



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİDYEN VE MİNKOWSKİ UZAYINDA
YÜZEYLER

VEYSİ ÇİÇEK

Şubat 2015

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİDYEN VE MINKOWSKI UZAYINDA
YÜZEYLER

VEYSİ ÇİÇEK

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Şubat 2015

Veysi ÇİÇEK tarafından **Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT** danışmanlığında hazırlanan “**Üç Boyutlu Öklidyen ve Minkowski Uzayında Yüzeyler**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

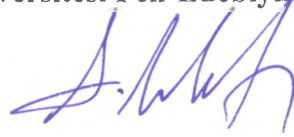
Başkan : **Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN**
(Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)



Üye : **Yrd. Doç. Dr. Murat SAVAŞ**
(Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)



Üye : **Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT**
(Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)



ONAY:

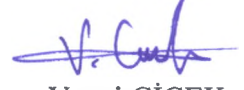
Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Veysi ÇİÇEK

ÖZET
ÜÇ BOYUTLU ÖKLİDYEN VE MINKOWSKI UZAYINDA
YÜZEYLER

ÇİÇEK, Veysi
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

Şubat 2015, 77sayfa

Bu çalışmada üç ve dört boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında Frenet çatıları ile üç boyutlu uzayda yüzeyler incelendi. Birinci bölümde kısa bir literatür özeti verildi. İkinci bölümde konuyla ilgili temel kavramlar verildi. Üçüncü bölümde ise üç ve dört boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında Frenet çatıları irdelendi. Dördüncü bölümde de üç boyutlu Minkowski uzayında minimal ve öteleme yüzeyleri incelendi. Beşinci bölümde ise sonuçlar verildi.

Anahtar Sözcükler: Frenet çatısı, Minkowski uzayı, Minimal yüzey, Öteleme yüzeyi.

SUMMARY
SURFACES IN THREE DIMENSIONAL EUCLIDEAN AND MINKOWSKI
SPACES

ÇİÇEK, Veysi
Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Atakan Tuğkan YAKUT

February 2015, 77 pages

In this study, we examined Frenet frames in 3 and 4 dimensional Euclidean and Minkowskian spaces and surfaces in 3 dimensional space. In the first chapter, we give literature summary. In the second chapter we give some basic concepts. In the third chapter, the Frenet frames is given in 3 and 4 dimensional Euclidean and Minkowskian spaces. In the fourth chapter, we discussed minimal and translation surfaces in Minkowskian 3-spaces. In the last chapter, we give conclusions.

Keywords: Frenet frames, Minkowski space, Minimal surface, Translation surface.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamın yürütülmesi esnasında, çalışmalarına yön veren, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bana her türlü desteği sağlayan danışman hocam, Sayın Doç.Dr. Atakan Tuğkan YAKUT' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans tez çalışmam esnasında tecrübelerine başvurduğum Doç. Dr. Serkan KADER, Doç.Dr. Durmuş DAĞHAN, Doç.Dr. Adnan TUNA ve Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine müteşekkir olduğumu ifade etmek isterim. Bu tezin hazırlanması esnasında sık sık yardımlarına başvurduğum kıymetli arkadaşlarıma minnet ve şükran duygularımı belirtmek isterim.

Bu tezi, sadece bu çalışmam boyunca değil, tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGE VE KISALTMALAR	xi
BÖLÜM I GİRİŞ	1
BÖLÜM II TEMEL KAVRAMLAR	5
BÖLÜM III ÜÇ BOYUTLU ÖKLİDYEN VE MİNKOWSKİ UZAYINDA FRENET ÇATISI.....	10
3.1 Üç Boyutlu Öklid Durumu	10
3.2 Üç Boyutlu Minkowski Durumu	13
3.3 Dört Boyutlu Öklid Durumu.....	16
3.4 Dört Boyutlu Minkowski Durumu.....	21
BÖLÜM IV MİNKOWSKİ UZAYINDA MİNİMAL VE ÖTELEME YÜZEYLERİ	33
4.1 Gauss ve Ortalama Eğrilik	33
4.2 Minimal Yüzeyler	35
4.3 Sabit Ortalama Eğrilikli Öteleme Yüzeyleri	39
BÖLÜM V SONUÇLAR	74
KAYNAKLAR	75
ÖZ GEÇMİŞ	77

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Scherk yüzeyi.....39

Şekil 4.2. $z = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2.H} \cdot \sqrt{1-4.H^2 \cdot (x+c_1)^2 + c_2} - \lambda.y$ (a) $\lambda = 3, H = 2$ ve (b) $\lambda = 0, H = 1$
alınarak elde edilen yüzey..... 50

Şekil 4.3 $z = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2.H} \sqrt{1+4H^2(x+c_1)^2} - \lambda y$ (a) $\lambda = 0, H = 1$ ve (b) $\lambda = \frac{-1}{2}, H = -1$
alınarak elde edilen yüzey.....51

Şekil 4.4. $z = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2.H} \sqrt{4H^2(x+c_1)^2 - 1 + c_2} - \lambda y$ (a) $\lambda = 0, H = 1$ ve (b) $\lambda = \frac{-1}{2}, H = 2$
alınarak elde edilen yüzey.....51

Şekil4.5. $z = \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2.H} \sqrt{1-4H^2(x+c_1)^2 + c_2} - \lambda y$ (a) $\lambda = -3, H = 2$ ve (b) $\lambda = -2, H = \frac{-1}{2}$
alınarak elde edilen yüzey.....52

Şekil 4.6. $g(y) = \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2.H} \sqrt{1+4H^2(y+c_1)^2 + c_2}$ (a) $\lambda = -3, H = 2$ ve (b) $\lambda = 3, H = \frac{-1}{2}$
alınarak elde edilen yüzey.....53

Şekil 4.7. $g(y) = \frac{-\sqrt{\lambda^2-1}}{2.H} \sqrt{4H^2(y+c_1)^2 - 1 + c_2}$ (a) $\lambda = 2, H = 1$ ve (b) $\lambda = 3, H = -2$
alınarak elde edilen yüzey.....54

Şekil 4.8. $g(y) = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2.H} \sqrt{1-4H^2(y+c_1)^2 + c_2}$ (a) $\lambda = 0, H = 2$ ve (b) $\lambda = \frac{-1}{2}, H = -1$
alınarak elde edilen yüzey.....54

- Şekil 4.9.** $z = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y))$ **(a)** $\lambda = \frac{1}{2}$ ve **(b)** $\lambda = -4$
alınarak elde edilen yüzey.....59
- Şekil 4.10.** $x = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)) + \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda z))$ **(a)** $\lambda = -2$ ve **(b)** $\lambda = \frac{1}{50}$
alınarak elde edilen yüzey.....62
- Şekil 4.11.** $z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y))$ **(a)** $\lambda = -2$ ve **(b)** $\lambda = \frac{1}{50}$
alınarak elde edilen yüzey.....64
- Şekil 4.12.** $z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y))$ **(a)** $\lambda = -2$ ve **(b)** $\lambda = \frac{1}{20}$
alınarak elde edilen yüzey.....65
- Şekil 4.13.** $z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y))$ **(a)** $\lambda = 1$ ve **(b)** $\lambda = -\frac{1}{30}$
alınarak elde edilen yüzey.....66
- Şekil 4.14.** $x = g(y) + h(z) = -\frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda z))$ **(a)** $\lambda = 1$ ve **(b)** $\lambda = -\frac{1}{30}$
alınarak elde edilen yüzey.....67
- Şekil 4.15.** $x = g(y) + h(z) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)) + \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda z))$ **(a)** $\lambda = 1$ ve **(b)** $\lambda = -\frac{1}{30}$
alınarak elde edilen yüzey.....68
- Şekil 4.16.** $g = \frac{-1}{c} \log \left| \sec(-c(u + \lambda.v) + c_1) \right| + c_2$ $c = 4$ ve $\lambda = 1$
alınarak elde edilen yüzey.....70
- Şekil 4.17.** $h = \frac{1}{c} \log \left| \sec \left(c \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \right) v + c_1 \right) \right| + c_2$ $c = 4$ ve $\lambda = \sqrt{2}$
alınarak elde edilen yüzey.....71

Şekil 4.18. $g = \frac{1}{c} \log \left| \sec \left(c(u + \lambda.v) + c_1 \right) \right| + c_2 \quad c = 4 \text{ ve } \lambda = 1$

alınarak elde edilen yüzey.....72

Şekil 4.3 $h = \frac{1}{c} \log \left| (cv + c_1) \right| + c_2 \quad c = 4$

alınarak elde edilen yüzey.....73

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler

Açıklamalar

E^n	n-boyutluÖkliduzayı
E^3	ÜçboyutluÖkliduzayı
E_1^3	ÜçboyutluMinkowskiuzayı
T	Teğetvektöralanı
N	Normal vektöralanı
B	Binormalvektöralanı
$\{T, N, B_1\}$	Frenet 3-ayaklısı
$\{T, N, B_1, B_2\}$	Frenet 4-ayaklısı
H	Ortalamaeğrilik
V	Vektöruzayı
k_1	Eğrilik
k_2	Burulma

BÖLÜM I

GİRİŞ

Öklidyen düzlemde eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde çalışan ilk bilim adamı Hollanda'lı bilim adamı Huygens'dir. O, düzlemde herhangi bir noktadaki düzlem eğrilerinin eğriliğini ortaya koymuştur. Fakat eğriyi düzlemde bir noktanın hareketi ile bir t parametresine bağlı olarak $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ şeklinde ilk tanımlayan Newton olmuştur. Newton düzlemde bir eğrinin eğriliğini de tanımlamıştır. Eğri üzerinde a ve b şeklinde birbirine yakın iki nokta bunların ikisinin arasında bir p noktası göz önüne almıştır. Bu üç nokta genellikle m merkezli bir çember belirtir limit durumunda hem a hem de b , α eğrisi boyunca p 'ye yaklaştığında bu özel bir çember belirler ki bu p noktasında α 'ya teğettir. (yani p noktasında α eğrisi ile bu çember aynı teğet doğruya sahiptir). Bu çember p noktasında α 'nın oskülatör çemberi olarak adlandırılır.

Bu çemberin merkezi c yarıçapı r ise bu c Newton tarafından eğrilik merkezi olarak adlandırılmış eğrilik yarıçapı r olarak ifade edilmiş ve p noktasında α eğrisinin

eğriliği ise $k_1 = \frac{1}{r}$ şeklinde gösterilmiştir.

k eğriliği $k = \frac{\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_1'' \alpha_2'}{((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)^{3/2}}$ şeklinde ifade edilir.

s yay parametresi ve keyfi t için $(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 = \pm 1$ dir. $T(s)$, α 'nın birim teğet vektörü ve $N(s)$, s noktasında birim normal vektörü olsun. $N(s)$ birim vektörü $T(s)$ 'e diktir ve $\{T(s), N(s)\}$ R^2 de standart yönlendirilmiştir. α 'nın s noktasındaki $k(s)$ eğriliği, $T'(s) = k(s)N(s)$ ile ifade edilir. $\alpha'(s)$ 'in uzunluğu $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ olsun.

$\alpha'(s)$ 'e dik birim vektörü $\alpha'(s)$ ve $\alpha''(s)$ vektörleri tarafından belirlenen dikdörtgensel bölgenin alanı $|k_1(s)|$ 'dir. $\det(\alpha'(s), \alpha''(s))$ ile ifade edilen bu alan

$$k_1(s) = \begin{vmatrix} \alpha_1'(s) & \alpha_1''(s) \\ \alpha_2'(s) & \alpha_2''(s) \end{vmatrix} = \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_1''(s)\alpha_2'(s)$$

şeklinde Newton tarafından ifade edilmiştir. Öklidyen hareketlere bağlı olarak verilen s değişkenli, sürekli k_1 fonksiyonu için E^2 'de s yay parametrelili bir tek α eğrisi vardır ve $\alpha(s)$ noktasında α 'nın eğriliği $k_1(s)$ 'dir. Yani Öklidyen düzleminde dönmeler ve ötelemelere bağlı olarak E^2 de bir eğri, onun eğriliği tarafından tamamıyla karakterize edilir.

E^3 'de uzay eğrilerin diferansiyel geometrisinin çalışılması için Serret-Frenet formülleri büyük bir sıçrama tahtası olmuştur.

E^3 'de uzay eğrilerinin diferansiyel geometrileri hakkındaki çalışmalar ise 1847'de Frenet, 1851'de ise Serret tarafından birbirinden habersiz olarak yapılan çalışmalar ile ortaya çıkmıştır. Onlar, bir s yay parametresi tarafından parametrize edilen bir α uzay eğrisi boyunca $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı olarak bilinen ortonormal çatıyı tanımlamıştır. $\alpha(s)$ noktasındaki α eğrisinin ivme vektörü T 'ye dik olan $\alpha''(s)$ ivme vektörüdür. B binormal vektör alanı ise T ve N 'nin vektörel çarpımı olarak belirlenir. Serret-Frenet ayaklı formülü ise;

$$T' = k_1 N$$

$$N' = -k_1 T + k_2 B$$

$$B' = -k_2 N$$

şeklinde ifade edilir. Burada k_1 eğriliği, k_2 burulmayı ifade eder. Öklidyen uzay eğrilerinin temel teoremi, eğer k_1 ve k_2 s 'nin sürekli iki fonksiyonu ise bu taktirde s yay uzunluğu ile parametrize edilen bir α eğrisi vardır ki bu eğrinin sırasıyla eğrilik ve burulma fonksiyonları k_1 ve k_2 'dir. Bu ifade ilk defa 1876'da Aoust tarafından ifade edilmiştir. k_1 eğriliğinin 1775'de Monge'de analitik olarak ifade etmiştir fakat burulmayı belirlememiştir. Burulmayı 1806'da ilk kez Lancret ifade etmiştir. 1826'da Cauchy ilk kez α eğrisinin ardışık türevlerini kullanarak uzay eğrilerinin çalışmasını sistematik

olarak ifade edilmiştir. E^3 'deki yüzeylerin çalışmasında böylelikle çalışılmaya başlanmıştır. Düzlemde eğrilerin teorisi bilindiğinden yüzeyin farklı düzlemlerle arakesitleri alınarak eğrilerin araştırılmasıyla yüzeylerin tanımlanması sağlanmıştır. Bu ise ilk defa 1760'da Euler sayesinde olmuştur. $M \subset R^3$ yüzeyi üzerinde bir p noktası boyunca bir l doğrusu düşündüğümüzde, bu doğru p noktasında M üzerindeki teğet düzleme diktir. Teğet düzlem üzerindeki her bir X birim vektörü için hem X vektörü hemde l doğrusunu içeren p boyunca bir düzlem göz önüne alınırsa M ile bu düzlemin arakesiti $\alpha(x_0) = p$ olmak üzere $\alpha(x)$ eğrisinin görüntüsüdür. $\alpha(x)$ yay uzunluğu ile verildiğinde $\alpha'(x_0) = X$ dir. X ve l boyunca bütün düzlemler p noktasında M 'nin teğet düzlemine dik olan bir v_p vektörü seçilerek yönlendirilebilir. Böylece X, v_p ile pozitif olarak yönlendirilmiş olur. Bu taktirde α_x , sıfır noktasında bir işaretli eğriliğe sahiptir bu ise k_{1X} şeklinde ifade edilir. k_{1X} 'lerin hepsi eşit değil ise, bu taktirde x_1 birim vektörü ile gösterilen bir doğrultu vardır öyleki burada k_x , $k_1 = kX_1$ minumum değerine ve $k_2 = kX_2$ maksimum değerine sahiptir. Bu ise X_1 ve X_2 doğrultuları diktir ve eğer X, X_1 ile ϕ açısı yapıyor ise bu taktirde

$$k_x = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi$$

dır.

Daha sonra bu konu da Gauss'un yapmış olduğu 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' isimli çalışması önemli yer tutmuştur.

Gauss çalışmasında M yüzeyinin herhangi bir t noktasındaki teğet düzleme dik bir v_p vektörü almış ve Gauss dönüşümü olarak adlandırılan dönüşümü tanımlayarak p noktasındaki M yüzeyinin K_p eğriliği

$$K_p = \lim_{A \rightarrow p} \frac{AlanV(A)}{AlanA}$$

şeklinde vermiştir. Buradaki A bölgesi p 'nin çok küçük bir komşuluğudur.

Yüzeyler üzerinde daha sonra Riemann'ın çalışmaları önemli yer tutmaktadır. Minkowski uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisini ilk çalışan kişi W.B.Bonner'dir.

Johan Walrave Doktora tezinde üç ve dört boyutlu Minkowski uzayında eğrilerin spacelike, timelike ve null olması durumlarına göre bir sınıflandırma yapmıştır. Devamında ise Minkowski uzayında yüzeylerden bahsetmiştir. Biz burada literatürde yapılmış olan çalışmaları inceledik.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Eğri)

$I \subset \mathbb{R}$ biraçık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha: I \rightarrow E^n$ diferansiyellenebilir dönüşümüne E^n de bir eğri denir. Buradaki $I \subset \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir(Hacısalıhoğlu,1993).

Tanım 2.2 (Bir eğrinin tanjant uzayı)

$M \subset E^n$ eğrisi verilsin. M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki tanjant uzayı diye, $m \in M$ noktasında M 'nin hız vektörlerini içine alan $T_M(m) = V(m)$ vektör uzayına denir. $m \in M$ seçilmiş bir nokta olmak üzere, E^n in $T_M(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki teğet doğrusu denir(Hacısalıhoğlu,1993).

Tanım 2.3 (Skaler hız fonksiyonu ve skaler hız)

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir(Hacısalıhoğlu,1993).

Tanım 2.4 (Birim hızlı eğri)

M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\|=1$$

ise M eğrisi (I, α) 'ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir(Hacısalıhoğlu,1993).

Tanım 2.5 (Regüler eğri)

Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir.
(Hacısalıhoğlu,1993).

Tanım 2.6 (Serret-Frenet r-ayaklı alanı)

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için:

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$$

Olmaküzere, ψ den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$, ye Serret-Frenet vektörü adı verilir.
(Hacısalıhoğlu,1993).

Tanım 2.7 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer ve simetrik ise g 'ye V üzerinde simetrik bilineer form denir. Bu dönüşüm aynı zamanda non-dejenere ise g 'ye V üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda V vektör uzayına da skaler çarpım uzayı denir.

Ayrıca;

(i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise g simetrik bilineer formu pozitif tanımlıdır,

(ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise g simetrik bilineer formu negatif tanımlıdır,

(iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formu yarı- pozitif tanımlıdır,

(iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlıdır.

Bundan başka,

(a) g 'nin non-dejenere dir $\Leftrightarrow g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ve $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} = 0$ dır.

(b) g 'nin dejenere dir $\Leftrightarrow g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ve $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq 0$ dır(O'Neill,1983).

Tanım 2.8 V bir skaler çarpım uzayı , W ' de üzerindeki skaler çarpım negatif olacak şekilde V 'nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W 'nin boyutuna g skaler çarpımın indeksi denir.

g skaler çarpım indeksi v ise $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skaler çarpım indeksi, üzerinde tanımlı g skaler çarpım indeksi olarak tanımlanır(O'Neill,1983).

Tanım 2.9 V skaler çarpım uzayı olsun. V 'nin indeksi v olmak üzere $v=1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise skaler çarpım uzayına Lorentz uzayı denir(O'Neill,1983).

Tanım 2. 10 V bir Lorentz uzay olsun. $\vec{v}$ için

(i) $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ 'ye spacelike vektör,

(ii) $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\vec{v}$ 'ye timelike vektör,

(iii) $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ veya $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ 'ye null(lightlike) vektör ve $\|\vec{v}\| = |g(\vec{v}, \vec{v})|^{\frac{1}{2}}$ sayısına da v vektörünün normu denir.

V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun. $\vec{u} \in \Gamma$ için

$C(u) = \{\vec{v} \in \Gamma \mid g(\vec{u}, \vec{v}) < 0\}$ kümesine $\vec{u}$ vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının time-konisi denir(O'Neill,1983).

Tanım 2.11 R_v^n yarı-öklidyen uzayında $v=1$ ve $n \geq 2$ ise R_v^n yarı-öklidyen uzayına Minkowski n-uzay denir(O'Neill,1983).

Tanım 2.12 M bir yarı Riemann manifoldu ve

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

diferansiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı $\alpha'(t) = T$ olmak üzere

- i) $\langle T, T \rangle > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri
- ii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise α eğrisine null eğri
- iii) $\langle T, T \rangle < 0$ ise α eğrisine timelike eğri denir(O'Neill,1983).

Tanım 2.13 $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\varphi : E^2 \rightarrow E^3$$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$$

şeklinde tanımlanan yüzey Monge yüzeyi adını alır(Hacısalıhoğlu, 1994).

Tanım 2.14 Monge yüzeyinde $f(u, v) = h(u) + g(v)$ biçiminde ise bu yüzeyi

$$\varphi(u, v) = (u, v, h(u) + g(v))$$

$$\varphi(u, v) = (u, 0, h(u)) + (0, v, g(v))$$

ve ya

$$\varphi(u, v) = \alpha(u) + \gamma(v)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda yüzey öteleme yüzeyi adını alır(Hacısalıhoğlu,1994).

Ayrıca E^3 ya da E_1^3 de bir S yüzeyi

$z = g(x) - h(y)$ şeklinde yazılabiliyorsa S yüzeyi yine öteleme yüzeyi adını alır.

Tanım 2.15 (inclusion)

$M \subseteq \bar{M}$ diferensiyellenebilir iki manifold olmak üzere $i : M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümü $i(x) = x$ şeklinde ise i 'ye inclusion(sokma) fonksiyonu denir(Hacısalıhoğlu,1994).

Tanım 2.16 (immersion)

M ve $\bar{M}$ birer $\mathbb{C}^\infty$ iki manifold olsun. $f : M \rightarrow \bar{M}$, $\mathbb{C}^\infty$ fonksiyonu olmak üzere f 'nin f_* Jakobiyen matrisi $\forall p \in M$ noktasında regular ise f dönüşümüne M 'den $\bar{M}$ içine bir immersion denir. Yani $\text{Rank} f = \text{Boy} M$ ise f bir immersiyondur. (Hacısalıhoğlu,1994).

Tanım 2.17 (embedding)

Tanım (2.16) da f tek değişkenli ise f 'ye embedding denir. (Hacısalıhoğlu,1994).

Tanım 2.18 (yüzey)

$U \subset \mathbb{R}^2$ düzlemsel bir bölge olmak üzere

$$\varphi: U \rightarrow E^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$$

şeklinde ifade edilen φ dönüşümüne E^3 de bir yüzey denir. Bu yüzeyin parametrik gösterimidir(Hacısalıhoğlu,1994).

BÖLÜM III

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİDYEN VE MINKOWSKI UZAYINDA FRENET ÇATISI

3.1 Üç Boyutlu Öklid Durumu

$I \subset \mathbb{R}, \alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi ve s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ şeklinde tanımlanan eğri ve $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ E^3 ’de bir metrik olmak üzere $g(\alpha', \alpha') = 1$ dir. T, α' ’nin birim teğet yada hız vektör alanıdır. Eğer $\alpha''(s) \neq 0$ ise; $\alpha''(s), T(s)$ ’e $\alpha(s)$ noktasında dik olan ivme vektörüdür. $N, \alpha''(s)$ ’in normalleştirilmiş esas vektör alanıdır. B , binormal vektör alanı ise T ve N ’nin vektörel çarpımı olarak ifade edilir. Bu durumda Frenet 3-ayaklısı,

$$T' = k_1 N$$

$$N' = -k_1 T + k_2 B$$

$$B' = -k_2 N$$

ya da

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

şeklinde dir. Burada k_1 ve k_2, α ’nın birinci ve ikinci eğriliği yada k_1 eğrilik, k_2 burulma olarak adlandırılır.

İspat:

$$\langle N, N \rangle = \langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = 1 \text{ ve } \langle N, T \rangle = \langle T, B \rangle = \langle B, N \rangle = 0 \text{ olmak üzere}$$

$$T' = k_1 N$$

olduğundan

$$N' = aT + bN + cB$$

yazılabilir. Her iki tarafın T ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle N', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B, T \rangle = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a$$

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0$$

olup buradan

$$\langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, k_1 N \rangle = -k_1$$

elde edilir.

O halde $a = -k_1$ olur. Benzer şekilde

$$N' = aT + bN + cB$$

yazılabilir. Bu eşitliğin N ile iç çarpımı alınır

$$\langle N', N \rangle = a\langle T, N \rangle + b\langle N, N \rangle + c\langle B, N \rangle = a0 + b1 + c0 = b$$

elde edilir ve

$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', N \rangle = 0$$

olduğundan $b = 0$ bulunur.

Aynı şekilde

$$N' = aT + bN + cB$$

ifadesinin, B ile iç çarpımı alınır

$$\langle N', B \rangle = a\langle T, B \rangle + b\langle N, B \rangle + c\langle B, B \rangle = a0 + b0 + c1 = c.$$

$$\langle N, B \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = -(-k_2) = k_2$$

olur. Dolayısıyla $c = k_2$ bulunur. O halde

$$N' = -k_1 T + k_2 B \text{ dir.}$$

$$B' = aT + bN + cB$$

olsun. T ile iç çarpımı alınır

$$\langle B', T \rangle = a\langle T, T \rangle + b\langle N, T \rangle + c\langle B, T \rangle = a1 + b0 + c0 = a.$$

ve

$$\langle B, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', T \rangle = -\langle B, T' \rangle = -\langle B, k_1 N \rangle = 0$$

ve $a = 0$ bulunur.

$$B' = aT + bN + cB$$

ifadesi N ile iç çarpımı alınır

$$\langle B', N \rangle = a\langle T, N \rangle + b\langle N, N \rangle + c\langle B, N \rangle = a0 + b1 + c0 = b.$$

$$\langle B, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle B', N \rangle + \langle B, N' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B', N \rangle = -\langle B, N' \rangle = -\langle B, -k_1 T + k_2 B \rangle = -k_2$$

olur ve $b = -k_2$ bulunur.

$$B' = aT + bN + cB$$

ifadesi B ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B', B \rangle = a\langle T, B \rangle + b\langle N, B \rangle + c\langle B, B \rangle = a0 + b0 + c1 = c.$$

ve

$$\langle B, B \rangle = 1 \Rightarrow \langle B', B \rangle + \langle B, B' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B', B \rangle = 0$$

olduğundan $c = 0$ dır. Bu durumda $B' = -k_2 N$ bulunur. O halde Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1 (Denklik Teoremi): $\alpha, \beta : I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğri öyle ki

$$k_1^\alpha = k_1^\beta > 0 \tag{3.2}$$

ve

$$k_2^\alpha = \pm k_2^\beta \tag{3.3}$$

ise α ve β eğrilerine denktir denir.

Bazı özel eğrilerin durumlarına göre özellikleri aşağıda verilmiştir.

Özellik 3.1

$k_1 = 0$ ancak ve ancak α eğrisi bir doğruya karşılık gelir.

$k_2 = 0$ ancak ve ancak α düzlemsel eğrisidir,

$k_2 = 0$ ve $k_1 > 0$ sabittir ancak ve ancak α çemberdir,

$k_2 \neq 0$ sabit ve $k_1 > 0$ sabittir ancak ve ancak α dairesel helisdir.

(H.Hacısalıhoğlu, 1993).

3.2 Üç Boyutlu Minkowski Durumu

Bu bölümde Minkowski uzayında Frenet ayaklısı ve formülleri verilmiştir.

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

metriği ile tanımlanan $\mathbb{R}^3$ öklidyen uzayına Minkowski uzayı denir. $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir.

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi $\alpha(s) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ verildiğinde

(i) $g(\alpha', \alpha') > 0$ ise spacelike eğri

(ii) $g(\alpha', \alpha') = 0$ ise null eğri

(iii) $g(\alpha', \alpha') < 0$ ise timelike eğri denir.

Bu ise α 'nın casual karakterleri olarak adlandırılır. (Walrave, J.,1995)

Bu durumda $\{T, N, B\}$. Frenet 3-ayaklısı aşağıda incelenmiştir.

Durum 1 α spacelike eğri

S α 'nın yay parametresi öyle ki $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 1$ dir. $T(s)$ ' de , $\alpha(s)$ ' in birim teğet vektör alanıdır. $\alpha''(s) \neq 0$ durumunda $\alpha''(s)$, $T(s)$ 'e diktir. Öyle ki $N(s) = \lambda \alpha''(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lambda > 0$ dir.

$\alpha''(s)$ casual karakterinin durumları aşağıdadır.

Durum 1.1 $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) > 0$

$N(s)$ normal vektör alanı $\alpha''(s)$ 'in normalleştirilmiş halidir. $B(s)$ binormal vektör alanı $\{T(s), N(s)\}$ spacelike düzlemine $\alpha(s)$ 'in her s noktasında dik olan tek timelike vektördür. Bu durumda E_1^3 'deki Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

şeklindedir.

Durum 1.2 $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) < 0$

$N(s)$, $\alpha''(s)$ 'in normalleştirilmiş timelike vektör alanıdır. $B(s)$ binormal vektör alanı $\{T(s), N(s)\}$ timelike yüzeyine $\alpha(s)$ 'in her s noktasında dik olan tek spacelike vektördür. Bu durumda Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Durum 1.3 $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 0$

Farz edelim ki $\alpha''(s) \neq 0$ olsun. $N(s)$, $\alpha''(s)$ normal vektör alanıdır. $B(s)$ binormal vektör alanı $T(s)$ 'e dik tek null vektördür ve $\alpha(s)$ 'in her noktasında $\langle N, B \rangle = 1$ dir.

Bu durum da Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

şeklindedir.

Burada k_1 eğriliği sadece iki değer alır. α 'nın doğru olduğunda 0, diğer durumlarda ise 1 dir. Eğer $\alpha(s)$ doğru ise $\alpha''(s) = 0 = T'(s)$ dir. Bunun anlamı ise $k_1 = 0$ dır. Eğer $\alpha(s)$ doğru değil ise, bir $\alpha''(s) \neq 0$ olacak şekilde bir I aralığı vardır ve $N(s) = \alpha''(s) = T'(s)$ dir.

Böylece $k_1 = 1$ dir. $\{T, N, B\}$ ise E_1^3 'de pseudo-ortonormaldir. Bunun anlamı ise

$$N' = a_1 T + b_1 N + c_1 B$$

$$B' = a_2 T + b_2 N + c_2 B \text{ öyle ki}$$

$$\langle N, N \rangle = \langle N, T \rangle = \langle B, B \rangle = 0$$

dır. Buradan $c_1 = a_1 = b_2$ dır.

$\langle N, B \rangle = 1$ ve $\langle T, B \rangle = 0$ ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0 \text{ ve } \langle B', T \rangle + \langle B, T' \rangle = 0$$

ve dolayısıyla

$$b_1 = -c_2 \text{ ve } a_2 = -k_1 = -1$$

elde edilir. Bu ise $b_1 = k_2$ olacak şekilde tek bir eğrinin olduğunu gösterir.

Durum 2 α time-like eğri

$s \in I$ yay parametresi olmak üzere $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = -1$ olsun. $T(s)$, α 'nın birim teğet timelike vektör alanıdır. $\alpha''(s)$, $T(s)$ 'e diktir ve $N(s)$, $\alpha''(s)$ 'in normalleştirilmiş spacelike vektör alanıdır. Binormal vektör alanı $B(s)$, $\{T(s), N(s)\}$ timelike yüzeyine $\alpha(s)$ 'in her noktasında dik olan tek spacelike birim vektör alanıdır. Bu durumda $\{T, N, B\}$ ile E_1^3 'ün yönü aynıdır.

Bu durum da Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

şeklindedir.

Durum 3 α null eğri

$g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0$ ise α null eğridir ve $\alpha'(s) = T(s)$ null vektör alanıdır. Bu durumda $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere α'' T 'ye dik spacelike vektör alanıdır.

α null doğru değil ise, $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$ alınır ve N, α'' 'nün her s noktasında birim vektör alanıdır. Bu durumda $B(s)$ vektör alanı α 'nın her $\alpha(s)$ noktasında $N(s)$ 'e dik tek null vektör alanıdır.

$$\langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0$$

$$\langle T, B \rangle = \langle N, N \rangle = 1$$

olmak üzere, Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde dir. Burada k_1 eğriliği α bir null doğru olduğunda 0, diğer durumlarda 1 dir. Eğer $\alpha(s)$ bir null doğru ise $\alpha''(s) = 0 = T'(s)$ dir. Bunun anlamı ise $k_1 = 0$ olmasıdır. Eğer $\alpha(s)$ doğru değil ise, bir $\alpha''(s) \neq 0$ olacak şekilde bir I aralığı vardır, $N(s) = \alpha''(s) = T'(s)$ şeklinde tanımlanır ve $k_1 = 1$ dir. $\{T, N, B\}$ ise E_1^3 'de pseudo-ortonormal bir bazdır. Bunun anlamı

$$N' = a_1 T + b_1 N + c_1 B$$

$$B' = a_2 T + b_2 N + c_2 B$$

olmasıdır. Burada

$$\langle N, N \rangle = \langle B, T \rangle = 1 \text{ ve } \langle B, B \rangle = 0$$

dır. Buradan $b_1 = c_1 = a_2 = 0$ dir.

$$\langle N, T \rangle = 0 \text{ ve } \langle N, B \rangle = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle = 0 \text{ ve } \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0$$

dır. O halde

$$c_1 = -k_1 = -1 \text{ ve } a_1 = -b_2$$

elde edilir. Bu durum da $a_1 = k_2$ olacak şekilde tek bir eğri vardır.

3.3 Dört Boyutlu Öklid Durumu

$s \in I$ yay parametresi ve bu parametreye bağlı eğrimiz

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s), \alpha_4(s))$$

olsun ve her s için $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 1$ olmak üzere dört boyutlu Öklid uzayında

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

metriği verilsin. α eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ şeklinde ifade edilir. Bu çatı aşağıdaki şekilde belirlenir. T , α 'nın birim teget vektör alanı veya hız vektörü olsun. Eğer $\alpha''(s) \neq 0$ ise $\alpha''(s)$ ivme vektörü $\alpha(s)$ noktasında $T(s)$ 'e diktir. N normal vektör alanı $\alpha''(s)$ 'in normalleştirilmiş ivme vektör alanıdır. B_1 birim vektör alanı, N' 'nin iki bileşene ayrılması ile belirlenir. Bunlardan bir tanesi T 'nin doğrultusundaki

teğet vektör alanıdır diğeri ise B_1 doğrultusundaki normal vektör alanıdır. B_2 vektör alanı ise birim $\{T, N, B_1\}$ üç boyutlu alt uzayına dik bir tek vektör alanıdır. Öyle ki $\{T, N, B_1, B_2\}$ çatısının yönü E^4 'ün yönü ile aynıdır. Bu duruma karşılık gelen Frenet formülleri

$$T' = k_1 \cdot N$$

$$N' = -k_1 T + k_2 B_1 \quad (3.9)$$

$$B_1' = -k_2 N + k_3 B_2$$

$$B_2' = -k_3 B_1$$

ya da

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: $T' = k_1 N$ olduğundan

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

yazılabilir. T ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle N', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B_1, T \rangle + d \langle B_2, T \rangle = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = a.$$

ve

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, k_1 N \rangle = -k_1$$

ve $a = -k_1$ olur.

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi N ile iç çarpım alınırsa

$$\begin{aligned} \langle N', N \rangle &= a \langle T, N \rangle + b \langle N, N \rangle + c \langle B_1, N \rangle + d \langle B_2, N \rangle \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = b. \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', N \rangle = 0$$

Olduğundan $b = 0$ bulunur.

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_1 ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle N', B_1 \rangle = a \langle T, B_1 \rangle + b \langle N, B_1 \rangle + c \langle B_1, B_1 \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b0 + c1 = c.$$

ve

$$\langle N, B \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = -(-k_2) = k_2$$

olup $c = k_2$ bulunur.

Aynı şekilde $N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$

ifadesi B_2 ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle N', B_2 \rangle = a \langle T, B_2 \rangle + b \langle N, B_2 \rangle + c \langle B_1, B_2 \rangle + d \langle B_2, B_2 \rangle = a0 + b0 + c0 + d1 = d.$$

ve

$$\langle N, B_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B_2 \rangle + \langle N, B_2' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B_2 \rangle = 0$$

dır. Buradan $d = 0$ olur. O halde

$$N' = -k_1 T + k_2 B_1$$

bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi T ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_1', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B_1, T \rangle + d \langle B_2, T \rangle = a1 + b0 + c0 + d0 = a.$$

$$\langle B_1, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1', T \rangle + \langle B_1, T' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_1', T \rangle = -\langle B_1, T' \rangle = -\langle B_1, k_1 N \rangle = 0$$

olur ve $a = 0$ bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi N ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B_1', N \rangle = a \langle T, N \rangle + b \langle N, N \rangle + c \langle B_1, N \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b1 + c0 + d0 = b.$$

ve

$$\langle B_1, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1', N \rangle + \langle B_1, N' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_1', N \rangle = -\langle B_1, N' \rangle = -\langle B_1, -k_1 T + k_2 B_1 \rangle = -k_2$$

dolayısıyla $b = -k_2$ bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

şeklinde olup B_1 ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_1', B_1 \rangle = a \langle T, B_1 \rangle + b \langle N, B_1 \rangle + c \langle B_1, B_1 \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b0 + c1 + d0 = c.$$

ve

$$\langle B_1, B_1 \rangle = 1 \Rightarrow \langle B_1', B_1 \rangle + \langle B_1, B_1' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_1', B_1 \rangle = 0$$

olduğundan $c = 0$ bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_2 ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B_1', B_2 \rangle = a \langle T, B_2 \rangle + b \langle N, B_2 \rangle + c \langle B_1, B_2 \rangle + d \langle B_2, B_2 \rangle = a0 + b0 + c0 + d1 = d.$$

$$\langle B_1, B_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1', N \rangle + \langle B_1, B_2' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_1', B_2 \rangle = -\langle B_1, B_2' \rangle = k_3$$

ve $d = k_3$ bulunur. O halde

$$B_1' = -k_2N + k_3B_2$$

bulunur.

Şimdi de $B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$ olsun. Her iki tarafın T ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_2', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B_1, T \rangle + d \langle B_2, T \rangle = a1 + b0 + c0 + d0 = a.$$

ve

$$\langle B_2, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2', T \rangle + \langle B_2, T' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_2', T \rangle = -\langle B_2, T' \rangle = -\langle B_2, k_1N \rangle = 0$$

olur ve $a = 0$ bulunur.

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi N ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B_2', N \rangle = a \langle T, N \rangle + b \langle N, N \rangle + c \langle B_1, N \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b1 + c0 + d0 = b.$$

ve

$$\langle B_2, N \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2', N \rangle + \langle B_2, N' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_2', N \rangle = -\langle B_2, N' \rangle = -\langle B_2, -k_1T + k_2B_1 \rangle = 0$$

olup $b = 0$ bulunur.

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_1 ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_2', B_1 \rangle = a \langle T, B_1 \rangle + b \langle N, B_1 \rangle + c \langle B_1, B_1 \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b0 + c1 + d0 = c.$$

ve

$$\begin{aligned} \langle B_2, B_1 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B_2', B_1 \rangle + \langle B_1, B_2' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_2', B_1 \rangle = -\langle B_2, B_1' \rangle = -k_3 \end{aligned}$$

ve buradan $c = -k_3$ bulunur.

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

yazılabilir. Bu eşitliğin B_2 ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle B_2', B_2 \rangle = a \langle T, B_2 \rangle + b \langle N, B_2 \rangle + c \langle B_1, B_2 \rangle + d \langle B_2, B_2 \rangle = a0 + b0 + c0 + d1 = d.$$

ve

$$\begin{aligned} \langle B_2, B_2 \rangle = 1 &\Rightarrow \langle B_2', B_2 \rangle + \langle B_2, B_2' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2 \langle B_2', B_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Buradan da $d = 0$ bulunur. O halde

$$B_2' = -k_3 B_1$$

dır.

O halde Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

k_1, k_2, k_3 α 'nın birinci, ikinci ve üçüncü eğrisidir. E^4 'dede Öklid deki gibi benzer değerler alır. Bazı özel eğrilerin karakterleri

$k_1 = 0$ ancak ve ancak α bir doğru belirtir,

$k_2 = 0$ ancak ve ancak α planar(düzlemsel) eğri,

$k_3 = 0$ ancak ve ancak α , E^4 'de üç boyutlu alt uzayda yatar,

$k_2 = 0$ ve $k_1 > 0$ sabittir ancak ve ancak α çember,

$k_3 = 0$ ve $k_2 = c_2, k_1 = c_1, c_1, c_2 \in R_0$ ancak ve ancak α dairesel helis'dir,

$k_3 = c_3$ $k_2 = c_2$ $k_1 = c_1$ $c_1, c_2, c_3 \in R_0$ ancak ve ancak

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 s) V_1 - \frac{1}{\lambda_1} \cos(\lambda_1 s) V_2 + \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 s) V_3 - \frac{1}{\lambda_2} \cos(\lambda_2 s) V_4 \quad (3.11)$$

$$K = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, \quad (3.12)$$

$$\lambda_1^2 = \frac{K - \sqrt{K^2 - 4c_1^2 c_3^2}}{2}, \lambda_2^2 = \frac{K + \sqrt{K^2 - 4c_1^2 c_3^2}}{2} \quad (3.13)$$

dır.

V_i , $\langle V_1, V_1 \rangle = \langle V_2, V_2 \rangle$ ve $\langle V_3, V_3 \rangle = \langle V_4, V_4 \rangle$ ortogonal ve sürekli ve bu eşitlikleri sağlar. α doğrusu $\frac{1}{|c_3|}$ yarıçaplı kürededir.

3.4 Dört Boyutlu Minkowski Durumu

Dört boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin Frenet ayaklıları ve bunlara bağlı eğrilik formülleri hakkında temel kavramlar verilmiştir.

$\mathbb{R}^4$ 'de

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

metriği verilsin. E_1^4 'de $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike, null ve timelike olma durumlarına göre $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısının durumlarına bakılacaktır.

Durum 1 α spacelike eğri

s parametresine bağlı yay uzunluğu $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 1$ olsun, T, α 'nın birim teğet vektör alanıdır. Eğer $\alpha''(s) \neq 0$ ise α'' , T 'ye diktir öyleki N, α'' 'nün doğrultusundadır. α'' 'nün casual karakterlerine göre durumlarını verelim.

Durum 1.1 $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) > 0$

N asli normal vektör alanı, α'' 'ne karşılık gelen normalleştirilmiş vektör alanıdır. B_1 vektör alanı $\{T, N\}$ düzlemine göre N' 'nün $C^\perp$ normal bileşeninin doğrultusundadır. Aşağıda B_1 'in bütün casual karakterleri verilmiştir.

Durum 1.1.1 $g(C^\perp, C^\perp) > 0$

Bu durumda B_1 vektör alanı $C^\perp$ normalleştirilmiş vektör alanıdır ve B_2 vektör alanı üç boyutlu $\{T, N, B_1\}$ alt uzayına dik tek timelike birim vektör alanıdır öyle ki $\{T, N, B_1, B_2\}$ çatısının yönü E_1^4 uzayının yönü ile aynıdır. Bu durum da Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

şeklindedir.

İspat:

$$\langle B_1, T \rangle = \langle B_1, N \rangle = \langle B_2, T \rangle = \langle N, T \rangle = \langle B_2, N \rangle = \langle B_1, B_2 \rangle = 0$$

$$\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = 1$$

$$\langle B_2, B_2 \rangle = -1$$

$$T' = k_1 N$$

olduğundan

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanını T ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle N', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B_1, T \rangle + d \langle B_2, T \rangle = a1 + b0 + c0 + d0 = a.$$

ve

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, k_1 N \rangle = -k_1$$

olduğundan $a = -k_1$ olur.

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi N ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle N', N \rangle = a \langle T, N \rangle + b \langle N, N \rangle + c \langle B_1, N \rangle + d \langle B_2, N \rangle = a0 + b1 + c0 + d0 = b.$$

ve

$$\langle N, N \rangle = 1 \Rightarrow \langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle N', N \rangle = 0$$

dır. Dolayısıyla $b = 0$ bulunur.

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_1 ile iç çarpımı alınır

$$\langle N', B_1 \rangle = a \langle T, B_1 \rangle + b \langle N, B_1 \rangle + c \langle B_1, B_1 \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b0 + c1 = c.$$

ve

$$\langle N, B \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B \rangle + \langle N, B' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle N', B \rangle = -\langle N, B' \rangle = -(-k_2) = k_2$$

olup $c = k_2$ bulunur.

$$N' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_2 ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle N', B_2 \rangle = a \langle T, B_2 \rangle + b \langle N, B_2 \rangle + c \langle B_1, B_2 \rangle + d \langle B_2, B_2 \rangle = a0 + b0 + c0 + d(-1) = -d.$$

$$\langle N, B_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B_2 \rangle + \langle N, B_2' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle N', B_2 \rangle = 0$$

dır. Buradan $d = 0$ olur. O halde

$$N' = -k_1T + k_2B_1$$

bulunur. Şimdi de

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

olsun. Her iki tarafı T ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B_1', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B_1, T \rangle + d \langle B_2, T \rangle = a1 + b0 + c0 + d0 = a.$$

ve

$$\langle B_1, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1', T \rangle + \langle B_1, T' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle B_1', T \rangle = -\langle B_1, T' \rangle = -\langle B_1, k_1N \rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla $a = 0$ bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi N ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_1', N \rangle = a \langle T, N \rangle + b \langle N, N \rangle + c \langle B_1, N \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b1 + c0 + d0 = b.$$

ve

$$\begin{aligned} \langle B_1, N \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B_1', N \rangle + \langle B_1, N' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_1', N \rangle = -\langle B_1, N' \rangle = -\langle B_1, -k_1 T + k_2 B_1 \rangle = -k_2 \end{aligned}$$

Buradan $b = -k_2$ bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_1 ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_1', B_1 \rangle = a \langle T, B_1 \rangle + b \langle N, B_1 \rangle + c \langle B_1, B_1 \rangle + d \langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b0 + c1 + d0 = c.$$

ve

$$\begin{aligned} \langle B_1, B_1 \rangle = 1 &\Rightarrow \langle B_1', B_1 \rangle + \langle B_1, B_1' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_1', B_1 \rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $c = 0$ bulunur.

$$B_1' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_2 ile iç çarpım uygulanır

$$\langle B_1', B_2 \rangle = a \langle T, B_2 \rangle + b \langle N, B_2 \rangle + c \langle B_1, B_2 \rangle + d \langle B_2, B_2 \rangle = a0 + b0 + c0 + d(-1) = -d.$$

ve

$$\begin{aligned} \langle B_1, B_2 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B_1', B_2 \rangle + \langle B_1, B_2' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_1', B_2 \rangle = -\langle B_1, B_2' \rangle = -k_3 \end{aligned}$$

O halde $d = k_3$ bulunur. Buradan

$$B_1' = -k_2 N + k_3 B_2$$

bulunur. Benzer şekilde

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

olsun. Eşitliğin T ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_2', T \rangle = a \langle T, T \rangle + b \langle N, T \rangle + c \langle B_1, T \rangle + d \langle B_2, T \rangle = a1 + b0 + c0 + d0 = a.$$

ve

$$\begin{aligned} \langle B_2, T \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B_2', T \rangle + \langle B_2, T' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_2', T \rangle = -\langle B_2, T' \rangle = -\langle B_2, k_1 N \rangle = 0 \end{aligned}$$

dan $a = 0$ bulunur.

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi N ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B_2', N \rangle = a\langle T, N \rangle + b\langle N, N \rangle + c\langle B_1, N \rangle + d\langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b1 + c0 + d0 = b.$$

ve

$$\begin{aligned}\langle B_2, N \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B_2', N \rangle + \langle B_2, N' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_2', N \rangle = -\langle B_2, N' \rangle = -\langle B_2, -k_1T + k_2B_1 \rangle = 0\end{aligned}$$

Buradan $b = 0$ bulunur.

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

nin B_1 ile iç çarpımı alınır

$$\langle B_2', B_1 \rangle = a\langle T, B_1 \rangle + b\langle N, B_1 \rangle + c\langle B_1, B_1 \rangle + d\langle B_2, B_1 \rangle = a0 + b0 + c1 + d0 = c.$$

ve

$$\begin{aligned}\langle B_2, B_1 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle B_2', B_1 \rangle + \langle B_1, B_2' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle B_2', B_1 \rangle = -\langle B_2, B_1' \rangle = k_3\end{aligned}$$

olduğundan $c = k_3$ bulunur.

$$B_2' = aT + bN + cB_1 + dB_2$$

ifadesi B_2 ile iç çarpım uygulanırsa

$$\langle B_2', B_2 \rangle = a\langle T, B_2 \rangle + b\langle N, B_2 \rangle + c\langle B_1, B_2 \rangle + d\langle B_2, B_2 \rangle = a0 + b0 + c0 + d(-1) = -d.$$

ve

$$\begin{aligned}\langle B_2, B_2 \rangle = 1 &\Rightarrow \langle B_2', B_2 \rangle + \langle B_2, B_2' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle B_2', B_2 \rangle = 0\end{aligned}$$

Buradan da $d = 0$ bulunur. O halde

$B_2' = k_3B_1$ dir. Sonuç olarak Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Durum 1.1.2 $g(C^\perp, C^\perp) < 0$

Bu durum da B_1 vektör alanı $C^\perp$ normalleştirilmiş timelike vektör alanıdır ve B_2 ise $\{T, N, B_1\}$ üç boyutlu alt uzaya dik tek birim spacelike vektör alanıdır öyle ki $\{T, N, B_1, B_2\}$ çatısının yönü E_1^4 'ün yönü ile aynıdır.

Bu durum da Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

şeklindedir.

Durum 1.1.3: $g(C^\perp, C^\perp) = 0$

$B_1, C^\perp$ vektör alanı olduğundan ve $B_2, \{T, N\}$ düzlemine dik tek null vektör alanıdır öyle ki $\langle B_1, B_2 \rangle = 1$. Bu durum da Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

dır.

Böyle bir α eğrisine kısmi null eğrisi denir ve yukarıdaki Frenet formüllerinden, bu eğrinin üç boyutlu alt uzayda yattığı kolaylıkla görülür. Bir null dönme yapılarak, yani; bir null tetrattan diğer null tetrata dönüşüm yapılarak T ve N 'yi sabitlenir. $k_3 = 0$ alındığında B_1 sabit bir null vektördür. Bu durumu görebilmek için aşağıdaki null dönme yapılabilir.

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\bar{k}_1 = k_1, \bar{k}_2 = ak_2 \text{ ve } \bar{k}_3 = \frac{-a'}{a} + k_3.$$

olup, bu durum da Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} \bar{T}'' \\ \bar{N}' \\ \bar{B}_1' \\ \bar{B}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{k}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{k}_1 & 0 & \bar{k}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 & 0 \\ 0 & -\bar{k}_2 & 0 & -\bar{k}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T} \\ \bar{N} \\ \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

şeklinde dir. Böylece $\alpha(s)$ ' de $\bar{k}_3 = 0$ seçilebilir. Bunun anlamı $\bar{B}_1 = 0$ olmasıdır. Diğer bir deyişle $\bar{B}_1$ sabit null vektördür. Bu durum da sadece iki eğrilik vardır, ikinci eğrilik sadece sabit bir çarpana göre belirlenir. Kısmi null eğri, kısmi özel bir null belirtir. Yani k_1, k_2 sabitleri sıfırdan farklı olmak üzere eğri yukarıdaki Frenet formüllerini sağlar. Bu eğri

$$\alpha(s) = \left(cs, \frac{1}{k_1} \cos(k_1 s), \frac{1}{k_1} \sin(k_1 s), cs \right) \quad (3.19)$$

şeklinde olup $c \neq 0$ sabit ve bir null eksenli dairesel helisdir.

Durum 1.2 $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) < 0$

$N, \alpha''(s)$ 'in normalleştirilmiş timelike vektör alanıdır. B_1 birim vektör alanı ise N' 'nün normal bileşeni doğrultusundaki spacelike vektör alanıdır. B_2 de $\{T, N, B_1\}$ ' e dik tek birim spacelike vektör alanıdır öyle ki $\{T, N, B_1, B_2\}$ çatısının yönü E_1^4 ' ün yönü ile aynıdır. Bu durumda Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

şeklindedir.

Durum 1.3 $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 0$

α pseudo null eğri olsun. Eğer $\alpha''(s) \neq 0$ ise $N = \alpha''(s)$ dir. $\alpha'''(s)$ spacelike ya da null vektör alanı olabilir. Eğer $\alpha'''(s)$ spacelike ise, bu taktirde B_1 de $\alpha'''(s)$ 'nün normalleştirilmiş vektör alanıdır. $B_2, \{T, B_1\}$ alt uzayına dik tek null vektör alanıdır öyle ki $\langle N, B_2 \rangle = 1$ ve Frenet 4-ayaklısı ise

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinde olup k_1 eğriliği sadece iki değer alır, α null doğru olduğunda eğrilik 0, diğer durumlarda 1 değerini alır. Eğer α''' null vektör alanı ise

$$\alpha(s) = (f(s), s, 0, f(s)) \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilen α pseudo-null eğridir ve iki boyutlu dejenere yüzeyde yatar. Burada

f, s 'nin keyfi bir fonksiyonudur.

Durum 2: α timelike eğri

α eğrisi s parametresine bağlı ve yay uzunluğu $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = -1$ olsun. T, α' 'nın oluşturduğu birim teğet vektör alanıdır. α'', T 'ye diktir öyle ki N, α'' 'nün normalleştirilmiş spacelike vektör alanıdır. B_1 birim spacelike vektör alanı $\{T, N\}$ düzlemine göre N 'nün normal bileşeni doğrultusundadır. $B_2, \{T, N, B_1\}$ 'e dik olan tek birim spacelike vektör alanıdır. Bu $\{T, N, B_1, B_2\}$ 'nin yönü E_1^4 'ün yönü ile aynıdır. Bu durum da Frenet 4-ayaklısı

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

şeklindedir.

Durum 3: α null eğri

$T = \alpha'$ null vektör alanı olsun. Doğrular hariç α için s pseudo-yay uzunluğu kullanılırsa, $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$ dir. Böylece $N = \alpha''$ ve $B_1, \{T, N\}$ düzlemine göre α''' 'nün normal bileşeni olsun.

$$g(\alpha'(s), \alpha'''(s)) = -1$$

ve

$$g(\alpha''(s), \alpha'''(s)) = 0$$

olduğundan $\langle B_1, B_1 \rangle = 0$ olmak zorundadır ve B_1 ise $\langle T, B_1 \rangle = 1$ ifadesinden tamamen belirlenebilir. $B_2, \{T, N, B_1\}$ üç boyutlu alt uzayına dik tek spacelike birim vektör alanıdır ve $\{T, N, B_1\}$ ile E_1^4 'ün yönü aynıdır. Bu durum da Frenet formülasyonu

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

şeklindedir.

k_1 eğriliği sadece iki değer alır. α null doğru olduğun da 0, diğer durumlarda 1 dir.

$\{T, N, B_1, B_2\}$ dörtlüsünnull eğriler için Cartan dörtlüsü olarak bilinir. Diğer dörtlüler ise kanonik ve screw dörtlülerdir(Bonner, W.B.,1969).

Bir null eğrisi esasen sadece k_2 ve k_3 eğriliklerine sahiptir. k_3, E^4 'de bir eğrinin üçüncü eğrilğine benzer bir role sahiptir. Bunun anlamı α null eğrisi E_1^4 'ün üç boyutlu alt uzayında yatar ancak ve ancak $k_3 = 0$. k_2 'nin geometrik anlamı ise belirli değildir.

$k_2 = 0$ olacak şekilde null helisler vardır. Eğer tek bir eğri varsa $k_2 = k_3 = 0$ olacak şekilde null kübiktir. Bundan dolayı sadece sabit eğrilikli null eğriler çalışılmıştır.

Durum 1. $k_2 = k_3 = 0$ ise;

Frenet eşitliklerinden $\alpha''' = 0$.

Böylece $A, B, C, D \in \mathbb{R}^4$ olmak üzere

$$\alpha(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D, \quad (3.25)$$

ve

$$\alpha'(s) = 3As^2 + 2Bs + C, \quad (3.26)$$

$$\alpha''(s) = 6As + 2B, \quad (3.27)$$

$$\alpha'''(s) = 6A, \quad (3.28)$$

$\langle B_1, B_1 \rangle = 0 = \langle \alpha''', \alpha''' \rangle$ olduğundan A , sabit bir null vektördür. Pseudo yay parametresi s olmak üzere

$$g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$$

ve α null eğrisi ise

$$g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0.$$

A, B, C, D vektörleri üzerinde aşağıdaki şartlar belirlenebilir.

$$\langle A, A \rangle = \langle C, C \rangle = \langle A, B \rangle = \langle B, C \rangle = 0, \quad \langle A, C \rangle = \frac{-1}{6}, \quad \langle B, B \rangle = \frac{1}{4}$$

Örneğin

$$\alpha(s) = \left(s^3 + \frac{s}{12}, s^3 - \frac{s}{12}, \frac{s^2}{2}, 0 \right) \quad (3.29)$$

ifadesi null kübiğin parametrizasyonudur.

Durum 2. k_2, k_3 her ikisinde sıfır olmayan sabitler olsun.

Durum 2.1 $k_3 \neq 0$ ise;

$$\frac{d^4 T}{ds^4} - 2k_2 \frac{d^2 T}{ds^2} - k_3^2 T = 0 \quad (3.30)$$

diferensiyel denklemi çözülürse

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1} [\sinh(\lambda_1 s) V + \cosh(\lambda_1 s) W] + \frac{1}{\lambda_2} [\sinh(\lambda_2 s) Z - \cosh(\lambda_2 s) Y] \quad (3.31)$$

$$\langle Z, Z \rangle = \langle W, W \rangle = \langle Y, Y \rangle = -\langle V, V \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (3.32)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{k_2^2 + k_3^2} + k_2}, \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{k_2^2 + k_3^2} - k_2} \quad (3.33)$$

bulunur. Bu ise bir dairesel silindir üzerinde yatan null helis'in parametrizasyonudur. Burada k_2 'nin α eğrisinin null helis olması ile ilgili bir rolü yoktur. $k_2 = 0$ alınarak da null helis olduğu görülebilir.

Durum 2.2 $k_3 = 0$ ise;

Eğriler üç boyutlu alt uzayda yatar. Frenet eşitliklerinden ve

$$\frac{d^4 T}{ds^4} = 2k_2 \frac{dT}{ds} \quad (3.34)$$

diferensiyel denkleminin çözümünden iki farklı durumdan söz edilebilir.

(i) $k_2 > 0$ ise,

$$\alpha(s) = \frac{1}{2k_2} [\sinh \sqrt{2k_2} s, \cosh \sqrt{2k_2} s, \sqrt{2k_2} s, 0], \quad (3.35)$$

(ii) $k_2 < 0$ ise,

$$\alpha(s) = \frac{1}{-2k_2} \left[0, \sqrt{2k_2} s, \sinh \sqrt{-2k_2} s, \cosh \sqrt{-2k_2} s \right], \quad (3.36)$$

BÖLÜM IV

MINKOWSKI UZAYINDA MİNİMAL VE ÖTELEME YÜZEYLERİ

4.1 Gauss ve Ortalama eğrilik

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})$$

ve

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

olmak üzere,

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda + N}{E\lambda^2 + 2F\lambda + G}$$

eşitliği yüzeyin normal eğriliği olarak tanımlanır. Bu oran

yardımıyla

$$F(k_n, \lambda) = (L - k_n E)\lambda^2 + 2(M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) = 0 \quad (4.1)$$

diferensiyel denklemi yazılır. Bu denklemin λ 'ya göre türevi alınır

$$F_{\lambda}(k_n, \lambda) = 2(L - k_n E)\lambda + 2(M - k_n F) = 0 \quad (4.2)$$

$$= (L - k_n E)\lambda + (M - k_n F) = 0$$

elde edilir.

(4.1) denklemi düzenlenirse

$$\lambda[(L - k_n E)\lambda + (M - k_n F)] + (M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) = 0$$

elde edilir.

(4.2) ifadesinden yararlanılırsa

$$\lambda[(L - k_n E)\lambda + (M - k_n F)] = 0 \quad (M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$(L - k_n E)\lambda + (M - k_n F) = 0$$

$$(M - k_n F)\lambda + (N - k_n G) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemler için

$$\det \begin{bmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Buradan

$$(EG - F^2)k_n^2 - (EN - 2FM + GL)k_n + LN - M^2 = 0$$

elde edilir.

Bu ikinci derece denklemin kökleri k_1 ve k_2 olmak üzere yüzeyin H ve K eğrilikleri sırasıyla

$$2H = \frac{EN + 2MF + GL}{EG - F^2}$$

ve

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

şeklindedir.

4.2 Minimal Yüzeyler

Tanım 4.1 $S \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey olsun.

$$2H = \frac{EN + 2MF + GL}{EG - F^2}$$

ortalama eğrilik olmak üzere $H = 0$ olması durumunda S yüzeyi minimal yüzey adını alır.(Aksoy, 2005).

Tanım 4.2 $x = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir Riemann yüzeyinin $\mathbb{R}^3$ içine izometrik immersiyonu olsun. Eğer her bir i için x_i , M üzerinde bir harmonik fonksiyon oluyorsa X 'e minimaldir denir. Yani, Δ , M üzerindeki Riemann Laplace operatörü olmak üzere $\Delta X_i = 0$ olmalıdır.

Bir M Riemann yüzeyi ile onun izometrik embedding altındaki görüntüsünü özdeşlemek oldukça faydalıdır.

Harmoniklik lokal bir kavram olduğundan minimallik kavramı da $M \subset \mathbb{R}^3$ immerge edilmiş yüzeyine de uygulanabilir(inclusion dönüşümü ile indirgenmiş Riemann yapısı yardımıyla). H, X 'in ortalama eğrilik fonksiyonu olsun ve $N : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümü de X 'in Gauss dönüşümü veya onun birim normali olsun.

$X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrik immersiyonu için $\Delta X = 2HN$ vektör değerli formülü geçerlidir. Bu durum ise minimalliğin aşağıdaki tanımına denktir. (Meeks ve Perez, 2011).

Tanım 4.3 $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi minimaldir $\Leftrightarrow$ Onun ortalama eğriliği sıfıra eşittir. $u = u(x, y)$ fonksiyonun grafi olarak $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler yüzeyini lokal olarak belirlenebilir. 1776'da Meusnier ortalama eğriliğin özdeş olarak sıfır olma şartını quasilineer ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklem olarak belirlemiştir. Bu denklem 1762'de Lagrange tarafından

$$(1 + u_x^2).u_{yy} - 2u_x.u_y.u_{xy} + (1 + u_y^2).u_{xx} = 0 \quad (4.3.1)$$

şekilde bulunmuştur(Meeks ve Perez, 2011).

Tanım 4.4 $M \subset \mathbb{R}^3$ minimaldir $\Leftrightarrow M$, (4.3.1) denkleminin bir çözümünün grafiği olarak lokal anlamda belirlenebilir. Ω , bir $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinde kompakt, kapalı, yönlendirilebilir bir alt bölge olsun. Eğer, Ω üzerindeki inclusion dönüşümü $u \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu ile kompakt olarak ifade edilirse bu taktirde $x + t.u.N$ yine bir immersiyondur. M 'nin H ortalama eğrilik fonksiyonu $A(t) = \text{Alan}((x + t.u.N)(\Omega))$ alan ifadesiyle ilişkilidir.

Burada $A'(0) = -2 \int_{\Omega} u.H dA$ ve dA , M 'nin alan elementidir. Bu varyasyonel ifade ile minimalliğin aşağıdaki tanımına denktir. (Meeks ve Perez, 2011).

Tanım 4.5 $M \subset \mathbb{R}^3$ minimaldir $\Leftrightarrow$ bu alan fonksiyonelinin kritik bir noktasıdır. (Meeks ve Perez, 2011).

Tanım 4.6 $M \subset \mathbb{R}^3$ minimaldir $\Leftrightarrow \forall p \in M$ noktası çok küçük alanlı bir komşuluğa sahiptir, bu ise onun sınırına bağlıdır. A, alan fonksiyonelinin yanı sıra varyasyonların calculusteki iyi bilinen bir diğer fonksiyoneli ise,

$$E = \int_{\Omega} |\nabla X|^2 . dA$$

Dirichlet enerji fonksiyoneli.

Burada $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir izometrik immersiyon $\Omega \subset \mathbb{R}$ ise kompakt kapalı bir alt bölgesidir. Bu fonksiyoneller arasında $E \geq 2.A$ eşitsizliği vardır.

$$E = 2.A \text{ olması için } \Leftrightarrow X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$$

İmmersiyonu konformal olmalıdır. (Meeks ve Perez, 2011).

Tanım 4.7 $M \subset \mathbb{R}^3$ minimaldir $\Leftrightarrow g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ stereografik izdüşümü Riemann yüzeyi yapısı altında meromorfiktir (bu stereografik izdüşüm dönüşümü Gauss dönüşümüdür). (Meeks ve Perez, 2011).

Yukarıda minimalliğin yedi tanımı verilmiştir. Minimalliğin ve minimal yüzey ifadelerinin bu denk tanımları minimal yüzey teorisi ile kompleks analiz arasında ileri derecede bir bağıntı olduğunu göstermiştir. Bu çalışmaların yapıldığı dönem klasik minimal yüzey teorisinin birinci altın çağı olarak adlandırılmıştır. Bu dönemde

Beltrami, Bonnet, Catalan, Darboux, Enneper, Lie, Riemann, Schoenflies, Schwarz, Serret, Weierstrass vs.gibi matematikçiler bu alanda oldukça kayda değer çalışmalar yapmışlardır. Birinci altın çağ 1885-1890 tarihleri arasını kapsamaktadır. 1930-1940 aralığında klasik minimal yüzey teorisinin ikinci altınçağı yaşanmış, bu dönemde öne çıkan matematikçiler ise, Courant, Douglas, Morrey, Morse, Rudo ve Shiffman olmuştur. Bu dönemdeki en büyük başarı ise Douglas' ın Plateau Problemi'ni çözmesidir. Pek çok geometrici 1980'lerin başından beri klasik minimal yüzey teorisinin üçüncü altın çağının yaşandığına inanmaktadır. Günümüzde bu alanda interdisipliner bir çalışma alanı oluşmuş, matematiğin diğer branşları fizik ve bilgisayar teknolojisinde kullanılarak oldukça başarılı çalışmalar yapılmaktadır.

Lemma 4.1 Genel olarak bir $(u, v) \rightarrow (u, v, h(u, v))$ Monge yüzeyi bir minimal yüzeydir

$$\Leftrightarrow (1 + h_v^2) h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2) h_{vv} = 0$$

dır.

Burada h 'nin özel seçimi ile minimal yüzeylerin ilginç bir örneğini bulabiliriz.

1835'te Scherk $(u, v) \rightarrow (u, v, h(u, v))$ formunun, yani öteleme yüzeyinin minimal olma şartı saptanmıştır. Bu, aşağıdaki teoremle verilecektir. (Liu,1999).

Teorem 4.1 Eğer Monge yüzeyi $X : U \rightarrow M$ $h(u, v) = f(u) + g(v)$ minimal öteleme yüzeyi ise M ya bir düzlem parçasıdır ya da $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$f(u) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda u)) \text{ ve } g(v) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda v))$$

$$h(u, v) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{\cos \lambda v}{\cos \lambda u}\right)$$

dır. (Liu,1999).

İspat:

$$h(u, v) = f(u) + g(v)$$

$$h_{uu} = f''(u)$$

$$h_{uv} = 0$$

$$h_{vv} = g''(v)$$

$$(1+h_v^2)h_{uu}-2h_uh_vh_{uv}+(1+h_u^2)h_{vv}=0$$

$$(1+g'(v)^2)f''(u)+(1+f'(u)^2)g''(v)=0$$

dan

$$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2}=-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}$$

bulunur.

$$\frac{f''(u)}{1+f'(u)^2}=\lambda=-\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2},$$

$$f'=p$$

$$f''=p'$$

ise

$$\frac{p'}{1+p^2}=\lambda$$

olup. O halde

$$\int \frac{p'}{1+p^2} dp = \int \lambda du$$

$$\text{den } \arctan(p) = \lambda u + c_1$$

dır. Buradan

$$p = \tan(\lambda u + c_1)$$

$$f' = p$$

$$\frac{df}{du} = \tan(\lambda u + c_1)$$

$$df = \tan(\lambda u + c_1) du$$

$$f(u) = \int \frac{\sin(\lambda u + c_1)}{\cos(\lambda u + c_1)} du$$

$$f(u) = -\frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda u + c_1)), \quad c_1 = 0$$

$$f(u) = -\frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda u))$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lambda = -\frac{g''(v)}{1+g'(v)^2}$$

eşitliğinden

$$g(v) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda v))$$

bulunur. Böylece

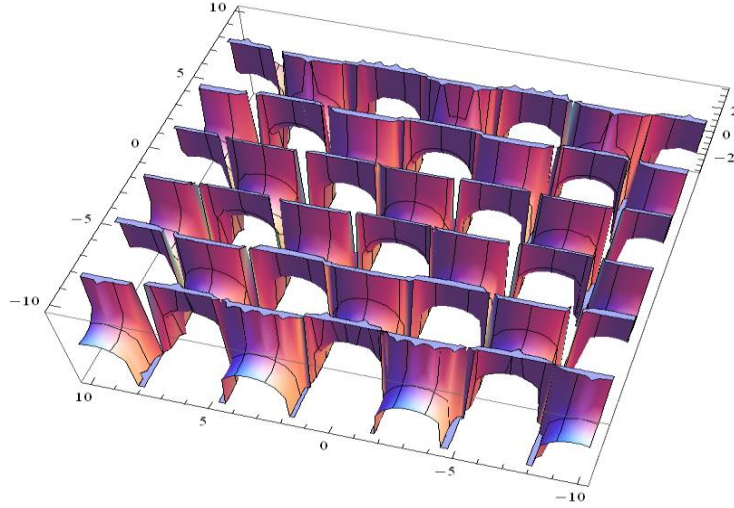
$$h(u, v) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{\cos \lambda v}{\cos \lambda u}\right) \text{ elde edilmiş olur.}$$

Bulunan bu yüzey Scherk yüzeyi adını alır ve

$$\text{Scherk}[\lambda](u, v) = \left(u, v, \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{\cos \lambda v}{\cos \lambda u}\right) \right)$$

şekilde ifade edilir.

Bu durumda Scherk yüzeyi öteleme yüzeyleri içinde minimal olan tek yüzeydir ve



Şekil 4.1 Scherk yüzeyi

şekilde görüldüğü gibidir.

4.3 Sabit Ortalama Eğrilikli Öteleme Yüzeyleri

Bu bölümde E^3 ve E_1^3 de sabit ortalama eğrilik ya da sabit Gauss eğrilikli öteleme yüzeyleri konusunda bir sınıflandırma yapılacaktır. Keyfi spacetime'daki spacelike ortalama eğrilik li hiperyüzeylerin relativite teorisiyle ilgisi vardır. E^3 3-boyutlu Öklid uzayı $\langle ., . \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2$

metriği ile E_1^3 de 3-boyutlu Lorentz uzayı da

$$\langle ., . \rangle = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

metriği ile verilsin. E^3 deki ya da E_1^3 deki bir S yüzeyi de

$$\varphi(u, v) = \{\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)\}$$

ile gösterilirse,

S yüzeyinin birinci esas formu

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

$$\varphi_u = \frac{\partial r(u, v)}{\partial u} \quad \varphi_v = \frac{\partial r(u, v)}{\partial v}$$

dır.

$$E^3 \text{ deki yüzey için } EG - F^2 > 0$$

$$E_1^3 \text{ deki spacelike yüzey için } EG - F^2 > 0$$

$$E_1^3 \text{ deki timelike yüzey için } EG - F^2 < 0 \text{ dir.}$$

I.temel formun ispatı aşağıdaki şekildedir.

M yarı-Riemann manifoldu olarak 3-boyutlu R_1^3 Minkowski uzayı ve $\bar{M}$ yarı-Riemann hiperyüzey olarak da (U, φ) parametrizasyonu ile verilen

$$\varphi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

$\varphi(u)$ yüzeyi göz önüne alınırsa,

$$\left[\varphi_* \left(\frac{d}{du} \right), \varphi_* \left(\frac{d}{dv} \right) \right]$$

lineer bağımsız olmak üzere yüzeyin vektör alanının bir bazı

$$\left[\varphi_* \left(\frac{d}{du} \right), \varphi_* \left(\frac{d}{dv} \right) \right]$$

dir. $\varphi_* \left(\frac{d}{du} \right)$ ve $\varphi_* \left(\frac{d}{dv} \right)$ yerine sırasıyla φ_u ve φ_v alınırsa o zaman

yüzeyin normali $N = \varphi_u \times \varphi_v$ olur..

Ayrıca

$$\langle N, N \rangle = \langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_u \times \varphi_v \rangle$$

dir. Lagrange özdeşliğinden dolayı

$$\langle N, N \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

yazılırsa ve

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

katsayıları kullanılırsa

$$\langle N, N \rangle = F^2 - EG$$

elde edilir.

Şimdi yüzeyin birinci temel formunu hesaplayalım. φ 'nin tam diferansiyeli

$$\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \text{ dir.}$$

$$I = (ds)^2 = \langle \partial\varphi, \partial\varphi \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right\rangle du^2 + 2 \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right\rangle dv^2 \text{ dir.}$$

Buradan da

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

elde edilir.

S yüzeyinin ikinci esas formu

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

şeklinde tanımlanır.

Burada;

$$L = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uv})$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}} \det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{vv})$$

şeklindedir.

Şimdi II. temel formun ispatını verelim.

$X, Y \in \lambda(M)$ için yüzeyin esas formu $S(X) = -dN$ olmak üzere

$$\Pi[X, Y] = \langle S(X), Y \rangle$$

şeklindedir. Ayrıca

$\langle N, Y \rangle = 0$ denkleminde türev alınırsa

$$\langle N', Y \rangle + \langle N, Y' \rangle = 0$$

yani,

$$\langle N', Y \rangle = -\langle N, Y' \rangle$$

bulunur.

$$\Pi[X, Y] = \langle N', Y \rangle = -\langle N, Y' \rangle$$

yazılabilir. Buradan Y' ifadesini hesaplanırsa

$$\begin{aligned} Y' = \partial \varphi' &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right)' \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial \varphi \partial \varphi}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv^2 \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu ifade ikinci temel form tanımında yerine yazılırsa

$$\langle N, Y' \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N \right\rangle du^2 + 2 \left\langle \frac{\partial \varphi \partial \varphi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle dudv + \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N \right\rangle dv^2$$

ve

$$\Pi[X, Y] = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

elde edilir.

Teorem 4.2 S , 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de ya da 3-boyutlu Lorentz uzayı E_1^3 de K sabit Gauss eğrilikli bir öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda S bir silindir ve dolayısıyla $K = 0$ dır (Liu 1999).

İspat: E^3 Öklid uzayında, S öteleme yüzeyi
 $z = g(x) - h(y)$

(4.1)

dönüşümü ile verilsin.

Bu durumda S 'nin Gauss eğriliği K hesaplanırsa yapılırsa,

$$\varphi(x, y) = (x, y, g(x) - h(y))$$

$$\varphi_x = (1, 0, g'(x))$$

$$\varphi_y = (0, 1, -h'(y))$$

$$\varphi_{xy} = (0, 0, 0)$$

$$\varphi_{xx} = (0, 0, g''(x))$$

$$\varphi_{yy} = (0, 0, -h''(y))$$

$$E = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = \langle (1, 0, g'(x)), (1, 0, g'(x)) \rangle = 1 + g'(x)^2$$

$$F = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = \langle (1, 0, g'(x)), (0, 1, -h'(y)) \rangle = -h'(y) \cdot g'(x)$$

$$G = \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = \langle (0, 1, -h'(y)), (0, 1, -h'(y)) \rangle = 1 + h'(y)^2$$

$$E \cdot G - F^2 = [1 + g'(x)^2][1 + h'(y)^2] - [-h'(y)g'(x)]^2 = 1 + h'(y)^2 + g'(x)^2$$

$$\det(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & g'(x) \\ 0 & 1 & -h'(y) \\ 0 & 0 & g''(x) \end{vmatrix} = g''(x)$$

$$\det(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & g'(x) \\ 0 & 1 & -h'(y) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{yy}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & g'(x) \\ 0 & 1 & -h'(y) \\ 0 & 0 & -h''(y) \end{vmatrix} = -h''(y)$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{|E.G - F^2|}} \det(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}) = \frac{1}{\sqrt{1+h'(y)^2 + g'(x)^2}} g''(x)$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{|E.G - F^2|}} \det(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}) = \frac{1}{\sqrt{1+h'(y)^2 + g'(x)^2}} 0 = 0$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{|E.G - F^2|}} \det(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{yy}) = -\frac{1}{\sqrt{1+h'(y)^2 + g'(x)^2}} h''(y)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

eşitliğinden

$$K = \frac{-g''(x)h''(y)}{(1+h'(y)^2 + g'(x)^2)^2} \quad (4.2)$$

elde edilir. Eğer K sabit ise, $g''(x) \neq 0$ olduğu kabul edilip her iki tarafın y 'ye göre türevi alınırsa

$$h''(y)(1+h'(y)^2 + g'(x)^2) - 4h'(y)h''(y)^2 = 0$$

elde edilir.

$h''(y) \neq 0$ olduğu kabul edilirse ve her iki tarafın y 'ye göre türevi alınırsa

$$g''(y)(1+h'(y)^2 + g'(x)^2) - 4g'(y)g''(y)^2 = 0$$

bulunur.

Burada $g''(x) = 0$ yada $h''(y) = 0$ dır.

$g''(x) = 0$ ise

$a, b \in R$ olmak üzere $g(x) = ax + b$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\varphi(x, y) = (x, y, ax + b - h(y)) = (0, y, b - h(y)) + x.(1, 0, a)$$

bir silindirik yüzeydir.

E_1^3 Lorentz uzayında S öteleme yüzeyi

$$z = g(x) - h(y) \quad (4.3)$$

$$x = g(y) - h(z) \quad (4.4)$$

dönüşümleriyle verilebilir.

S 'nin K Gauss eğriliği, yukarıdaki benzer hesaplamalar yapılarak sırasıyla

$$K = \frac{-g''(x)h''(y)}{(1-h'(y)^2 - g'(x)^2)^2} \quad (4.5)$$

yada

$$K = \frac{-g''(y)h''(z)}{(h'(z)^2 - g'(y)^2 - 1)^2} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir.

K sabitse $g'' = 0$ ya da $h'' = 0$ olup yüzey bir silindir yüzeyidir.

Teorem 4.3

(I) S , 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de sabit ortalama eğriliği $H \neq 0$ olan bir öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda S , E^3 de aşağıdaki gibi bir yüzey yada yüzeyin parçasıdır.

$$z = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2H} \sqrt{1-4H^2x^2} - \lambda y \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (4.7)$$

(II) S , 3-boyutlu Lorentz uzayı E_1^3 de sabit ortalama eğriliği $H \neq 0$ olan bir öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda;

(i) Eğer S spacelike bir yüzey ise bu taktirde; S aşağıdaki gibi bir yüzey ya da bu yüzeyin bir parçası olur;

$$z = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2H} \sqrt{1+4H^2x^2} - \lambda y \quad (|\lambda| \leq 1) \quad (4.8)$$

$$x = \lambda y - \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2H} \sqrt{4H^2z^2 - 1} \quad (4.9)$$

veya

$$x = \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2H} \sqrt{1+4H^2y^2} - \lambda z \quad (|\lambda| > 1) \quad (4.10)$$

dir.

(ii) Eğer S timelike bir yüzey ise bu durumda; S aşağıdaki gibi bir yüzey ya da yüzeyin bir parçası olur.

$$z = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2H} \sqrt{4H^2 x^2 - 1} - \lambda y \quad (|\lambda| < 1) \quad (4.11)$$

$$z = \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2H} \sqrt{1-4H^2 x^2} - \lambda y \quad (|\lambda| > 1) \quad (4.12)$$

$$x = \lambda y + \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2H} \sqrt{1+4H^2 z^2} \quad (4.13)$$

$$x = \frac{-\sqrt{\lambda^2-1}}{2H} \sqrt{4H^2 y^2 - 1} - \lambda z \quad (|\lambda| > 1) \quad (4.14)$$

ya da,

$$x = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2H} \sqrt{1-4H^2 y^2} - \lambda z \quad (|\lambda| < 1) \quad (4.15)$$

(Liu, 1999).

İspat:

(I) S, E^3 Öklid uzayında, sabit ortalama eğriliği $H \neq 0$ olan bir yüzey olsun.

$z = g(x) - h(y)$ den H hesaplanırsa

$$H = \frac{g''(x) \cdot (1+h'(y)^2) - h''(y) \cdot (1+g'(x)^2)}{2 \cdot (1+h'(y)^2 + g'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.16)$$

şeklinde elde edilir.

Bu son eşitlikte x 'e göre türev alınır

$$\begin{aligned} & g'''(1+h'^2) - 2(g'g''h'') (1+g'^2+h'^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & - 3g'g'' [g''(1+h'^2) - h''(1+g'^2)] (1+g'^2+h'^2)^{-\frac{5}{2}} = 0 \\ & [g'''(1+h'^2) - 2(g'g''h'')] (1+g'^2+h'^2)^{-\frac{3}{2}} - 6Hg'g''(1+g'^2+h'^2)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

$$\left[g'''(1+h'^2) - 2(g'g''h'') \right] (1+g'^2+h'^2)^{-\frac{1}{2}} = 6Hg'g''$$

elde edilir. y ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} & (2h'h''g'' - 2g'g''h''')(1+g'^2+h'^2)^{-\frac{1}{2}} \\ & - h'h'' \left[g'''(1+h'^2) - 2g'g''h'' \right] (1+g'^2+h'^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Bu denklemi H 'ye göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned} & (2h'h''g'' - 2g'g''h''')(1+g'^2+h'^2)^{-\frac{1}{2}} - 6Hg'g''h'h''(1+g'^2+h'^2)^{-1} = 0 \\ & (2h'h''g'' - 2g'g''h''')(1+g'^2+h'^2)^{\frac{1}{2}} - 6Hg'g''h'h'' = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$g''(x) \neq 0$ ve $h''(y) \neq 0$ olduğu kabul edilirse,

$$3H = \left(\frac{g'''}{g'g''} - \frac{h'''}{h'h''} \right) (1+g'^2+h'^2)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Burada x 'e göre türev alınır ve tekrar düzenlenirse,

$$\left(\frac{g'''}{g'g''} \right) (1+g'^2+h'^2)^{\frac{3}{2}} + 3Hg'g'' = 0$$

eşitliğini elde edilir.

$g''(x) \neq 0$ ve $h''(y) \neq 0$ olduğundan $H = 0$ bulunur. Bu da $H \neq 0$ ile çelişir. O halde, $g'' = 0$ veya $h'' = 0$ olmalıdır.

$h'' = 0$ olursa, $h(y) = \lambda y + c$ şeklinde (4.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$g''(x)(1+\lambda^2) = 2H(1+g'^2+h'^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.17)$$

elde edilir. Bu denklem çözülürse;

$$g' = p \text{ ve}$$

$$g'' = p \frac{dp}{dg}$$

değişken değiştirmesiyle,

$$(1+\lambda^2)p \frac{dp}{dg} = 2H(1+\lambda^2+p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{(1+\lambda^2)p}{(1+\lambda^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} dp = 2Hdg$$

$$1+\lambda^2+p^2 = u$$

$$2.p.dp = du$$

$$\frac{(1+\lambda^2)}{2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = 2Hdg$$

$$\int \frac{(1+\lambda^2)}{2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \int 2Hdg$$

$$\left(\frac{1+\lambda^2}{2} \right) \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = 2Hg + c_1$$

$$-\frac{(1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2+p^2)^{\frac{1}{2}}} = 2Hg + c_1$$

$$-\frac{(1+\lambda^2)}{2Hg + c_1} = (1+\lambda^2+p^2)^{\frac{1}{2}}$$

bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{(1+\lambda^2)^2}{(2Hg + c_1)^2} = 1+\lambda^2+p^2$$

$$p^2 = \frac{(1+\lambda^2)^2}{(2Hg + c_1)^2} - (1+\lambda^2)$$

$$p = \sqrt{\frac{(1+\lambda^2)^2 - (1+\lambda^2)(2Hg + c_1)^2}{(2Hg + c_1)^2}} = \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{(2Hg + c_1).dg}{\sqrt{(1+\lambda^2)[(1+\lambda^2) - (2Hg + c_1)^2]}} = dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{(2Hg + c_1)}{\sqrt{(1+\lambda^2) - (2Hg + c_1)^2}} dg = dx$$

$$2.H.g + c_1 = v$$

elde edilir. Türev alınarak

$$2.H.dg = dv$$

$$dg = \frac{dv}{2.H}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{1}{2H} \frac{v}{\sqrt{(1+\lambda^2)-v^2}} dv = dx$$

$$1+\lambda^2-v^2=t$$

$$-2.v.dv = dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot \frac{1}{2.H} \cdot \left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = dx$$

elde edilir. Tekrar integral alınırsa,

$$-\frac{1}{4H\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x + c_2$$

$$t^{\frac{1}{2}} = -2H\sqrt{1+\lambda^2} (x + c_2)$$

$$t = -4H^2 (1+\lambda^2) (x + c_2)^2$$

$$1+\lambda^2-v^2 = 4H^2 (1+\lambda^2) (x + c_2)^2$$

$$(1+\lambda^2) - 4H^2 (1+\lambda^2) (x + c_2)^2 = v^2$$

$$(1+\lambda^2) [1 - 4H^2 (x + c_2)^2] = v^2$$

$$v = \sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{1 - 4H^2 (x + c_2)^2}$$

Buradan da

$$v = 2Hg + c_1$$

$$2Hg + c_1 = \sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{1 - 4H^2 (x + c_2)^2}$$

$$g = \frac{1}{2.H} \sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{1 - 4H^2 (x + c_2)^2} - c_1.$$

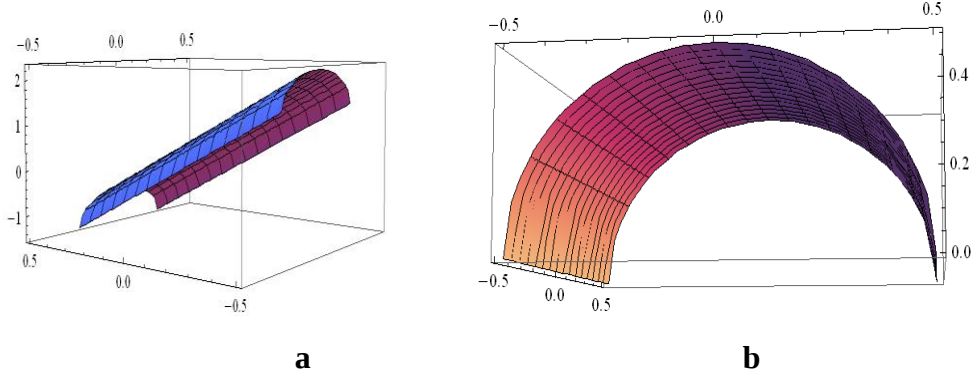
c_1 ve c_2 sabitleri yeniden düzenlenirse;

$$g = \frac{1}{2.H} \sqrt{1+\lambda^2} \sqrt{1 - 4H^2 (x + c_1)^2} - c_2.$$

elde edilir.

Yüzey $z = g(x) - h(y)$ şeklinde olduğu için

$$z = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2.H} \sqrt{1-4H^2(x+c_1)^2} + c_2 - \lambda y \text{ şeklindedir.}$$



Şekil 4.2 Öteleme yüzey (a) $\lambda = 3, H = 2$ ve (b) $\lambda = 0, H = 1$

(II) S, E^3 Lorentz uzayında, sabit ortalama eğriliği $H \neq 0$ olan bir yüzey olsun.

$z = g(x) - h(y)$ den H için,

$$H = \frac{g''(x)(1-h'(y)^2) - h''(y)(1-g'(x)^2)}{2|1-h'(y)^2 - g'(x)^2|^{\frac{3}{2}}} \quad (4.18)$$

ve

$x = g(y) - h(z)$ için,

$$H = \frac{g''(y)(h'(z)^2 - 1) - h''(z)(1+g'(y)^2)}{2|h'(z)^2 - g'(y)^2 - 1|^{\frac{3}{2}}} \quad (4.19)$$

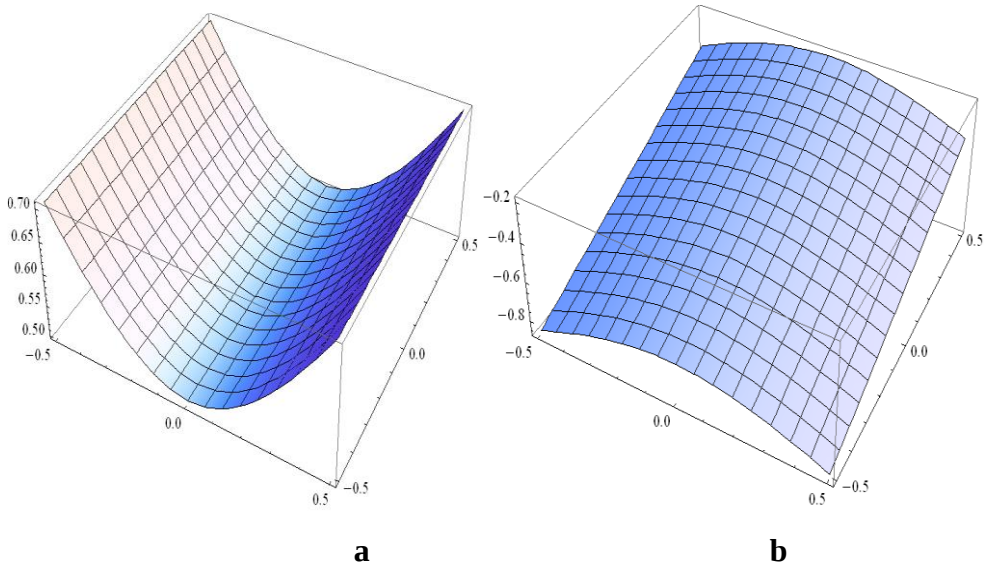
şeklindedir. (I).dekine benzer hesaplamalarla

$$z = g(x) - h(y)$$

eşitliğinden

$$z = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2.H} \sqrt{1+4H^2(x+c_1)^2} - \lambda y$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.



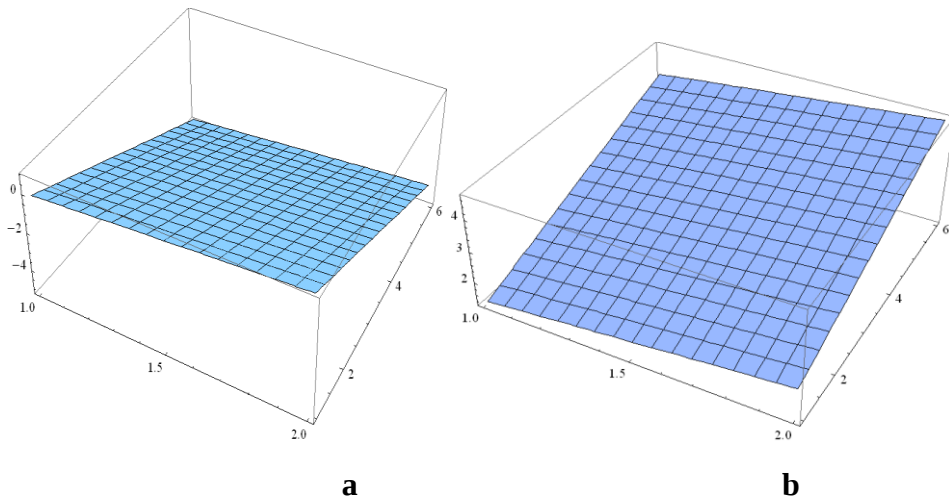
Şekil 4.3 Öteleme yüzey (a) $\lambda = 0, H = 1$ ve (b) $\lambda = \frac{-1}{2}, H = -1$

Şimdi de,

$$g''(x)(1-\lambda^2) = 2H \left(g'(x) - (1-\lambda^2) \right)^{\frac{3}{2}}$$

diferensiyel denklemi çözülürse, (I).dekine benzer hesaplamalarla; $z = g(x) - h(y)$ eşitliğinden

$$z = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{2.H} \sqrt{4H^2 (x+c_1)^2 - 1} + c_2 - \lambda y \text{ elde edilir.}$$



Şekil 4.4 Öteleme yüzey (a) $\lambda = 0, H = 1$ ve (b) $\lambda = \frac{-1}{2}, H = 2$

$$|\lambda| > 1 \text{ ise } g''(x)(\lambda^2 - 1) = 2H(\lambda^2 - 1 - g'(x)^2)^{\frac{3}{2}}$$

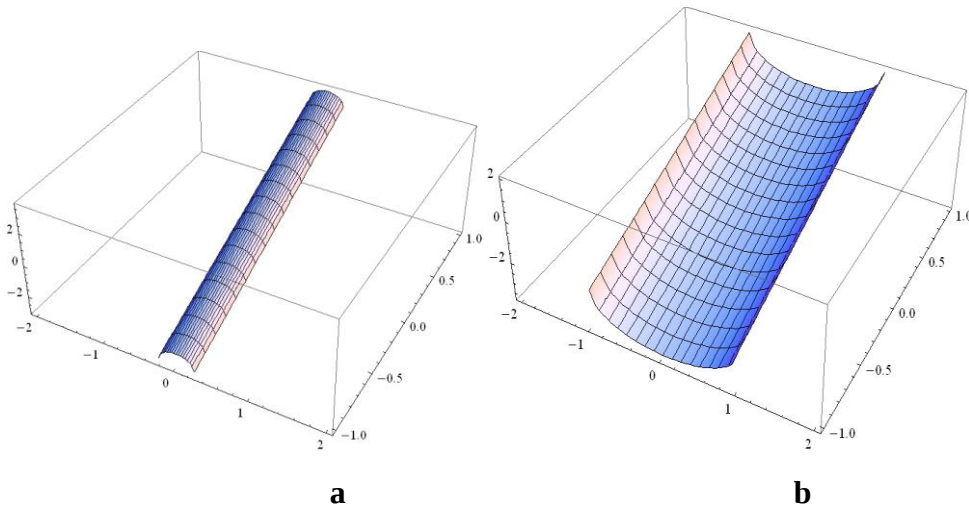
diferensiyel denklemi yine I.deki gibi çözülürse,

$$z = g(x) - h(y)$$

eşitliğinden

$$z = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2.H} \sqrt{1 - 4H^2(x + c_1)^2} + c_2 - \lambda y$$

elde edilir.



Şekil 4.5 Öteleme yüzey (a) $\lambda = -3, H = 2$ ve (b) $\lambda = -2, H = -\frac{1}{2}$

(4.4) deki yüzey için $g'' = 0$ olduğunda E_1^3 de bir öteleme olarak,

$$g(y) = \lambda \cdot y + c \text{ yazılabilir.}$$

(4.18) den, $x = g(y) - h(z)$ için,

$$-h''(z)(1 + \lambda^2) = 2H(h'(z)^2 - \lambda^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$$

ya da

$$-h''(z)(1 + \lambda^2) = 2H(\lambda^2 + 1 + h'(z)^2)^{\frac{3}{2}}$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu denklemler sırayla çözülürse,

$$h(z) = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{2.H} \sqrt{4H^2(z+c_1)^2 + 1} + c_2 \quad (c_1, c_2 \in R) \quad (4.19)$$

ve

$$h(z) = \frac{-\sqrt{1+\lambda^2}}{2.H} \sqrt{4H^2(z+c_1)^2 + 1} + c_2 \quad (c_1, c_2 \in R) \quad (4.20)$$

elde edilir.

$h'' = 0$ olduğundan, $h(z) = \lambda.z$ olduğunu farz edilirse (4.19) dan,

$$g''(y)(\lambda^2 - 1) = 2H(\lambda^2 - 1 - g'(y)^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.21)$$

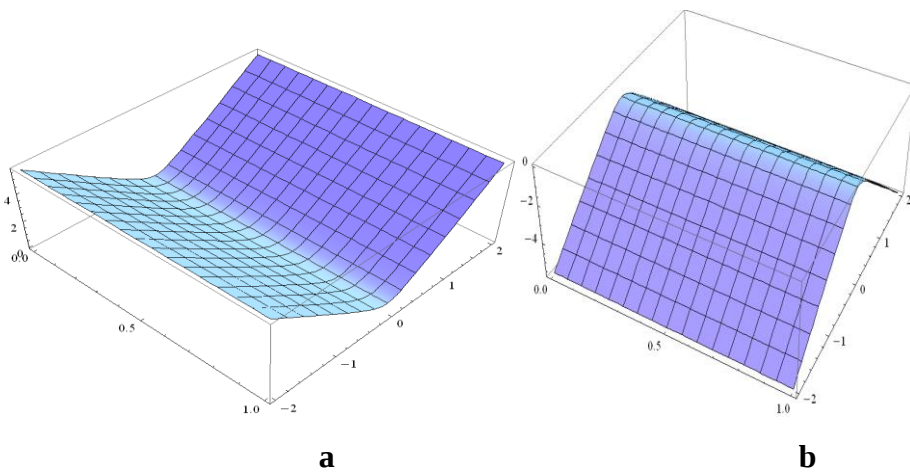
ve

$$g''(y)(\lambda^2 - 1) = 2H(g'(y)^2 + 1 - \lambda^2)^{\frac{3}{2}} \quad (4.22)$$

denklemlerine ulaşılır. (4.19) un çözümünden; $(c_1, c_2 \in R, |\lambda| > 1)$ olmak üzere

$$g(y) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2.H} \sqrt{1 + 4H^2(y+c_1)^2} + c_2$$

spacelike yüzeyi elde edilir.

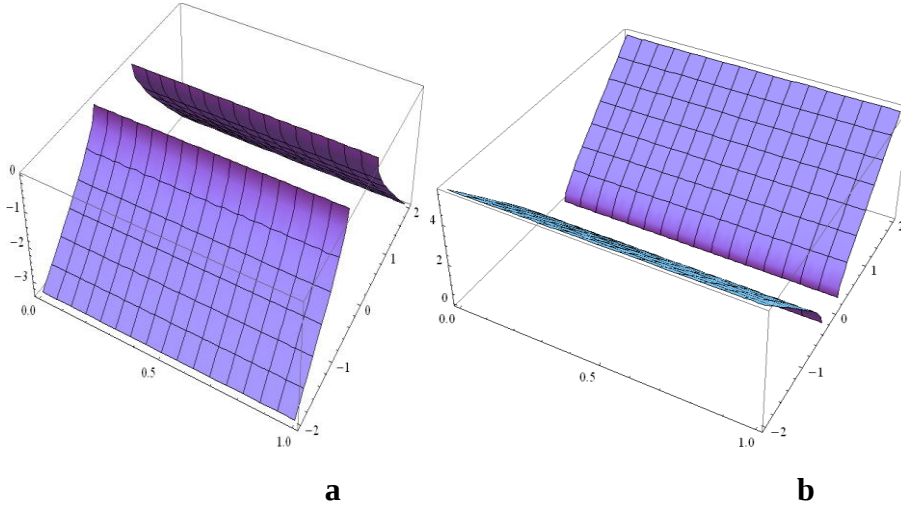


Şekil 4.6 Öteleme yüzey (a) $\lambda = -3, H = 2$ ve (b) $\lambda = 3, H = -\frac{1}{2}$

(4.22) denkleminin çözümünden,

$$g(y) = \frac{-\sqrt{\lambda^2 - 1}}{2.H} \sqrt{4H^2 (y + c_1)^2 - 1} + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1)$$

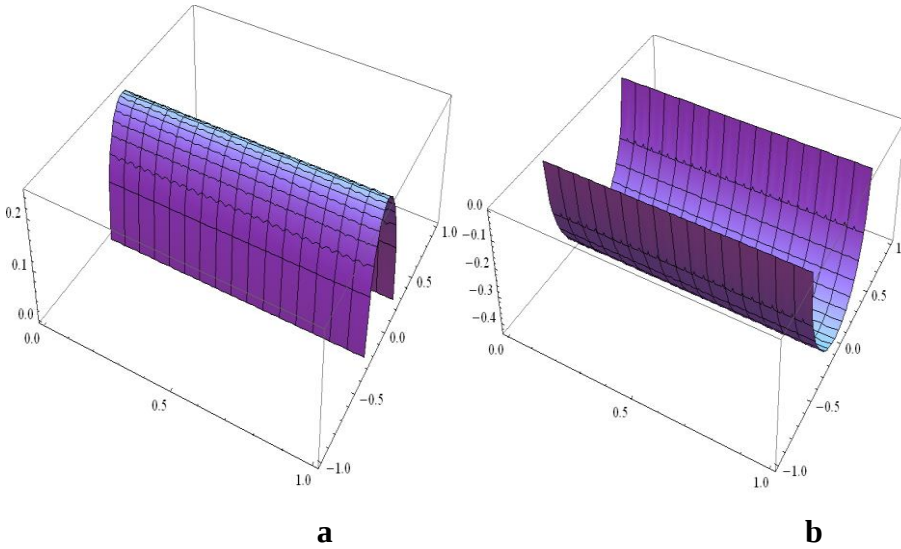
timelike yüzeyi bulunur.



Şekil 4.7 Öteleme yüzey (a) $\lambda = 2, H = 1$ ve (b) $\lambda = 3, H = -2$

$$g(y) = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{2.H} \sqrt{1 - 4H^2 (y + c_1)^2} + c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}, |\lambda| > 1)$$

timelike yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.8 Öteleme yüzey (a) $\lambda = 0, H = 2$ ve (b) $\lambda = -\frac{1}{2}, H = -1$

olarak elde edilir. Bunlar da Teorem 4.3 nin ispatını tamamlar.

Teorem 4.4

(I) S , 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de sıfır ortalama eğrilikli bir öteleme yüzeyi olsun.

Bu durum da S , E^3 de aşağıdaki gibi bir yüzey veya bu yüzeyin bir parçası olur.

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)) \quad (\lambda \neq 0, \lambda \in R)$$

(II) S , 3-boyutlu Lorentz uzayı E_1^3 de sıfır ortalama eğrilikli bir öteleme yüzeyi olsun.

Bu durumda;

(i) Eğer S , spacelike yüzey ise E_1^3 uzayında bulunan aşağıdaki yüzeyin bir spacelike parçasına eşit olur.

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)) \quad (4.23)$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)) + \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda z)) \quad (4.24)$$

(ii) Eğer S , timelike yüzey ise (4.21) ve (4.22) eşitliklerinin timelike kısımlarına ya da aşağıdaki gibi E_1^3 ün bir parçasına eşit olur.

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)) \quad (4.25)$$

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y)) \quad (4.26)$$

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y)) \quad (4.27)$$

ya da,

$$x = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda z)) \quad (4.28)$$

(Liu, 1999).

İspat:

(1) 3-boyutlu E^3 Öklid uzayında sıfır ortalama eğrilikli S yüzeyini ele alalım.

$z = g(x) + h(y)$ olsun.

$$H = \frac{g''(x)(1+h'(y)^2) + h''(y)(1+g'(x)^2)}{2|1+g'(y)^2 + h'(z)^2|^{\frac{3}{2}}} = 0$$

alınırsa

$$g''(x)(1+h'(y)^2) + h''(y)(1+g'(x)^2) = 0$$

$$-g''(x)(1+h'(y)^2) = h''(y)(1+g'(x)^2)$$

olur. Her iki tarafı $(1+h'(y)^2)(1+g'(x)^2)$ ile bölünürse;

$$\frac{-g''(x)(1+h'(y)^2)}{(1+h'(y)^2)(1+g'(x)^2)} = \frac{h''(y)(1+g'(x)^2)}{(1+h'(y)^2)(1+g'(x)^2)}$$

den

$$\frac{-g''(x)}{1+g'(x)^2} = \frac{h''(y)}{1+h'(y)^2}$$

elde edilir. Bu ifade λ sabitine eşitlenerek çözülürse; $z = g(x) + h(y)$ olduğundan,

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y))$$

olarak bulunur. Buda ispatı tamamlar.

(2) 3-boyutlu E_1^3 Lorentz uzayında sıfır ortalama eğrilikli S yüzeyini ele alınırsa:

(i) S spacelike olsun. $(E.G - F^2 > 0)$

(a) $z = g(x) - h(y)$

ve

$$(b) \ x = g(y) + h(z)$$

olsun. Bu durum da $z = g(x) - h(y)$ den

$$H = \frac{g''(x)(1-h'(y)^2) - h''(y)(1-g'(x)^2)}{2|1-g'(x)^2 - h'(y)^2|^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.29)$$

ve $x = g(y) + h(z)$

$$H = \frac{g''(y)(h'(z)^2 - 1) + h''(z)(1+g'(y)^2)}{2|h'(z)^2 - g'(y)^2 - 1|^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.30)$$

dir.

(4.14) da $H = 0$ için

$$g''(x)(1-h'(y)^2) - h''(y)(1-g'(x)^2) = 0$$

$$g''(x)(1-h'(y)^2) = h''(y)(1-g'(x)^2)$$

$$\frac{g''(x)}{1-g'(x)^2} = \frac{h''(y)}{1-h'(y)^2} = \lambda.$$

olur. İlk olarak

$$\frac{g''(x)}{1-g'(x)^2} = \lambda$$

denklemini ele alınırsa,

$$g' = p = \frac{dg}{dx}$$

$$g'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

değişken değiştirmesiyle

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{1-p^2} = \lambda$$

$$\frac{1}{1-p^2} dp = \lambda dx \text{ olur.}$$

Buradan integral alınırsa,

$$\int \frac{1}{1-p^2} . dp = \int \lambda . dx$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(1-p)} + \frac{1}{(1+p)} \right) dp = \int \lambda dx$$

$$\int \left(\frac{1}{(1-p)} + \frac{1}{(1+p)} \right) dp = 2 \int \lambda dx$$

$$-\ln(1-p) + \ln(1+p) = 2\lambda x + \ln(c_1)$$

$$\ln \left(\frac{1+p}{1-p} \right) = 2\lambda x + \ln(c_1)$$

$$\frac{1+p}{1-p} = c_1 e^{2\lambda x}$$

$$1+p = c_1 e^{2\lambda x} (1-p)$$

$$1+p = c_1 e^{2\lambda x} - c_1 e^{2\lambda x} p$$

$$p(1+c_1 e^{2\lambda x}) = c_1 e^{2\lambda x} - 1$$

$$p = \frac{c_1 e^{2\lambda x} - 1}{1 + c_1 e^{2\lambda x}}$$

$$p = g' = \frac{c_1 e^{2\lambda x} - 1}{c_1 e^{2\lambda x} + 1}$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{c_1 e^{2\lambda x} - 1}{c_1 e^{2\lambda x} + 1}$$

$$g = \int \frac{c_1 e^{2\lambda x} - 1}{c_1 e^{2\lambda x} + 1} dx$$

$$c_1 = 1$$

$$g = \int \frac{e^{2\lambda x} - 1}{e^{2\lambda x} + 1} dx$$

$$g = \int \tanh(\lambda x) dx = \int \frac{\sinh(\lambda x)}{\cosh(\lambda x)} dx$$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x))$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{h''(y)}{1-h'(y)^2} = \lambda$$

denklemini çözülürse,

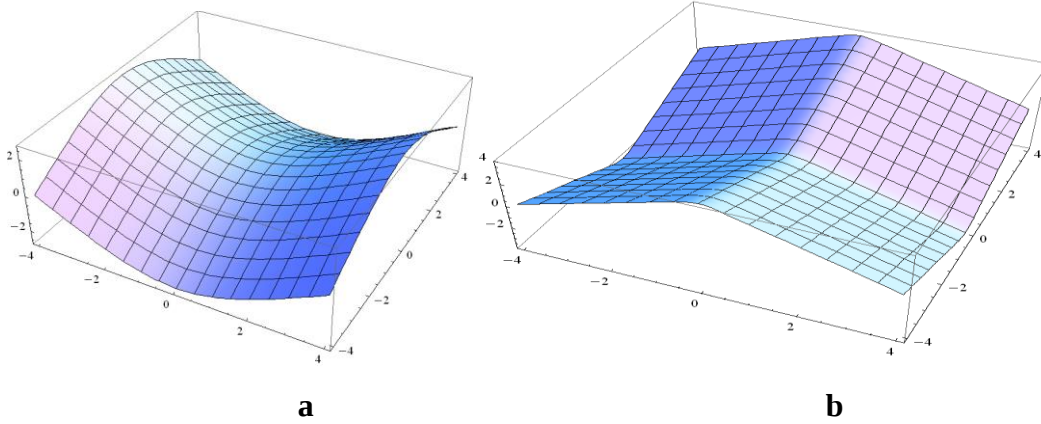
$$h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y))$$

bulunur.

$z = g(x) - h(y)$ olduğundan,

$$z = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y))$$

yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.9 Minimal yüzey (a) $\lambda = \frac{1}{2}$ ve (b) $\lambda = -4$

(b) $x = g(y) + h(z)$

$$H = \frac{g''(y)(h'(z)^2 - 1) + h''(z)(1 - g'(y)^2)}{2|h'(z)^2 - g'(y)^2 - 1|^{\frac{3}{2}}} = 0$$

den,

$$g''(y) \cdot (h'(z)^2 - 1) + h''(z) \cdot (1 - g'(y)^2) = 0$$

$$-g''(y) \cdot (h'(z)^2 - 1) = h''(z) \cdot (1 - g'(y)^2)$$

$$-\frac{g''(y)}{1 - g'(y)^2} = \frac{h''(z)}{h'(z)^2 - 1} = \lambda$$

eşitliği çözülürse öncelikle

$$-\frac{g''(y)}{1 - g'(y)^2} = \lambda$$

denklemini ele alınırsa ve

$$g' = p = \frac{dg}{dx}$$

$$g'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{\frac{dp}{dy}}{1+p^2} = \lambda$$

$$-\frac{1}{1+p^2} dp = \lambda dy$$

olur. Buradan integral alınır

$$\int \frac{1}{1+p^2} dp = \int \lambda dy$$

$$-\arctan(p) = \lambda y + c_1$$

$$p = -\tan(\lambda y + c_1)$$

$$g' = p = \frac{dg}{dy} = -\tan(\lambda y + c_1)$$

$$dg = -\tan(\lambda y + c_1) dy$$

elde edilir. Tekrar iki tarafın integrali alınır,

$$g(y) = -\int \frac{\sin(\lambda y + c_1)}{\cos(\lambda y + c_1)} dy$$

$$g(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y + c_1))$$

$$c_1 = 0$$

$$g(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y))$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\frac{h''(z)}{h'(z)^2 - 1} = \lambda$$

denklemini ele alınırsa

$$h' = p = \frac{dh}{dz}$$

$$h'' = p' = \frac{dp}{dz}$$

alınarak,

$$\frac{\frac{dp}{dz}}{p^2-1} = \lambda$$

$$\frac{1}{p^2-1} dp = \lambda dz$$

elde edilir. Tekrar integral alınırsa,

$$\int \frac{1}{p^2-1} dp = \int \lambda dz$$

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(1-p)} + \frac{1}{(1+p)} \right) dp = \int \lambda dz$$

$$\int \left(\frac{1}{(p-1)} - \frac{1}{(1+p)} \right) dp = 2 \int \lambda dz$$

$$\ln(p-1) - \ln(p+1) = 2\lambda z + \ln(c_1)$$

$$\ln\left(\frac{p-1}{p+1}\right) = 2\lambda z + \ln(c_1)$$

$$\frac{p-1}{p+1} = c_1 e^{2\lambda z}$$

$$p-1 = c_1 e^{2\lambda z} (p+1)$$

$$p-1 = c_1 e^{2\lambda z} p + c_1 e^{2\lambda z}$$

$$p(1 - c_1 e^{2\lambda z}) = c_1 e^{2\lambda z} + 1$$

$$p = \frac{1 + c_1 e^{2\lambda z}}{1 - c_1 e^{2\lambda z}}$$

$$p = h' = \frac{1 + c_1 e^{2\lambda z}}{1 - c_1 e^{2\lambda z}}$$

$$\frac{dh}{dz} = \frac{1 + c_1 e^{2\lambda z}}{1 - c_1 e^{2\lambda z}}$$

$$h = \int \frac{1 + c_1 e^{2\lambda z}}{1 - c_1 e^{2\lambda z}} dz$$

$$c_1 = 1$$

$$h = \int \frac{1 + e^{2\lambda z}}{1 - e^{2\lambda z}} dz$$

$$h = \int \coth(\lambda z) dz = \int \frac{\cosh(\lambda z)}{\sinh(\lambda z)} dz$$

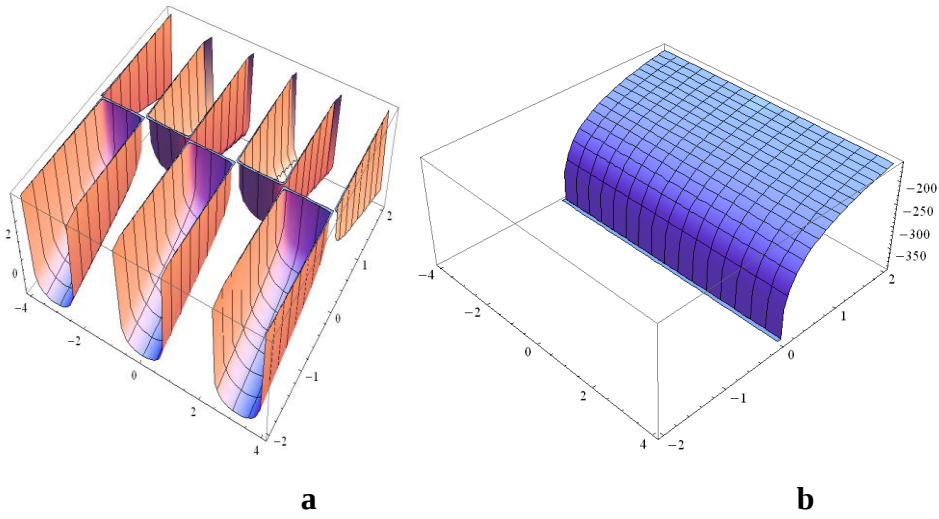
$$h(z) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda z))$$

bulunur.

Böylece, $x = g(y) + h(z)$ için,

$$x = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)) + \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda z)).$$

yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.10 Minimal yüzey (a) $\lambda = -2$ ve (b) $\lambda = \frac{1}{50}$

(ii) S bir timelike yüzey olsun. $(E.G - F^2 < 0)$

$z = g(x) - h(y)$ için,

$$H = \frac{g''(x)(1-h'(y)^2) - h''(y)(1-g'(x)^2)}{2|1-g'(x)^2 - h'(y)^2|^{\frac{3}{2}}}$$

dir.

$H = 0$ için,

$$g''(x)(1-h'(y)^2) - h''(y)(1-g'(x)^2) = 0$$

$$g''(x)(1-h'(y)^2) = h''(y)(1-g'(x)^2)$$

$$\frac{g''(x)}{(1-g'(x)^2)} = \frac{h''(y)}{(1-h'(y)^2)} = \lambda$$

elde edilir.

Timelike olması yani,

$$1-g'(x)^2-h'(y)^2 < 0$$

olması durumu incelememiz için bakmamız gereken dört farklı durum vardır.

1.Durum

$g'(x) < 1$ ve $h'(y) < 1$ ise

$$\frac{g''(x)}{(1-g'(x)^2)} = \frac{h''(y)}{(1-h'(y)^2)} = \lambda$$

denkleminin çözümünden,

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)).$$

ve

$$h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)).$$

$$\text{olur. Buradan } z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)).$$

elde edilir.

2.Durum

$g'(x) < 1$ ve $h'(y) > 1$ ise

$$\frac{g''(x)}{(1-g'(x)^2)} = \frac{h''(y)}{(h'(y)^2 - 1)} = \lambda$$

denkleminin çözümünden,

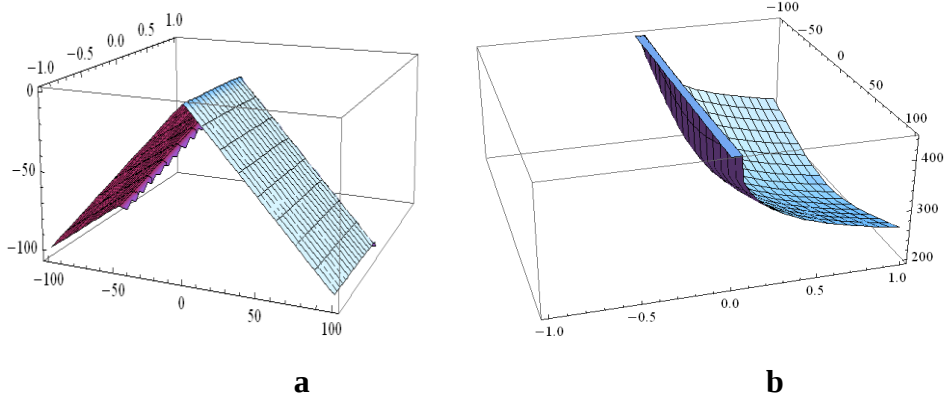
$$g(x) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)).$$

ve

$$h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y)).$$

$$\text{olup } z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y)).$$

yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.11 Minimal yüzey (a) $\lambda = -2$ ve (b) $\lambda = \frac{1}{50}$

Bu yüzey 2.Çesit Scherk Yüzeyiolarak adlandırılmıştır(Woestjne,W.D.I.,1990).

3.Durum

$g'(x) > 1$ ve $h'(y) < 1$ ise

$$\frac{g''(x)}{(g'(x)^2 - 1)} = \frac{h''(y)}{(1 - h'(y)^2)} = \lambda$$

denkleminin çözümünden,

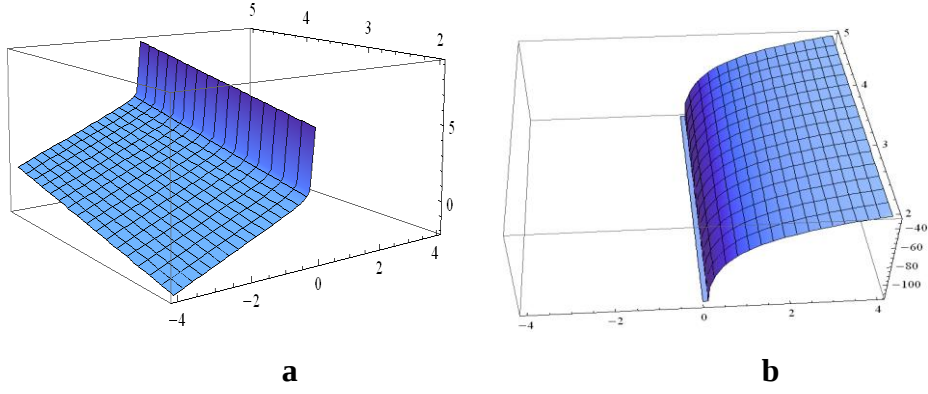
$$g(x) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)).$$

$$h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)).$$

dır. O halde

$$z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)).$$

yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.12 Minimal yüzey (a) $\lambda = -2$ ve (b) $\lambda = \frac{1}{20}$

Bu yüzey 3.Çesit Scherk Yüzeyi olarak adlandırılır(Woestjne,W.D.I.,1990).

4.Durum

$g'(x) > 1$ ve $h'(y) > 1$ ise

$$\frac{g''(x)}{(g'(x)^2 - 1)} = \frac{h''(y)}{(h'(y)^2 - 1)} = \lambda$$

denkleminin çözümünden,

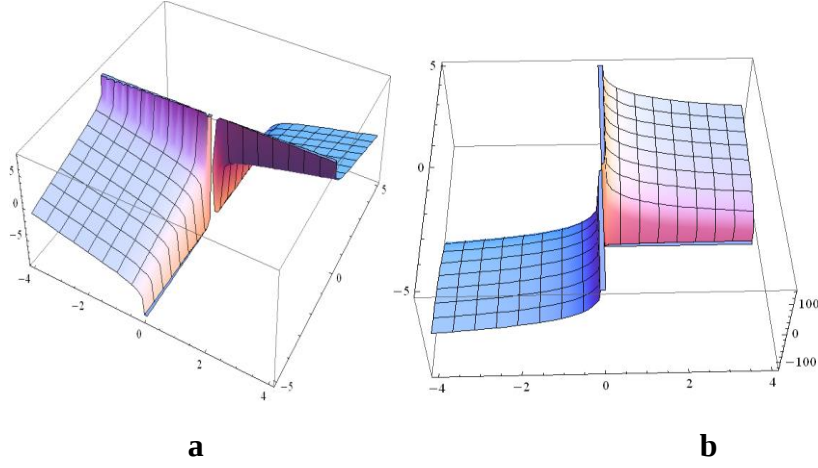
$$g(x) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)).$$

$$h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y)).$$

bulunur. Buradan

$$z = g(x) - h(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda x)) - \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda y)).$$

yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.13 Minimal yüzey (a) $\lambda = 1$ ve (b) $\lambda = -\frac{1}{30}$

$x = g(y) + h(z)$ için,

$$H = \frac{g''(y)(h'(z)^2 - 1) + h''(z)(1 + g'(y)^2)}{2|h'(z)^2 - g'(y)^2 - 1|^{\frac{3}{2}}}$$

olur.

$H = 0$ için,

$$g''(y)(h'(z)^2 - 1) + h''(z)(1 + g'(y)^2) = 0$$

$$g''(y)(h'(z)^2 - 1) = -h''(z)(1 + g'(y)^2)$$

$$\frac{g''(y)}{(1 + g'(y)^2)} = -\frac{h''(z)}{(h'(z)^2 - 1)}$$

elde edilir.

Burada da $h'(z)^2$ nin 1 den küçük ve 1 den büyük olması durumları vardır.

(a) $h'(z)^2 < 1$ ise

$$\frac{g''(y)}{(1 + g'(y)^2)} = -\frac{h''(z)}{(h'(z)^2 - 1)} = \lambda$$

denkleminin çözümünden,

$$g(y) = -\frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)).$$

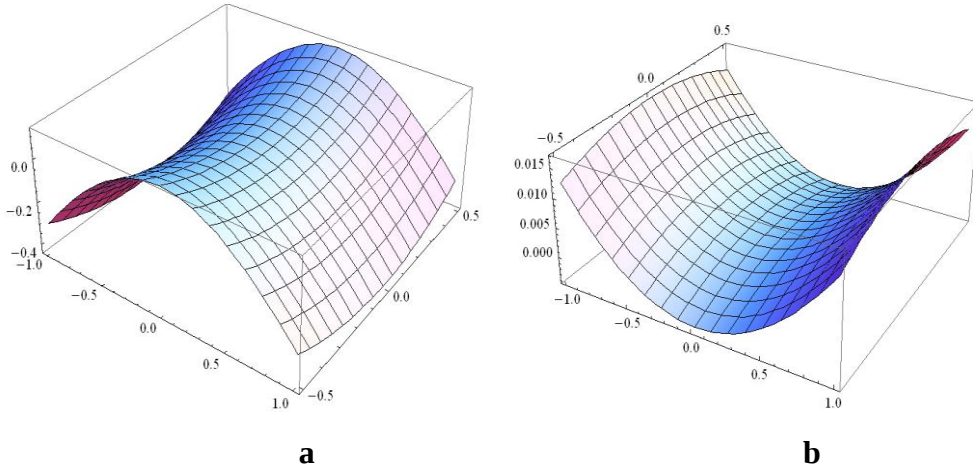
ve

$$h(z) = -\frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda z)).$$

olur. Dolayısıyla

$$x = g(y) + h(z) = -\frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda y)) - \frac{1}{\lambda} \log(\cosh(\lambda z)).$$

yüzeyi elde edilir.



Şekil 4.14 Minimal yüzey (a) $\lambda = 1$ ve (b) $\lambda = -\frac{1}{30}$

Bu yüzey 2.Çesit Scherk Yüzeyi olarak adlandırılır(Woestjne,W.D.I.,1990).

(b)

$h'(z)^2 > 1$ ise

$$\frac{g''(y)}{(1+g'(y)^2)} = -\frac{h''(z)}{(h'(z)^2 - 1)} = \lambda$$

denkleminin çözümünden,

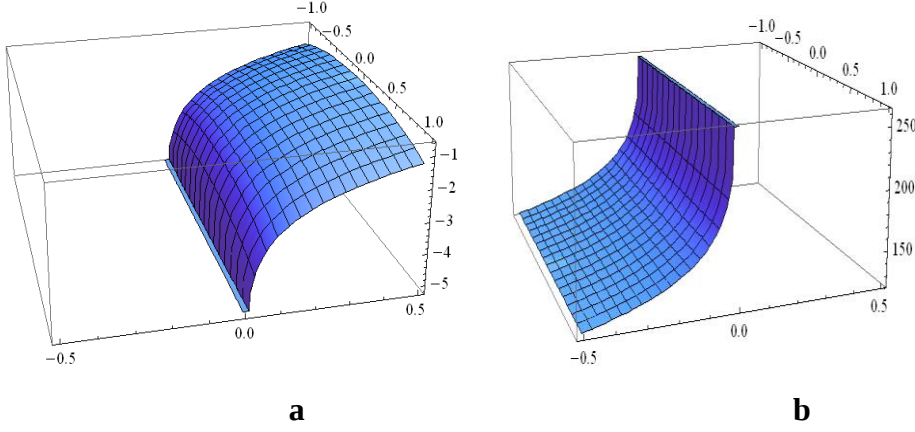
$$g(y) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)).$$

$$h(z) = \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda z)).$$

olup,

$$x = g(y) + h(z) = \frac{1}{\lambda} \log(\cos(\lambda y)) + \frac{1}{\lambda} \log(\sinh(\lambda z)).$$

yüzeyi elde edilir



Şekil 4.15 Minimal yüzey (a) $\lambda = 1$ ve (b) $\lambda = -\frac{1}{30}$

Bu da Teorem 4. 4' ün ispatını tamamlar.

E_1^3 Minkowski uzayında spacelike, timelike ve lighthlike doğrultulara göre öteleme yüzeyleri altı çeşit olarak göz önüne alınabilir.

- 1.Çeşit spacelike doğrultu boyunca ve spacelike doğrultuda,
- 2.Çeşit spacelike doğrultu boyunca ve timelike doğrultuda,
- 3.Çeşit lighthlike doğrultu boyunca ve lighthlike doğrultuda,
- 4.Çeşit lighthlike doğrultu boyunca ve spacelike doğrultuda,
- 5.Çeşit timelike doğrultu boyunca ve lighthlike doğrultuda,
- 6.Çeşit timelike doğrultu boyunca ve timelike doğrultuda,

5. ve 6. Çeşit öteleme yüzeyi

$$S = \varphi(u, v) = \{\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)\}$$

$$= \{g(u + \lambda v) + h(v), u, v\}$$

i) $|\lambda| = 1$ yüzey 5.çeşittir.

ii) $|\lambda| > 1$ yüzey 6.çeşittir.

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}, \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$$

olmak üzere, S 'nin 1.temel formu

$$I = E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2$$

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = g_u^2 + 1$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = g_u(\lambda g_v + h_v)$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (\lambda g_u + h_v)^2 - 1$$

şeklinde ifade edilir.

E_1^3 de spacelike ve timelike yüzey için sırasıyla

$$E.G - F^2 > 0 \text{ ve } E.G - F^2 < 0$$

Olmak üzere S yüzeyinin II. temel formunun katsayıları

$$L = \frac{g_{uu}}{\sqrt{(\lambda g_v + h_v)^2 - g_v^2 - 1}}$$

$$M = \frac{\lambda g_{uv}}{\sqrt{(\lambda g_v + h_v)^2 - g_v^2 - 1}}$$

$$N = \frac{\lambda^2 g_{vv}}{\sqrt{(\lambda g_v + h_v)^2 - g_v^2 - 1}}$$

olmak üzere,

$$II = L.du^2 + 2.M.du.dv + N.dv^2$$

şeklindedir. Bu durumda S yüzeyinin Gauss ve Ortalama eğrilikleri

$$K = \frac{g_{uu}(\lambda^2 g_{vv} + h_{vv}) - \lambda^2 g_{uv}^2}{((\lambda g_v + h_v)^2 - g_u^2 - 1)((\lambda g_v + h_v)^2 - g_v^2 - 1)} \quad (4.31)$$

$$H = \frac{(g_u^2 + 1)(\lambda^2 g_{vv} + h_{vv}) - 2\lambda g_u g_{uv}(\lambda g_v + h_v) + g_{uu}((\lambda g_v + h_v)^2 - 1)}{2((\lambda g_v + h_v)^2 - g_u^2 - 1)\sqrt{(\lambda g_v + h_v)^2 - g_v^2 - 1}} \quad (4.32)$$

şeklindedir.

Sonuç:

$y = u + \lambda.v$ ve $z = v$ dönüşümü ile

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

ve (4.31) ve (4.32) den ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$K = \frac{g_{yy}h_{zz}}{\varepsilon \left((\lambda^2 g_y + h_z)^2 - g_y^2 - 1 \right)^2}$$

$$H = \frac{h_{zz}(g_y^2 + 1) + g_{yy}(\lambda^4 - 1 + h_z^2)}{2\varepsilon \left(\varepsilon (\lambda^2 g_y + h_z)^2 - g_y^2 - 1 \right)^{3/2}}$$

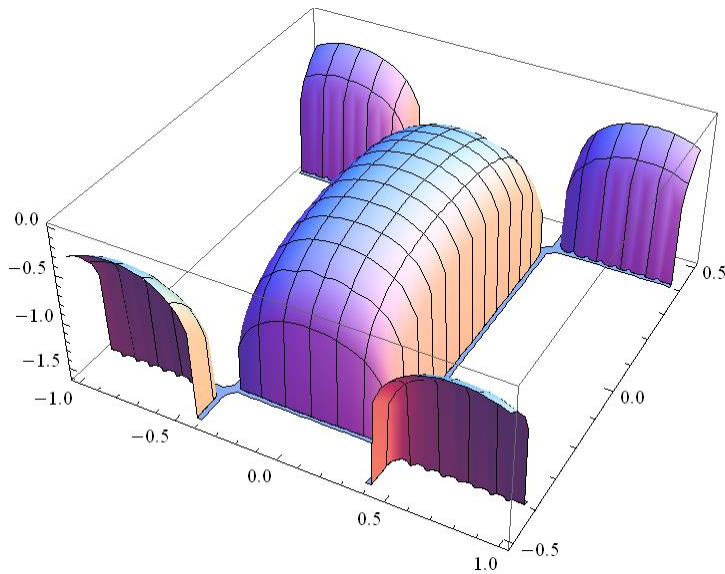
şeklindedir.

Teorem 4.5

S, E_1^3 de 6.çeşit öteleme yüzeyi olsun. Bu taktirde eğer S minimal ise S bir düzleme özdeşdir ya da g ve h fonksiyonları

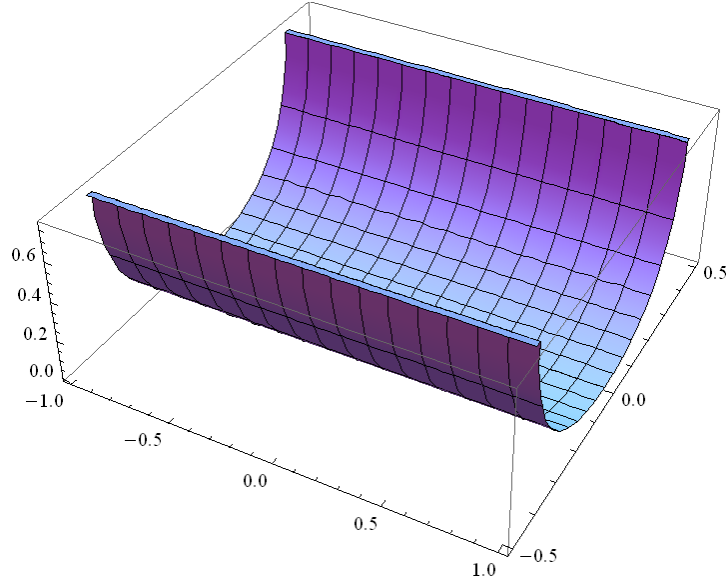
c_1, c_2, c sabit ve $c \neq 0$ olmak üzere

$$g = \frac{-1}{c} \log \left| \sec \left(-c(u + \lambda.v) + c_1 \right) \right| + c_2$$



Şekil 4.16 Minimal yüzey $c = 4$ ve $\lambda = 1$

$$h = \frac{1}{c} \log \left| \sec \left(c \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \right) v + c_1 \right) \right| + c_2$$



Şekil 4.17 Minimal yüzey $c = 4$ ve $\lambda = \sqrt{2}$

şeklindedir (Yuan ve Liu, 2011).

Teorem 4. 6

S 6. çeşit öteleme yüzeyi ve $H \neq 0$ ise bu taktirde;

(i) S spacelike ise aşağıdaki yüzeylerin birine ya da bunların açık bir parçasına denktir.

(a) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\varphi(u, v) = \frac{-\sqrt{1+c^2}}{2H} \sqrt{4H^2u^2 - 1} - \lambda^2 cv + c(u + \lambda v)$$

(b)

$$\varphi(u, v) = \frac{-\sqrt{c^2 + \lambda^4 - 1}}{2H\sqrt{\lambda^4 - 1}} \sqrt{\frac{4.H^2}{\lambda^4 - 1} (u + \lambda^2)^2 - 1} - \frac{\lambda^2 cu}{\lambda^4 - 1} + \frac{\lambda^4 - \lambda^3 - 1}{\lambda^4 - 1} cv$$

şeklindedir.

(ii) S timelike ise aşağıdaki yüzeylerin birine ya da bunların açık bir parçasına denktir.

(c)

$$\varphi(u, v) = \frac{-\sqrt{1+c^2}}{2H} \sqrt{4H^2u^2+1} - \lambda^2cv + c(u + \lambda v)$$

(d)

$$\varphi(u, v) = \frac{-\sqrt{c^2+\lambda^4-1}}{2H\sqrt{\lambda^4-1}} \sqrt{\frac{4H^2}{\lambda^4-1}(u+\lambda^2)+1} - \frac{\lambda^2cu}{\lambda^4-1} + \frac{\lambda^4-\lambda^3-1}{\lambda^4-1}cv$$

şeklindedir (Yuan ve Liu, 2011).

Teorem 4.7

$K \neq 0$ ise 5. ve 6. Çeşit öteleme yüzeyi yoktur (Yuan ve Liu, 2011).

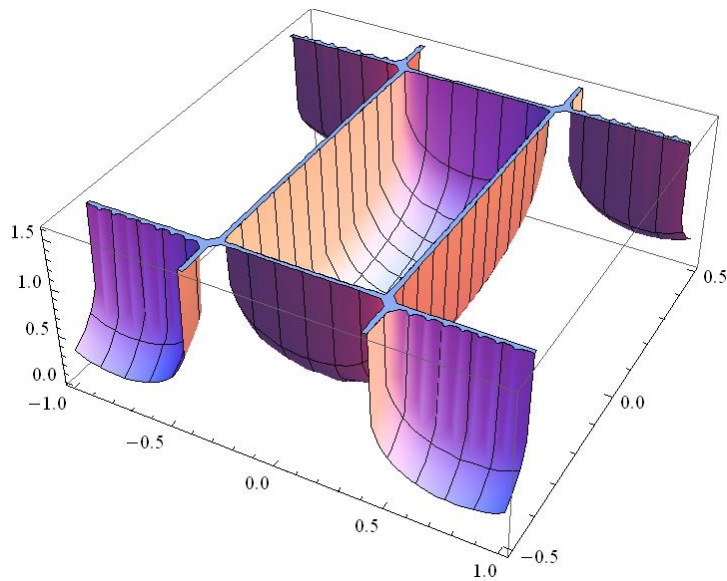
Teorem 4.8

$$\varphi(u, v) = \{g(u + \lambda v) + h(u), u, v\}$$

bir öteleme yüzeyi olsun. Bu yüzey 5. Çeşit minimal yüzeydir

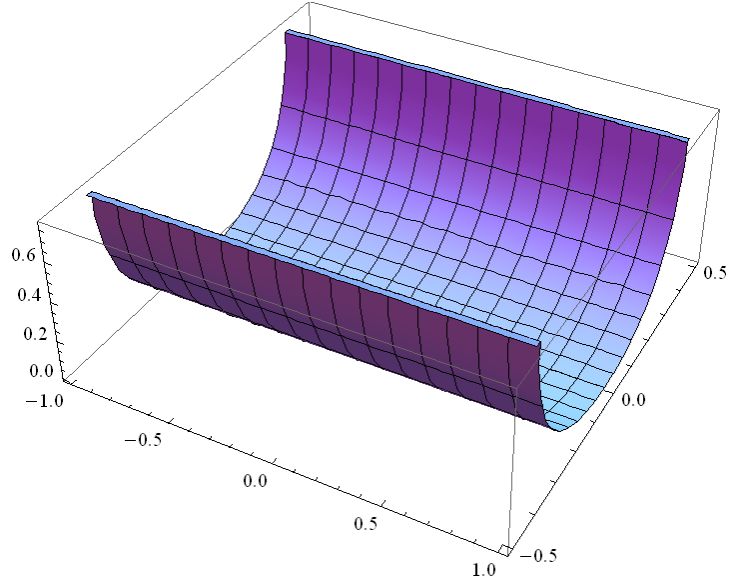
c_1, c_2, c sabit ve $c \neq 0$ olmak üzere yüzey bir düzlemdir, h ve g fonksiyonu

$$g = \frac{1}{c} \log \left| \sec \left(c(u + \lambda v) + c_1 \right) \right| + c_2$$



Şekil 4.18 Minimal yüzey $c = 4$ ve $\lambda = 1$

$$h = \frac{1}{c} \log |(cv + c_1)| + c_2$$



Şekil 4.19 Minimal yüzey $c = 4$

şeklindedir(Yuan ve Lıu, 2011).

BÖLÜM V

SONUÇLAR

1995 yılında Johan Walrave doktora tezinde 3 ve 4 boyutlu Minkowski uzayında eğriler ve yüzeyleri incelemiş ve bir sınıflama yapmıştır. Bu çalışmada ise eğriler ve yüzey eğrileri üzerine kurulan Frenet çatıları verilmiş ve 3 boyutlu Minkowski uzayında minimal ve öteleme yüzeyleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Walrave, J., Curves and Surfaces in Minkowski Space, Doktora Tezi, K.U.Leuven Üniversitesi, *Faculteit Der Wetenschappen*, 1995.
- Bonner, W.B., Null Curves in a Minkowski Spacetime, Tensör, 1969.
- O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, *Academic Pres*, New-York, 1983.
- Hacısalıhoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri, Cilt I, *Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları*, 1993.
- Hacısalıhoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri, Cilt II, *Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları*, 2000.
- Woestijne, V.I.D., Minimal Surfaces of the 3-dimentional Minkowski space, *World Scientific Publishing*, Singapore, 1990.
- Liu, H.L., Translation surfaces with dependent Gauss and mean curvature in 3-space J.Northeast Üniversty Tech, 14, 88-93., 1993.
- Verstraelen, L. Walrave, J. and Yaprak, Ş., The minimal translation surfacesin Euclidean space, *Soochow Journal of Mathematics*, 20, 77-82., 1994.
- Liu, H.L., Translation surfaces with constant mean curvature in 3-space *J.Geom*, 64, 141-149., 1999.
- Dede, M., 3-boyutlu Minkowski uzayında Minimal Regle yüzeyler, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 2006.
- Aksoy, Ö., Öteleme Yüzeyleri Üzerine, Ankara Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 2005.

Meeks, W. H. and Perez J., The classical theory of minimal surfaces, 2011,
Preprint, available at
<http://www.ugr.es/local/jperez/papers/papers.html>

Yuan, Y and Liu, H.L., Some Translation Surfaces in 3-Minkowski Space, ***Journal of Mathematical Research Exposition.***, Vol. 31, 1123-1128, 2011.

ÖZ GEÇMİŞ

Veysi ÇİÇEK, 01.05.1986 tarihinde Hizan/Bitlis’de doğdu. İlköğretim ve lise eğitimini Mersin’de tamamladı. 2006 yılında girdiği Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden Ağustos 2010’da mezun oldu ve aynı yıl Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı.