak üzere α 'nın $\alpha T \xi$ - Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*(s)) = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 \alpha(s) + c_2 T(s) + c_3 \xi(s)) \quad (3.192)$$

şeklinde tanımlanan $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisidir.

Teorem 3.59. H_0^2 'de $\{\alpha, T, \xi\}$ Sabban çatısı ile $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow H_0^2$ eğrisi birim hızlı regüler hiperbolik bir eğri ve α 'nın jeodezik eğriliği κ_g olmak üzere, α 'nın $\alpha T \xi$ - Smarandache eğrisi $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi ise bu takdirde β 'nin $\{\beta, T_\beta, \xi_\beta\}$ Sabban çatısı

$$\begin{bmatrix} \beta \\ T_\beta \\ \xi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{3}} & \frac{c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1 - c_3 \kappa_g}{\sqrt{(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_2 \kappa_g}{\sqrt{(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2}} \\ \frac{-c_2^2 \kappa_g + c_3(c_1 - c_3 \kappa_g)}{\sqrt{3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3}{\sqrt{3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} & \frac{c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2}{\sqrt{3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (3.193)$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3$ ve $(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 > c_2^2 - c_2^2 \kappa_g^2$ β 'nin jeodezik eğriliği

$$\lambda_1 = c_2 (c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa_g') + (c_1 - c_3 \kappa_g) ((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\lambda_2 = (c_1 - c_3 \kappa_g) (c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa_g') + (c_2 - c_3 \kappa_g' - c_2 \kappa_g^2) ((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

$$\lambda_3 = c_2 \kappa_g (c_3 \kappa_g' (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa_g') + (\kappa_g (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2 \kappa_g') ((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

için

$$\kappa_g^\beta = \frac{(c_2^2 \kappa_g + c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3) \lambda_1 + (-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3) \lambda_2 + (c_1^2 - c_1 c_3 \kappa_g - c_2^2) \lambda_3}{((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2)^{5/2}} \quad (3.194)$$

şeklindedir.

İspat: (3.192) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\langle \beta, \beta \rangle_L = \frac{1}{3} (c_1^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + c_2^2 \langle T, T \rangle_L + c_3^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$1 = \frac{1}{3} (-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

$$-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 3$$

elde edilir. (3.192) denkleminin s yay parametresine göre türevi alınır

$$\beta'(s^*(s)) = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 \alpha' + c_2 T' + c_3 \xi')$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} (c_1 T + c_2 (\alpha + \kappa_g \xi) - c_3 \kappa_g T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} (c_2 \alpha + (c_1 - c_3 \kappa_g) T + c_2 \kappa_g \xi) \quad (3.195)$$

bulunur. (3.195) denkleminin her iki tarafının kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L = \frac{1}{3} (c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2 \kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L)$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = \frac{1}{3} (-c_2^2 + (c_1 - c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2)$$

olup

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2}{3}} \quad (3.196)$$

olur. $\frac{ds}{ds^*}$ 'ın tanımlı olması için

$$(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 > 0,$$

yani

$$(c_1 - c_3\kappa_g)^2 > c_2^2 - c_2^2\kappa_g^2$$

olmalıdır. (3.196) denklemi (3.195) denkleminde yerine yazılırsa

$$T_\beta = \frac{1}{\sqrt{(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2}} (c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi) \quad (3.197)$$

bulunur. (3.197) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılsa

$$\begin{aligned} \langle T_\beta, T_\beta \rangle_L &= \frac{1}{\left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2\right)} \left(c_2^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L + c_2^2\kappa_g^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \right) \\ &= \frac{1}{\left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2\right)} \left(-c_2^2 + (c_1 - c_3\kappa_g)^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup T_β uzay benzeri birim vektördür. (3.197) denkleminde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dT_\beta}{ds} \frac{ds^*}{ds} &= \left(\frac{\left(-2c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) + (2c_2^2\kappa_g\kappa'_g) \right) (c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi)}{2\left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2\right)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(c_2\alpha' - c_3\kappa'_gT + (c_1 - c_3\kappa_g)T' + c_2\kappa'_g\xi + c_2\kappa_g\xi')}{\sqrt{(c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2}} \right) \\ T'_\beta \frac{ds^*}{ds} &= \frac{1}{\left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2\right)^{3/2}} \left(\left(c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g \right) (c_2\alpha + (c_1 - c_3\kappa_g)T + c_2\kappa_g\xi) \right. \\ &\quad \left. + \left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \left(c_2T - c_3\kappa'_gT + (c_1 - c_3\kappa_g)(\alpha + \kappa_g\xi) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2\right)^{3/2}} \left(\left(c_2 \left(c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_1 - c_3\kappa_g) \left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \right) \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left((c_1 - c_3\kappa_g) \left(c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_2 - c_3\kappa'_g - c_2\kappa_g^2) \left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \right) T \right. \\ &\quad \left. + \left(c_2\kappa_g \left(c_3\kappa'_g(c_1 - c_3\kappa_g) - c_2^2\kappa_g\kappa'_g \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\kappa_g(c_1 - c_3\kappa_g) + c_2\kappa'_g) \left((c_1 - c_3\kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2\kappa_g^2 \right) \right) \xi \right) \end{aligned}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= c_2 \left(c_3 \kappa'_g (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa'_g \right) + (c_1 - c_3 \kappa_g) \left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_2 &= (c_1 - c_3 \kappa_g) \left(c_3 \kappa'_g (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa'_g \right) + (c_2 - c_3 \kappa'_g - c_2 \kappa_g^2) \left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right) \\ \lambda_3 &= c_2 \kappa_g \left(c_3 \kappa'_g (c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g \kappa'_g \right) + (\kappa_g (c_1 - c_3 \kappa_g) + c_2 \kappa'_g) \left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right)\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$T'_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right)^{3/2}} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.198)$$

olup (3.198) denkleminde (3.196) denklemini yerine yazılırsa

$$T'_\beta = \frac{\sqrt{3}}{\left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right)^2} (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 T + \lambda_3 \xi) \quad (3.199)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\xi_\beta = \beta \wedge T_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} \begin{vmatrix} -\alpha & T & \xi \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 - c_3 \kappa_g & c_2 \kappa_g \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} \left(\begin{aligned} &-(c_2^2 \kappa_g - c_3(c_1 - c_3 \kappa_g))\alpha - (c_1 c_2 \kappa_g - c_2 c_3)T \\ &+ (c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2)\xi \end{aligned} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2}} \left(\begin{aligned} &(c_3(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g)\alpha + (c_2 c_3 - c_1 c_2 \kappa_g)T \\ &+ (c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2)\xi \end{aligned} \right) \quad (3.200)\end{aligned}$$

olur. (3.200) denkleminin kendisi ile Lorentz iç çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned}\langle \xi_\beta, \xi_\beta \rangle_L &= \frac{1}{\left(3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2 \right)} \left(\begin{aligned} &(c_3(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g)^2 \langle \alpha, \alpha \rangle_L + (c_2 c_3 - c_1 c_2 \kappa_g)^2 \langle T, T \rangle_L \\ &+ (c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2)^2 \langle \xi, \xi \rangle_L \end{aligned} \right) \\ &= \frac{1}{\left(3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2 \right)} \left(\begin{aligned} &-(c_3(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2 \kappa_g)^2 + (c_2 c_3 - c_1 c_2 \kappa_g)^2 \\ &+ (c_1(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2^2)^2 \end{aligned} \right) \\ &= \frac{1}{\left(3(c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - 3c_2^2 + 3c_2^2 \kappa_g^2 \right)} \left(-(-c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_1^2 - 2c_1 c_3 \kappa_g + c_3^2 \kappa_g^2 + c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2) \right) \\ &= \frac{1}{3 \left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2 \right)} \left(-3 \left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 + c_2^2 \kappa_g^2 - c_2^2 \right) \right) \\ &= -1\end{aligned}$$

olup ξ_β zaman benzeri birim vektördür. (3.192), (3.197) ve (3.200) ifadelerinden (3.193) ifadesi elde edilir. Ayrıca (3.194) eşitliği

$$\begin{aligned}
\kappa_g^\beta &= \det(\beta, T_\beta, T'_\beta) \\
&= \frac{1}{\left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2\right)^{5/2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_1 - c_3 \kappa_g & c_2 \kappa_g \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2\right)^{5/2}} \left((c_1(\lambda_3(c_1 - c_3 \kappa_g) - c_2 \kappa_g \lambda_2) - c_2(c_2 \lambda_3 - c_2 \kappa_g \lambda_1)) \right. \\
&\quad \left. + c_3(c_2 \lambda_2 - \lambda_1(c_1 - c_3 \kappa_g)) \right) \\
&= \frac{(c_2^2 \kappa_g + c_3^2 \kappa_g - c_1 c_3) \lambda_1 + (-c_1 c_2 \kappa_g + c_2 c_3) \lambda_2 + (c_1^2 - c_1 c_3 \kappa_g - c_2^2) \lambda_3}{\left((c_1 - c_3 \kappa_g)^2 - c_2^2 + c_2^2 \kappa_g^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

BÖLÜM IV

SONUÇ

Bu yüksek lisans çalışmasında, Sabban çatısına göre de Sitter ve hiperbolik uzaydaki eğrilerin Smarandache eşlenikleri literatürde ilk defa tanımlanmıştır. Bu çalışmanın neticesinde SCI expanded bir makale üretilmiş, bir makalede yayına gönderilmiştir. Ayrıca çalışmanın bir bölümü 2nd International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMS-2013) isimli konferansta, bir diğer bölümü de XII. Ulusal Geometri Sempozyumunda bildiri olarak sunulmuştur. Burada ifade edilen yüzeyler üzerindeki Smarandache eşlenik eğrilerinin farklı yüzeyler üzerinde de çalışılabileceği açıktır. Bu çalışmanın geometri alanında çalışan araştırmacılara faydalı olacağı düşünülmektedir. Konu üzerindeki çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

Ali, A. T., “Special Smarandache Curves in the Euclidean Space”, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 30-36, 2010.

Asil, V., Körpınar, T. and Baş, S., “Inextensible flows of timelike curves with Sabban frame in S_1^2 ”, *Siauliai Math. Semin.*, 7(15), 5-12, 2012.

Bayrak, N., Bektaş, O. and Yüce, S., “ Special Smarandache Curves in E_1^3 ”, *arXiv: 1204.566v1, [math.HO]*, 25 April 2012.

Bektaş, O. and Yüce, S., “Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3-Space”, *Romanian Journal of Matematics and Computer Science*, 3(1), 48-59, 2013.

Çetin, M., Tuncer, Y. and Karacan, M. K., “Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space”, *arXiv: 1106. 3202v1 [math.DG]*, 16 Jun 2011.

Izumiya, S., Pei, D. H., Sano, T. and Torii, E., “Evolutes of hyperbolic plane curves”, *Acta Math. Sinica (English Series)*, 20(3), 543-550, 2004.

Kahraman, T., Önder, M. and Uğurlu, H. H., “Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces”, *arXiv: 120. 2180v1, [math.GM]*, 10 May 2012.

Koç Öztürk, E. B., Öztürk, U., İlarıslan, K. and Nesovic, E., “On Pseudohyperbolic Smarandache Curves in Minkowski 3-Space”, *Int. J. of Math. and Math. Sci.* 2013, Article ID 658670, 7 pages.

O’Neill, B., Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, *Academic Press*, London, 1983.

Ratchliffe, J.G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, **Springer-Verlag**, Berlin, 1994.

Sato, T., “Curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space”, **Preprint**, 2012.

Taşköprü, K. and Tosun, M., “Smarandache Curves on S^2 ”, **Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.)** 32(1), 51-59, 2014.

Turgut, M. and Yılmaz, S., “Smarandache Curves in Minkowski Space-time”, **International J. Math. Combin.**, 3, 51-55, 2008.

ÖZ GEÇMİŞ

Tuğba Tamirci 09.01.1988 tarihinde Ankara’da doğdu. İlk ve orta öğretimini Çorum/İskilip’te tamamladı. 2007 yılında girdiği Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden Haziran 2011’de mezun oldu. Eylül 2011’de Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı.

TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından, 1 (bir) adet uluslararası makale ile 1 (bir) adet uluslararası bildiri ve 1 (bir) adet ulusal bildiri üretilmiştir. Bu üretilen çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Savaş, M., Yakut, A.T. and Tamirci, T., “Smarandache Curves on S_1^2 and H_0^2 in Minkowski 3-Space”, *2nd International Eurasian Conference on Mathematics Sciences and Applications (IECMS-2013)*, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, s. 274, 26-29 August, 2013.

Yakut, A.T., Savaş, M. and Tamirci, T., “The Smarandache Curves on S_1^2 and Its Duality on H_0^2 ”, *Journal of Applied Mathematics*, 2014, Article ID 193586, 12 pages.

Yakut, A.T. and Tamirci, T., “Smarandache Curves in H_0^2 and S_1^2 ”, *XII. Geometri Sempozyumu*, Bilecik, s. 18-19, 23-26 Haziran, 2014.

