



T.C.  
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

FERHAT SEVİM

Mart 2012



T.C.  
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

FERHAT SEVİM

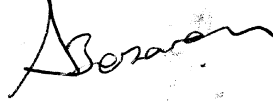
Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN

Mart 2012

Ferhat SEVİM tarafından Yrd. Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN danışmanlığında hazırlanan “Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Başkan : Yrd. Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN  
(Niğde Üni. Fen. Ed. Fak. İstatistik Böl.)



Üye : Yrd. Doç. Mehmet Tarık ATAY  
(Niğde Üni. Fen. Ed. Fak. Matematik Böl.)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU,  
(Selçuk Üni. Fen. Ed. Fak. Matematik Böl.)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından .../.../2012 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun .../.../2012 tarih ve ..... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

.../.../2012

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA

MÜDÜR

## ÖZET

### BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

SEVİM, Ferhat  
Niğde Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN

Mart 2012, 125 sayfa

Bu çalışmada bulanık mantık ve temel kavramları, bulanık diferansiyel denklemlerin genel yapısı, bulanık sayı değerli fonksiyonların Hukuhara diferansiyellenebilirliği ve kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliği tanımlanarak bunların bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerini nasıl etkilediği, adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için nümerik metotlar kullanılarak bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri verilmiştir.

*Anahtar Sözcükler:* Bulanık küme, Bulanık diferansiyel denklemler, Bulanık değerli fonksiyonların Hukuhara ve kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliği, Bulanık diferansiyel denklemler için nümerik metotlar.

## SUMMARY

### NUMERICAL SOLUTIONS OF FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SEVİM, Ferhat

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assis. Prof. Dr. Murat Alper BAŞARAN

March 2012, 125 pages

In this study some notions such as fuzzy logic, fuzzy set theory, the general form of fuzzy differential equations, fuzzy valued functions, Hukuhara differentiability and strongly generalized differentiability are introduced. Thus those notions are employed in the solution of differential equations. Then numerical solutions of fuzzy differential equations are searched based on different methods.

*Keywords:* Fuzzy set, fuzzy differential equations, Hukuhara differentiability and strong Hukuhara differentiability of fuzzy differential equations, numerical methods for fuzzy differential equations.

## ÖNSÖZ

Bu çalışmada bulanık küme ve temel kavramları, bulanık diferansiyel denklemlerin genel yapısı, bulanık sayı değerli fonksiyonların Hukuhara diferansiyellenebilirliği ve kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliği tanımları kullanılarak bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde uygulamaları literatür yardımıyla incelenmiştir. Adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için önerilen nümerik metotlar kullanılarak bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri incelenmiş ve çeşitli uygulamalara bu çalışmada yer verilmiştir. Bu çalışmanın bu konuya ilgi duyan araştırmacılara yardımcı olması dilerim.

## **TEŐEKKÖR**

Bu tezin hazırlanmasında baŐta emeği geçen ve desteklerini eksik etmeyen danıŐmanım Yrd. Doç. Dr. Murat Alper BAŞARAN'a, beni her konuda destekleyen ve bu tez çalışma sürecinde desteklerini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY'a teŐekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iii
SUMMARY .....	iv
ÖNSÖZ .....	v
TEŞEKKÜRLER .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
BÖLÜM I. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II. BULANIK MANTIK TEMEL KAVRAM VE TANIMLARI .....	3
BÖLÜM III. BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLER .....	16
3.1 Bulanık Değerli Fonksiyonların Diferansiyellenebilirliği .....	16
3.1.1 Hukuhara diferansiyellenebilirlik .....	16
3.1.2 Kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik .....	18
3.2 Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Genel Yapısı.....	21
3.2.1 Hukuhara diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemler..	22
3.2.2 Hukuhara diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri.....	24
3.2.3 Kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri.....	32
BÖLÜM IV. BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ .....	39
4.1 Bulanık-Cauchy Problemi.....	39
4.1.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerin yakınsaklığı.....	40
4.2 Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri için Euler Metodu....	41
4.3 Modifiye Edilmiş Euler Metodu .....	43
4.3.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için modifiye edilmiş Euler metodu .....	46
4.4 Modifiye Edilmiş 2-adım Simpson Metodu.....	47
4.4.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu .....	49
4.5 2-adım Metodu .....	51
4.5.1 Bulanık sayıların interpolasyonu .....	52

4.5.2	Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için 2-adım metodu .....	53
4.6	Adams-Bashforth 3-adım Metodu.....	56
4.6.1	Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için Adams-Bashforh 3-adım metodu.....	57
4.7	3. mertebeden Runge-Kutta Metodu.....	60
4.7.1	Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için 3. mertebeden Runge-Kutta metodu .....	64
4.8	He'nin Varyasyonel İterasyon Metodu .....	66
4.8.1	Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için He'nin varyasyonel iterasyon metodu .....	66
<b>BÖLÜM V. UYGULAMALAR .....</b>		<b>68</b>
5.1	Uygulama .....	68
5.1.1	Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım .....	68
5.1.2	Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım .....	69
5.1.3	2-adım metodu ile yaklaşım .....	70
5.1.4	Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım .....	71
5.1.5	3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım.....	72
5.1.6	He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım.....	73
5.2	Uygulama .....	77
5.2.1	Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım .....	77
5.2.2	Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım .....	78
5.2.3	2-adım metodu ile yaklaşım .....	79
5.2.4	Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım .....	80
5.2.5	3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile Yaklaşım.....	80
5.2.6	He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım.....	81
5.3	Uygulama .....	86
5.3.1	Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım .....	87
5.3.2	Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım .....	87
5.3.3	2-adım metodu ile yaklaşım .....	88
5.3.4	Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım .....	89
5.3.5	3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım.....	89
5.3.6	He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım.....	90

5.4	Uygulama .....	95
5.4.1	Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım .....	95
5.4.2	Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım .....	96
5.4.3	2-adım metodu ile yaklaşım .....	97
5.4.4	Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım .....	97
5.4.5	3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım.....	98
5.4.6	He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım .....	99
5.5	Uygulama .....	103
5.5.1	Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım .....	103
5.5.2	Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım .....	104
5.5.3	2-adım metodu ile yaklaşım .....	105
5.5.4	Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım .....	105
5.5.5	3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım.....	106
5.5.6	He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım .....	107
5.6	Uygulama .....	112
5.6.1	Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım .....	112
5.6.2	Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım .....	113
5.6.3	2-adım metodu ile yaklaşım .....	114
5.6.4	Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım .....	115
5.6.5	3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım.....	115
5.6.6	He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım .....	116
BÖLÜM VI. SONUÇLAR .....		121
KAYNAKLAR .....		123

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1	(5.1) Denklemın modifiye edilmiş Euler metodu ile nümerik yaklaşımı.....	74
Çizelge 5.2	(5.1) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metodu ile nümerik yaklaşımı.....	74
Çizelge 5.3	(5.1) Denklemın 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı .....	75
Çizelge 5.4	(5.1) Denklemın Adams-Bashforth 3-adım metodu ile nümerik yaklaşımı.....	75
Çizelge 5.5	(5.1) Denklemın 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı.....	76
Çizelge 5.6	(5.1) Denklemın He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile nümerik yaklaşımı.....	76
Çizelge 5.7	(5.19) Denklemın modifiye edilmiş Euler metodu ile nümerik yaklaşımı.....	83
Çizelge 5.8	(5.19) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metodu ile nümerik yaklaşımı.....	83
Çizelge 5.9	(5.19) Denklemın 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı .....	84
Çizelge 5.10	(5.19) Denklemın Adams-Bashforth 3-adım metodu ile nümerik yaklaşımı.....	84
Çizelge 5.11	(5.19) Denklemın 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı.....	85
Çizelge 5.12	(5.19) Denklemın He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile nümerik yaklaşımı.....	85
Çizelge 5.13	(5.37) Denklemın modifiye edilmiş Euler metodu ile nümerik yaklaşımı.....	92
Çizelge 5.14	(5.37) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metodu ile nümerik yaklaşımı.....	92
Çizelge 5.15	(5.37) Denklemın 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı .....	93
Çizelge 5.16	(5.37) Denklemın Adams-Bashforth 3-adım metodu ile nümerik yaklaşımı.....	93
Çizelge 5.17	(5.37) Denklemın 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı.....	94
Çizelge 5.18	(5.37) Denklemın He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile	

nümerik yaklaşımı.....	94
Çizelge 5.19 (5.54) Denklemın modifiye edilmiş Euler metodu ile nümerik yaklaşımı.....	100
Çizelge 5.20 (5.54) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metodu ile nümerik yaklaşımı.....	100
Çizelge 5.21 (5.54) Denklemın 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı .....	101
Çizelge 5.22 (5.54) Denklemın Adams-Bashforth 3-adım metodu ile nümerik yaklaşımı.....	101
Çizelge 5.23 (5.54) Denklemın 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı.....	102
Çizelge 5.24 (5.54) Denklemın He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile nümerik yaklaşımı.....	102
Çizelge 5.25 (5.70) Denklemın modifiye edilmiş Euler metodu ile nümerik yaklaşımı.....	109
Çizelge 5.26 (5.70) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metodu ile nümerik yaklaşımı.....	109
Çizelge 5.27 (5.70) Denklemın 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı .....	110
Çizelge 5.28 (5.70) Denklemın Adams-Bashforth 3-adım metodu ile nümerik yaklaşımı.....	110
Çizelge 5.29 (5.70) Denklemın 3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile nümerik yaklaşımı.....	111
Çizelge 5.30 (5.70) Denklemın He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile nümerik yaklaşımı.....	111
Çizelge 5.31 (5.86) Denklemın modifiye edilmiş Euler metodu ile nümerik yaklaşımı.....	118
Çizelge 5.32 (5.86) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metodu ile nümerik yaklaşımı.....	118
Çizelge 5.33 (5.86) Denklemın 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı .....	119
Çizelge 5.34 (5.86) Denklemın Adams-Bashforth 3-adım metodu ile nümerik yaklaşımı.....	119
Çizelge 5.35 (5.86) Denklemın 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı.....	120
Çizelge 5.36 (5.86) Denklemın He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile	

nümerik yaklaşımı.....	120
------------------------	-----

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Genç bir kişi tarafından genç kavramı için önerilen üyelik fonksiyonunun grafiği.....	4
Şekil 2.2	Yaşlı bir kişi tarafından genç kavramı için önerilen üyelik fonksiyonunun grafiği.....	5
Şekil 2.3	Bulanık sayısını temsil eden gösterim.....	11
Şekil 2.4	Simetrik üçgensel bulanık sayı.....	11
Şekil 2.5	Simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı.....	12
Şekil 2.6	Yamuk bulanık sayı.....	12
Şekil 3.1	(3.22) Bulanık diferansiyel denklemin $u(t) = (-e^t, 0, e^t)$ çözümünün grafiksel gösterimi.....	25
Şekil 3.2	(3.23) Bulanık diferansiyel denklemin (3.24) çözümünün grafiksel gösterimi.....	28
Şekil 3.3	(3.27) Bulanık diferansiyel denklemin (3.29) çözümünün grafiksel gösterimi.....	28
Şekil 3.4	(3.32) Homojen bulanık diferansiyel denklemin $u(t) = e^t(2, 3, 4)$ çözümünün grafiksel gösterimi.....	29
Şekil 3.5	(3.33) Bulanık diferansiyel denklemin (3.36) $u_1(t)$ çözümünün grafiksel gösterimi.....	31
Şekil 3.6	(3.34) Bulanık diferansiyel denklemin (3.37) $u_2(t)$ çözümünün grafiksel gösterimi.....	32
Şekil 3.7	(3.39) Bulanık diferansiyel denklemin (ii)-diferansiyellenebilen çözümünün grafiksel gösterimi.....	33
Şekil 3.8	(3.40) Bulanık diferansiyel denklemin (i)-diferansiyellenebilen çözümünün grafiksel gösterimi.....	35
Şekil 3.9	(3.40) Bulanık diferansiyel denklemin (ii)-diferansiyellenebilen çözümünün grafiksel gösterimi.....	35
Şekil 3.10	(3.42) Bulanık diferansiyel denklemin (i)-diferansiyellenebilen (3.50) çözümünün grafiksel gösterimi.....	37
Şekil 3.11	(3.42) Bulanık diferansiyel denklemin (ii)-diferansiyellenebilen çözümünün grafiksel gösterimi.....	38

# BÖLÜM I

## GİRİŞ

Bulanık diferansiyel denklemler olasılığa dayalı (epidemi) belirsizlikler altında dinamik sistemlerin modellenmesinde doğal bir yol olup, son yıllarda hızlı bir şekilde gelişmektedir. Bulanık diferansiyel denklemlerin esas dayanağı bulanık küme ve bulanık türev kavramlarıdır. Bulanık küme kavramı Zadeh tarafından önerilmiştir [43]. Bulanık türev kavramı ise Zadeh ve Chang tarafından geliştirilmiştir [34]. Daha sonra ise Dubois ve Prade tarafından genişletme ilkesi kullanılarak geliştirilmiştir [35]. Diğer metotlar ise Goetschel ve Voxman [36], Puri ve Ralescu [9] tarafından tartışılmıştır. Bulanık diferansiyel denklem ve başlangıç değer problemi (Cauchy problemi), Kovela [8,38], Seikkala[10], He ve Yi [39], Kloeden [40] tarafından incelenmiştir. Kandel ve Byatt bulanık dinamik problemlerin analizine bulanık diferansiyel denklem kavramını uygulamışlardır [37]. Bulanık diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik yaklaşımlar literatürde çeşitli çalışmalar ile incelenmiştir [17,18, 20-22, 25, 26,31].

Literatürde yer alan çalışmalar bulanık diferansiyel denklemler klasik olarak birbirlerinin benzerleri gibi görünürler. Bu yüzden birçok örneklerde verilen denklemler, klasik adi diferansiyel denklemlerin bulanıklaştırılması ile oluşmuştur [13]. Gerçek dünya fenomenlerinin modellenmesinde bulanık başlangıç değer problemleri Diamond'un çalışmalarında ([4]'deki friksiyon(friction) denkleminde) görülebilir. Fakat bulanık diferansiyel denklemler her zaman klasik problemlerin bulanıklaştırılmış bir versiyonu değildir. Bu nedenle bazen de bazı gerçek dünya fenomenleri için uygun bir bulanık model oluşturulabilir. [4,13]

Bulanık diferansiyel denklemlerin çalışmalarında birçok yaklaşım vardır. Hukuhara türevine dayalı yaklaşımın [9], bir bulanık diferansiyel denklemin [4] herhangi bir çözümünün artan destek bölgesi genişliğine sahip olması gibi dezavantajı vardır. Bu da belirsizliği arttırmaktadır. Bu hata, bulanık diferansiyel denklemlerin diferansiyel kapsamalar ailesi olarak değerlendirilmesi [9] ile ortadan kalkmıştı. Yalnız, diferansiyel kapsamaların kullanmasında da hata vardı. Bu hata ise bulanık değerli bir fonksiyonun türevinin tanımlanmamış olmasıydı ve bu yüzden bulanık başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümleri oldukça zor elde ediliyordu. [4, 9,13]

Bulanık sayı değerli fonksiyonların kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliği [1]'de çalışılmış ve genelleştirilmiştir. Bu durumda türevi tanımlanmış olacaktır ve

bulanık diferansiyel denklemin çözümü azalan destek bölgesi genişliğine sahip olur. Fakat teklik(çözümün tekliği) ortadan kalkmıştır. Başlangıçta bu teksizlik bir problem olarak görünse de, yani, [6]'de vurgulandığı gibi  $H$  – diferansiyellenebilirlik altında teklik kaybolursa bile, benzer klasik denklemin farklı formları bulanıklaştırıldığında birbirine benzemeyen bulanık diferansiyel denklemler elde edilir. [3]'deki önerilen yaklaşımda, klasik diferansiyel denklemlerin çözümünü Zadeh'in Genişleme İlkesi kullanılmaktadır. Bu metotta da bir dezavantaj bulunmaktadır ki bu da bir bulanık başlangıç değer probleminin çözümünün nümerik olarak hesaplanmasında çeşitli ve birçok bulanık parametrelerin zaman harcayan bir mesele haline gelmesidir.[13]

Bu tez çalışmasında ikinci bölümde bulanık diferansiyel denklemlerin daha iyi anlaşılması açısından birinci bölümde bulanık mantık temel tanım ve kavramları verilmiştir. İkinci bölümde bulanık diferansiyel denklemlerde kullanılacak Hukuhara diferansiyellenebilirlik [9] ve kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik kavramları verilmiştir. Bu bölümde ayrıca bu diferansiyellenebilirlik kavramlarının bulanık diferansiyel denklemler üzerindeki etkileri örneklerle gösterilmiştir. Üçüncü bölümde bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerine nümerik olarak yaklaşacak nümerik metotlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, önceki bölümde verilmiş olan nümerik metotların uygulamalarla bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerindeki etkileri çizelgelerle gösterilmiştir.

## BÖLÜM II

### BULANIK MANTIK TEMEL KAVRAM VE TANIMLARI

Klasik küme kuramında bir  $U$  evrensel kümesinin  $A$  alt kümesi,  $A = \{x : P(x)\}$  ile ifade edilir. Burada  $x$ ,  $P(x)$  önermesini sağlayan elemanları göstermektedir.  $U$  evrensel kümesinin herhangi bir  $A$  alt kümesinin gösterge fonksiyonu ya da karakteristik fonksiyonu  $\chi_A$  ile gösterilir ve

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in A \\ 0 & \text{eğer } x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilir.

$U$  evrensel kümesinin bir  $A$  alt kümesinin gösterge fonksiyonu  $\chi_A$  bir elemanın  $A$  kümesinde olup olmadığını göstermektedir. Gösterge fonksiyonun alabileceği sadece iki değer vardır. Bu değerler 1 ya da 0 değerleridir. Kavram, elemanların aldıkları değerlerin  $[0,1]$  kapalı aralığına genişletilmesi ile genelleştirilebilmektedir. Bu fonksiyona ise üyelik fonksiyonu denilmektedir.

**Tanım 2. 1.** Bulanık küme, üyelik değerleri sürekli olan nesnelerin bir kümesidir ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilmektedir. Üyelik fonksiyonu yardımıyla kümenin her bir elemanına 0 ile 1 arasında değişen üyelik değerleri atanmaktadır.

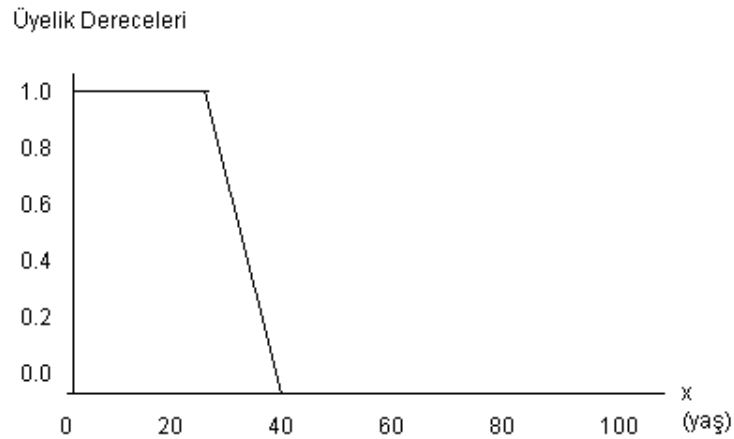
**Tanım 2. 2.** Bir  $U$  evrensel kümesinin  $A$  bulanık alt kümesi bir fonksiyondur ve  $A : U \rightarrow [0,1]$  ile gösterilmektedir .

Tanım (2.2.)'de bulanık küme için verilen gösterimin yerine literatürde benimsenen  $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$  gösterimi daha sonraki tanım ve işlemlerde kullanılacaktır.

**Tanım 2. 3.** Bir bulanık küme  $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$  ile gösterilir,  $\mu_A$  fonksiyonu üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır ve  $\mu_A(u)$  değeri,  $\mu_A$  üyelik fonksiyonun  $u$  değerini aldığı anda karşılık olarak atadığı üyelik derecesini göstermektedir.

Bulanık bir kavram için farklı  $\mu_A$  üyelik fonksiyonları olmasının düşünölebileceğini belirtmişlerdir. Önerilecek üyelik fonksiyonu nesneldir ve ele alınan konuya göre değişiklik gösterebilmektedir. Uygulamalarda üyelik fonksiyonunun seçiminde esnekliğin olması faydalı bir özellik olarak belirtilmektedir. Örneğin “genç” kavramını ele alalım, herkes bu kavram için farklı yaş aralıklarını karşılık olarak ifade edebilmektedir. Bu öznel ifadeyi üyelik fonksiyonu biçiminde genç bir kişiden yazması istenildiğinde, “genç” kavramına ilişkin üyelik fonksiyonu ve grafiği

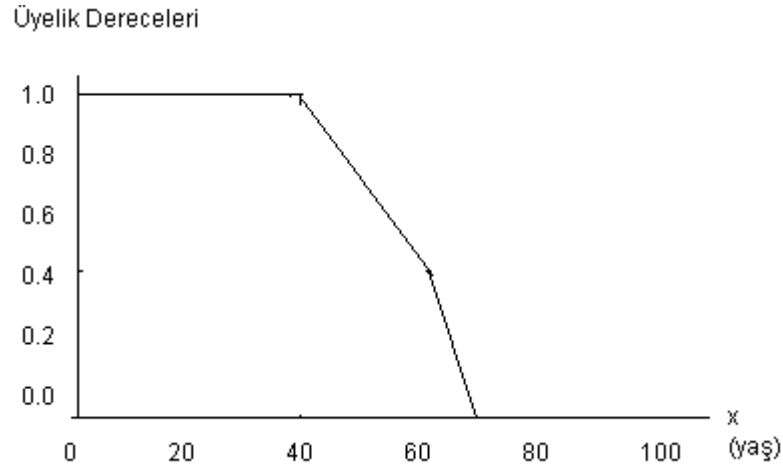
$$\mu_A^G(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \leq 25 \\ \frac{40-x}{15} & \text{eğer } 25 < x \leq 40 \\ 0 & \text{eğer } 40 < x \end{cases} \quad (2.2)$$



Şekil 2.1 Genç bir kişi tarafından genç kavramı için önerilen üyelik fonksiyonun grafiği şeklinde ifade edilir.

Aynı kavram için yaşlı bir kişiden üyelik fonksiyonu yazması istenildiğinde üyelik fonksiyonu ve grafiği

$$\mu_A^Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x < 40 \\ \frac{80-x}{40} & \text{eğer } 25 \leq x < 60 \\ \frac{70-x}{20} & \text{eğer } 60 < x \leq 70 \\ 0 & \text{eğer } 70 < x \end{cases} \quad (2.3)$$



Şekil 2.2 Yaşlı bir kişi tarafından genç kavramı için önerilen üyelik fonksiyonun grafiği

şeklinde ifade edilir.

Öznel bir konu olan üyelik fonksiyonun belirlenmesinin kişiden kişiye farklılık gösterdiği örnek üzerinde görülmektedir fakat herhangi bir bulanık kavram için her kesin hem fikir olduğu ve o kavramı temsil ettiğini düşündüğü bir üyelik fonksiyonu belirlenebilir. Üyelik fonksiyonu, bulanık küme, **possibility** dağılımı, **possibility** kuramı gibi kavramlar birbirleri ile iç içe bir durum sergilemektedirler. Bunların arasındaki ilişki hem sözel hemde matematiksel açıdan Zadeh tarafından açıklanmıştır. Bu kavramlar ile ilgili tanımlara geçmeden önce, Zadeh tarafından sözel olarak açıklanan bu kavramlara değinilecektir. Zadeh **possibility** kuramının bulanık küme kuramı ile ilişkisini **possibility** dağılımı kavramını tanımlayarak açıklamıştır. **Possibility** dağılımı bir değişkene atanan değerlerin üzerinde esnek bir kısıt gibi davranan bulanık kısıt yardımıyla gerçekleşmektedir. Daha açık bir şekilde ifade edilirse,  $F$ 'in  $U = \{u\}$  evrensel kümesinin bulanık bir alt kümesi olduğu varsayalım. Bu bulanık alt kümenin üyelik fonksiyonu  $\mu_F$  ile gösterilsin. Daha sonra, “ $X$  eşittir  $F$ ” biçiminde ifade edilen bir önerme  $\Pi_X$  **possibility** dağılımını oluşturmaktadır. Burada,  $X$  değişkeninin  $U$  evrensel kümesinden aldığı  $u$  değerinin **possibility** değeri  $\Pi_X$  **possibility** dağılımına eşitlenmektedir ve  $\Pi_X$ 'in aldığı değer  $\mu_F(u)$  olmaktadır. Bu duruma  $u$ 'nun  $F$  ile uyumu (compatibility) denilmektedir. Zadeh'in bu açıklaması ile  $X$  değişkeni bulanık değişken olarak ifade edilmektedir ve kendi **possibility** dağılımı ile ilişkilidir.

Yukarıda ifade edilen kavramlar arası ilişki Zadeh tarafından matematiksel biçimde verilmiştir. Bunun ile ilgili tanım aşağıda verilmektedir.

**Tanım 2.4.**  $F$ , bir  $U$  evrensel kümesinin bulanık bir alt kümesi olarak  $\mu_F(u)$  üyelik fonksiyonu ile karakterize edilmektedir.  $\mu_F(u)$  üyelik derecesi,  $u$ 'nun  $F$  bulanık kavramı ile uyumu biçiminde yorumlanabilmektedir.  $X$  değişkenin  $U$  evrensel kümesinden değerler aldığı varsayalım.  $F$ ,  $X$  ile ilintili bir şekilde bulanık bir kısıt  $R(X)$  olarak davrandığı varsayalım. “ $X$  eşittir  $F$ ” biçiminde ifade edilen bir önerme  $R(X) = F$  biçiminde yazılabilmektedir. Buradan,  $X$ 'in  $R(X)$ 'e eşit olduğu varsayımı altında  $\Pi_X$  possibility dağılımı ile  $R(X) = F$  eşitliği ilişkilendirilmektedir. Buradan,  $X$  ile ilişkili possibility dağılımı sayısal açıdan  $F$ 'in üyelik fonksiyonuna eşitlenmektedir. Sembolik olarak,  $\Pi_X \triangleq \mu_F$  ile gösterilmektedir.

“ $X$  eşittir  $F$ ” biçiminde ifade edilen bir önermenin “ $X$  küçük tam sayıdır” önermesi olduğu varsayalım ve bu ifade için üyelik fonksiyonu ya da possibility dağılımı  $\Pi_X = 1/1 + 2/1 + 0.8/3 + 0.6/4 + 0.4/5 + 0.2/6$  biçiminde tanımlansın. Bu ifadede örneğin,  $0.8/3$  ifadesi ile  $X$  değişkeninin 3 değeri için üyelik değerinin 0.8 olduğunu gösterilmektedir.

**Tanım 2.5**  $\mathbb{R}$ , reel sayılar kümesini gösterdiği varsayalım.  $F(\mathbb{R})$  kümesinin elemanları  $\mathbb{R}$  kümesinin bulanık alt kümeleri olsun. Bu elemanlara bulanık miktarlar (fuzzy quantities) denilmektedir. Bulanık miktarlar ile tüm aritmetik işlemler yapılabilmektedir. [1] Bunun ile ilişkili teorem aşağıda verilmektedir.

**Teorem 2.1**  $A, B, C$  bulanık miktarlar olduğu varsayalım. Bulanık miktarlarla ilgili ifadeler

1.  $0 + A = A$
2.  $0.A = 0$
3.  $1.A = A$
4.  $A + B = B + A$
5.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
6.  $A.B = B.A$
7.  $(A.B).C = A.(B.C)$
8.  $r.(A + B) = r.A + r.B$
9.  $A.(B + C) \leq A.B + A.C$
10.  $(-r)A = -(r.A)$
11.  $-(-A) = A$
12.  $(-A).B = -(A.B)$
13.  $\frac{A}{1} = A$
14.  $\frac{A}{r} = \frac{1}{r}A$
15.  $\frac{A}{B} = A.\frac{1}{B}$
16.  $A + (-B) = A - B$

biçiminde yazılabilir .

Bulanık miktarların özel bir sınıfı olan bulanık sayılar (fuzzy number) ile ilgili açıklama aşağıda verilmektedir.

**Tanım 2.6.** Bulanık sayı

1. En az bir  $x$  değeri için,  $A(x) = 1$  değeri almalıdır. Bu özellik normallik özelliği olarak adlandırılır.
2.  $A$  kümesinin desteği  $\{x : A(x) > 0\}$  sınırlıdır.
3.  $A$ 'nın  $h$  kesitleri kapalı aralıklardır.

şartlarını sağlayan bulanık bir miktardır .

Tanım (2.6)'dan

1. Reel sayılar bulanık sayılardır.
2. Bir bulanık sayı içbükey (konveks) bulanık miktardır.
3. Bir bulanık sayı yukardan yarı süreklidir.
4. Eğer  $A$ ,  $A(x) = 1$  ile bir bulanık sayı ise,  $A$   $[-\infty, x]$  aralığında azalmayan ve  $[x, \infty]$  aralığında artmayan bir yapıya sahiptir.

sonuçları kolaylıkla çıkarılabilir .

**Tanım 2.7.** Bulanık bir aralık (interval)

1.  $A$  normaldir,  $A(x) = 1, x \in [a, b]$
2.  $A$  kümesinin desteği  $\{x : A(x) > 0\}$  sınırlıdır.
3.  $A$  nın  $h$  kesitleri kapalı aralıklardır.

şartlarını sağlayan bulanık bir miktardır .

Tanım (2.6)'da sadece bir nokta üyelik değerini 1'e eşitleirken, Tanım (2.7)'de bu durum bir kapalı aralık tarafından sağlanmaktadır. Birinci durum üçgensel bulanık sayılara karşılık gelirken, ikinci durum yamuk bulanık sayısına karşılık gelmektedir.

**Tanım 2.8.**  $A$  bulanık kümesinin yüksekliği bire eşitse normal olarak adlandırılır ve

$$\sup_x \mu_A(x) = 1 \quad (2.4)$$

eşitliği ile gösterilir.

Eğer bu eşitlik bulanık kümenin tanım kümesinde yer alan herhangi bir eleman tarafından sağlanamıyorsa, bu durumda  $A$  bulanık kümesi normal değildir denilmektedir. Normal olmayan bulanık kümeler normalleştirme işlemine tabi tutulmaktadır. Normalleştirme işlemi ilgili kümedeki en yüksek değerli elemandan başlayarak diğer bütün elemanların bu elemana bölünmesi suretiyle gerçekleştirilmektedir.

**Tanım 2.9.**  $A$  bulanık kümesinin desteği (support) o kümede yer alan ve üyelik değerleri  $\mu_A(x) > 0$  koşulunu sağlayan elemanların bir kümesi biçimde ifade edilir

.

**Tanım 2.10.** Bulanık  $A$  kümesinin  $h$  kesiti kapalı bir aralık olup üyelik değerleri  $A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq h\}$  koşulunu sağlayan bir küme olacak biçimde ifade edilir.

**Tanım 2.11.** Eğer  $\{x : f(x) \geq h\}$  kapalı ise, fonksiyon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  üstten yarı süreklidir denilmektedir.

**Tanım 2.12.**  $A$  bulanık kümesinin konveks olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart  $\Gamma_h$  kümesi ile tanımlanan kümelerin tüm  $h$ 'ler için  $(0,1]$  aralığında konveks olduğunun gösterilmesi ile sağlanır .

**Tanım 2.13**  $A$  kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \text{Min}[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \quad (2.5)$$

eşitsizliği ile verilmektedir.

Zadeh [4] tarafından tanımlanan genişletme prensibi (extension principle) bulanık küme kuramının en temel fikirlerinden bir tanesi olarak adlandırılır. Bulanık olmayan matematiksel kavramları bulanık miktarlar ile ele alabilmek için genel bir yöntem olarak önerilmiştir.

**Tanım 2.14.** (Genişletme prensibi)  $r$  tane evrensel kümenin kartezyen çarpımı  $X = X_1 \times \dots \times X_r$  biçiminde olduğu varsayalım ve  $r$  tane bulanık  $A_1, \dots, A_r$  kümeleri sırasıyla evrensel kümelerin elemanları olduğu varsayalım.  $r$  adet bulanık kümenin kartezyen çarpımı

$$A_1 \times \dots \times A_r = \int_{X_1 \times \dots \times X_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)) / (x_1, \dots, x_r)$$

biçiminde tanımlanır.

$X_1 \times \dots \times X_r$  kartezyen çarpım kümesinden  $Y$  evrensel kümesineine  $f$  fonksiyonu  $y = f(x_1, \dots, x_r)$  olacak şekilde tanımlandığı varsayalım. Genelleştirme prensibi  $r$  tane bulanık  $A_i$  kümesinden  $Y$  üzerindeki  $B$  bulanık kümesine  $f$  ile ulaşmayı sağlamaktadır. Bulanık  $B$  kümesi için üyelik fonksiyonu

$$\mu_B(y) = \sup_{y=f(x_1, \dots, x_r)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)) \quad (2.6)$$

biçiminde verilmektedir .

Zadeh [4] genelde yukarıda verilen ifadeyi

$$B = f(A_1, \dots, A_r) = \int_{x_1 \times \dots \times x_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)) / f(x_1, \dots, x_r)$$

eşitlikliği ile ifade etmiştir.

Kümeler üzerinde tanımlanmış olan birleşme, kesişme, kapsama, ve diğer bütün işlemler bulanık kümeler için rahatlıkla genişletilebilmektedir.

**Tanım 2.16.**  $\mu_A, \mu_B$  bulanık kümeler olduğu varsayalım. Verilen bulanık kümeler için birleşme, kesişme ve tümleyeni

$$\begin{aligned} (\mu_A \vee \mu_B)_{(x)} &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\ (\mu_A \wedge \mu_B)_{(x)} &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \\ \mu'_A(x) &= 1 - \mu_A(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ile ifade edilir.

Bulanık sayılar üzerinde dört aritmetik işlem gerçekleştirilebilmektedir.

**Tanım 2.17.**  $A$  ve  $B$  bulanık sayılar olduğu varsayalım. Bu sayılar ile toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri gerçekleştirilebilmektedir. Bu işlemler

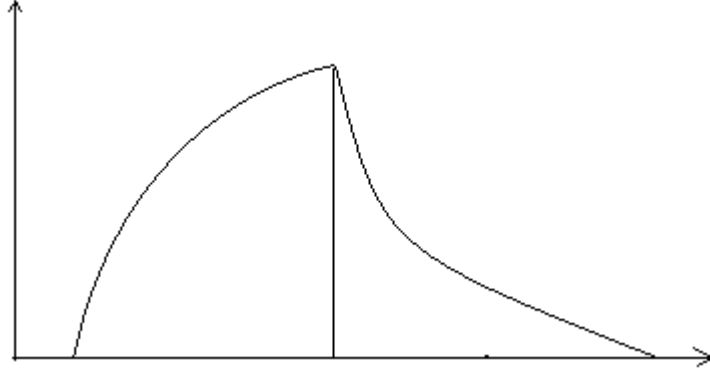
$$\begin{aligned} A + B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) / (x + y) \\ A - B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) / (x - y) \\ A \times B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) / (x \times y) \\ A \div B &= \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) / (x \div y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ile ifade edilmektedir.

Bir bulanık sayı için pozitif, negatif ya da sıfır bulanık sayı tanımı yapılabilmektedir.

**Tanım 2.18.** Bir  $A$  bulanık sayısının destek bölgesinde yer alan alt ve üst sınır değerleri sıfırdan büyükse pozitif, sıfırdan küçükse negatif ve alt sınır değeri sıfırdan küçük ve üst sınır değeri sıfırdan büyükse sıfır bulanık sayısı olarak adlandırılır .

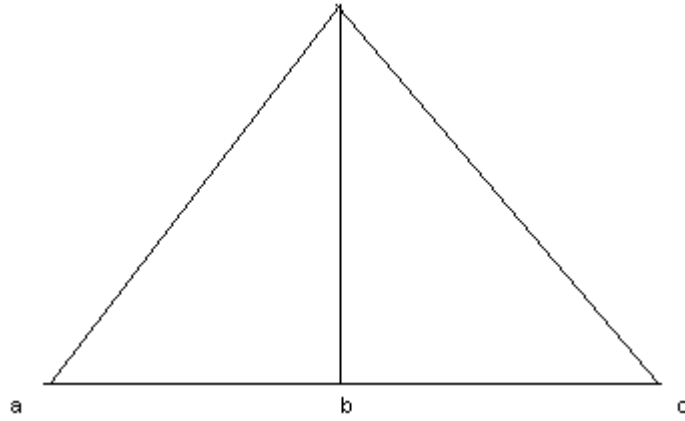
Dubois ve Prade [6] bulanık sayılar için uygulama açısından kolay ve uygulanabilir yeni bulanık sayılar önermişlerdir. Bir bulanık sayıyı genel olarak ifade eden gösterim



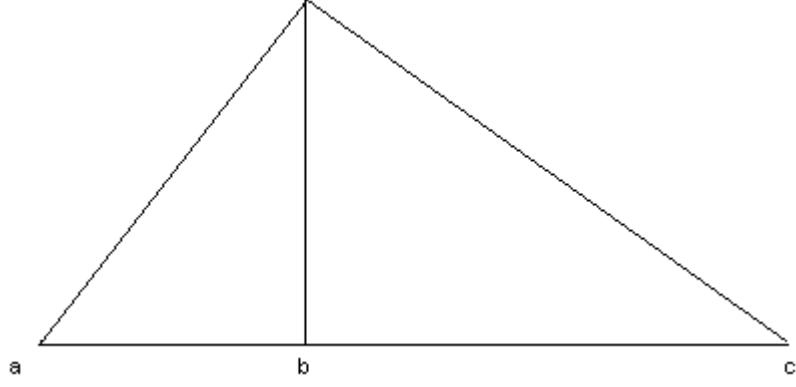
Şekil 2.3 Bulanık sayıyı temsil eden gösterim

ile verilmektedir.

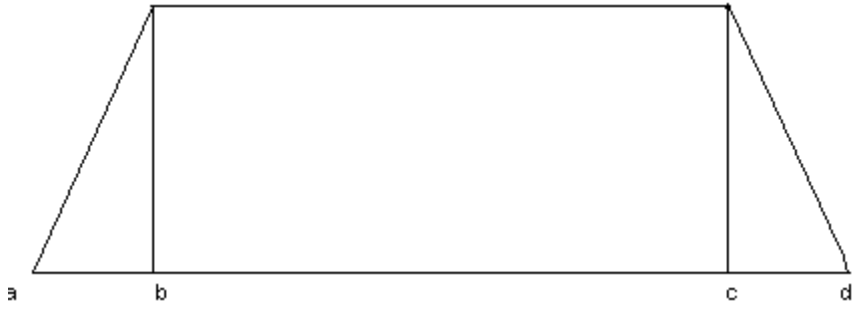
Dubois ve Prade [6] bu genel durumdan daha özel olan bulanık sayıları, bir başka deyişle, simetrik üçgensel bulanık sayı, simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı ve yamuk sayılarını önermişlerdir. Şekil 2.4, Şekil 2.5 ve Şekil 2.6 bu sayıların görsel biçimlerini vermektedir.



Şekil 2.4 Simetrik üçgensel bulanık sayı



Şekil 2.5 Simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı



Şekil 2.6 Yamuk bulanık sayı

Yukarda verilen bulanık sayılar parametrik olarak iki farklı yolla ifade edilebilmektedir.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sırasıyla simetrik üçgensel bulanık sayı, simetrik olmayan üçgensel bulanık sayı ve yamuk sayıları olduğu varsayılınsın. Birinci yöntem bulanık sayıları uç noktaları

$$A = (a, b, c)$$

$$B = (a, b, c)$$

$$C = (a, b, c, d)$$

(2.9)

ile göstermektedir.

İkinci parametrik yazma biçimi ise bulanık sayıların merkez değerleri, sola yayılım değerleri ve sağa yayılım değerlerini içeren bir yazım türüne dayanmaktadır. Yine aynı bulanık sayılar

$$\begin{aligned}
A &= (b, m) \\
B &= (b, m, n) \\
C &= (k, b, c, l)
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

ile ifade edilebilmektedirler.

İlk bulanık sayıda  $b$  merkez değerini,  $m$  ise sola ve sağa yayılım değerini göstermektedir. Bu sayı simetrik üçgesel bulanık sayı olduğu için sağa ve sola yayılım değerleri eşittir. İkinci bulanık sayıda  $b$  merkez değerini,  $m$  sola yayılım değeri,  $n$  sağa yayılım değeri göstermektedir. Üçüncü bulanık sayıda  $[b, c]$  aralığı merkez değerini,  $k$  sola yayılım değeri,  $l$  ise sağa yayılım değerini göstermektedir.

Dubois ve Prade özel bir tür olan L-R tipli bulanık sayıyı önermişlerdir. Bu sayı

$$\mu_M = \begin{cases} L((m-x)/\alpha) & x \leq m, \alpha \geq 0, \\ R((x-m)/\beta) & x \geq m, \beta \geq 0, \end{cases}
\tag{2.11}$$

ile ifade edilmektedir .

L sol taraf, R ise sağ tarafta yer alan ifade için kullanılır,  $M$  bulanık sayısının ortalama değeri  $m$  dir.  $\alpha, \beta$  ise sırasıyla sol ve sağ yayılım değerlerini göstermektedir. Yayılımlar sıfır olduğu zaman bulanık sayı  $M$  gerçel sayıya dönüşmektedir. Yayılımlar artarsa  $M$  bulanık sayısı daha fazla bulanık olmaktadır. Sembolik olarak  $M$  bulanık sayısı

$$M = (m, \alpha, \beta)_{LR}
\tag{2.12}$$

ile ifade edilir.  $M$  bulanık sayısı yaklaşık olarak  $m$  değerine sahip tam olarak bilinemeyen bir miktarı tanımlamada kullanılmaktadır.

**Tanım 2.19.** Bir L-R tipli bulanık sayısı

1.  $L(x) = L(-x)$
2.  $L(0) = 1$
3.  $L$   $[0, +\infty)$  aralığında azalmayan bir fonksiyondur.

koşullarını sağlayan bulanık sayıdır .

L-R bulanık sayıları aritmetik işlemler yapılabilmektedir. Toplama işleminin nasıl yapılacağı açık şekilde gösterilecektir, diğer işlemler için formülasyonlar verilecektir.  $M$  ve  $N$  gibi iki bulanık sayının artan fonksiyon gösteren kısımları ele alındığı varsayalım.  $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$  ve  $N = (n, \gamma, \delta)$  iki bulanık sayı olduğu varsayalım.  $x, y$  iki eşsiz gerçel sayı olarak  $L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) = w = L\left(\frac{n-y}{\gamma}\right)$  eşitliğini sağlamaktadır.

Burada  $w, [0,1]$  kapalı aralığında sabit olduğu varsayalım.  $x, y$  değerlerinin eşitlikleri

$$\begin{aligned} x &= m - \alpha L^{-1}(w) \\ y &= n - \gamma L^{-1}(w) \end{aligned} \quad (2.13)$$

biçiminde elde edilir. Bu iki değer toplandığında

$$z = x + y = m + n - (\alpha + \gamma)L^{-1}(w) \quad (2.14)$$

değeri elde edilir.  $L\left(\frac{m+n-z}{\alpha+\gamma}\right) = w$  değeri toplamın üyelik değeri olmaktadır.

Aynı yaklaşımla sağ taraf için de hesaplamalar yapılabilir ve sonuç

$$R\left(\frac{(z-(m+n))}{\beta+\delta}\right) = w \quad (2.15)$$

biçiminde elde edilir. Çarpma işlemi için benzer yol izlenerek

$$z = x.y = m.n - (m\gamma + n\alpha)L^{-1}(w) + \alpha\gamma L^{-1}(w) \quad (2.16)$$

değeri elde edilir. Eşitlik (2.16)'den görüleceği gibi, elde edilen yeni bulanık sayı L-R tipli sayı değildir. İki bulanık sayının toplamı ve çıkarması sonucu elde edilen bulanık sayı kapalı biçimde elde edilmesine rağmen, bu durum çarpma ve bölme işlemleri için geçerli değildir. Bütün aritmetik işlemler için formülasyonlar

$$\begin{aligned}
(m, \alpha, \beta)_{LR} + (n, \gamma, \delta)_{LR} &= (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR} \\
(m, \alpha, \beta)_{LR} - (n, \gamma, \delta)_{LR} &= (m-n, \alpha+\gamma, \beta+\delta)_{LR} \\
(m, \alpha, \beta)_{LR} \times (n, \gamma, \delta)_{LR} &\approx (mn, n\alpha+m\gamma, n\beta+m\delta)_{LR}, M > 0, N > 0 \\
(m, \alpha, \beta)_{LR} \times (n, \gamma, \delta)_{LR} &\approx (mn, n\alpha-m\delta, n\beta-m\gamma)_{LR}, M < 0, N > 0 \\
(m, \alpha, \beta)_{LR} \times (n, \gamma, \delta)_{LR} &\approx (mn, -n\beta-m\delta, -n\beta-m\gamma)_{LR}, M < 0, N < 0 \\
(m, \alpha, \beta)_{LR} \div (n, \gamma, \delta)_{LR} &\approx (m/n, \frac{m\delta+n\alpha}{n^2}, \frac{m\gamma+\beta n}{n^2})_{LR}, M > 0, N > 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

biçiminde verilmektedir.

Bölme işleminde bulanık sayıların negatif olması durumunda yapılacak hesaplamalar çarpma işleminde yapılanlar ile benzerdir. Son olarak bir bulanık sayı ile bir skalerin çarpımının sonucu ve bulanık sayının tersi için formülasyon

$$\begin{aligned}
\forall \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \times (m, \alpha, \beta)_{LR} &= (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR} \\
\forall \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \times (m, \alpha, \beta)_{LR} &= (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{LR} \\
\mu_{M^{-1}}(x) &= L\left(\frac{1-mx}{\alpha x}\right), x \geq \frac{1}{m}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ile verilmektedir.

## BÖLÜM III

### BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERE GİRİŞ

#### 3.1 Bulanık Değerli Fonksiyonların Diferansiyellenebilirliği

Dinamik sistemlerin belirsizlik modellenmesinde birinci yaklaşım olarak Hukuhara türevi ya da genelleştirilmesi olan Seikkala türevi kullanılmaktadır. Başlıca bulanık diferansiyel denklemlerin varlık ve teklikleri [8], [5], [10], [12], ve [11]'de çalışılmıştır. Ayrıca dinamik sistemlerin belirsizlik modellenmesinde önemli bir yeri olan Hukuhara ya da Seikkala türevi ise [9]'de geliştirilmiştir. Hukuhara türevine bağlı yaklaşım, herhangi bir diferansiyellenebilir fonksiyonun artan destek bölgesi genişliği için dezavantaj sağlamaktadır. Bu sorunun çözülmesi için ise bulanık değerli fonksiyonların kuvvetli(strongly) genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliği [1]'de geliştirilmiş ve çalışılmıştır. Bu durumda türevin varlığı ve bir diferansiyellenebilir fonksiyonun azalan destek bölgesi genişliğine sahip olması sağlanmıştır.[13]

#### 3.1.2 Hukuhara diferansiyellenebilirliği

**Tanım 3.1.1**  $x, y \in \mathbb{R}_F$  olsun.  $z \in \mathbb{R}_F$  vardır öyle ki  $x = y + z$  'dir. O halde  $z$ ;  $x$  ve  $y$  'nin  $H$  – farkı olarak adlandırılır ve  $x \ominus_H y$  ile gösterilir.[13]

**Tanım 3.1.2** Yeteri derecede küçük  $h > 0$  için  $f(x+h) \ominus_H f(x)$  ve  $f(x) \ominus_H f(x-h)$   $H$  – farkları vardır ve öyle bir  $f'(x) \in \mathbb{R}_F$  vardır öyle ki;

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) \ominus f(x)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x) \ominus f(x-h)}{h} = f'(x) \quad (3.1)$$

O halde  $f'(x)$  bulanık sayısına  $f$  'in  $x$  noktasında Hukuhara türevi denir.[9,13]

**Tanım 3.1.3** Bulanık değerli bir fonksiyonun Seikkala türevi

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F; [f'(x)]^r = \left[ (f'_-(x))^r, (f'_+(x))^r \right], \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. Aynı zamanda bu eşitlik  $f'(x) \in \mathbb{R}_F$  'nın bulanık sayı olarak tanımlanmasını sağlar [10,11,13].

Aşağıdaki sonuçlar, “olasılığa dayalı çevrilmezlik (probablistic irreversibility)” ‘de Seikkala-Bobylev teoremi olarak bilinir.

**Teorem 3.1.1** Seikkala diferansiyellenebilir bir fonksiyon; azalmayan destek bölgesi genişliğine sahiptir [13].

**Lemma 3.1.1**  $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$  üçgen sayı değerli bir fonksiyon ise  $u$  Seikkala diferansiyellenebilir  $\Leftrightarrow u' = (x', y', z')$  üçgensel bir bulanık sayıdır [13].

**Uyarı 3.1.1**  $c \in \mathbb{R}_F$  ve  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$   $x_0 \in (a, b)$  'de diferansiyellenebilir olsun.

$\forall x \in (a, b)$  için  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ ;  $f(x) = c \cdot g(x)$  olsun. Öncelikle  $g'(x_0) > 0$  olsun. O

halde;  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$  olmak üzere yeterince küçük  $h > 0$  için

$g(x_0 + h) - g(x_0) = w(x_0, h) > 0$  olur.  $c$  ile çarpılarak

$c \cdot g(x_0 + h) = c \cdot g(x_0) + c \cdot w(x_0, h) > 0$  olur. Yani  $f(x_0 + h) - f(x_0)$   $H$  - farkı vardır.

Benzer şekilde  $g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0) - g(x_0 - h)}{h}$  olacak şekilde yukarıdaki gibi

$f(x_0) - f(x_0 - h)$   $H$  - farkı vardır. Ayrıca bu basit sonuçlarla  $f'(x_0) = c \cdot g'(x_0)$

olduğu da gösterilmiş olunur.

Şimdi  $g'(x_0) < 0$  olduğunu varsayarsak,  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  ve  $f(x_0) - f(x_0 - h)$   $H$  -

farklarını ve  $f'(x_0)$  türevinin varlığını yukarıdaki izlenen yolu takip ederek kolayca

görülebilir. Sonuç olarak, Tanım 3.1.3'den  $f'(x_0)$  var olacağını her zaman çıkarılamaz

[13].

**Örnek 3.1.1**  $f(t) = (-e^t, 0, e^t)$  olsun. Fakat  $f'(t) = (-e^t, 0, e^t)$  olduğundan hem

$f'(t) = f(t)$  hem de  $f'(t) = -f(t)$  çelişkisi vardır.

$f(t) = (1, 2, 3)e^{-t}$  olsun. Varsayalım ki  $f(t)$  diferansiyellenebilir olsun. O halde Lemma 3.1.1'e göre bulanık sayı olmayan  $f'(t) = (-e^{-t}, -2e^{-t}, -3e^{-t})$ 'u elde edilmiş olunur.

Bu örnekten de görüleceği gibi her Seikkala diferansiyellenebilen bulanık değerli fonksiyonun Hukuhara türevi olmayabilir ama her Hukuhara Türevlenebilir fonksiyonun Seikkala türevi vardır [13].

### 3.1.2 Kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik

Kuvvetli(strongly) genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliğin tanımı [1]'de geliştirilmiştir.

**Tanım 3.1.4:**  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$  ve  $x_0 \in (a, b)$  olsun.  $f'(x_0) \in \mathbb{R}_F$  elemanı varsa  $f$ ,  $x_0$ 'da kuvvetli(strongly) genelleştirilmiş diferansiyellenebilirdir öyle ki;

i) Yeterince küçük  $h > 0$  için;  $\exists f(x_0 + h) \Theta_H f(x_0)$ ,  $\exists f(x_0) \Theta_H f(x_0 - h)$  ve limitler ( $D$  metriğinde)

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \Theta f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \Theta f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) \quad (3.3)$$

ya da;

ii) Yeterince küçük  $h > 0$  için;  $\exists f(x_0) \Theta_H f(x_0 + h)$ ,  $\exists f(x_0 - h) \Theta_H f(x_0)$  ve limitler

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \Theta f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \Theta f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0) \quad (3.4)$$

ya da;

iii) Yeterince küçük  $h > 0$  için  $\exists f(x_0 + h) \Theta_H f(x_0)$ ,  $\exists f(x_0 - h) \Theta_H f(x_0)$  ve limitler

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \Theta f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \Theta f(x_0)}{(-h)} = f'(x_0) \quad (3.5)$$

ya da;

iv) Yeterince küçük  $h > 0$  için  $\exists f(x_0) \Theta_H f(x_0 + h)$  ,  $\exists f(x_0) \Theta_H f(x_0 - h)$  ve limitler

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \Theta f(x_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \Theta f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) \quad (3.6)$$

dır. Bu tanımdaki (i). durum, [9]'de geliştirilen  $H$  – türevi (Hukuhara türevi)'ne uygun tanımdır.[13]

**Uyarı 3.1.2** Bu tanım çelişkili değildir; yani,  $f$  ve  $x_0$  için en azından iki (i) ve (iv) durumları aynı anda sağlanır. O halde bir çelişki elde edilmez. Gerçekten, örneğin (i) ve (iii) durumları sağlansın. O halde,  $A, B, C \in \mathbb{R}_F$  olmak üzere  $f(x_0 + h) = f(x_0) + A$  ,  $f(x_0) = f(x_0 - h) + B$  ve  $f(x_0 - h) = f(x_0) + C$  olursa;  $f(x_0) = f(x_0) + [B + C]$  olur, yani,  $f'(x_0) = \tilde{0}$  olduğu durumda  $B = C = \tilde{0}$  eşitliğini ya da  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$  olduğu durumda  $B, C \in \mathbb{R}$  için  $B = -C$  eşitliğini sağlayan  $B + C = \tilde{0}$  eşitliğini elde etmiş oluruz. Fakat bütün bu durumlarda, önceki tanımlardaki bütün limitlerin eşit olduğunu kolayca görülebilir. (i) ve (iv)'den elde edilen diğer kombinasyonların da aynı şekilde benzer sonuçlar vereceği açıktır.[13]

**Lemma 3.1.2**  $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$  üçgen sayı değerli fonksiyon olsun. O halde;  $u$  , (i)-diferansiyellenebilir (Hukuhara diferansiyellenebilir) ise  $u' = (x', y', z')$  olur.

$u$  , (ii)-diferansiyellenebilir (Hukuhara diferansiyellenebilir) ise  $u' = (z', y', x')$  olur.[13]

**Örnek 3.1.2**  $f(t) = (1, 2, 3)e^{-t}$  olsun.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \searrow 0} \frac{f(t) \Theta_H f(t+h)}{-h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{(e^{-t}, 2e^{-t}, 3e^{-t}) \Theta_H (e^{-t-h}, 2e^{-t-h}, 3e^{-t-h})}{-h} \\
&= \lim_{h \searrow 0} \frac{(e^{-t} - e^{-t-h}, 2e^{-t} - 2e^{-t-h}, 3e^{-t} - 3e^{-t-h})}{-h} \\
&= \lim_{h \searrow 0} \left( \frac{3e^{-t}(1-e^{-h})}{-h}, \frac{2e^{-t}(1-e^{-h})}{-h}, \frac{e^{-t}(1-e^{-h})}{-h} \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Bu eşitliğin sonundaki limitte 0/0 belirsizliği olduğu için burada L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{h \searrow 0} \left( \frac{3e^{-t}e^{-h}}{-1}, \frac{2e^{-t}e^{-h}}{-1}, \frac{e^{-t}e^{-h}}{-1} \right) = (-3e^{-t}, -2e^{-t}, -e^{-t}) = e^{-t}(-3, -2, -1) \tag{3.8}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\lim_{h \searrow 0} \frac{f(t-h) \Theta_H f(t)}{-h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{(e^{-t+h}, 2e^{-t+h}, 3e^{-t+h}) \Theta_H (e^{-t}, 2e^{-t}, 3e^{-t})}{-h} \\
&= \lim_{h \searrow 0} \frac{(e^{-t+h} - e^{-t}, 2e^{-t+h} - 2e^{-t}, 3e^{-t+h} - 3e^{-t})}{-h} \\
&= \lim_{h \searrow 0} \left( \frac{3e^{-t}(e^h - 1)}{-h}, \frac{2e^{-t}(e^h - 1)}{-h}, \frac{e^{-t}(e^h - 1)}{-h} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

aynı şekilde son limitte 0/0 belirsizliği olduğu için burada L'Hospital kuralı uygulanırsa;

$$\lim_{h \searrow 0} \left( \frac{3e^{-t}e^h}{-1}, \frac{2e^{-t}e^h}{-1}, \frac{e^{-t}e^h}{-1} \right) = (-3e^{-t}, -2e^{-t}, -e^{-t}) = e^{-t}(-3, -2, -1) \tag{3.10}$$

olur. Diğer taraftan;  $f'(t) = e^{-t}(1, 2, 3) = e^{-t}(-3, -2, -1)$  olur.

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(t) \ominus_H f(t-h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t-h) \ominus_H f(t)}{-h} = f'(t) \quad (3.11)$$

olduğundan  $f(t)$ ; (ii)-diferansiyellenebilirdir ve  $x(t) = e^{-t}$ ,  $y(t) = 2e^{-t}$  ve  $z(t) = 3e^{-t}$  olarak ifade edilirse,  $f'(t) = (z', y', x')$  olur [13].

### 3.2 Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Genel Yapısı

Bulanık diferansiyel denklemler olasılığa dayalı(epidemi) belirsizlikler altında dinamik sistemlerin modellenmesinde doğal bir yoldur. Literatürde çalışılmış çoğu bulanık diferansiyel denklemler klasik olarak birbirlerinin benzerleri gibi görünürler. Bu yüzden birçok örneklerde verilen denklemler, klasik adi diferansiyel denklemlerin bulanıklaştırılması ile oluşmuştur.

Gerçek dünya fenomenlerinin modellenmesinde bulanık başlangıç değer problemleri Diamond'un çalışmalarında ([4]'deki friksiyon(friction) denkleminde) görülebilir. Fakat FDEs her zaman klasik problemlerin bulanıklaştırılmış bir versiyonu değildir. Bu nedenle bazen de bazı gerçek dünya fenomenleri için uygun bir bulanık model oluşturulabilir.

Bulanık diferansiyel denklemler çalışmalarında birçok yaklaşım vardır. Hukuhara türevine dayalı yaklaşımın [9], bir bulanık diferansiyel denklemin [4] herhangi bir çözümünün artan destek bölgesi genişliğine sahip olması gibi dezavantajı vardır. Bu da belirsizliği arttırmaktadır. Bu hata, bulanık diferansiyel denklemler diferansiyel kapsamalar ailesi olarak değerlendirilmesi [9] ile ortadan kalkmıştı. Yalnız, diferansiyel kapsamaların kullanmasında da hata vardı. Bu hata ise bulanık değerli bir fonksiyonun türevinin tanımlanmamış olmasıydı ve bu yüzden bulanık başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümleri oldukça zor elde ediliyordu.

Bulanık sayı değerli fonksiyonların kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliği [1]'de çalışılmış ve genelleştirilmiştir. Bu durumda türevi tanımlanmış olacaktır ve FDE'nin çözümü azalan destek bölgesi genişliğine sahip olur. Fakat teklik(çözümün tekliği) ortadan kalkmıştır. Başlangıçta bu teksizlik bir problem olarak görünse de, yani, [6]'de vurgulandığı gibi  $H$  – diferansiyellenebilirlik altında teklik kaybolursa bile, benzer klasik denklemin farklı formları bulanıklaştırıldığında birbirine benzemeyen FDE'ler elde edilir. [3]'deki önerilen yaklaşımda, klasik adi diferansiyel denklemlerin

çözümlerinde Zadeh'in Genişleme İlkesi kullanılmaktadır. Bu metotta da bir dezavantaj bulunmaktadır ki bu da bir FIVP'nin çözümünün nümerik olarak hesaplanmasında çeşitli ve birçok bulanık parametrelerin zaman harcayan bir meselse haline gelmesidir [13].

### 3.2.1 Hukuhara diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemler

Aşağıdaki lemma, bulanık diferansiyel denklemi integral denkleme dönüştürmektedir. Bu bölümde diferansiyellenebilirlik kavramı Hukuhara diferansiyellenebilirlik olacaktır. Burada diferansiyel denklem Hukuhara türevi kullanılarak yazılmıştır [9,13].

**Lemma 3.2.1**  $x_0 \in \mathbb{R}$  için sürekli olduğu varsayılan  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}_F$  ile  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_F$  bulanık diferansiyel denklemi  $(x_0, x_1) \subset \mathbb{R}$  aralığı üzerinde  $\forall x \in [x_0, x_1]$  için

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.12)$$

integral denkleme eşittir ve (i) ya da (ii) göz önünde bulundurularak kuvvetli(strongly) genelleştirilmiş diferansiyellenebilirliğe bağlıdır. Burada iki denklem arasındaki eşitlik, birbirinin herhangi bir çözümünün diğeri için de sağlandığı anlamına gelmektedir. [12]'de bu açıklamalardaki çözümlerin varlığı ve tekliği ispatlanmıştır [13].

**Teorem 3.2.1** Farz edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

a)  $\bar{B}(y_0, q) = \{y \in \mathbb{R}_F : D(y, y_0) \leq q\}$  ,  $\mathbb{R}_F$  'de kapalı bir küre;  $R_0 = [x_0, x_0 + p] \times \bar{B}(y_0, q)$  olsun.  $f : R_0 \rightarrow \mathbb{R}_F$  sürekli bir fonksiyondur öyle ki bütün  $(x, y) \in R_0$  için  $D(\tilde{0}, f(x, y)) = \|f(x, y)\|_F \leq M$  dir.

b)  $g : [x_0, x_0 + p] \times [0, q] \rightarrow \mathbb{R}$  öyle ki  $g(x, 0) \equiv 0$  dır ve  $0 \leq g(x, u) \leq M$  ;  $\forall x \in [x_0, x_0 + p]$  ,  $0 \leq u \leq q$  , öyle ki  $g(x, u)$  azalmayandır ve  $u'(x) = g(x, u(x))$  ,  $u(x_0) = 0$   $[x_0, x_0 + p]$ 'de  $u(x) \equiv 0$  olacak şekilde bir çözümü vardır.

c)  $\forall (x, y), (x, z) \in R_0$  için  $D(f(x, y), f(x, z)) \leq g(x, D(y, z))$  dir ve  $D(y, z) \leq q$  dur.

O halde;

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.13)$$

bulanık başlangıç değer problemi;  $r = \min \left\{ p, \frac{p}{M}, \frac{q}{M_1} \right\}$  olmak üzere

$y: [x_0, x_0 + r] \rightarrow B(y_0, q)$  olacak şekilde tek bir çözüme sahiptir. Çözüme yakınsayan ardışık iterasyonlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases} \quad (3.14)$$

Aşağıdaki Peano-tip teorem; bazı kolaylaştırılmış şartlar altında kuvvetli(strongly) genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerini sağlar [13].

**Teorem 3.2.2**  $R_0 = [x_0, x_0 + p] \times \bar{B}(y_0, q)$ ;  $p, q > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}_F$  ve  $f: R_0 \rightarrow \mathbb{R}_F$  sürekli olsun öyle ki bütün  $(x, y) \in R_0$  için  $\|f(x, y)\|_F \leq M$  dir.  $\forall (x, y), (x, z) \in R_0$  ve  $D(y, z) \leq q$  olmak üzere  $f$  bulanık sayı değerli fonksiyon  $D(f(x, y), f(x, z)) \leq LD(y, z)$  Lipschitz şartını sağlar. O halde (3.13) bulanık

diferansiyel denkleminin  $r = \min \left\{ p, \frac{p}{M}, \frac{q}{M_1} \right\}$  olmak üzere  $y: [x_0, x_0 + r] \rightarrow B(y_0, q)$

olacak şekilde tek bir çözüme sahiptir. Ayrıca (3.14)'deki ardışık iterasyonlar bu çözüme yakınsar [13].

### 3.2.2 Hukuhara diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri

[1]'de aşağıdaki diferansiyel denklemlere denk denklem ele alınmıştır:

$$u' = -u \text{ ve } u'+u = 0, u(0) = u_0 \quad (3.15)$$

Bu denklemler bulanıklaştırıldığında, iki farklı bulanık diferansiyel denklem elde ederiz. Tabii ki; ikincisinin herhangi bir bulanık gerçel olmayan çözümü olmayacaktır. O yüzden; [6]'de bir forcing(zorlayıcı) terim eklenmiştir ve dolayısıyla

$$u'+u = \sigma(t), u(0) = u_0 \quad (3.16)$$

şeklinde olmuştur. Ayrıca bu forcing terim çözümlerin davranışlarını etkileyecektir. Bulanık başlangıç değer problemi  $u_0 = (-1, 0, 1)$  olmak üzere

$$u'+u = e^{-t}(-1, 0, 1), u(0) = u_0 \quad (3.17)$$

olsun. Daha önce bu problemin çözümünün  $u(t) = (-1, 0, 1)e^{-t}(1+t)$  olduğu ileri sürülmüştü. Ancak, [7]'de yukarıdaki  $u$ 'nun bulanık diferansiyel denklemin bir çözümü olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca; modifiye edilmiş  $\sigma(t)$ 'nin bu durumu düzeltici bir seçim olduğunu ve [6]'deki temel iddianın, bulanık çözümün niteliğinin forcing terimin seçimine bağlı olduğu belirtilmiştir.[13]

Klasik olarak verilmiş normalde birbirine eşit üç adi diferansiyel denklemdir:

$$u' = -u + \sigma(t), u' - \sigma(t) = -u \text{ ve } u'+u = \sigma(t); u(0) = u_0 \quad (3.18)$$

Ancak bu denklemlerin başlangıç değerleri bulanıklaştırılmış bir şekilde verildiğinde;

$$u' = -u + \sigma(t), u(0) = u_0, u_0 \in \mathbb{R}_F \text{ ve } \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F \quad (3.19)$$

$$u' - \sigma(t) = -u, u(0) = u_0, u_0 \in \mathbb{R}_F \text{ ve } \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F \quad (3.20)$$

$$u' + u = \sigma(t), u(0) = u_0, u_0 \in \mathbb{R}_F \text{ ve } \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F \quad (3.21)$$

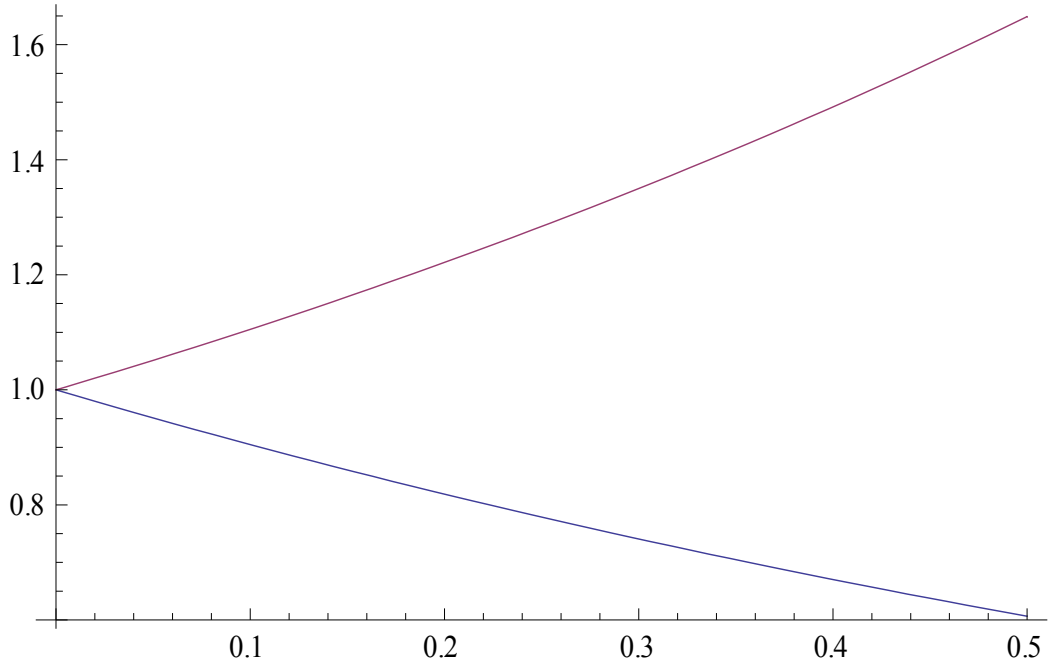
şekline dönüşür ve oldukça değişik davranış sergilerler.

Burada, homojen ve birbirine benzemeyen bulanık başlangıç değer problemleri ile başlayıp daha sonra homojen olmayan bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışları aşağıdaki örneklerle mukayese edilecektir. Ayrıca burada kullanılan diferansiyellenebilirlik tipi Hukuhara diferansiyellenebilirliktir[9,13].

**Örnek 3.2.1** Öncelikle çok popüler bir bulanık başlangıç değer problemi olan

$$u' = -u, u(0) = (-1, 0, 1) \quad (3.21)$$

olsun. Bu problemin çözümü  $u(t) = (-e^t, 0, e^t)$  dir. Bu çözümün grafik gösterimi şekil 3.1'de görülebilir.



Şekil 3.1 (3.22) Bulanık diferansiyel denklemin grafiksel gösterimi

Bu örneğe benzer homojen olmayan FIVP,

$$u + u = 2e^{-t}(-1, 0, 1), u(0) = (-1, 0, 1) \quad (3.23)$$

biçiminde olsun. O halde (3.23)'ün çözümü

$$u(t) = (-1, 0, 1)e^{-t}(1 + 2t) = ((-2t - 1)e^{-t}, 0, (2t + 1)e^{-t}) \quad (3.24)$$

biçiminde elde edilir. (3.24) denkleminde  $t$  yerine  $t + h$  alınırsa,

$$u(t + h) = (-1, 0, 1)e^{-t-h}(1 + 2t + 2h) \quad (3.25)$$

olacak şekilde elde edilir. (3.25) eşitliğinin Hukuhara farkı alınır;

$$u(t + h) \ominus u(t) = [2he^{-h}e^{-t} + (2t + 1)e^{-t}(e^{-h} - 1)](-1, 0, 1) \quad (3.26)$$

$H$  - farkı vardır. Benzer şekilde  $u(t) \ominus u(t - h)$   $H$  - farkının varlığını da görebiliriz. Böylelikle (3.23) çözümü  $[0, 0.5]$  aralığında bir çözümdür. (Burada çözüm bu aralıkta alınmıştır, ancak çözüm normalde  $[-0.5, 0.5]$  aralığında vardır.)

Şimdi de (3.23) bulanık başlangıç değer probleminde yer değişikliği yaparak yeni bir bulanık başlangıç değer problemi elde edilip ve bu yeni bulanık başlangıç değer probleminin çözümünün davranışları gözlemlenecektir.

$$u' = -u + 2e^{-t}(-1, 0, 1), u(0) = (-1, 0, 1) \quad (3.27)$$

Burada  $u = (x, y, z)$  formunda üçgensel çözüm araştıracağız. Lemma 3.1'den (3.27) denklemini;

$$\begin{cases} x' = -z - 2e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -x + 2e^{-t} \end{cases} \quad (3.28)$$

adi diferansiyel denklem sistemine çevrilir. Buradan da çözüm;

$$u(t) = (e^{-t} - 2e^t, 0, 2e^t - e^{-t}) \quad t \in (0, \infty) \quad (3.29)$$

şeklinde olur. Şimdi de;

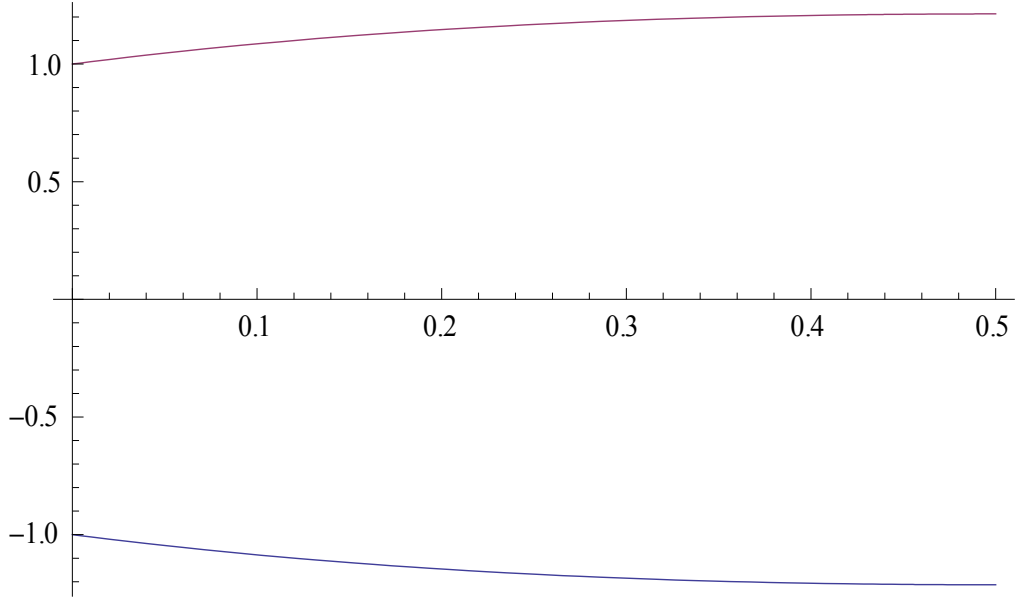
$$u' - 2e^{-t}(-1, 0, 1) = -u, \quad u(0) = (-1, 0, 1) \quad (3.30)$$

denklemini ele alalım. Bu durumda denklem aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür:

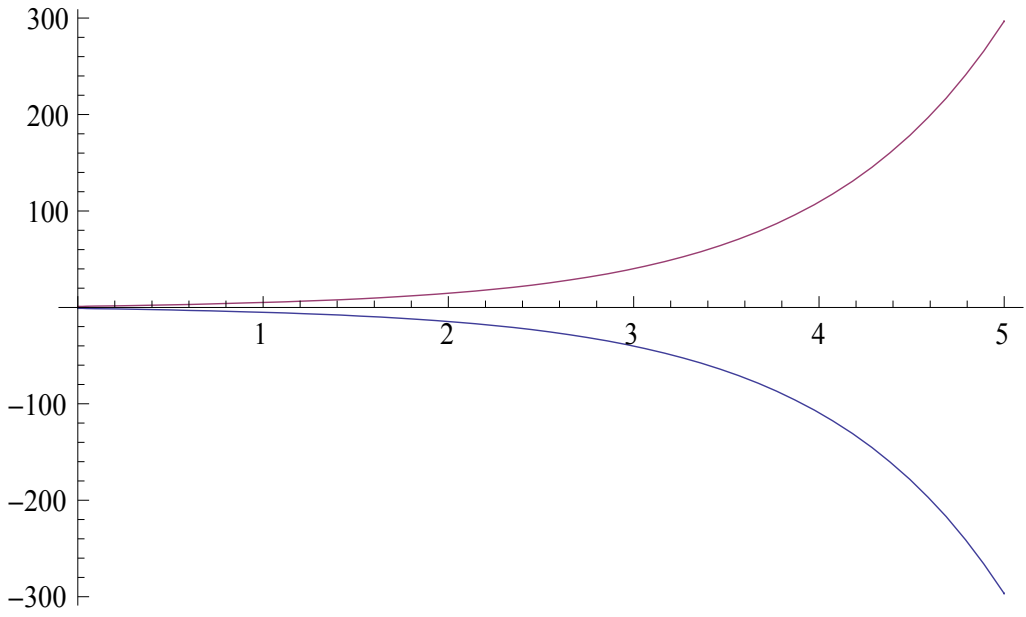
$$\begin{cases} x' - 2e^{-t} = -z \\ y' = -y \\ z' + 2e^{-t} = -x \end{cases} \quad (3.31)$$

Buradan da çözüm olarak  $u(t) = (e^{-t}, 0, e^t)$  elde edilir fakat bu durumda  $u(t+h) \ominus u(t)$  ve  $u(t) \ominus u(t-h)$   $H$  - farkları mevcut olmayacağından  $u$ ,  $H$  - diferansiyellenebilir olmayacaktır.

Şekil 3.2 ve şekil 3.3'den de görüleceği gibi; (3.23) ve (3.27) denklemlerinin (3.24) ve (3.29) çözümlerinin oldukça farklı davranışlar sergilediğini gözlemlenebilir. Çünkü bu denklemler aynı klasik ODEs'in değişik bulanıklaştırılmış halleridir.[13]



Şekil 3.2 (3.23) Denkleminin (3.24) çözümünün grafiksel gösterimi

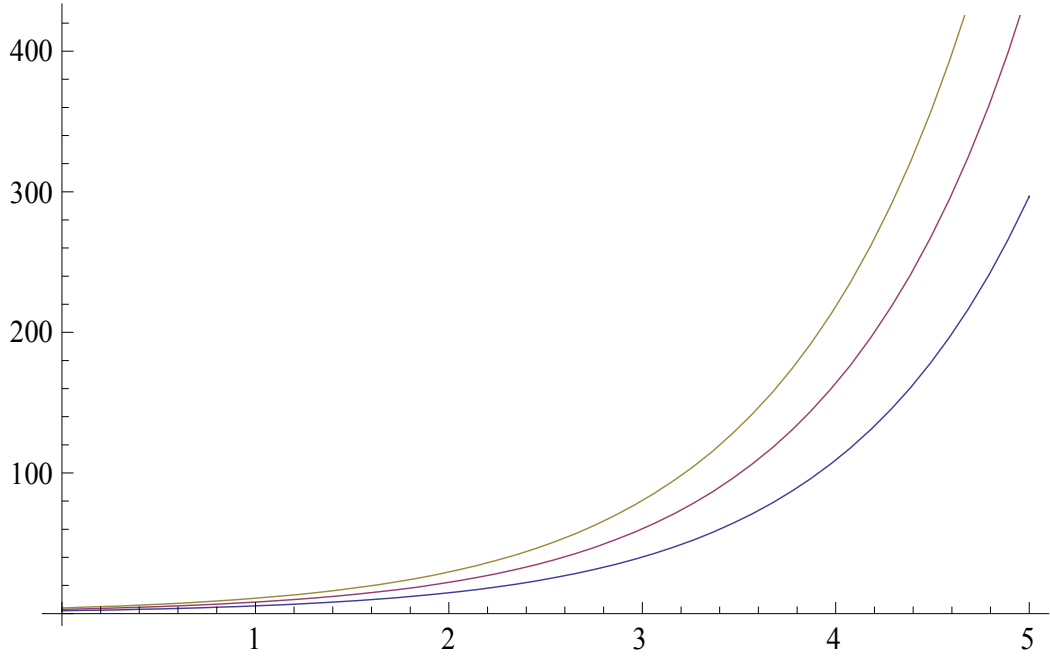


Şekil 3.3 (3.27) Denkleminin (3.29) çözümünün grafiksel gösterimi

### Örnek 3.2.2

$$u' = u, u(0) = (2, 3, 4) \quad (3.32)$$

homojen bulanık diferansiyel denklem olsun. Burada  $u(t) = e^t (2, 3, 4)$  'ün  $[0, \infty)$  aralığında (3.32)'in Hukuhara diferansiyellenebilir bir çözümü olduğu açıktır. Ayrıca bu çözüm şekil 3.4'de görülebilir.



Şekil 3.4 (3.32) Homojen bulanık diferansiyel denklemin  $u(t) = e^t (2, 3, 4)$  çözümünün grafiksel gösterimi

(3.32) denkleminin başlangıç değeri olmayan kısmında değişiklik yaparak

$$\begin{cases} u' = u + (1, 2, 3)t \\ u(0) = (2, 3, 4) \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} u' + (-1)(1, 2, 3)t = u \\ u(0) = (2, 3, 4) \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} u' - u = (1, 2, 3)t \\ u(0) = (2, 3, 4) \end{cases} \quad (3.35)$$

şeklindeki başlangıç değer problemleri elde edilir. Sabitlerin değişimi formülü (variation of constant formulation) ile Hukuhara diferansiyellenebilen ve (3.33)'in  $[0, \infty)$  aralığında çözümü olan;

$$u_1(t) = (3e^t - t - 1, 5e^t - 2t - 2, 7e^t - 3t - 3) \quad (3.36)$$

çözümünü elde edilir. Ayrıca;

$$u_2(t) = (5e^t - 3t - 3, 5e^t - 2t - 2, 5e^t - t - 1) \quad (3.37)$$

ise Hukuhara diferansiyellenebilir olup  $[0, \infty)$  aralığında (3.34)'ün çözümüdür.

(3.35) denkleminin çözümü ise  $(\ln 2, \infty)$  aralığında ve Hukuhara diferansiyellenebilirlik kavramı altında;

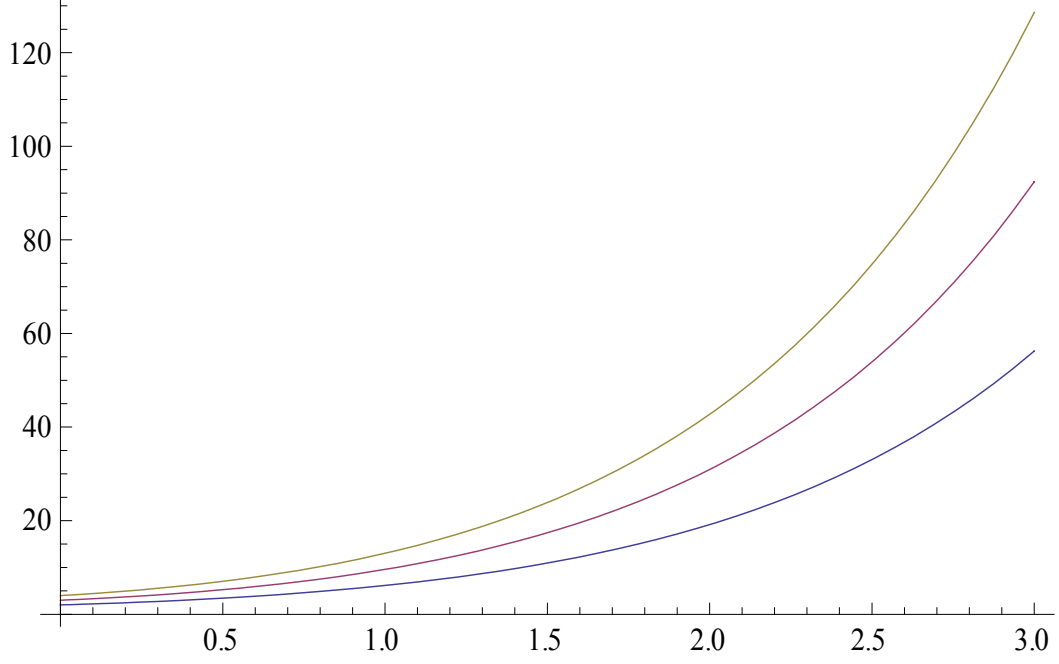
$$u_3(t) = (5e^t - 3t - 2e^{-t}, 5e^t - 2t - 2, 5e^t - t + 2e^{-t} - 3) \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir. Ancak; bu çözüm orijin etrafında bir çözüm olmadığından, bu çözümü (3.35) problemine uygun bir çözüm olarak göz önüne alınamaz.

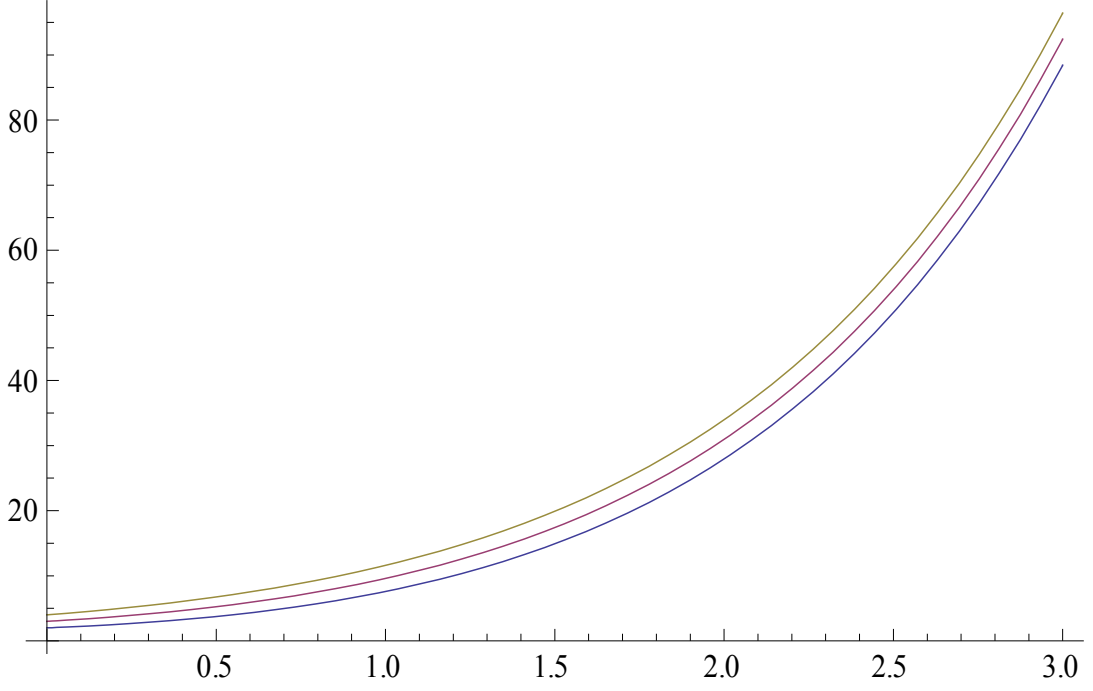
(3.33) ve (3.34) denklemlerinin çözümlerinin grafiksel olarak gösterimlerini sırasıyla Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da görebiliriz. Tekrar ifade etmek gerekirse bu çözümler oldukça farklı davranışlara sahiptir. Gerçekten, özellikle 2. çözüm olan  $u_2(t)$  çözümü için oldukça kararlı (relatively stable) olduğunu söylenebilir.

Ayrıca; homojen problemin çözümlerini kıyasladığımızda; bir forcing terim eklenmesinin çözümün davranışını ne denli etkilediğini gözlemlenebilir. Yani;

normalde homojen problemin çözümünün yeterince kararlı olmamasına karşın, denklemde düzenlemeler yapıldığında oldukça kararlı bir çözüm elde edildiği açıktır[13].



Şekil 3.5 (3.33) Denkleminin (3.36)  $u_1(t)$  çözümünün grafiksel gösterimi



Şekil 3.6 (3.34) Denkleminin (3.37)  $u_2(t)$  çözümünün grafiksel gösterimi

### 3.2.3 Kuvvetli (Strongly) genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik ile bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri

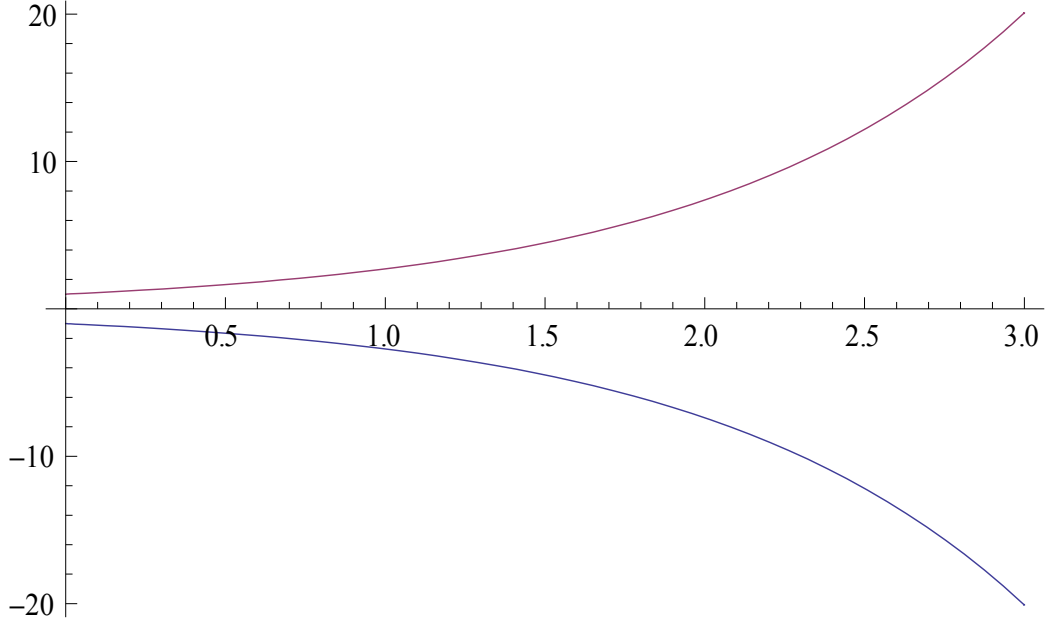
Bu bölümde bir örnekle kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik kullanılarak klasik adi diferansiyel denklemlerin başlangıç şartlarının bulanıklaştırılması ile elde edilen farklı formülasyonlarla bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerinin ne denli davranışlar sergilediğini görülecektir. Ayrıca, kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik ile elde edilen çözümlerin davranışları üzerinde forcing terimin nasıl etkilerinin olduğu da görülebilir [13].

**Örnek 3.2.3** Bu örnekte [6]'de önerilen denklemleri kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik kullanarak yeniden değerlendirilecektir.

$$u' = -u, u(0) = (-1, 0, 1) \quad (3.39)$$

olsun. Burada (i)- diferansiyellenebilirlik esasen Huhara diferansiyellenebilirlik olduğundan şekil 3.1'de kararsız (unstable) çözüm elde edildiği gösterilmiştir. (ii)-

diferansiyellenebilirlik kullanılarak elde edilen  $u(t) = e^{-t}(-1, 0, 1)$  çözümleri ((3.39)'in çözümleri) ise Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7 (3.39) Denkleminin (ii)-diferansiyellenebilen çözümlerinin grafiksel gösterimi

Forcing terim ekleyerek önceki durumlarda olduğu gibi üç tane birbirine benzemeyen bulanık diferansiyel denklemler elde edebiliriz. Dolayısıyla bu denklemler tekrar yazılırsa;

$$u' = -u + e^{-t}(-1, 0, 1) \quad (3.40)$$

$$u' + u = e^{-t}(-1, 0, 1) \quad (3.41)$$

şeklinde olur. Ayrıca burada başlangıç koşulu her ikisinde de  $u_0 = (-1, 0, 1)$ 'dir. [2]'de olduğu gibi (3.40) ve (3.41) denklemlerine aşağıdaki denklem yukarıdaki denklem listesine eklenebilir:

$$u' - e^{-t}(-1, 0, 1) = -u \quad (3.42)$$

(3.40) için (i)- diferansiyellenebilirlik kullanarak ve Lemma 3.1.2'den

$$\begin{cases} x' = -z - e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -x + e^{-t} \end{cases} \quad (3.43)$$

diferansiyel denklem sistemi oluşturulabilir. Buradan çözüm,

$$u(t) = \left( \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t, 0, \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \right) \quad (3.44)$$

şeklinde elde edilir.  $u(t)$  çözümü (i)- diferansiyellenebilir olduğundan bu çözüm (3.40)'un bir çözümüdür.

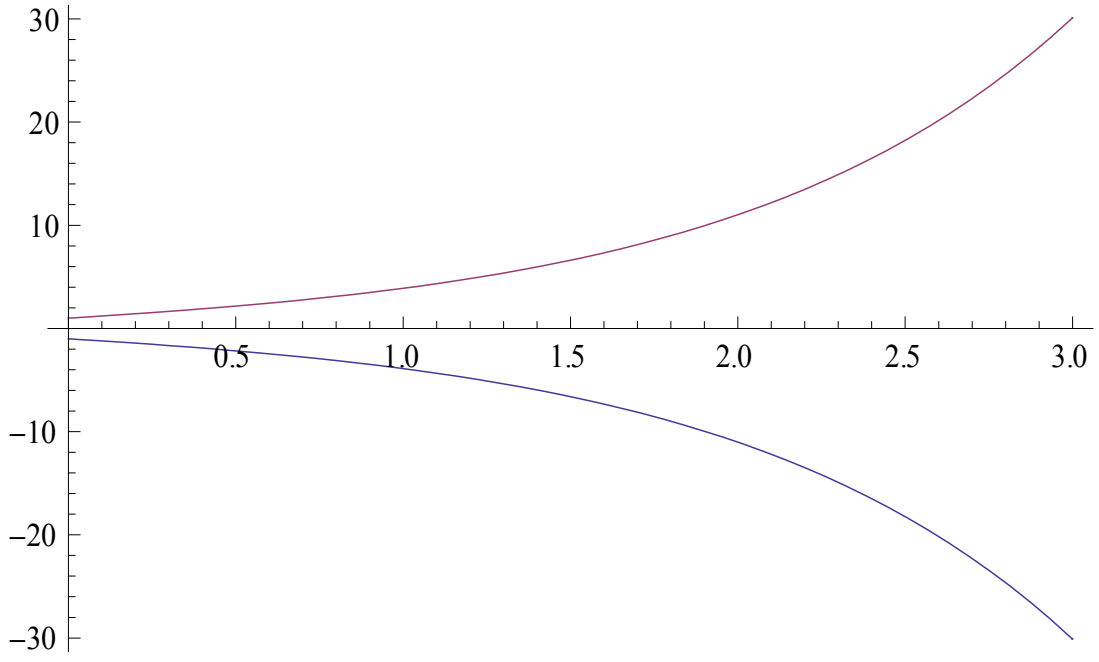
(ii)- diferansiyellenebilirlik kullanılarak (3.40) denklemi

$$\begin{cases} z' = -z - e^{-t} \\ y' = -y \\ x' = -x + e^{-t} \end{cases} \quad (3.45)$$

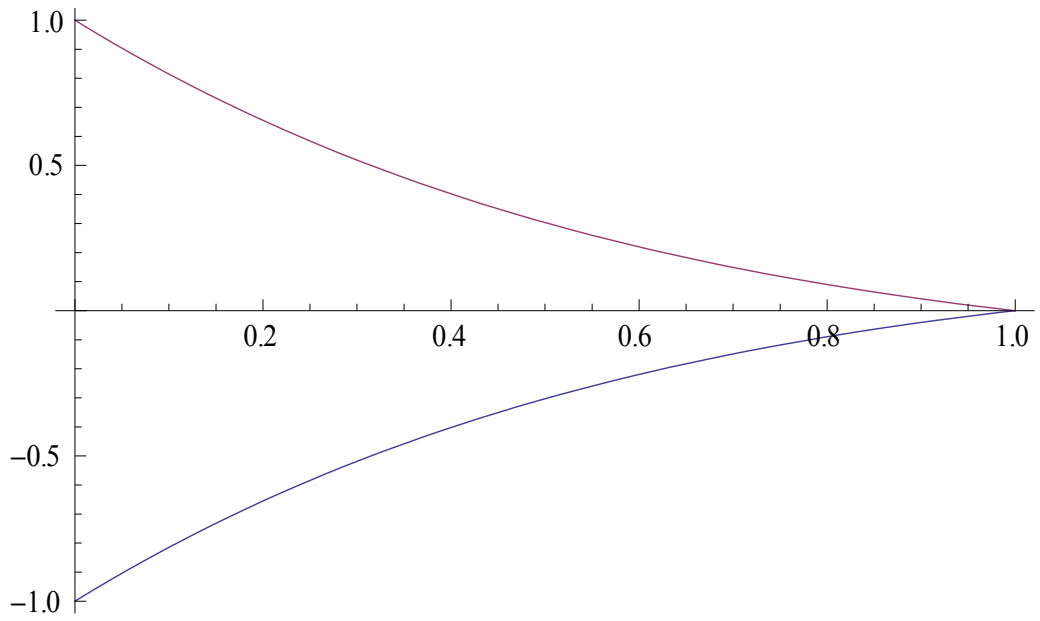
şeklindeki diferansiyel denklem sistemine dönüşür ve buradan da (3.40)'un (ii)-diferansiyellenebilir ve  $(0,1)$  aralığındaki çözümü:

$$u(t) = e^{-t}(1-t)(-1, 0, 1) \quad (3.46)$$

şeklinde dir. şekil 3.8 ve şekil 3.9'de sırasıyla (3.40)'nin (i)- diferansiyellenebilir ve (ii)-diferansiyellenebilir çözümleri grafiksel olarak verilmiştir.



Şekil 3.8 (3.40) Denkleminin (i)-diferansiyellenebilen ile çözümünün grafiksel gösterimi



Şekil 3.9 (3.40) Denkleminin (ii)-diferansiyellenebilen çözümünün grafiksel gösterimi

Şimdi de (3.41) denklemini ele alınsın. [8]'da gösterildiği üzere,  $u$ 'nun (i)-diferansiyellenebilir olduğunu varsayarak,  $t > 0$  için hiçbir çözüm elde edilemez. Hatta aynı durum (i)-diferansiyellenebilirlik için de geçerlidir. Böylece;

$$\begin{cases} x' = -z - e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -x + e^{-t} \end{cases} \quad (3.47)$$

sistemini elde edilir ve buradan da

$$u(t) = (-\cosh t, 0, \cosh t) = (-1, 0, 1) \cosh t \quad (3.48)$$

çözümü elde edilir. Bu durumda ise

$$u(t+h) = (-1, 0, 1) \cosh(t+h) \quad (3.49)$$

ve  $\cosh(0, \infty)$  aralığında azalmayan olduğundan  $u(t) \ominus u(t+h)$  farkı mevcut değildir.

Bu da (ii)-varsayımıyla çelişir. Bu yüzden bu durum için de çözüm mevcut değildir.

Şimdi de (3.42) denklemini ele alınsın. (i)-diferansiyellenebilirliği kullanarak (3.47)

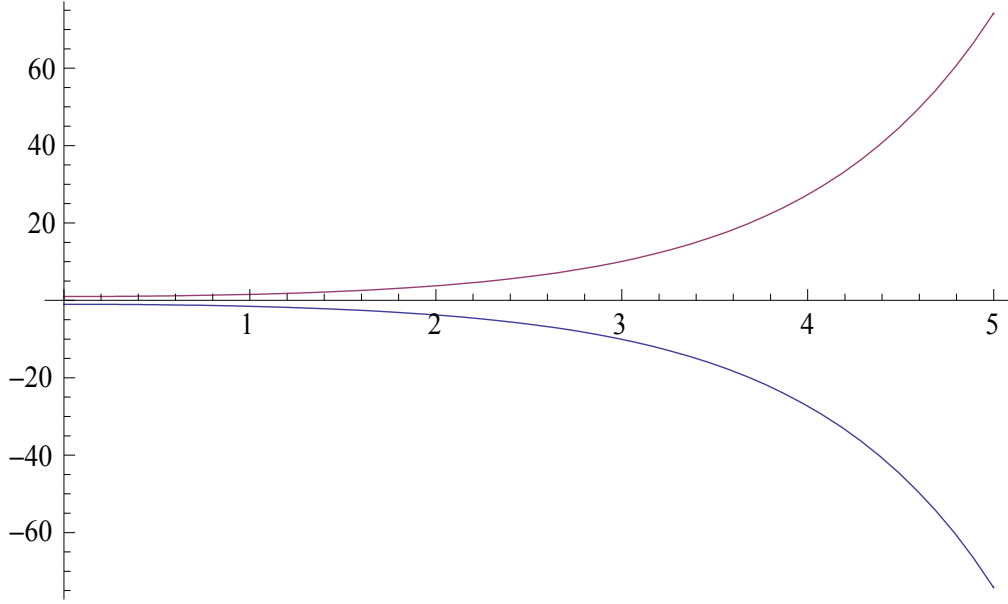
sistemini elde ederek  $[0, \infty)$  aralığında (i)-diferansiyellenebilen çözüm

$$u(t) = (-\cosh t, 0, \cosh t) \quad (3.40)$$

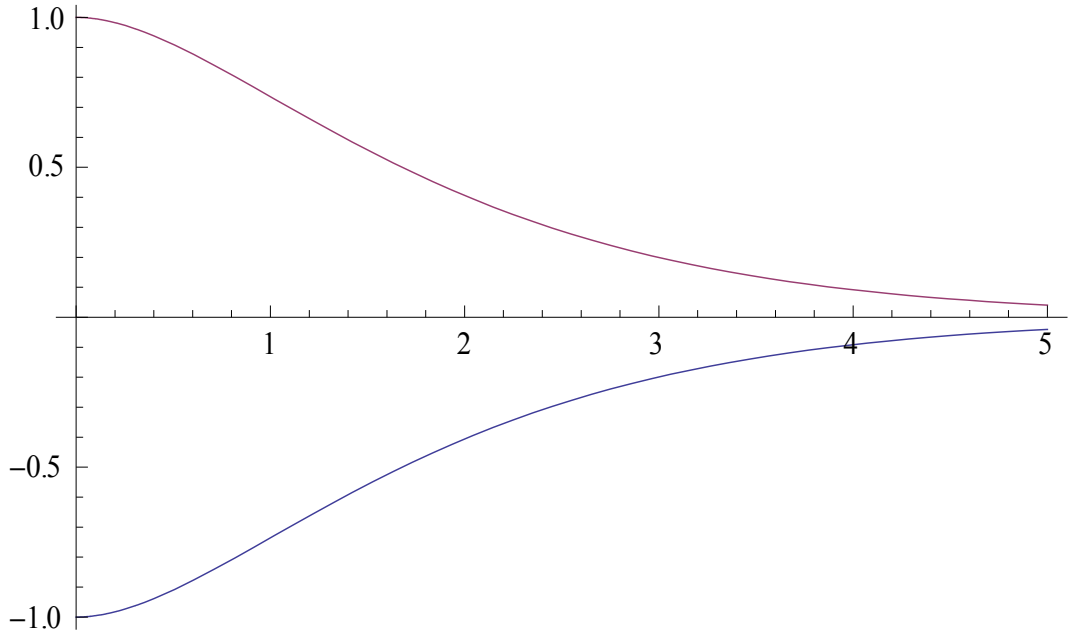
olur. (i)-diferansiyellenebilme şartı ve Lemma 3.1.2'den

$$\begin{cases} x' = -x - e^{-t} \\ y' = -y \\ z' = -z + e^{-t} \end{cases} \quad (3.51)$$

sistemini elde edilir ki burada çözüm (ii)- diferansiyellenebilen  $u(t) = e^{-t}(1+t)(-1,0,1)$ 'dir. (3.42) denkleminin bu çözümü şekil 3.10 ve şekil 3.11'de gösterilmiştir [13].



Şekil 3.10 (3.42) Denkleminin (i)-diferansiyellenebilen (3.50) çözümünün grafiksel gösterimi



Şekil 3.11 (3.42) Denklemnin (ii)-diferansiyellenebilen çözümünün grafiksel gösterimi

Böylece, genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik durumunda, birbiriyle aynı olan adi diferansiyel denklemlerden elde edilmiş birbiriyle benzersiz (3.40), (3.41) ve (3.42) bulanık verisyonları için dört çözüm elde edilmiş olup, bunlardan sadece birisi asimptotik olarak kararlıdır. Ayrıca, burada da kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik kullanılarak bir forcing terimin eklenmesinin bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışlarını ne kadar etkilediği gözlemlenebilir [13].

**BÖLÜM IV**  
**BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**4.1 Bulanık-Cauchy Problemi**

1. mertebeden Bulanık-Cauchy problemi;

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (4.1)$$

şeklinde olsun. Burada  $\tilde{y}$ ,  $t$ 'nin bir bulanık fonksiyonu;  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$  ise  $t$  kesin(crisp) değişkeninin ve  $\tilde{y}$  bulanık değişkeninin bir bulanık fonksiyonu;  $\tilde{y}'$  ise  $\tilde{y}$ 'nin Hukuhara ya da Seikkala bulanık türevidir. Başlangıç şartı  $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$  şeklinde bulanık sayısı üçgen ya da yamuk biçimli bulanık sayı olarak ifade edilir.  $\tilde{y}(t)$  bulanık fonksiyonu ise  $\tilde{y}(t) = [\underline{y}(t), \bar{y}(t)]$  olarak ifade edilir. Burada  $\tilde{y}(t)$  ve  $\tilde{y}(t_0)$  bulanık fonksiyonların seviye kümeleri ise;

$$[\tilde{y}(t)]_r = [\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] \text{ ve } [\tilde{y}(t_0)]_r = [\underline{y}(t_0; r), \bar{y}(t_0; r)] \quad (4.2)$$

şeklindedir. Genişleme ilkesini (Extension Principle) kullanarak

$$f(t, y(t))(s) = \sup \{ y(t)(\tau) \mid s = f(t, \tau) \}, \quad s \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

üyelik fonksiyonlarını elde ederiz. Buradan da  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$  bulanık fonksiyonun seviye kümesi

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{f}}(t, \tilde{y}(t; r)) &= \min \{ f(t, u) \mid u \in [\underline{y}(t)]_r \} \\ \bar{\tilde{f}}(t, \tilde{y}(t; r)) &= \max \{ f(t, u) \mid u \in [\bar{y}(t)]_r \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

olacak şekilde  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) = [\underline{f}(t, \tilde{y}(t)), \bar{f}(t, \tilde{y}(t))]$  olarak ifade edilir. Bu fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \underline{f}(t, \tilde{y}(t)) &= F[t, \underline{y}(t), \bar{y}(t)] \\ \bar{f}(t, \tilde{y}(t)) &= G[t, \underline{y}(t), \bar{y}(t)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde gösterilip seviye kümelerini ise

$$\begin{aligned} \underline{f}(t, \tilde{y}(t; r)) &= F[t, \underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] \\ \bar{f}(t, \tilde{y}(t; r)) &= G[t, \underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

şeklinde gösterilir. (4.1) 'ün tek bir çözümünün varlığı için gereken şartlar şu şekildedir:

\*  $f$  'in sürekliliği

\*  $d_{\infty}(f(t, x), f(t, y)) \leq L.d_{\infty}(x, y) \quad ; \quad L > 0$  (Lipschitz şartı) [3,8]

#### 4.1.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin yakınsaklığı

(4.1) eşitliğinde verilmiş denklemleri  $t_0$  dan  $T > t_0$  'a integre etmek için;  $[t_0, T]$  aralığı eşit olarak ayrılmış,  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  ayrık noktalar (grid points) kümesi yerine koyulacaktır ve  $(\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r))$  'larla  $(\underline{Y}(t; r), \bar{Y}(t; r))$  kesin çözümüne yaklaşır.  $t_n$  ( $0 \leq n \leq N$ ) 'deki kesin ve yaklaşık çözümler sırasıyla

$$Y_n(r) = [\underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] \quad \text{ve} \quad y_n(r) = [\underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)] \quad (4.7)$$

ile gösterilir. Çözümün hesaplandığı "grid" (ayrık) noktalar  $t_n = t_0 + nh$  ;  $h = \frac{T - t_0}{N}$ ,  $1 \leq n \leq N$  'dir.

çokgen eğrileri (the polygon curves) ;

$$\begin{cases} \underline{y}(t, h, r) = \{[t_0, \underline{y}_0(r)], [t_1, \underline{y}_1(r)], \dots, [t_N, \underline{y}_N(r)]\} \\ \bar{y}(t, h, r) = \{[t_0, \bar{y}_0(r)], [t_1, \bar{y}_1(r)], \dots, [t_N, \bar{y}_N(r)]\} \end{cases} \quad (4.8)$$

sırasıyla  $\bar{Y}(t; r)$  ve  $\underline{Y}(t; r)$ 'a  $t_0 \leq t \leq t_N$  olacak şekilde (4.1) denkleminin sağ ve sol yan kesin çözümlerini gösterir. Aşağıdaki limitler ise bu yaklaşımların kesin çözüme yakınsadıklarını göstermektedir.[21]

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \underline{y}(t, h, r) = \underline{Y}(t; r) \quad , \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \bar{y}(t, h, r) = \bar{Y}(t; r) \quad (4.9)$$

## 4.2 Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü için Euler Metodu

Bulanık başlangıç değer problemi:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, y) = F(t, \underline{y}, \bar{y}) & ; & \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \\ \bar{y}'(t) = \bar{f}(t, y) = G(t, \underline{y}, \bar{y}) & ; & \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

şeklinde olsun.  $r \in [0, 1]$  olmak üzere (4.10) denkleminin parametrik formu:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = F[t, \underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] & ; & \underline{y}(t_0; r) = \underline{y}_0(r) \\ \bar{y}'(t) = G[t, \underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] & ; & \bar{y}(t_0; r) = \bar{y}_0(r) \end{cases} \quad (4.11)$$

ile verilir. (4.11) sistemini  $t_0$ 'dan  $T > t_0$ 'a integre etmek için  $[t_0, T]$  aralığı eşit olarak  $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = T$  olacak şekilde  $N$  parçaya ayrılımsın.

Burada kesin çözüm  $(\underline{Y}(t; r), \bar{Y}(t; r))$  ve yaklaşık çözüm ise  $(\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r))$  ile gösterilir.  $0 \leq N \leq 1$  olmak üzere  $t_n$ 'deki kesin ve yaklaşık çözümler sırasıyla

$Y_n(r) = [\underline{Y}_n(r); \bar{Y}_n(r)]$  ve  $y_n(r) = [\underline{y}_n(r); \bar{y}_n(r)]$  dir. Çözümün hesaplandığı

noktalar ise  $t_n = t_0 + nh$ ,  $h = \frac{T-t_0}{N}$   $1 \leq n \leq N$  noktalarıdır.

Euler metodu  $\underline{Y}'(t;r)$  ve  $\bar{Y}'(t;r)$ 'in birinci mertebeden yaklaşımına dayanır ve

$$Z'(t;r) \approx \frac{Z(t+h;r) - Z(t;r)}{h} \quad (4.12)$$

ile verilir. Burada  $Z(t;r)$ ; sırasıyla  $\underline{Y}(t;r)$  ve  $\bar{Y}(t;r)$ 'dir. (4.12) denkleminde yararlanılarak

$$\begin{cases} F_n(r) \triangleq F[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] \\ G_n(r) \triangleq G[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] \end{cases} \quad (4.13)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \underline{Y}_{n+1}(r) = \underline{Y}_n(r) + h F_n(r) \\ \bar{Y}_{n+1}(r) = \bar{Y}_n(r) + h G_n(r) \end{cases} \quad (4.14)$$

denklemini elde ederiz. (4.14) denkleminde yararlanılarak

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + h F_n(t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)) \\ \bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + h G_n(t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)) \end{cases} \quad (4.15)$$

denklemini elde edilir [14,15].

### 4.3 Modifiye Edilmiş Euler Metodu

$y'(t) = f(t, y(t))$  diferansiyel denklemini  $[t_n, t_{n+1}]$  civarında  $[t_0, T]$ ,

$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ ,  $h = \frac{T - t_0}{N}$ ,  $t_i = t_0 + ih$  ve  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  olacak şekilde

integre edilirse;

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (4.16)$$

elde edilir. Böylece;

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} [f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] + \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\zeta_1, y(\zeta_1))$$
$$t_n \leq \zeta_1 \leq t_{n+1} \quad (4.17)$$

denklemini  $y(t_{n+1})$  teriminin kapalı bir denklemdir. Böyle kapalı denklemin çözümünden kurtulmak için (4.17)'un sağındaki  $y(t_{n+1})$ 'in yerine

$$y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2)) \quad (4.18)$$

koyulursa,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) + \frac{h}{2} f\left(t_{n+1}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2))\right) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\zeta_1, y(\zeta_1))$$

$$; t_n \leq \zeta_1 \leq t_{n+1} \quad ; \quad t_n \leq \zeta_2 \leq t_{n+1} \quad (4.19)$$

olur. Fakat;

$$y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) \leq \zeta_3 \leq y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\zeta_2, y(\zeta_2)) \quad (4.20)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} f\left(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\zeta_2, y(\zeta_2))\right) &= f\left(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))\right) \\ &+ \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2)) \cdot f_y(t_{n+1}, y(\zeta_3)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur. Yukarıdaki sonuçlara göre;

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \frac{h}{2} \left[ f(t_n, y(t_n)) + f\left(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))\right) \right] \\ &+ \frac{h^3}{4} f(\zeta_2, y(\zeta_2)) \cdot f_y(t_{n+1}, y(\zeta_3)) - \frac{h^3}{12} f''(\zeta_1, y(\zeta_1)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. Böylece;  $y(t_n)$  'i kullanarak;  $y(t_{n+1})$  hesaplaması için aşağıdaki 1-adım açık metodu elde edilir:

$y_0 = y(t_0)$  başlangıç şartı olmak üzere;

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} \left[ f(t_n, y(t_n)) + f\left(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))\right) \right] \quad (4.23)$$

(4.17) denklemindeki kalan terimi göz önünde bulundurarak, aşağıdaki gibi (4.23) denkleminde denk bir durum elde edilir.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} \left[ f\left(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))\right) \right] ; \quad n \geq 0 \quad (4.24)$$

$$y^{(0)}(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) \quad (4.25)$$

$y(t_{n+1})$  çözümünün iyi bir başlangıç tahmini olsun ve modifiye edilmiş Euler metodu (4.24) bağıntısının iteratif çözümü olarak bilinen bağıntı;

$$y^{(j+1)}(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} \left[ f(t_{n+1}, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y^{(j+1)}(t_{n+1})) \right] ; j = 0, 1, \dots \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlansın. (4.24)'dan (4.26)'i çıkartmak suretiyle iterasyonu analiz etme şartlarını belirlemek için

$$y(t_{n+1}) - y^{(j+1)}(t_{n+1}) = \frac{h}{2} \left[ f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y^{(j)}(t_{n+1})) \right] ; j = 0, 1, \dots \quad (4.27)$$

elde edilir.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} ; t \in [t_0, T] \quad (4.28)$$

probleminde aşağıdaki sınırlandırma ile Lipschitz şartını kullanılırsa;

$$\left| y(t_{n+1}) - y^{(j+1)}(t_{n+1}) \right| \leq \frac{hK}{2} \left| y(t_{n+1}) - y^{(j)}(t_{n+1}) \right| ; j \geq 0 \quad (4.29)$$

ve böylece

$$\left| y(t_{n+1}) - y^{(j+1)}(t_{n+1}) \right| \leq \left( \frac{hK}{2} \right)^{j+1} \left| y(t_{n+1}) - y^{(0)}(t_{n+1}) \right| \quad (4.30)$$

olur.  $\frac{hK}{2} \leq 1$  ise  $y^{(j)}(t_{n+1})$  iterasyonları  $j \rightarrow \infty$  iken  $y(t_{n+1})$  'e yakınsayacaktır ve  $y_n$  'den  $y_{n+1}$  elde edilmesinde  $O(h^3)$  kesim hatası içerir. [16,17]

### 4.3.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için modifiye edilmiş Euler metodu

$Y=[Y_1, Y_2]$  kesin çözüm ;  $y=[y_1, y_2]$  ise (4.1) denkleminin başlangıç şartları ile birlikte 1-adım modifiye edilmiş metod kullanılarak elde edilmiş yaklaşık çözüm olsun.  $t_n$  noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümler sırasıyla;  $[Y(t)]_r = [\underline{Y}(t_n; r), \bar{Y}(t_n; r)]$  ve  $[y(t)]_r = [\underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)]$  ;  $0 \leq n \leq N$  ile gösterilir. Ayrıca her bir adım noktası  $h = \frac{T-t_0}{N}$  ;  $t_i = t_0 + i h$  ;  $0 \leq i \leq N$  dir.

(4.27) Modifiye edilmiş euler metodunu kullanarak;

$$\begin{aligned} \underline{y}(t_{n+1}; r) = & \underline{y}(t_n; r) + \frac{h}{2} F[t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)] \\ & + \frac{h}{2} F \left[ \begin{array}{l} t_{n+1}, \underline{y}(t_n; r) + h F[t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)] \\ \bar{y}(t_n; r) + h G[t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_{n+1}; r) = & \bar{y}(t_n; r) + \frac{h}{2} G[t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)] \\ & + \frac{h}{2} G \left[ \begin{array}{l} t_{n+1}, \underline{y}(t_n; r) + h F[t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)] \\ \bar{y}(t_n; r) + h G[t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r)] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} A = & [\underline{A}, \bar{A}] , [A]_r = [\underline{A}(r), \bar{A}(r)] \\ [A]_r = & \left[ \frac{1}{4} f'(\zeta_2, Y(\zeta_2)) \cdot f_y(t_{n+1}, \zeta_3) - \frac{1}{12} f''(\zeta_1, Y(\zeta_1)) \right]_r \end{aligned} \quad (4.33)$$

dir. (4.1) bulanık diferansiyel denklemine Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım ise;

$$\begin{aligned} \underline{y}(t_{n+1};r) &= \underline{y}(t_n;r) + \frac{h}{2} F[t_{n+1}, \underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \\ &+ \frac{h}{2} F \left[ t_{n+1}, \underline{y}(t_n;r) + h F[t_n, \underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \right. \\ &\left. , \bar{y}(t_n;r) + h G[t_n, \underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_{n+1};r) &= \bar{y}(t_n;r) + \frac{h}{2} G[t_{n+1}, \underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \\ &+ \frac{h}{2} G \left[ t_{n+1}, \underline{y}(t_n;r) + h F[t_n, \underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \right. \\ &\left. , \bar{y}(t_n;r) + h G[t_n, \underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

şeklindedir [17].

#### 4.4 Modifiye Edilmiş Simpson Metodu

(4.28) başlangıç değer probleminin  $t \in I = [t_0, T]$  başlangıç şartındaki;

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T \quad ; \quad h = \frac{T - t_0}{N} \quad ; \quad t_i = t_0 + i h \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.36)$$

olmak üzere  $[t_0, T]$  aralığı eşit aralıklarla  $N$  parçaya ayrılınsın.

(4.28) başlangıç değer probleminin çözümünün nümerik bir yaklaşımı olan Simpson metodunu elde etmek için, bu denklem  $t_{i-1}$ 'den  $t_{i+1}$ 'e integre edilsin ve sağ taraf için Simpson metodunu uygulandığında

$$\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} y'(s) ds = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds \quad (4.37)$$

olur ve böylece;

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) &= \frac{h}{3} \left[ f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 4f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] - \\ &- \frac{h^5}{90} f^{(h)}(\zeta_1, y(\zeta_1)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

olur.

(4.38) denklemi  $y(t_{i+1})$  denkleminin kapalı (implicit) bir denklemdir.

Bu şekildeki kapalı denklemlerden kaçınmak için;  $\zeta_2 \in [t_i, t_{i+1}]$  olmak üzere (4.38)

eşitliğindeki  $y(t_{i+1})$  'in yerine  $y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2))$

yazıldığında  $t_{i-1} \leq \zeta_1 \leq t_{i+1}$  ve  $t_{i-1} \leq \zeta_2 \leq t_{i+1}$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) &= y(t_{i-1}) + \frac{h}{3} f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{4h}{3} f(t_i, y(t_i)) \\ &\quad + \frac{h}{3} f\left(t_{i+1}, y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2))\right) - \frac{h^5}{90} f^{(5)}(\zeta_1, y(\zeta_1)) \end{aligned} \quad (4.39)$$

olur. Fakat  $\zeta_3, y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$  ile

$y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2))$  arasında olmak üzere;

$$\begin{aligned} f\left(t_{i+1}, y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2))\right) &= f(t_{i+1}, y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2)) f_y(t_{i+1}, \zeta_3) \end{aligned} \quad (4.40)$$

olur.

Yukarıdaki eşitliğin bir sonucu olarak  $t_i \leq \zeta_1 \leq t_{i+1}$  ve  $t_i \leq \zeta_2 \leq t_{i+1}$  ve

$y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) \leq \zeta_3 \leq y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_2, y(\zeta_2))$  olmak

üzere;

$$\begin{aligned}
y(t_{i+1}) = & y(t_{i-1}) + \frac{h}{3} f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{4h}{3} f(t_i, y(t_i)) + \\
& + \frac{h}{3} f(t_i, y(t_i) + h f(t_i, y(t_i))) + \\
& + \frac{h^3}{6} f'(\zeta_2, y(\zeta_2)) f_y(t_{i+1}, y(\zeta_3)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_1, y(\zeta_1))
\end{aligned} \tag{4.41}$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece;  $y_{i-1}$  ve  $y_i$  'i hesaplamak için aşağıdaki açık denklemi elde edilir:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{4h}{3} f(t_i, y(t_i)) + \frac{h}{3} f(t_{i+1}, y_i + h f(t_i, y(t_i))) \tag{4.42}$$

Başlangıç değerleri :  $y_0 = y(t_0)$  ve  $y_1 = y_0 + h f(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2} f'(t_0, y(t_0))$   
dir.[18]

#### 4.4.1 Bulanık difereansiyel denklemlerin çözümü için modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu

$Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$  ve  $y = [\underline{y}, \bar{y}]$  (4.3.13) başlangıç değer probleminin 2-adım modifiye edilmiş Simpson metodu ile sırasıyla kesin ve yaklaşık çözümleri olsun. Bu çözümlerin seviye kümeleri ise;

$$[Y(t)]_r = [\underline{Y}(t; r), \bar{Y}(t; r)] \quad \text{ve} \quad [y(t)]_r = [\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] \tag{4.43}$$

şeklinde gösterilsin. Dahası; her bir integrasyon adımındaki  $r$  değeri değişmezdir.  $t_n$  'deki kesin ve yaklaşık çözümler sırasıyla;

$$[Y_n]_r = [\underline{Y}_n, \bar{Y}_n] \quad \text{ve} \quad [y_n]_r = [\underline{y}_n, \bar{y}_n] \quad ; \quad 0 \leq n \leq N \tag{4.44}$$

ile gösterilir.

Çözümün hesaplandığı noktalar ise  $h = \frac{T-t_0}{N}$  ;  $t_i = t_0 + ih$  ;  $0 \leq i \leq N$  dir.

Modifiye edilmiş Simpson metodu ile;

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{n+1} = & \underline{Y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3} F[t_{n-1}, \underline{Y}_{n-1}(r), \bar{Y}_{n-1}(r)] + \frac{4h}{3} F[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] + \\ & + \frac{h}{3} F \left[ \begin{array}{l} t_{n+1}, \underline{Y}_n(r) + h F[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)], \\ \bar{Y}_n(r) + h G[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] \end{array} \right] + h^3 \underline{A}(r) \end{aligned} \quad (4.45)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{n+1} = & \bar{Y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3} G[t_{n-1}, \underline{Y}_{n-1}(r), \bar{Y}_{n-1}(r)] + \frac{4h}{3} G[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] + \\ & + \frac{h}{3} G \left[ \begin{array}{l} t_{n+1}, \underline{Y}_n(r) + h F[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)], \\ \bar{Y}_n(r) + h G[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] \end{array} \right] + h^3 \bar{A}(r) \end{aligned} \quad (4.46)$$

denklemleri elde edilir ki burada;

$$\begin{aligned} A = & [\underline{A}, \bar{A}] \quad ; \quad [A]_r = [\underline{A}(r), \bar{A}(r)] \quad \text{ve} \\ [A]_r = & \left[ \frac{1}{6} f'(\zeta_2, Y(\zeta_2)) f_y(t_{i+1}, \zeta_2) - \frac{h^2}{90} f^{(4)}(\zeta_1, Y(\zeta_1)) \right]_r \end{aligned} \quad (4.47)$$

dir. Dahası;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1} = & \underline{y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3} F[t_{n-1}, \underline{y}_{n-1}(r), \bar{y}_{n-1}(r)] + \\ & + \frac{4h}{3} F[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)] + \frac{h}{3} F \left[ \begin{array}{l} t_{n+1}, \underline{y}_n(r) + h F[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)], \\ \bar{y}_n(r) + h G[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} = & \bar{y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3} G[t_{n-1}, \underline{y}_{n-1}(r), \bar{y}_{n-1}(r)] + \\ & + \frac{4h}{3} G[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)] + \frac{h}{3} G \left[ \begin{array}{l} t_{n+1}, \underline{y}_n(r) + h F[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)], \\ \bar{y}_n(r) + h G[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde ederiz. Burada başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 = & \underline{y}_0 + h \underline{f}(t_0, \tilde{y}(t_0)) + \frac{h^2}{2} \underline{f}'(t_0, \tilde{y}(t_0)) \\ \bar{y}_1 = & \bar{y}_0 + h \bar{f}(t_0, \tilde{y}(t_0)) + \frac{h^2}{2} \bar{f}'(t_0, \tilde{y}(t_0)) \end{aligned} \quad (4.50)$$

eşitliklerinden elde edilir.[18]

#### 4.5 2-Adım Metodu

**Tanım 4.5.1:** Başlangıç değer problemi çözümünde kullanılan  $m$ -adım çoklu adım metodu;  $m \geq 1$ 'den büyük tamsayı olmak üzere;

$$\begin{aligned} y(a_{m-1}) = & a_{m-1} y(t_i) + a_{m-2} y(t_{i-1}) + \dots + a_0 y(t_{i+1-m}) + \\ & + h \{ b_m f(t_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, y_i) + \dots + b_0 f(t_{i+1-m}, y_{i+1-m}) \} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$; \quad i = m-1, m, \dots, N-1 \quad ; \quad a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = b \quad \text{ve} \quad h = \frac{b-a}{N} = t_{i+1} - t_i \quad ;$$

$a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  ve  $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}$  sabittirler ve başlangıç değeri

$$y_0 = \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

ile belirtilir. [19,20]

Bu  $m$ -adım çoklu adım metodu, yukarıdaki denklemlerle gösterilebilen  $t_{i+1}$  noktasındaki  $y(t_{i+1})$  yaklaşımını bulmakta kullanılan fark denklemlerinden birisidir.

Burada  $b_m = 0$  iken (4.51) denklemi önceden belirlenmiş değerler açısından  $y_{i+1}$ 'i açık olarak verdiğinden dolayı metod açıktır(explicit).  $b_m \neq 0$  iken  $y_{i+1}$  (4.51) denkleminin

her iki tarafında da olduğu için ve kapalı olarak belirlendiğinden dolayı denklem kapalıdır. [19,20]

Adams-Bashforth 2-adım metodu ise  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$y_0 = \alpha_0 \quad , \quad y_1 = \alpha_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[ 3 f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}) \right] \quad (4.2)$$

#### 4.5.1 Bulanık sayıların interpolasyonu

Bulanık kümele için interpolasyon problemi aşağıdaki gibidir:

$t$  zaman değişkeni için  $f(t)$  bilgisi bir bulanık kümeyi gösterebilir.  $f$  domainindeki bütün  $t$ 'ler için amaç(hedef)  $f(t)$  fonksiyonuna yaklaşmaktır.  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$  ,

$\mathbb{R}$ 'de  $(n+1)$ -ayık nokta ve  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$  ,  $E$ 'de  $(n+1)$ -tane bulanık kümeler olsun.

Bu verilerin (dataların) bulanık interpolasyonu;

- $f(t_i) = \tilde{u}_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$
- Veriler eğer klasik (crisp) ise;  $f$ 'in interpolasyonu da klasik (crisp) tir.

Bu şartları sağlayan  $f: \mathbb{R} \rightarrow E$  fonksiyonu bulanık-değerli sürekli bir fonksiyondur.

Bu şartları yerine getiren bir fonksiyon aşağıdaki gibi kurulabilir:

Herhangi bir  $\alpha \in [0, 1]$  için ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $C_\alpha^i = [\tilde{u}_i]^\alpha$  olsun. Her bir  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  için derecesi  $\leq n$  olan tek polinomu gösteren  $P_x$  tir öyle ki

$$P_x(t_i) = x_i \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad \text{ve} \quad P_x(t) = \sum_{i=0}^n x_i \left( \prod_{i \neq j} \frac{t-t_i}{t_i-t_j} \right) \quad (4.53)$$

dir . Son olarak; her bir  $t \in \mathbb{R}$  ve bütün  $\zeta \in \mathbb{R}$  için  $f(t) \in E$  olmak üzere

$$(f(t))(\zeta) = \sup \left\{ \alpha \in [0, 1] : \exists X \in C_\alpha^0 \times \dots \times C_\alpha^m \quad \text{öyle ki} \quad P_X(t) = \zeta \right\} \quad (4.54)$$

interpolasyon polinomu ;  $0 \leq \alpha \leq 1$  için

$$[f(t)]^\alpha = \{y \in \mathbb{R} : y = P_x(t), x = [\tilde{u}_i]^\alpha, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.55)$$

olarak seviye kümesi biçiminde de yazılabilir.

$\tilde{u}_i$  verileri üçgensel bulanık sayı olarak verildiğinde; interpolasyon polinomunun değerleri de üçgensel bulanık sayı olur. O halde  $f(t)$ , hesaplamada gayet uygun olan belirli, basit bir forma sahiptir. [19,20]

**Teorem 4.5.1 :**  $(t_i, \tilde{u}_i)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  gözlenen veriler olsun ve farz edelim ki her bir  $\tilde{u}_i = (\tilde{u}_i^l, \tilde{u}_i^c, \tilde{u}_i^r)$  E nin bir elemanı olsun. O halde her bir  $t \in [t_0, t_n]$  için  $\tilde{f}(t) = (f^l(t), f^c(t), f^r(t)) \in E$  olmak üzere ; [19,20]

$$\begin{aligned} f^l(t) &= \sum_{l_i(t) \geq 0} l_i(t) u_i^l + \sum_{l_i(t) < 0} l_i(t) u_i^r \\ f^c(t) &= \sum_{i=1}^n l_i(t) u_i^c \\ f^r(t) &= \sum_{l_i(t) \geq 0} l_i(t) u_i^r + \sum_{l_i(t) < 0} l_i(t) u_i^l \end{aligned} \quad (4.56)$$

öyle ki

$$l_i(t) = \prod_{j \neq i}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \quad (4.57)$$

#### 4.5.2 Bulanık diferansiyel denklemlerin çözümü için 2-adım metodu

$\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$  başlangıç değer problemini 2-adım metoduyla çözmek için bulanık başlangıç değeri  $\tilde{y}(t_i)$ ,  $\tilde{y}(t_{i-1})$  olsun. Yani;  $\tilde{f}(t_{i-1}, \tilde{y}(t_{i-1}))$ ,  $\tilde{f}(t_i, \tilde{y}(t_i))$  olarak tanımlansın.

Bu başlangıç değerlerinin üçgen bulanık sayıları olarak gösterimleri;

$$(f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})), f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1}))) \quad (4.58)$$

$$(f^l(t_i, y(t_i)), f^c(t_i, y(t_i)), f^r(t_i, y(t_i))) \quad (4.59)$$

dir. (4.51) dikkate alınarak;

$$\tilde{y}(t_{i+1}) = \tilde{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{f}(t, y(t)) dt \quad (4.60)$$

olur.  $\tilde{y}(t)$  bilinmediğinden dolayı;  $\tilde{f}(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$  ve  $\tilde{f}(t_i, y(t_i))$  bulanık sayıları üzerinde bulanık interpolasyonu kullanılır. Böylece Teorem 4.5.1 'den ;  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  için;

$$f^l(t, y(t)) = \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) \geq 0}}^i l_j(t) f^l(t_j, y(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) < 0}}^i l_j(t) f^r(t_j, y(t_j))$$

$$f^c(t, y(t)) = \sum_{j=i-1}^i l_j(t) f^c(t_j, y(t_j)) \quad (4.61)$$

$$f^r(t, y(t)) = \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) \geq 0}}^i l_j(t) f^r(t_j, y(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) < 0}}^i l_j(t) f^l(t_j, y(t_j))$$

$$l_{i-1}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i-1}-t_i} \leq 0 \quad ; \quad l_i(t) = \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \geq 0 \quad (4.62)$$

Böylece

$$f^l(t, y(t)) = l_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^l(t_i, y(t_i)) \quad (4.63)$$

$$f^c(t, y(t)) = l_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^c(t_i, y(t_i)) \quad (4.64)$$

$$f^r(t, y(t)) = l_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^r(t_i, y(t_i)) \quad (4.65)$$

elde edilir.  $x_l \leq x_c \leq x_r$   $U = (x_l, x_c, x_r)$  üçgensel bulanık sayı,  $[U]^0 = \{x_l, x_r\}$  ve  $[U]_0 = \{x_c\}$  olmak üzere bu üçgensel bulanık sayının seviye kümesi herhangi bir  $r \in I = [0,1]$  için;

$$[U]^r = [x_c - (1-r)(x_c - x_l), x_c + (1-r)(x_r - x_c)] \quad (4.66)$$

olur. (4.65) ve (4.60)'ü kullanarak;  $\tilde{y}^\alpha(t_{i+1}) = [\underline{y}^\alpha(t_{i+1}), \bar{y}^\alpha(t_{i+1})]$  olmak üzere;

$$\underline{y}^\alpha(t_{i+1}) = \underline{y}^\alpha(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\alpha f^c(t, y(t)) + (1-\alpha) f^l(t, y(t))] dt \quad (4.67)$$

$$\bar{y}^\alpha(t_{i+1}) = \bar{y}^\alpha(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\alpha f^c(t, y(t)) + (1-\alpha) f^r(t, y(t))] dt \quad (4.68)$$

olur. (4.63) ve (4.67)'i (4.64)'da; (4.64) ve (4.65)'yi (4.67)'de yerine yazılırsa;

$$\underline{y}^\alpha(t_{i+1}) = \underline{y}^\alpha(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \alpha (l_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^c(t_i, y(t_i))) + \right. \\ \left. + (1-\alpha) (l_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^l(t_i, y(t_i))) \right\} dt \quad (4.69)$$

$$\bar{y}^\alpha(t_{i+1}) = \bar{y}^\alpha(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \alpha (l_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^c(t_i, y(t_i))) + \right. \\ \left. + (1-\alpha) (l_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^r(t_i, y(t_i))) \right\} dt \quad (4.70)$$

olur. Bu son eşitlikler integre edilirse;

$$\underline{y}^\alpha(t_{i+1}) = \underline{y}^\alpha(t_i) - \frac{h}{2} (\alpha f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1}))) + \\ + \frac{3h}{2} (\alpha f^c(t_i, y(t_i)) + (1-\alpha) f^l(t_i, y(t_i))) \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^\alpha(t_{i+1}) = & \bar{y}^\alpha(t_i) - \frac{h}{2} (\alpha f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1}))) + \\ & + \frac{3h}{2} (\alpha f^c(t_i, y(t_i)) + (1-\alpha) f^r(t_i, y(t_i))) \end{aligned} \quad (4.72)$$

eşitliklerini elde edilir. Böylece;

$$\underline{y}^\alpha(t_{i+1}) = \underline{y}^\alpha(t_i) - \frac{h}{2} \underline{f}^\alpha(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{3h}{2} \underline{f}^\alpha(t_i, y(t_i)) \quad (4.73)$$

$$\bar{y}^\alpha(t_{i+1}) = \bar{y}^\alpha(t_i) - \frac{h}{2} \bar{f}^\alpha(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{3h}{2} \bar{f}^\alpha(t_i, y(t_i)) \quad (4.74)$$

olur . (4.73) ve (4.74)'e başlangıç değerleri de eklenirse,

$$\begin{cases} \underline{y}^\alpha(t_{i+1}) = \underline{y}^\alpha(t_i) - \frac{h}{2} \underline{f}^\alpha(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{3h}{2} \underline{f}^\alpha(t_i, y(t_i)) \\ \bar{y}^\alpha(t_{i+1}) = \bar{y}^\alpha(t_i) - \frac{h}{2} \bar{f}^\alpha(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{3h}{2} \bar{f}^\alpha(t_i, y(t_i)) \\ \underline{y}^\alpha(t_{i-1}) = \alpha_0 \quad ; \quad \bar{y}^\alpha(t_i) = \alpha_1 \\ \bar{y}^\alpha(t_{i-1}) = \alpha_2 \quad ; \quad \underline{y}^\alpha(t_i) = \alpha_3 \end{cases} \quad (4.75)$$

bulanık başlangıç değer problemi için 2-adım metodu elde edilir.[20]

#### 4.6 Adams-Bashforth 3-adım Metodu

Tanım 4.5.1'in varsayımıyla (4.51)  $m$  – adım çoklu adım metodundan çıkan birkaç çok adımlı metod aşağıdaki gibidir.[21]

Adams-Bashforth 2-adım metodu

$$y_0 = \alpha_0 \quad , \quad y_1 = \alpha_1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})] \quad (4.76)$$

Adams-Moulton 2-adım metodu

$$y_0 = \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(t_{i-1}, y_{i-1}) - f(t_{i-2}, y_{i-2})] \quad (4.77)$$

Adams-Bashforth 3-adım metodu

$$y_0 = \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2 \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2})] \quad (4.78)$$

Adams-Moulton 3-adım metodu

$$y_0 = \alpha_0, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2 \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \text{ için;}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [9f(t_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(t_i, y_i) - 5f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_{i-2}, y_{i-2})] \quad (4.79)$$

#### 4.6.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin çözülmesi için Adams-Bashforth 3-adım metodu

Bu bölümde Tanım 4.5.1'in varsayımıyla (4.51) Adams-Bashforth 3-adım metodu ile  $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$  başlangıç değer probleminin kesin çözümüne nümerik olarak yaklaşarak çözülecektir.

Bulanık başlangıç değerleri  $\tilde{y}(t_{i-1}), \tilde{y}(t_i), \tilde{y}(t_{i+1})$  yani;  $\tilde{f}(t_{i-1}, y(t_{i-1})), \tilde{f}(t_i, y(t_i)), \tilde{f}(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$  üçgen bulanık sayılar olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) &= \{f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})), f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})), f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1}))\} \\ \tilde{f}(t_i, y(t_i)) &= \{f^l(t_i, y(t_i)), f^c(t_i, y(t_i)), f^r(t_i, y(t_i))\} \\ \tilde{f}(t_{i+1}, y(t_{i+1})) &= \{f^l(t_{i+1}, y(t_{i+1})), f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})), f^r(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Ayrıca ;

$$\tilde{y}(t_{i+2}) = \tilde{y}(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \tilde{f}(t, y(t)) dt \quad (4.81)$$

dir.  $\tilde{f}(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$  ,  $\tilde{f}(t_i, y(t_i))$  ve  $\tilde{f}(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$  'lerin Teorem 4.5.1'deki bulanık sayıların (4.56) ve (4.57) eşitliklerindeki interpolasyonları ile;

$$\begin{aligned} f^l(t, y(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) \geq 0}}^{i+1} l_j(t) f^l(t_j, y(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) < 0}}^{i+1} l_j(t) f^r(t_j, y(t_j)) \\ f^c(t, y(t)) &= \sum_{j=i-1}^{i+1} l_j(t) f^c(t_j, y(t_j)) \\ f^r(t, y(t)) &= \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) \geq 0}}^{i+1} l_j(t) f^r(t_j, y(t_j)) + \sum_{\substack{j=i-1 \\ l_j(t) < 0}}^{i+1} l_j(t) f^l(t_j, y(t_j)) \end{aligned} \quad (4.82)$$

$t_{i-1} \leq t \leq t_{i+1}$  için ;

$$\begin{aligned} l_{i-1}(t) &= \frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})}{(t_{i-1}-t_i)(t_{i-1}-t_{i+1})} \geq 0 \\ l_i(t) &= \frac{(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})}{(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})} \leq 0 \\ l_{i+1}(t) &= \frac{(t-t_{i-1})(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

elde edilir. Bundan dolayı aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir:

$$f^l(t, y(t)) = l_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^r(t_i, y(t_i)) + l_{i+1}(t) f^l(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \quad (4.84)$$

$$f^c(t, y(t)) = l_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^c(t_i, y(t_i)) + l_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \quad (4.85)$$

$$f^r(t, y(t)) = l_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^l(t_i, y(t_i)) + l_{i+1}(t) f^r(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \quad (4.86)$$

(4.66) ve (4.81) den;  $\tilde{y}(t_{i+2}) = \left[ \underline{y}^\alpha(t_{i+2}), \bar{y}^\alpha(t_{i+2}) \right]$  olmak üzere

$$\underline{y}^\alpha(t_{i+2}) = \underline{y}^\alpha(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, y(t)) + (1-\alpha) f^l(t, y(t)) \} dt \quad (4.87)$$

$$\overline{y}^\alpha(t_{i+2}) = \overline{y}^\alpha(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \{ \alpha f^c(t, y(t)) + (1-\alpha) f^r(t, y(t)) \} dt \quad (4.88)$$

olur. (4.84) ve (4.85), (4.87)'da ; (4.85) ve (4.86), (4.88) da yerleştirilirse ;

$$\underline{y}^\alpha(t_{i+2}) = \underline{y}^\alpha(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \left( l_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^c(t_i, y(t_i)) + \right. \\ \left. + l_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right) \\ + (1-\alpha) \left( l_{i-1}(t) f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^l(t_i, y(t_i)) + \right. \\ \left. + l_{i+1}(t) f^l(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right) \end{array} \right\} dt \quad (4.89)$$

$$\overline{y}^\alpha(t_{i+2}) = \overline{y}^\alpha(t_{i+1}) + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \left( l_{i-1}(t) f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^c(t_i, y(t_i)) + \right. \\ \left. + l_{i+1}(t) f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right) \\ + (1-\alpha) \left( l_{i-1}(t) f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + l_i(t) f^r(t_i, y(t_i)) + \right. \\ \left. + l_{i+1}(t) f^r(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right) \end{array} \right\} dt \quad (4.90)$$

Aşağıdaki sonuçlar ise integrasyon ile elde edilir :

$$\begin{aligned} \underline{y}^\alpha(t_{i+2}) = & \underline{y}^\alpha(t_{i+1}) + \frac{5h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i-1}, y(t_{i-1})) \right] - \\ & - \frac{16h}{12} \left[ \alpha f^c(t_i, y(t_i)) + (1-\alpha) f^r(t_i, y(t_i)) \right] + \\ & + \frac{23h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + (1-\alpha) f^l(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} \overline{y}^\alpha(t_{i+2}) = & \overline{y}^\alpha(t_{i+1}) + \frac{5h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i-1}, y(t_{i-1})) \right] - \\ & - \frac{16h}{12} \left[ \alpha f^c(t_i, y(t_i)) + (1-\alpha) f^l(t_i, y(t_i)) \right] + \\ & + \frac{23h}{12} \left[ \alpha f^c(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + (1-\alpha) f^r(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] \end{aligned} \quad (4.92)$$

Böylece ;

$$\underline{y}^{\alpha}(t_{i+2}) = \underline{y}^{\alpha}(t_{i+1}) + \frac{h}{12} \left[ 5 \underline{f}^{\alpha}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - 16 \underline{f}^{\alpha}(t_i, y(t_i)) + 23 \underline{f}^{\alpha}(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] \quad (4.93)$$

$$\bar{y}^{\alpha}(t_{i+2}) = \bar{y}^{\alpha}(t_{i+1}) + \frac{h}{12} \left[ 5 \bar{f}^{\alpha}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - 16 \bar{f}^{\alpha}(t_i, y(t_{i+1})) + 23 \bar{f}^{\alpha}(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] \quad (4.94)$$

Bundan dolayı aşağıdaki gibi Adams-Bashforth 3-adım metodu elde edilir.[21]

$$\begin{cases} \underline{y}^{\alpha}(t_{i+2}) = \underline{y}^{\alpha}(t_{i+1}) + \frac{h}{12} \left[ 5 \underline{f}^{\alpha}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - 16 \underline{f}^{\alpha}(t_i, y(t_i)) + 23 \underline{f}^{\alpha}(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] \\ \bar{y}^{\alpha}(t_{i+2}) = \bar{y}^{\alpha}(t_{i+1}) + \frac{h}{12} \left[ 5 \bar{f}^{\alpha}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - 16 \bar{f}^{\alpha}(t_i, y(t_{i+1})) + 23 \bar{f}^{\alpha}(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \right] \\ \underline{y}^{\alpha}(t_{i-1}) = \alpha_0, \underline{y}^{\alpha}(t_i) = \alpha_1, \underline{y}^{\alpha}(t_{i+1}) = \alpha_2, \bar{y}^{\alpha}(t_{i-1}) = \alpha_3, \bar{y}^{\alpha}(t_i) = \alpha_4, \bar{y}^{\alpha}(t_{i+1}) = \alpha_5 \end{cases} \quad (4.95)$$

Benzer yolla  $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t))$  bulanık başlangıç değer problemini aşağıdaki gibi Adams-Bashforth 2-adım metoduyla çözebilir. [21]

$$\begin{cases} \underline{y}^{\alpha}(t_{i+1}) = \underline{y}^{\alpha}(t_i) - \left(\frac{h}{2}\right) \underline{f}^{\alpha}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \left(\frac{3h}{2}\right) \underline{f}^{\alpha}(t_i, y(t_i)) \\ \bar{y}^{\alpha}(t_{i+1}) = \bar{y}^{\alpha}(t_i) - \left(\frac{h}{2}\right) \bar{f}^{\alpha}(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \left(\frac{3h}{2}\right) \bar{f}^{\alpha}(t_i, y(t_i)) \\ \underline{y}^{\alpha}(t_{i-1}) = \alpha_1, \underline{y}^{\alpha}(t_i) = \alpha_2, \bar{y}^{\alpha}(t_{i-1}) = \alpha_3, \bar{y}^{\alpha}(t_i) = \alpha_4 \end{cases} \quad (4.96)$$

#### 4.7. 3. mertebeden Runge-Kutta Metodu

(4.28) başlangıç değer problemi göz önüne alarak, aşağıdaki 3. mertebeden Runge-Kutta metodunu;

$$\begin{aligned}
K_1 &= h f(t_n, y(t_n)) \\
K_2 &= h f(t_n + c_2 h, y(t_n) + a_{21} K_1) \\
K_3 &= h f(t_n + c_3 h, y(t_n) + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)
\end{aligned} \tag{4.97}$$

olacak şekilde 3 eğimi ile birlikte;

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + W_1 K_1 + W_2 K_2 + W_3 K_3 \tag{4.98}$$

şeklinde olduğu kabul edilsin.  $t_n$  civarında Taylor açılımı yapılırsa;

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{1!} y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(t_n) + \dots \tag{4.99}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
y''(t) &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t} (f(t, y(t))) = f_t + f f_y \\
y^{(3)}(t) &= \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f(t, y(t))) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (f_t + f f_y) = f_{tt} + 2f f_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y (f_t + f f_y)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

olacağından bu eşitlikler (4.98) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \frac{h}{1!} f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2!} [f_t + f f_y]_{t_n} + \\
&+ \frac{h^3}{3!} [f_{tt} + 2f f_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y (f_t + f f_y)]_{t_n} + \dots
\end{aligned} \tag{4.101}$$

olur. Ayrıca iki değişkenli fonksiyonların Taylor açılımından;

$$\begin{aligned}
f(t_n + c_2 h, y(t_n) + a_{21} K_1) &= f(t_n, y(t_n)) + c_2 h f_t(t_n) + a_{21} K_1 f_y(t_n) + \\
&+ \frac{c_2^2 h^2}{2} f_{tt}(t_n) + c_2 h a_{21} K_1 f_{ty}(t_n) + \frac{a_{21}^2 K_1^2}{2} f_{yy}(t_n)
\end{aligned} \tag{4.102}$$

ve

$$\begin{aligned}
f(t_n + c_3 h, y(t_n) + a_{31} K_1 + a_{32} K_2) &= f(t_n, y(t_n)) + c_3 h f_t(t_n) + (a_{31} K_1 + a_{32} K_2) f_y(t_n) + \\
&+ \frac{1}{2!} \left[ c_3^2 h^2 f_{tt}(t_n) + 2c_3 h (a_{31} K_1 + a_{32} K_2) f_{ty}(t_n) + \right. \\
&\left. + (a_{31} K_1 + a_{32} K_2)^2 f_{yy}(t_n) \right]
\end{aligned} \tag{4.103}$$

olacaktır. Bu son (4.102) ve (4.103) eşitlikleri (4.97) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$K_1 = h f_n$$

$$K_2 = h \left\{ f_n + \frac{h}{1!} [c_2 f_t + a_{21} K_1 f_y] + \frac{h^2}{2} [c_2^2 f_{tt} + 2c_2 a_{21} f f_{ty} + a_{21}^2 f^2 f_{yy}]_{t_n} + \dots \right\}$$

$$K_3 = h \left\{ f_n + c_3 h f_t + [a_{31} K_1 + a_{32} K_2] f_y + \frac{1}{2!} [c_3^2 h^2 f_{tt} + 2c_3 h (a_{31} K_1 + a_{32} K_2) f_{ty} + (a_{31} K_1 + a_{32} K_2)^2 f_{yy}]_{t_n} + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= h \left\{ \begin{aligned} &f_n + \frac{h}{1!} [c_3 f_t + (a_{31} + a_{32}) f_n f_y]_{t_n} + \frac{h^2}{2!} \left[ \begin{aligned} &2(c_2 f_t + a_{21} f f_y) a_{32} f_y + c_3^2 f_{tt} \\ &+ 2c_3 a_{31} f_{tt} + 2c_3 a_{32} f_{ty} f_n \\ &+ (a_{31}^2 + a_{32}^2 + 2a_{31} a_{32}) f_n^2 f_{yy} \end{aligned} \right]_{t_n} \\ &+ \frac{h^3}{3!} \left[ \begin{aligned} &3(c_2^2 f_{tt} + 2c_2 a_{21} f f_{ty} + a_{21}^2 f^2 f_{yy}) a_{32} f_y \\ &+ (6c_3 a_{32} f_{ty} + 6a_{31} f_n a_{32} f_{yy}) (c_2 f_t + a_{21} f f_y) \end{aligned} \right]_{t_n} \\ &+ \dots \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

şeklinde yazılabilir.  $K_1$ ,  $K_2$  ve  $K_3$  değerleri (4.98)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) = y(t_n) + [W_1 + W_2 + W_3]hf_n + h^2 & \left[ W_2(c_3f_t + a_{21}f f_y) + \right. \\
& \left. + W_3(c_3f_t + (a_{31} + a_{32})f_n f_y) \right]_{t_n} + \\
& + \frac{h^2}{2} \left[ W_2(c_2^2f_{tt} + 2c_2a_{21}f f_{ty} + a_{21}^2f^2 f_{yy}) + \right. \\
& \left. + W_3 \left( 2(c_2f_t + a_{21}f f_y)a_{32}f_y + c_3^2f_{tt} + 2c_3a_{31}f_n + \right) \right. \\
& \left. + 2c_3a_{32}f_n f_{ty} + (a_{31}^2 + a_{32}^2 + 2a_{31}a_{32})f_n^2 f_{yy} \right]_{t_n}
\end{aligned} \tag{4.105}$$

denklemini elde edilir. (4.101) ve (4.105)'daki  $h$ ,  $h^2$  ve  $h^3$  katsayılarının kıyaslanmasıyla;

$$\begin{aligned}
a_{21} = c_2 & & a_{31} + a_{32} = c_3 & & W_1 + W_2 + W_3 = 1 \\
c_2W_2 + c_3W_3 = \frac{1}{2} & & c_2^2W_2 + c_3^2W_3 = \frac{1}{3} & & c_2a_{32}W_3 = \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{4.106}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.7.10) eşitliğindeki 4. ve 5. denklemleri  $c_3a_{32}$  ile çarparak ve 6. denklemini kullanarak;

$$c_2^2a_{32}W_2 + c_3 \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2}c_2a_{32} \quad c_2^3a_{32}W_2 + c_3^2 \left( \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}c_2a_{32} \tag{4.107}$$

eşitliklerini oluşturulur. Bu iki eşitlikteki  $W_2$ 'yi yalnız bırakarak oluşturulan denklemler eşitlenirse;

$$\frac{3c_2a_{32} - c_3}{6c_2^2a_{32}} = \frac{2c_2a_{32} - c_3^2}{6c_2^3a_{32}} \quad \text{ya da} \quad a_{32} = \frac{c_3(c_3 - c_2)}{c_2(2 - 3c_2)} \tag{4.108}$$

şeklindeki eşitlikler oluşur.

Genellikle  $c_2$  ve  $c_3$  keyfi olarak seçilir.  $a_{32}$  ise (4.108) eşitliği ile belirlenir. Ancak;

$c_2 = c_3$  ise (4.106) eşitliklerindeki 4. Ve 5. Denklemlerden  $c_2 = \frac{2}{3}$  olarak elde ederiz.

Geriye kalan parametre değerleri ise yine (4.106) eşitliklerinden elde edilir.

$c_2 = c_3$  iken  $c_2 = 2/3$  ve  $a_{21} = 2/3$  olarak alınıp, diğer parametreler ise;

$$a_{31} = 0; \quad a_{32} = 2/3; \quad W_1 = 2/8; \quad W_2 = 3/8; \quad \text{ve} \quad W_3 = 3/8 \quad (4.109)$$

olarak alınabilir. Böylece 3. Mertebeden Runge-Kutta metodu;

$$\begin{aligned} K_1 &= h f(t_n, y(t_n)) \\ K_2 &= h f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y(t_n) + \frac{2}{3}K_1\right) \\ K_3 &= h f\left(t_n + \frac{2h}{3}, y(t_n) + \frac{2}{3}K_2\right) \end{aligned} \quad (4.110)$$

olmak üzere;

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3] \quad (4.111)$$

olarak elde edilir. [23,24]

#### 4.7.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerinde 3. mertebeden Runge-Kutta metodu

$\tilde{Y} = [\underline{Y}, \bar{Y}]$  ve  $\tilde{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$  (4.1.1) bulanık başlangıç değer probleminin sırasıyla kesin ve

yaklaşık çözümleri ve bunların seviyeleri  $[Y(t)]_r = [\underline{Y}(t;r), \bar{Y}(t;r)]$  ve

$[y(t)]_r = [\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)]$  olsun. O halde  $t_n$ 'deki kesin ve yaklaşık çözümler;

$$[Y(t_n)]_r = [\underline{Y}(t_n;r), \bar{Y}(t_n;r)] \quad \text{ve} \quad [y(t_n)]_r = [\underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)] \quad 0 \leq n \leq N \quad (4.112)$$

şeklindedir. Çözümün hesaplandığı noktalar ise ;  $h = \frac{T-t_0}{N}$  ;  $t_i = t_0 + i h$  ;  $0 \leq i \leq N$  dir. O halde bulanık diferansiyel denklemin nümerik çözümü için 3. mertebeden Runge-Kutta metodu;

$$\begin{aligned}\underline{K}_1 &= h F \left[ t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r) \right] \\ \underline{K}_2 &= h F \left[ t_n + \frac{2h}{3}, \underline{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \underline{K}_1, \bar{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \underline{K}_1 \right] \\ \underline{K}_3 &= h F \left[ t_n + \frac{2h}{3}, \underline{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \underline{K}_2, \bar{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \underline{K}_2 \right]\end{aligned}\tag{4.113}$$

olmak üzere

$$\underline{y}(t_{n+1}; r) = \underline{y}(t_n; r) + \frac{1}{8} [2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3]\tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_1 &= h G \left[ t_n, \underline{y}(t_n; r), \bar{y}(t_n; r) \right] \\ \bar{K}_2 &= h G \left[ t_n + \frac{2h}{3}, \underline{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \bar{K}_1, \bar{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \bar{K}_1 \right] \\ \bar{K}_3 &= h G \left[ t_n + \frac{2h}{3}, \underline{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \bar{K}_2, \bar{y}(t_n; r) + \frac{2}{3} \bar{K}_2 \right]\end{aligned}\tag{4.115}$$

olmak üzere

$$\bar{y}(t_{n+1}; r) = \bar{y}(t_n; r) + \frac{1}{8} [2\bar{K}_1 + 3\bar{K}_2 + 3\bar{K}_3]\tag{4.116}$$

şeklindedir [25,26].

#### 4.8 He'nin Varyasyonel İterasyon Metodu

Varyasyonel iterasyon metodu [27-28], [34]'deki tam olarak genel Lagrange çarpanı metodunun modifiye edilmiş halidir. Bu metod, büyük lineer olmayan kesin çözümüne çok hızlı bir şekilde yakınsayan yaklaşımlarla problemlerin tam olarak, kolayca ve etkili bir şekilde çözülmesini sağlar.

Aşağıdaki denklem lineer olmayan bir denklem olsun:

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t) \quad (4.117)$$

Burada  $L$  lineer operatör,  $N$  lineer olmayan operatör, ve  $g(t)$  ise bilinmeyen analitik fonksiyondur. Varyasyonel iterasyon metoduna göre aşağıdaki düzeltme fonksiyoneli kurabiliriz:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(\zeta) (Lu_n(\zeta) + Nu_n(\zeta) - g(\zeta)) d\zeta \quad (4.118)$$

Burada  $\lambda$ , varyasyonel teorisi vasıtasıyla belirlenebilen genel Lagrange Çarpanıdır.  $u_0(t)$  ise başlangıç yaklaşımı olup  $\delta \tilde{u}_n = 0$ 'dır [27-29,34].

##### 4.8.1 Bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için varyasyonel iterasyon metodu

(4.1) bulanık başlangıç değer problemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = \tilde{f}(t, \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (4.1)$$

(4.118) varyasyonel iterasyon denkleminde;

$$\tilde{y}_{n+1}(t) = \tilde{y}_n(t) + \int_0^t \tilde{\lambda}(\zeta) (L\tilde{y}_n(\zeta) + N\tilde{y}_n(\zeta) - g(\zeta)) d\zeta \quad (4.119)$$

denklemini yazılır. O halde  $\tilde{Y} = [\underline{Y}, \bar{Y}]$  ve  $\tilde{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$  (4.1) bulanık başlangıç değer probleminin sırasıyla kesin ve yaklaşık çözümleri ve bunların seviyeleri  $[Y(t)]_r = [\underline{Y}(t;r), \bar{Y}(t;r)]$  ,  $[y(t)]_r = [\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)]$  ve bunların seviyeleri  $[Y(t_n)]_r = [\underline{Y}(t_n;r), \bar{Y}(t_n;r)]$  ,  $[y(t_n)]_r = [\underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)]$  ;  $0 \leq n \leq N$  , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(\zeta) = (\underline{\lambda}(\zeta), \bar{\lambda}(\zeta))$  olmak üzere (4.117) denklemi;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) - \underline{f}(\zeta, \tilde{y}_n(\zeta;r)) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t;r) &= \bar{y}_n(t;r) + \int_0^t \bar{\lambda}(\zeta) \left( \bar{y}'_n(\zeta;r) - \bar{f}(\zeta, \tilde{y}_n(\zeta;r)) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (4.120)$$

şeklinde yazılır. (4.120) eşitlikleri bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerine varyasyonel iterasyon metodu ile nümerik yaklaşımdır.

## BÖLÜM V

### UYGULAMALAR

**5.1 Uygulama:** Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklem;

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = -\tilde{y}(t) & , \quad t \in [0,1] \\ \tilde{y}(0) = (0.75 + 0.25r, 1.125 - 0.125r) \end{cases} \quad (5.1)$$

şeklinde olsun.  $\tilde{y}(t) = (\underline{y}(t), \bar{y}(t))$  bulanık sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun seviyeleri,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\tilde{y}(t;r)$  olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \underline{y}'(t;r) &= \underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\bar{y}(t;r) \\ \bar{y}'(t;r) &= \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\underline{y}(t;r) \\ \underline{y}(0;r) &= 0.75 + 0.25r \\ \bar{y}(0;r) &= 1.125 - 0.125r \end{aligned} \quad (5.2)$$

biçimindeki (5.1) denkleminin parametrik formu oluşur. (5.1) denkleminin kesin çözümü;[31]

$$\tilde{Y}(t;r) = \begin{pmatrix} 0.1875e^{-t}(-1+r) + e^t(0.9375 + -0.0625r), \\ 0.1875e^{-t}(1-r) + e^t(0.9375 + -0.0625r) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

#### 5.1.1 Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  dir. Buradan (4.34) ve (4.35)

modifiye edilmiş Euler metodu iterasyon denkleminde

$$F[y, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] = \underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\bar{y}(t;r) \quad (5.4)$$

$$G[y, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] = \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\underline{y}(t;r)$$

$\underline{y}(t_n; r) = \underline{y}_n(r)$  ve  $\bar{y}(t_n; r) = \bar{y}_n(r)$  olmak üzere (5.1) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) - \frac{h}{2} \bar{y}_n(r) - \frac{h}{2} (\bar{y}_n(r) + h \underline{y}_n(r)) \quad (5.5)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) - \frac{h}{2} \underline{y}_n(r) - \frac{h}{2} (\underline{y}_n(r) + h \bar{y}_n(r))$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu itarasyonlar sonucundaki nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.1 de verilmiştir. [17]

### 5.1.2 Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  olsun.

$$\underline{f}(t, \tilde{y}(t)) = -\bar{y}(t) \quad (5.6)$$

$$\bar{f}(t, \tilde{y}(t)) = -\underline{y}(t)$$

olduğundan,

$$\underline{f}'(t, \tilde{y}(t)) = -\bar{y}'(t) = \underline{y}(t) \quad (5.7)$$

$$\bar{f}'(t, \tilde{y}(t)) = -\underline{y}'(t) = \bar{y}(t)$$

olur. Buradan sağ ve sol yan fonksiyonların ikinci başlangıç değerleri (4.50) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}\underline{y}_1(r) &= \underline{y}_0(r) + h\underline{f}(t_0, \tilde{y}(t_0; r)) + \frac{h^2}{2}\underline{f}'(t_0, \tilde{y}(t_0; r)) \\ &= \left(1 + \frac{h^2}{2}\right)\underline{y}_0(r) - h\underline{y}_0(r)\end{aligned}\tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_1(r) &= \bar{y}_0(r) + h\bar{f}(t_0, \tilde{y}(t_0; r)) + \frac{h^2}{2}\bar{f}'(t_0, \tilde{y}(t_0; r)) \\ &= \left(1 + \frac{h^2}{2}\right)\bar{y}_0(r) - h\bar{y}_0(r)\end{aligned}\tag{5.9}$$

şeklinde olur. (4.48) ve (4.49) iterasyon denkleminde (5.1) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_{n-1}(r) - \frac{h}{3}\underline{y}_{n-1}(r) - \frac{4h}{3}\underline{y}_n(r) - \frac{h}{3}(\underline{y}_n(r) - h\underline{y}_n(r))\tag{5.10}$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_{n-1}(r) - \frac{h}{3}\bar{y}_{n-1}(r) - \frac{4h}{3}\bar{y}_n(r) - \frac{h}{3}(\bar{y}_n(r) - h\bar{y}_n(r))$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonların sonucundaki kesin çözüme nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.2 de verilmiştir. [18]

### 5.1.3 2-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  olsun. Kesin çözümden alınan

başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned}\underline{y}_0(r) &= \underline{Y}(0; r) & \underline{y}_1(r) &= \underline{Y}(t_1; r) \\ \bar{y}_0(r) &= \bar{Y}(0; r) & \bar{y}_1(r) &= \bar{Y}(t_1; r)\end{aligned}\tag{5.11}$$

olmak üzere (4.75) iterasyon denkleminde (5.1) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(r) &= \underline{y}_n(r) + \frac{h}{2} \underline{y}_{n-1}(r) + \frac{3h}{2} \underline{y}_n(r) \\ \bar{y}_{n+1}(r) &= \bar{y}_n(r) + \frac{h}{2} \bar{y}_{n-1}(r) + \frac{3h}{2} \bar{y}_n(r) \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.3 de verilmiştir. [20]

#### 5.1.4 Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 5$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.02$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) &= \underline{Y}(0; r) & \underline{y}_1(r) &= \underline{Y}(t_1; r) & \underline{y}_2(r) &= \underline{Y}(t_2; r) \\ \bar{y}_0(r) &= \bar{Y}(0; r) & \bar{y}_1(r) &= \bar{Y}(t_1; r) & \bar{y}_2(r) &= \bar{Y}(t_2; r) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (5.13)$$

olmak üzere, (4.95) iterasyon denkleminde (5.1) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+2}(r) &= \underline{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( -5\bar{y}_{n-1}(r) + 16\underline{y}_n(r) + 23\underline{y}_{n+1}(r) \right) \\ \bar{y}_{n+2}(r) &= \bar{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( -5\underline{y}_{n-1}(r) + 16\bar{y}_n(r) + 23\bar{y}_{n+1}(r) \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir olur. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.4 de verilmiştir. [21]

### 5.1.5 3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 5$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.02$  olsun. (4.113) ve (4.115)

eşitliklerinden

$$\underline{K}_1 = -h\underline{y}_n(r)$$

$$\underline{K}_2 = -h\underline{y}_n(r) \left( -1 + \frac{2h}{3} \right) \quad (5.15)$$

$$\underline{K}_3 = -h\underline{y}_n(r) \left( -1 + \frac{2h}{3} \left( -1 + \frac{2h}{3} \right) \right)$$

$$\overline{K}_1 = -h\underline{y}_n(r)$$

$$\overline{K}_2 = -h\underline{y}_n(r) \left( -1 + \frac{2h}{3} \right) \quad (5.16)$$

$$\overline{K}_3 = -h\underline{y}_n(r) \left( -1 + \frac{2h}{3} \left( -1 + \frac{2h}{3} \right) \right)$$

olmak üzere iterasyonlar (4.114) ve (4.116) iterasyon denklemlerinden (5.1) bulanık başlangıç değer probleminin nümerik çözümü için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{1}{8} (2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3) \quad (5.17)$$

$$\overline{y}_{n+1}(r) = \overline{y}_n(r) + \frac{1}{8} (2\overline{K}_1 + 3\overline{K}_2 + 3\overline{K}_3)$$

şeklindeki iterasyon denklemi elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.5 de verilmiştir. [25,26]

### 5.1.6 He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $\tilde{y}(t; r) = (\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r))$  , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(t) = (\underline{\lambda}(t), \bar{\lambda}(t))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t; r)) = (f(t, \underline{y}(t; r)), \bar{f}(t, \bar{y}(t; r)))$  olmak üzere (4.120) bulanık diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon denklemlerinden (5.1) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned}\underline{y}_{n+1}(t; r) &= \underline{y}_n(t; r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \underline{y}'_n(\zeta; r) + \bar{y}(\zeta; r) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t; r) &= \bar{y}_n(t; r) + \int_0^t \bar{\lambda}(\zeta) \left( \bar{y}'_n(\zeta; r) + \underline{y}(\zeta; r) \right) d\zeta \\ \underline{y}_0(t; r) &= \underline{Y}(0; r) = 0.75 + 0.25r \\ \bar{y}_0(t; r) &= \bar{Y}(0; r) = 1.125 - 0.125r\end{aligned}\tag{5.18}$$

Genel Lagrange çarpanları  $\underline{\lambda}(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta) = -1$  olduğundan (5.18) denklemi;

$$\begin{aligned}\underline{y}_{n+1}(t; r) &= \underline{y}_n(t; r) - \int_0^t \left( \underline{y}'_n(\zeta; r) + \bar{y}(\zeta; r) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t; r) &= \bar{y}_n(t; r) - \int_0^t \left( \bar{y}'_n(\zeta; r) + \underline{y}(\zeta; r) \right) d\zeta \\ \underline{y}_0(t; r) &= \underline{Y}(0; r) = 0.75 + 0.25r \\ \bar{y}_0(t; r) &= \bar{Y}(0; r) = 1.125 - 0.125r\end{aligned}\tag{5.19}$$

şeklinde yazılarak iterasyon denklemleri elde edilir. 10. iterasyon sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizlge 5.6'da verilmiştir.

Çizelge 5.1 (5.1) Denklemin modifiye edilmiş Euler metoduyla nümerik yaklaşım

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{y}-\underline{Y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{y}-\bar{Y} (r)$
<b>0.</b>	0.641073	0.866441	0.225368	1.05551	1.20575	0.150246
<b>0.1</b>	0.66745	0.890314	0.222864	1.04044	1.1957	0.155254
<b>0.2</b>	0.693827	0.914187	0.22036	1.02538	1.18564	0.160262
<b>0.3</b>	0.720204	0.93806	0.217856	1.01031	1.17558	0.16527
<b>0.4</b>	0.746581	0.961933	0.215352	0.995243	1.16552	0.170278
<b>0.5</b>	0.772958	0.985806	0.212848	0.980176	1.15546	0.175287
<b>0.6</b>	0.799335	1.00968	0.210344	0.96511	1.1454	0.180295
<b>0.7</b>	0.825712	1.03355	0.20784	0.950043	1.13535	0.185303
<b>0.8</b>	0.852089	1.05742	0.205336	0.934977	1.12529	0.190311
<b>0.9</b>	0.878466	1.0813	0.202831	0.91991	1.11523	0.195319
<b>1.</b>	0.904844	1.10517	0.200327	0.904844	1.10517	0.200327

Çizelge 5.2 (5.1) Denklemin modifiye edilmiş Simpson metoduyla nümerik yaklaşım

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{y}-\underline{Y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{y}-\bar{Y} (r)$
<b>0.</b>	0.629093	0.866441	0.237348	1.07133	1.20575	0.134425
<b>0.1</b>	0.656778	0.890314	0.233536	1.05515	1.1957	0.140548
<b>0.2</b>	0.684438	0.914187	0.229749	1.03886	1.18564	0.146775
<b>0.3</b>	0.712074	0.93806	0.225986	1.02247	1.17558	0.153106
<b>0.4</b>	0.739685	0.961933	0.222248	1.00598	1.16552	0.159541
<b>0.5</b>	0.767272	0.985806	0.218534	0.989383	1.15546	0.16608
<b>0.6</b>	0.794834	1.00968	0.214845	0.972682	1.1454	0.172723
<b>0.7</b>	0.822372	1.03355	0.21118	0.955877	1.13535	0.17947
<b>0.8</b>	0.849885	1.05742	0.20754	0.938968	1.12529	0.18632
<b>0.9</b>	0.877374	1.0813	0.203924	0.921955	1.11523	0.193274
<b>1.</b>	0.904838	1.10517	0.200333	0.904838	1.10517	0.200333

Çizelge 5.3 (5.1) Denklem 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{y}-\underline{Y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{y}-\bar{Y} (r)$
<b>0.</b>	0.866441	0.866441	0.221629	1.0863	1.20575	0.119454
<b>0.1</b>	0.890314	0.890314	0.217681	1.06997	1.1957	0.125723
<b>0.2</b>	0.914187	0.914187	0.213732	1.05365	1.18564	0.131992
<b>0.3</b>	0.93806	0.93806	0.209784	1.03732	1.17558	0.138261
<b>0.4</b>	0.961933	0.961933	0.205835	1.02099	1.16552	0.14453
<b>0.5</b>	0.985806	0.985806	0.201887	1.00466	1.15546	0.150799
<b>0.6</b>	1.00968	1.00968	0.197938	0.988336	1.1454	0.157068
<b>0.7</b>	1.03355	1.03355	0.193989	0.972009	1.13535	0.163337
<b>0.8</b>	1.05742	1.05742	0.190041	0.955682	1.12529	0.169606
<b>0.9</b>	1.0813	1.0813	0.186092	0.939354	1.11523	0.175875
<b>1.</b>	1.10517	1.10517	0.182144	0.923027	1.10517	0.182144

Çizelge 5.4 (5.1) Denklem Adams-Bashforh 3-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{y}-\underline{Y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{y}-\bar{Y} (r)$
<b>0.</b>	0.752667	0.866441	0.113774	1.08509	1.20575	0.120666
<b>0.1</b>	0.775414	0.890314	0.1149	1.07459	1.1957	0.121103
<b>0.2</b>	0.798161	0.914187	0.116026	1.0641	1.18564	0.12154
<b>0.3</b>	0.820908	0.93806	0.117152	1.0536	1.17558	0.121977
<b>0.4</b>	0.843654	0.961933	0.118278	1.04311	1.16552	0.122414
<b>0.5</b>	0.866401	0.985806	0.119404	1.03261	1.15546	0.122851
<b>0.6</b>	0.889148	1.00968	0.12053	1.02212	1.1454	0.123287
<b>0.7</b>	0.911895	1.03355	0.121657	1.01162	1.13535	0.123724
<b>0.8</b>	0.934642	1.05742	0.122783	1.00113	1.12529	0.124161
<b>0.9</b>	0.957389	1.0813	0.123909	0.990631	1.11523	0.124598
<b>1.</b>	0.980136	1.10517	0.125035	0.980136	1.10517	0.125035

Çizelge 5.5 (5.1) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{y}-\underline{Y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{y}-\bar{Y} (r)$
<b>0.</b>	0.641321	0.866441	0.22512	1.05525	1.20575	0.150506
<b>0.1</b>	0.66767	0.890314	0.222641	1.04021	1.1957	0.155489
<b>0.2</b>	0.694024	0.914187	0.220162	1.02517	1.18564	0.160471
<b>0.3</b>	0.720376	0.93806	0.217684	1.01013	1.17558	0.165454
<b>0.4</b>	0.746728	0.961933	0.215205	0.995084	1.16552	0.170437
<b>0.5</b>	0.773079	0.985806	0.212727	0.980043	1.15546	0.17542
<b>0.6</b>	0.799431	1.00968	0.210248	0.965002	1.1454	0.180402
<b>0.7</b>	0.825783	1.03355	0.207769	0.949961	1.13535	0.185385
<b>0.8</b>	0.852134	1.05742	0.205291	0.93492	1.12529	0.190368
<b>0.9</b>	0.878486	1.0813	0.202812	0.919879	1.11523	0.195351
<b>1.</b>	0.904837	1.10517	0.200334	0.904837	1.10517	0.200334

Çizelge 5.6 (5.1) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{y}-\underline{Y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{y}-\bar{Y} (r)$
<b>0.</b>	0.680884	0.866441	0.185557	1.08802	1.20575	0.117738
<b>0.1</b>	0.707137	0.890314	0.183177	1.07356	1.1957	0.12214
<b>0.2</b>	0.73339	0.914187	0.180797	1.0591	1.18564	0.126542
<b>0.3</b>	0.759643	0.93806	0.178417	1.04464	1.17558	0.130944
<b>0.4</b>	0.785896	0.961933	0.176037	1.03018	1.16552	0.135346
<b>0.5</b>	0.812149	0.985806	0.173657	1.01572	1.15546	0.139748
<b>0.6</b>	0.838402	1.00968	0.171277	1.00125	1.1454	0.14415
<b>0.7</b>	0.864655	1.03355	0.168897	0.986795	1.13535	0.148552
<b>0.8</b>	0.890908	1.05742	0.166517	0.972334	1.12529	0.152953
<b>0.9</b>	0.917161	1.0813	0.164137	0.957874	1.11523	0.157355
<b>1.</b>	0.943414	1.10517	0.161757	0.943414	1.10517	0.161757

**Uygulama 5.2:** Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklem;

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = -\tilde{y}(t) + t + 1, & t \in [0,1] \\ \tilde{y}(0) = (0.96 + 0.04r, 1.01 - 0.01r) \end{cases} \quad (5.19)$$

şeklinde olsun.  $\tilde{y}(t) = (\underline{y}(t), \bar{y}(t))$  bulanık sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun seviyeleri,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\tilde{y}(t;r)$  olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \underline{y}'(t;r) &= \underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\bar{y}(t;r) + t + 1 \\ \bar{y}'(t;r) &= \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\underline{y}(t;r) + t + 1 \\ \underline{y}(0;r) &= 0.96 + 0.04r \\ \bar{y}(0;r) &= 1.01 - 0.01r \end{aligned} \quad (5.20)$$

biçimindeki (5.19) denkleminin parametrik formu oluşur. (5.19) denkleminin kesin çözümü;[31]

$$\tilde{Y}(t;r) = \begin{pmatrix} t + 0.985e^{-t} - 0.025e^t + r(0.015e^{-t} + 0.025e^t), \\ t + 0.025e^t + 0.985e^{-t} + r(0.015e^{-t} - 0.025e^t) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

### 5.2.1 Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.01$  dir. Buradan (4.34) ve (4.35)

modifiye edilmiş Euler metodu iterasyon denkleminde

$$F[t, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] = \underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\bar{y}(t;r) + t + 1 \quad (5.22)$$

$$G[t, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] = \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\underline{y}(t;r) + t + 1$$

$\underline{y}(t_n; r) = \underline{y}_n(r)$  ve  $\bar{y}(t_n; r) = \bar{y}_n(r)$  olmak üzere (5.19) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{h}{2}(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1) + \frac{h}{2}(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1 - h(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1)) \quad (5.23)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{h}{2}(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1) + \frac{h}{2}(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1 - h(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1))$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu itarasyonlar sonucundaki nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.7 de verilmiştir.[17]

### 5.2.2 Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.01$  olsun.

$$\underline{f}'(t, \tilde{y}(t)) = -\bar{y}'(t) + 1 = \underline{y}(t) - t \quad (5.24)$$

$$\bar{f}'(t, \tilde{y}(t)) = -\underline{y}'(t) + 1 = \bar{y}(t) - t$$

olur. Buradan sağ ve sol yan fonksiyonların ikinci başlangıç değerleri (4.50) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(r) &= \underline{y}_0(r) + h(-\bar{y}_0(r) + t_0 + 1) + \frac{h^2}{2}(\underline{y}_0(r) - t_0) \\ \bar{y}_1(r) &= \bar{y}_0(r) + h(-\underline{y}_0(r) + t_0 + 1) + \frac{h^2}{2}(\bar{y}_0(r) - t_0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

şeklinde olur. (4.48) ve (4.49) eşitliklerinden (5.19) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(r) &= \underline{y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3}(-\bar{y}_{n-1}(r) + t_{n-1} + 1) + \frac{4h}{3}(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1) \\ &\quad + \frac{h}{3}((-y_n(r) + t_n + 1) - h(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1}(r) &= \bar{y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3}(-\underline{y}_{n-1}(r) + t_{n-1} + 1) + \frac{4h}{3}(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1) \\ &\quad + \frac{h}{3}((-y_n(r) + t_n + 1) - h(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1)) \end{aligned}$$

şeklindeki iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonların sonucundaki kesin çözüme nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.8 de verilmiştir.[18]

### 5.2.3 2-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.01$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) &= \underline{Y}(0; r) & \underline{y}_1(r) &= \underline{Y}(t_1; r) \\ \bar{y}_0(r) &= \bar{Y}(0; r) & \bar{y}_1(r) &= \bar{Y}(t_1; r) \end{aligned} \quad (5.27)$$

olmak üzere (4.75) eşitliklerinden (5.19) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) - \frac{h}{2}(-\underline{y}_{n-1}(r) + t_{n-1} + 1) + \frac{3h}{2}(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1) \quad (5.28)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) - \frac{h}{2}(-\bar{y}_{n-1}(r) + t_{n-1} + 1) + \frac{3h}{2}(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1)$$

Şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.9 de verilmiştir. [20]

### 5.2.4 Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  olsun. Kesin çözümden alınan

başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0;r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1;r) \quad \underline{y}_2(r) = \underline{Y}(t_2;r) \\ \bar{y}_0(r) = \bar{Y}(0;r) \quad \bar{y}_1(r) = \bar{Y}(t_1;r) \quad \bar{y}_2(r) = \bar{Y}(t_2;r) \end{aligned} \quad (5.29)$$

olmak üzere, (4.95) eşitliklerinden (5.19) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+2}(r) = \underline{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( \begin{aligned} &5(-\bar{y}_{n-1}(r) + t_{n-1} + 1) - 16(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1) + \\ &+ 23(-\bar{y}_{n+1}(r) + t_{n+1} + 1) \end{aligned} \right) \quad (5.30)$$

$$\bar{y}_{n+2}(r) = \bar{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( \begin{aligned} &5(-\underline{y}_{n-1}(r) + t_{n-1} + 1) - 16(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1) + \\ &+ 23(-\underline{y}_{n+1}(r) + t_{n+1} + 1) \end{aligned} \right)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.10 de verilmiştir. [21]

### 5.2.5 3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 8$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.0125$  olsun. (4.113) ve (4.115)

eşitliklerinden

$$\underline{K}_1 = h(-\bar{y}_n(r) + t_n + 1)$$

$$\underline{K}_2 = h \left( -\bar{y}_n(r) + t_n + 1 - \frac{2h}{3}(-\bar{y}_n(r) + t_n) \right) \quad (5.31)$$

$$\underline{K}_3 = h \left( -\bar{y}_n(r) + t_n + 1 - \frac{2h}{3} \left( -\bar{y}_n(r) + t_n + 1 - \frac{2h}{3}(-\bar{y}_n(r) + t_n) \right) \right)$$

$$\bar{K}_1 = h(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1)$$

$$\bar{K}_2 = h\left(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1 - \frac{2h}{3}(-\underline{y}_n(r) + t_n)\right) \quad (5.32)$$

$$\bar{K}_3 = h\left(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1 - \frac{2h}{3}\left(-\underline{y}_n(r) + t_n + 1 - \frac{2h}{3}(-\underline{y}_n(r) + t_n)\right)\right)$$

olmak üzere (4.114) ve (4.116) eşitliklerinden (5.19) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{1}{8}(2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3) \quad (5.33)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{1}{8}(2\bar{K}_1 + 3\bar{K}_2 + 3\bar{K}_3)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.11 de verilmiştir. [25,26]

### 5.2.6 He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $\tilde{y}(t; r) = (\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r))$ , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(t) = (\underline{\lambda}(t), \bar{\lambda}(t))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t; r)) = (\underline{f}(t, \tilde{y}(t; r)), \bar{f}(t, \tilde{y}(t; r)))$  olmak üzere (4.120) bulanık diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon denklemlerinden (5.19) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(t; r) &= \underline{y}_n(t; r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \underline{y}'_n(\zeta; r) + \bar{y}(\zeta; r) - \zeta - 1 \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t; r) &= \bar{y}_n(t; r) + \int_0^t \bar{\lambda}(\zeta) \left( \bar{y}'_n(\zeta; r) + \underline{y}(\zeta; r) - \zeta - 1 \right) d\zeta \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\underline{y}_0(t; r) = \underline{Y}(0; r) = 0.96 + 0.04r$$

$$\bar{y}_0(t; r) = \bar{Y}(0; r) = 1.01 - 0.01r$$

Genel Lagrange çarpanları  $\underline{\lambda}(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta) = -1$  olduğundan (5.2.17) denklemi;

$$\begin{aligned}
 \underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) + \bar{y}(\zeta;r) - \zeta - 1 \right) d\zeta \\
 \bar{y}_{n+1}(t;r) &= \bar{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \bar{y}'_n(\zeta;r) + \underline{y}(\zeta;r) - \zeta - 1 \right) d\zeta \\
 \underline{y}_0(t;r) &= \underline{Y}(0;r) = 0.96 + 0.04r \\
 \bar{y}_0(t;r) &= \bar{Y}(0;r) = 1.01 - 0.01r
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

şeklinde yazılarak iterasyon denklemleri elde edilir. 1. iterasyon sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizlge 5.12'da verilmiştir. Burada sadece bir iterasyon yapılmasının sebebi iterasyon sayısı artarken hatanın da artmasından kaynaklanmaktadır.

Çizelge 5.7 (5.19) Denklemin modifiye edilmiş Euler metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.963637	0.963636	$1.54233 \times 10^{-6}$	1.0189	1.01889	$1.45092 \times 10^{-6}$
<b>0.1</b>	0.967757	0.967756	$1.54004 \times 10^{-6}$	1.01749	1.01749	$1.45777 \times 10^{-6}$
<b>0.2</b>	0.971877	0.971876	$1.53775 \times 10^{-6}$	1.01608	1.01608	$1.46462 \times 10^{-6}$
<b>0.3</b>	0.975998	0.975996	$1.53546 \times 10^{-6}$	1.01468	1.01468	$1.47147 \times 10^{-6}$
<b>0.4</b>	0.980118	0.980116	$1.53317 \times 10^{-6}$	1.01327	1.01327	$1.47832 \times 10^{-6}$
<b>0.5</b>	0.984238	0.984237	$1.53088 \times 10^{-6}$	1.01187	1.01187	$1.48517 \times 10^{-6}$
<b>0.6</b>	0.988358	0.988357	$1.52858 \times 10^{-6}$	1.01046	1.01046	$1.49202 \times 10^{-6}$
<b>0.7</b>	0.992478	0.992477	$1.52629 \times 10^{-6}$	1.00906	1.00905	$1.49887 \times 10^{-6}$
<b>0.8</b>	0.996599	0.996597	$1.524 \times 10^{-6}$	1.00765	1.00765	$1.50572 \times 10^{-6}$
<b>0.9</b>	1.00072	1.00072	$1.52171 \times 10^{-6}$	1.00624	1.00624	$1.51257 \times 10^{-6}$
<b>1.</b>	1.00484	1.00484	$1.51942 \times 10^{-6}$	1.00484	1.00484	$1.51942 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.8 (5.19) Denklemin modifiye edilmiş Simpson metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.963636	0.963636	$7.57907 \times 10^{-7}$	1.01889	1.01889	$7.11432 \times 10^{-7}$
<b>0.1</b>	0.967756	0.967756	$7.56702 \times 10^{-7}$	1.01749	1.01749	$7.14875 \times 10^{-7}$
<b>0.2</b>	0.971876	0.971876	$7.55497 \times 10^{-7}$	1.01608	1.01608	$7.18317 \times 10^{-7}$
<b>0.3</b>	0.975996	0.975996	$7.54292 \times 10^{-7}$	1.01468	1.01468	$7.2176 \times 10^{-7}$
<b>0.4</b>	0.980116	0.980116	$7.53087 \times 10^{-7}$	1.01327	1.01327	$7.25202 \times 10^{-7}$
<b>0.5</b>	0.984237	0.984237	$7.51882 \times 10^{-7}$	1.01187	1.01187	$7.28645 \times 10^{-7}$
<b>0.6</b>	0.988357	0.988357	$7.50677 \times 10^{-7}$	1.01046	1.01046	$7.32087 \times 10^{-7}$
<b>0.7</b>	0.992477	0.992477	$7.49472 \times 10^{-7}$	1.00905	1.00905	$7.3553 \times 10^{-7}$
<b>0.8</b>	0.996597	0.996597	$7.48267 \times 10^{-7}$	1.00765	1.00765	$7.38972 \times 10^{-7}$
<b>0.9</b>	1.00072	1.00072	$7.47062 \times 10^{-7}$	1.00624	1.00624	$7.42415 \times 10^{-7}$
<b>1.</b>	1.00484	1.00484	$7.45857 \times 10^{-7}$	1.00484	1.00484	$7.45857 \times 10^{-7}$

Çizelge 5.9 (5.19) Denklemin Adams-Bashforh 3-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.96	0.963636	0.00615453	1.0245	1.01889	0.00560623
<b>0.1</b>	0.964	0.967756	0.00555279	1.02252	1.01749	0.00503189
<b>0.2</b>	0.968	0.971876	0.00495106	1.02054	1.01608	0.00445756
<b>0.3</b>	0.972	0.975996	0.00434932	1.01856	1.01468	0.00388322
<b>0.4</b>	0.976	0.980116	0.00374758	1.01658	1.01327	0.00330888
<b>0.5</b>	0.98	0.984237	0.00314585	1.0146	1.01187	0.00273454
<b>0.6</b>	0.984	0.988357	0.00254411	1.01262	1.01046	0.0021602
<b>0.7</b>	0.988	0.992477	0.00194237	1.01064	1.00905	0.00158586
<b>0.8</b>	0.992	0.996597	0.00134063	1.00866	1.00765	0.00101152
<b>0.9</b>	0.996	1.00072	0.000738897	1.00668	1.00624	0.00043718
<b>1.</b>	1.	1.00484	0.00013716	1.0047	1.00484	0.00013716

Çizelge 5.10 (5.19) Denklemin 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.961233	0.963636	0.00240284	1.02094	1.01889	0.00204751
<b>0.1</b>	0.965589	0.967756	0.00216674	1.01933	1.01749	0.00183857
<b>0.2</b>	0.969945	0.971876	0.00193065	1.01771	1.01608	0.00162963
<b>0.3</b>	0.974302	0.975996	0.00169455	1.0161	1.01468	0.00142069
<b>0.4</b>	0.978658	0.980116	0.00145846	1.01448	1.01327	0.00121174
<b>0.5</b>	0.983014	0.984237	0.00122237	1.01287	1.01187	0.0010028
<b>0.6</b>	0.98737	0.988357	0.000986273	1.01125	1.01046	0.000793864
<b>0.7</b>	0.991727	0.992477	0.00075018	1.00964	1.00905	0.000584923
<b>0.8</b>	0.996083	0.996597	0.000514086	1.00802	1.00765	0.000375983
<b>0.9</b>	1.00044	1.00072	0.000277992	1.00641	1.00624	0.000167042
<b>1.</b>	1.0048	1.00484	0.0000418984	1.0048	1.00484	0.0000418984

Çizelge 5.11 (5.19) Denklem 3. mertebeden Runge Kutta metoduyla nümerik yaklaşımları

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.963674	0.963636	0.0000388764	1.01886	1.01889	0.0000388983
<b>0.1</b>	0.967791	0.967756	0.0000349877	1.01745	1.01749	0.0000350096
<b>0.2</b>	0.971907	0.971876	0.0000310989	1.01605	1.01608	0.0000311209
<b>0.3</b>	0.976023	0.975996	0.0000272102	1.01465	1.01468	0.0000272322
<b>0.4</b>	0.98014	0.980116	0.0000233214	1.01325	1.01327	0.0000233435
<b>0.5</b>	0.984256	0.984237	0.0000194327	1.01185	1.01187	0.0000194547
<b>0.6</b>	0.988372	0.988357	0.0000155439	1.01044	1.01046	0.000015566
<b>0.7</b>	0.992489	0.992477	0.0000116551	1.00904	1.00905	0.0000116773
<b>0.8</b>	0.996605	0.996597	$7.76639 \times 10^{-6}$	1.00764	1.00765	$7.78856 \times 10^{-6}$
<b>0.9</b>	1.00072	1.00072	$3.87764 \times 10^{-6}$	1.00624	1.00624	$3.89984 \times 10^{-6}$
<b>1.</b>	1.00484	1.00484	$1.11181 \times 10^{-8}$	1.00484	1.00484	$1.11181 \times 10^{-8}$

Çizelge 5.12 (5.19) Denklem 3. mertebeden Runge Kutta metoduyla nümerik yaklaşımları

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.964	0.963636	0.000364416	1.019	1.01889	0.00010587
<b>0.1</b>	0.9681	0.967756	0.000344233	1.0176	1.01749	0.000111541
<b>0.2</b>	0.9722	0.971876	0.000324049	1.0162	1.01608	0.000117213
<b>0.3</b>	0.9763	0.975996	0.000303866	1.0148	1.01468	0.000122884
<b>0.4</b>	0.9804	0.980116	0.000283682	1.0134	1.01327	0.000128555
<b>0.5</b>	0.9845	0.984237	0.000263499	1.012	1.01187	0.000134226
<b>0.6</b>	0.9886	0.988357	0.000243316	1.0106	1.01046	0.000139897
<b>0.7</b>	0.9927	0.992477	0.000223132	1.0092	1.00905	0.000145568
<b>0.8</b>	0.9968	0.996597	0.000202949	1.0078	1.00765	0.00015124
<b>0.9</b>	1.0009	1.00072	0.000182765	1.0064	1.00624	0.000156911
<b>1.</b>	1.005	1.00484	0.000162582	1.005	1.00484	0.000162582

**Uygulama 5.3** Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklem;

$$\begin{cases} \tilde{i}'(t) = -\frac{R}{L}\tilde{i}(t) + v(t) & , \quad t \in [0,1] \\ \tilde{i}(0) = (0.96 + 0.04r, 1.01 - 0.01r) \end{cases} \quad (5.36)$$

denklemini AC kaynağı(source) ile bir elektriksel devre akımı denkleminin başlangıç şartlarının bulanıklaştırılmasıyla oluşan 1. mertebeden bulanık diferansiyel denklemdir.

Burada  $R$  devre direnci,  $L$  ise selenoid'e uygun bir katsayıdır.

$v(t) = \sin(t)$ ,  $R = 1$  ohm ve  $L = 1H$  olsun. O halde (4) denklemini

$$\begin{cases} \tilde{i}'(t) = -\tilde{i}(t) + \sin(t) & , \quad t \in [0,1] \\ \tilde{i}(0) = (0.96 + 0.04r, 1.01 - 0.01r) \end{cases} \quad (5.37)$$

şeklinde olur.  $\tilde{i}'(t) = (\underline{i}(t), \bar{i}(t))$  bulanık sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun seviyeleri,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = -\tilde{y}(t;r)$  olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \underline{i}'(t;r) &= \underline{f}(t, \tilde{i}(t;r)) = -\underline{i}(t;r) + \sin(t) \\ \bar{i}'(t;r) &= \bar{f}(t, \tilde{i}(t;r)) = -\bar{i}(t;r) + \sin(t) \\ \underline{i}(0;r) &= 0.96 + 0.04r \\ \bar{i}(0;r) &= 1.01 - 0.01r \end{aligned} \quad (5.38)$$

biçimindeki (5.37) denkleminin parametrik formu oluşur. (5.37) denkleminin kesin çözümü;[31]

$$\tilde{I}(t;r) = \left( \begin{array}{l} -(0.025 - 0.025r)e^t + (1.485 + 0.015r)e^{-t} + 0.5(-\cos(t) + \sin(t)), \\ (0.025 - 0.025r)e^t + (1.485 + 0.015r)e^{-t} + 0.5(-\cos(t) + \sin(t)) \end{array} \right) \quad (5.39)$$

### 5.3.1 Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.98$ ,  $N = 13$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} \cong 0.0754$  dir. Buradan (4.34) ve

(4.35) modifiye edilmiş Euler metodu iterasyon denkleminde

$$F\left[t, \underline{i}(t; r), \bar{i}(t; r)\right] = \underline{f}(t, \tilde{i}(t; r)) = -\bar{i}(t; r) + \sin(t) \quad (5.40)$$

$$G\left[t, \underline{i}(t; r), \bar{i}(t; r)\right] = \bar{f}(t, \tilde{i}(t; r)) = -\underline{i}(t; r) + \sin(t)$$

$\underline{i}(t_n; r) = \underline{i}_n(r)$  ve  $\bar{i}(t_n; r) = \bar{i}_n(r)$  olmak üzere (5.37) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{i}_{n+1}(r) = \underline{i}_n(r) + \frac{h}{2}(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)) + \frac{h}{2}(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_{n+1}) - h(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_n))) \quad (5.41)$$

$$\bar{i}_{n+1}(r) = \bar{i}_n(r) + \frac{h}{2}(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_n)) + \frac{h}{2}(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_{n+1}) - h(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)))$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu itarasyonlar sonucundaki nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.13 de verilmiştir.[17]

### 5.3.2 Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.98$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.098$  olsun.

$$\underline{f}'(t, \tilde{i}(t)) = -\bar{i}'(t) + \cos(t) = \underline{i}(t) - \sin(t) + \cos(t) \quad (5.42)$$

$$\bar{f}'(t, \tilde{i}(t)) = -\underline{i}'(t) + \cos(t) = \bar{i}(t) - \sin(t) + \cos(t)$$

Buradan sağ ve sol yan fonksiyonların ikinci başlangıç değerleri (4.50) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
\dot{i}_1(r) &= \dot{i}_0(r) + h(-\bar{i}_0(r) + \sin(t_0)) + \frac{h^2}{2}(\dot{i}_0(r) - \sin(t_0) + \cos(t_0)) \\
\bar{i}_1(r) &= \bar{i}_0(r) + h(-\dot{i}_0(r) + \sin(t_0)) + \frac{h^2}{2}(\bar{i}_0(r) - \sin(t_0) + \cos(t_0))
\end{aligned} \tag{5.43}$$

şeklinde olur. (4.48) ve (4.49) eşitliklerinden (5.37) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned}
\dot{i}_{n+1}(r) &= \dot{i}_{n-1}(r) + \frac{h}{3}(-\bar{i}_{n-1}(r) + \sin(t_{n-1})) + \frac{4h}{3}(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)) \\
&\quad + \frac{h}{3}((-i_n(r) + \sin(t_{n+1})) - h(-\dot{i}_n(r) + \sin(t_n)))
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
\bar{i}_{n+1}(r) &= \bar{i}_{n-1}(r) + \frac{h}{3}(-\dot{i}_{n-1}(r) + \sin(t_{n-1})) + \frac{4h}{3}(-\dot{i}_n(r) + \sin(t_n)) \\
&\quad + \frac{h}{3}((-i_n(r) + \sin(t_{n+1})) - h(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)))
\end{aligned}$$

şeklindeki iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonların sonucundaki kesin çözüme nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.14 de verilmiştir. [18]

### 5.3.3 2-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.98$ ,  $N = 4$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.245$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned}
\dot{i}_0(r) &= \underline{I}(0; r) & \dot{i}_1(r) &= \underline{I}(t_1; r) \\
\bar{i}_0(r) &= \bar{I}(0; r) & \bar{i}_1(r) &= \bar{I}(t_1; r)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

olmak üzere (4.75) eşitliklerinden (5.37) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned}
\dot{i}_{n+1}(r) &= \dot{i}_n(r) - \frac{h}{2}(-\bar{i}_{n-1}(r) + \sin(t_{n-1})) + \frac{3h}{2}(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)) \\
\bar{i}_{n+1}(r) &= \bar{i}_n(r) - \frac{h}{2}(-\dot{i}_{n-1}(r) + \sin(t_{n-1})) + \frac{3h}{2}(-\dot{i}_n(r) + \sin(t_n))
\end{aligned} \tag{5.46}$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.15 de verilmiştir. [20]

### 5.3.4 Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.98$  ,  $N = 6$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} \cong 0.163$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{i}_0(r) = \underline{I}(0;r) \quad \underline{i}_1(r) = \underline{I}(t_1;r) \quad \underline{i}_2(r) = \underline{I}(t_2;r) \\ \bar{i}_0(r) = \bar{I}(0;r) \quad \bar{i}_1(r) = \bar{I}(t_1;r) \quad \bar{i}_2(r) = \bar{I}(t_2;r) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (5.47)$$

olmak üzere, (4.95) eşitliklerinden (5.37) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{i}_{n+2}(r) = \underline{i}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( \begin{aligned} &5(-\bar{i}_{n-1}(r) + \sin(t_{n-1})) - 16(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)) + \\ &+ 23(-\bar{i}_{n+1}(r) + \sin(t_{n+1})) \end{aligned} \right) \quad (5.48)$$

$$\bar{i}_{n+2}(r) = \bar{i}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( \begin{aligned} &5(-\underline{i}_{n-1}(r) + \sin(t_{n-1})) - 16(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_n)) + \\ &+ 23(-\underline{i}_{n+1}(r) + \sin(t_{n+1})) \end{aligned} \right)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.16 da verilmiştir. [21]

### 5.3.5 3.mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.98$  ,  $N = 7$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.14$  olsun. (4.113) ve (4.115) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\underline{K}_1 &= h\left(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)\right) \\
\underline{K}_2 &= h\left(-\bar{i}_n(r) + \sin\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) + \frac{2h}{3}\left(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)\right)\right) \\
\underline{K}_3 &= h\left(-\bar{i}_n(r) + \sin\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) - \frac{2h}{3}\left(-\bar{i}_n(r) + \sin\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) + \frac{2h}{3}\left(-\bar{i}_n(r) + \sin(t_n)\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_1 &= h\left(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_n)\right) \\
\bar{K}_2 &= h\left(-\underline{i}_n(r) + \sin\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) + \frac{2h}{3}\left(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_n)\right)\right) \\
\bar{K}_3 &= h\left(-\underline{i}_n(r) + \sin\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) - \frac{2h}{3}\left(-\underline{i}_n(r) + \sin\left(t_n + \frac{2h}{3}\right) + \frac{2h}{3}\left(-\underline{i}_n(r) + \sin(t_n)\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.50}$$

olmak üzere (5.37) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{i}_{n+1}(r) = \underline{i}_n(r) + \frac{1}{8}(2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3) \tag{5.51}$$

$$\bar{i}_{n+1}(r) = \bar{i}_n(r) + \frac{1}{8}(2\bar{K}_1 + 3\bar{K}_2 + 3\bar{K}_3)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.17 de verilmiştir. [25,26]

### 5.3.6 He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $\tilde{i}(t,r) = (\underline{i}(t,r), \bar{i}(t,r))$  , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(t) = (\underline{\lambda}(t), \bar{\lambda}(t))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{i}(t,r)) = (\underline{f}(t, \tilde{i}(t,r)), \bar{f}(t, \tilde{i}(t,r)))$  olmak üzere (4.120) bulanık diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon denklemlerinden (5.37) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{i}}_{n+1}(t; r) &= \dot{\underline{i}}_n(t; r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \dot{\underline{i}}'_n(\zeta; r) + \bar{i}(\zeta; r) - \sin(\zeta) \right) d\zeta \\
\dot{\bar{i}}_{n+1}(t; r) &= \dot{\bar{i}}_n(t; r) + \int_0^t \bar{\lambda}(\zeta) \left( \dot{\bar{i}}'_n(\zeta; r) + \underline{i}(\zeta; r) - \sin(\zeta) \right) d\zeta \\
\dot{\underline{i}}_0(t; r) &= \underline{I}(0; r) = 0.96 + 0.04r \\
\dot{\bar{i}}_0(t; r) &= \bar{I}(0; r) = 1.01 - 0.01r
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Genel Lagrange çarpanları  $\underline{\lambda}(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta) = -1$  olduğundan (5.52) denklemi;

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{i}}_{n+1}(t; r) &= \dot{\underline{i}}_n(t; r) - \int_0^t \left( \dot{\underline{i}}'_n(\zeta; r) + \bar{i}(\zeta; r) - \sin(\zeta) \right) d\zeta \\
\dot{\bar{i}}_{n+1}(t; r) &= \dot{\bar{i}}_n(t; r) - \int_0^t \left( \dot{\bar{i}}'_n(\zeta; r) + \underline{i}(\zeta; r) - \sin(\zeta) \right) d\zeta \\
\dot{\underline{i}}_0(t; r) &= \underline{I}(0; r) = 0.96 + 0.04r \\
\dot{\bar{i}}_0(t; r) &= \bar{I}(0; r) = 1.01 - 0.01r
\end{aligned} \tag{5.53}$$

şeklinde yazılarak iterasyon denklemleri elde edilir. 15. iterasyon sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizilge 5.18'da verilmiştir.

Çizelge 5.13 (5.37) Denklemin modifiye edilmiş Euler metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{i}(r)$	$\underline{I}(r)$	$ \underline{i}-\underline{I} (r)$	$\bar{i}(r)$	$\bar{I}(r)$	$ \bar{i}-\bar{I} (r)$
<b>0.</b>	0.628007	0.627463	0.000543994	0.761113	0.760686	0.000427169
<b>0.1</b>	0.635226	0.634687	0.000538706	0.755021	0.754588	0.000433564
<b>0.2</b>	0.642445	0.641911	0.000533418	0.748929	0.748489	0.000439958
<b>0.3</b>	0.649663	0.649135	0.00052813	0.742838	0.742391	0.000446353
<b>0.4</b>	0.656882	0.656359	0.000522842	0.736746	0.736293	0.000452747
<b>0.5</b>	0.664101	0.663584	0.000517554	0.730654	0.730195	0.000459142
<b>0.6</b>	0.67132	0.670808	0.000512266	0.724562	0.724097	0.000465536
<b>0.7</b>	0.678539	0.678032	0.000506978	0.718471	0.717999	0.000471931
<b>0.8</b>	0.685758	0.685256	0.00050169	0.712379	0.7119	0.000478325
<b>0.9</b>	0.692976	0.69248	0.000496402	0.706287	0.705802	0.00048472
<b>1.</b>	0.700195	0.699704	0.000491114	0.700195	0.699704	0.000491114

Çizelge 5.14 (5.37) Denklemin modifiye edilmiş Simpson metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{i}(r)$	$\underline{I}(r)$	$ \underline{i}-\underline{I} (r)$	$\bar{i}(r)$	$\bar{I}(r)$	$ \bar{i}-\bar{I} (r)$
<b>0.</b>	0.627878	0.627463	0.000414731	0.760991	0.760686	0.000305081
<b>0.1</b>	0.635097	0.634687	0.000409585	0.754899	0.754588	0.000310899
<b>0.2</b>	0.642316	0.641911	0.000404438	0.748806	0.748489	0.000316718
<b>0.3</b>	0.649535	0.649135	0.000399291	0.742714	0.742391	0.000322536
<b>0.4</b>	0.656754	0.656359	0.000394145	0.736621	0.736293	0.000328354
<b>0.5</b>	0.663973	0.663584	0.000388998	0.730529	0.730195	0.000334173
<b>0.6</b>	0.671191	0.670808	0.000383851	0.724437	0.724097	0.000339991
<b>0.7</b>	0.67841	0.678032	0.000378705	0.718344	0.717999	0.000345809
<b>0.8</b>	0.685629	0.685256	0.000373558	0.712252	0.7119	0.000351628
<b>0.9</b>	0.692848	0.69248	0.000368411	0.70616	0.705802	0.000357446
<b>1.</b>	0.700067	0.699704	0.000363265	0.700067	0.699704	0.000363265

Çizelge 5.15 (5.37) Denklem 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{i}(r)$	$\underline{I}(r)$	$ \underline{i}-\underline{I} (r)$	$\bar{i}(r)$	$\bar{I}(r)$	$ \bar{i}-\bar{I} (r)$
<b>0.</b>	0.616335	0.627463	0.0111282	0.813305	0.760686	0.0526191
<b>0.1</b>	0.626758	0.634687	0.00792875	0.804031	0.754588	0.0494438
<b>0.2</b>	0.637182	0.641911	0.00472932	0.794758	0.748489	0.0462685
<b>0.3</b>	0.647605	0.649135	0.00152988	0.785485	0.742391	0.0430932
<b>0.4</b>	0.658029	0.656359	0.00166955	0.776211	0.736293	0.0399179
<b>0.5</b>	0.668453	0.663584	0.00486898	0.766938	0.730195	0.0367426
<b>0.6</b>	0.678876	0.670808	0.00806841	0.757664	0.724097	0.0335673
<b>0.7</b>	0.6893	0.678032	0.0112678	0.748391	0.717999	0.030392
<b>0.8</b>	0.699723	0.685256	0.0144673	0.739117	0.7119	0.0272167
<b>0.9</b>	0.710147	0.69248	0.0176667	0.729844	0.705802	0.0240414
<b>1.</b>	0.72057	0.699704	0.0208661	0.72057	0.699704	0.0208661

Çizelge 5.16 (5.37) Denklem Adams-Bashforh 3-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{i}(r)$	$\underline{I}(r)$	$ \underline{i}-\underline{I} (r)$	$\bar{i}(r)$	$\bar{I}(r)$	$ \bar{i}-\bar{I} (r)$
<b>0.</b>	0.516163	0.627463	0.1113	0.870859	0.760686	0.110174
<b>0.1</b>	0.53446	0.634687	0.100227	0.853687	0.754588	0.0990992
<b>0.2</b>	0.552757	0.641911	0.0891543	0.836514	0.748489	0.0880248
<b>0.3</b>	0.571054	0.649135	0.0780814	0.819342	0.742391	0.0769503
<b>0.4</b>	0.589351	0.656359	0.0670084	0.802169	0.736293	0.0658759
<b>0.5</b>	0.607648	0.663584	0.0559354	0.784996	0.730195	0.0548015
<b>0.6</b>	0.625945	0.670808	0.0448624	0.767824	0.724097	0.0437271
<b>0.7</b>	0.644242	0.678032	0.0337894	0.750651	0.717999	0.0326527
<b>0.8</b>	0.662539	0.685256	0.0227165	0.733479	0.7119	0.0215783
<b>0.9</b>	0.680836	0.69248	0.0116435	0.716306	0.705802	0.0105039
<b>1.</b>	0.699134	0.699704	0.000570507	0.699134	0.699704	0.000570507

Çizelge 5.17 (5.37) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{i}(r)$	$\underline{I}(r)$	$ \underline{i}-\underline{I} (r)$	$\bar{i}(r)$	$\bar{I}(r)$	$ \bar{i}-\bar{I} (r)$
<b>0.</b>	0.634956	0.627463	0.00749267	0.753066	0.760686	0.00762004
<b>0.1</b>	0.641424	0.634687	0.00673697	0.747723	0.754588	0.00686447
<b>0.2</b>	0.647892	0.641911	0.00598126	0.742381	0.748489	0.00610891
<b>0.3</b>	0.654361	0.649135	0.00522556	0.737038	0.742391	0.00535334
<b>0.4</b>	0.660829	0.656359	0.00446985	0.731695	0.736293	0.00459778
<b>0.5</b>	0.667298	0.663584	0.00371414	0.726353	0.730195	0.00384221
<b>0.6</b>	0.673766	0.670808	0.00295844	0.72101	0.724097	0.00308665
<b>0.7</b>	0.680234	0.678032	0.00220273	0.715667	0.717999	0.00233108
<b>0.8</b>	0.686703	0.685256	0.00144702	0.710325	0.7119	0.00157552
<b>0.9</b>	0.693171	0.69248	0.000691318	0.704982	0.705802	0.000819954
<b>1.</b>	0.69964	0.699704	0.0000643886	0.69964	0.699704	0.0000643886

Çizelge 5.18 (5.37) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{i}(r)$	$\underline{I}(r)$	$ \underline{i}-\underline{I} (r)$	$\bar{i}(r)$	$\bar{I}(r)$	$ \bar{i}-\bar{I} (r)$
<b>0.</b>	0.627463	0.627463	$2.93099 \times 10^{-14}$	0.760686	0.760686	$3.19744 \times 10^{-14}$
<b>0.1</b>	0.634687	0.634687	$2.94514 \times 10^{-14}$	0.754588	0.754588	$3.19307 \times 10^{-14}$
<b>0.2</b>	0.641911	0.641911	$2.9593 \times 10^{-14}$	0.748489	0.748489	$3.1887 \times 10^{-14}$
<b>0.3</b>	0.649135	0.649135	$2.97345 \times 10^{-14}$	0.742391	0.742391	$3.18433 \times 10^{-14}$
<b>0.4</b>	0.656359	0.656359	$2.98761 \times 10^{-14}$	0.736293	0.736293	$3.17996 \times 10^{-14}$
<b>0.5</b>	0.663584	0.663584	$3.00177 \times 10^{-14}$	0.730195	0.730195	$3.17558 \times 10^{-14}$
<b>0.6</b>	0.670808	0.670808	$3.01592 \times 10^{-14}$	0.724097	0.724097	$3.17121 \times 10^{-14}$
<b>0.7</b>	0.678032	0.678032	$3.03008 \times 10^{-14}$	0.717999	0.717999	$3.16684 \times 10^{-14}$
<b>0.8</b>	0.685256	0.685256	$3.04423 \times 10^{-14}$	0.7119	0.7119	$3.16247 \times 10^{-14}$
<b>0.9</b>	0.69248	0.69248	$3.05839 \times 10^{-14}$	0.705802	0.705802	$3.1581 \times 10^{-14}$
<b>1.</b>	0.699704	0.699704	$3.07254 \times 10^{-14}$	0.699704	0.699704	$3.15373 \times 10^{-14}$

**Uygulama 5.4** Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklem;

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = 3t^2 \tilde{y}(t) & , \quad t \in [0,1] \\ \tilde{y}(0) = (0.5\sqrt{r}, 0.2\sqrt{1-r} + 0.5) \end{cases} \quad (5.54)$$

şeklinde olsun.  $\tilde{y}(t) = (\underline{y}(t), \bar{y}(t))$  bulanık sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun seviyeleri,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = 3t^2 \tilde{y}(t;r)$  olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \underline{y}'(t;r) &= t^2 \underline{y}(t;r) \\ \bar{y}'(t;r) &= t^2 \bar{y}(t;r) \\ \underline{y}(0;r) &= 0.5\sqrt{r} \\ \bar{y}(0;r) &= 0.2\sqrt{1-r} + 0.5 \end{aligned} \quad (5.55)$$

biçimindeki (5.54) denkleminin parametrik formu oluşur. (5.54) denkleminin kesin çözümü;[31]

$$\tilde{Y}(t;r) = (0.5\sqrt{r}e^{t^3}, (0.2\sqrt{1-r} + 0.5)e^{t^3}) \quad (5.56)$$

#### 5.4.1 Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 20$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.005$  dir. Buradan (4.34) ve (4.35) modifiye edilmiş Euler metodu iterasyon denkleminde

$$\begin{aligned} F[t, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] &= \underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = t^2 \underline{y}(t;r) \\ G[t, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] &= \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = t^2 \bar{y}(t;r) \end{aligned} \quad (5.57)$$

$\underline{y}(t_n; r) = \underline{y}_n(r)$  ve  $\bar{y}(t_n; r) = \bar{y}_n(r)$  olmak üzere (5.54) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{h}{2} 3t_n^2 \underline{y}_n(r) + \frac{h}{2} 3t_{n+1}^2 \underline{y}_n(r) (1 + 3ht_n^2) \quad (5.58)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{h}{2} 3t_n^2 \bar{y}_n(r) + \frac{h}{2} 3t_{n+1}^2 \bar{y}_n(r) (1 + 3ht_n^2)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu itarasyonlar sonucundaki nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.19 de verilmiştir.[17]

#### 5.4.2 Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 20$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.005$  olsun.

Buradan sağ ve sol yan fonksiyonların ikinci başlangıç değerleri (4.50) eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(r) &= \underline{y}_0(r) \left( 1 + 3ht_0^2 + \frac{3h^2}{2} t_0 (2 + 3t_0^3) \right) \\ \bar{y}_1(r) &= \bar{y}_0(r) \left( 1 + 3ht_0^2 + \frac{3h^2}{2} t_0 (2 + 3t_0^3) \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

şeklinde olur. (4.48) ve (4.49) eşitliklerinden (5.54) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(r) &= \underline{y}_{n-1}(r) + ht_{n-1}^2 \underline{y}_{n-1}(r) + 4ht_n^2 \underline{y}_n(r) + ht_{n+1}^2 (\underline{y}_n(r) + 3ht_n^2 \underline{y}_n(r)) \\ \bar{y}_{n+1}(r) &= \bar{y}_{n-1}(r) + ht_{n-1}^2 \bar{y}_{n-1}(r) + 4ht_n^2 \bar{y}_n(r) + ht_{n+1}^2 (\bar{y}_n(r) + 3ht_n^2 \bar{y}_n(r)) \end{aligned} \quad (5.60)$$

şeklinde iterasyon denklemleri Bu iterasyonların sonucundaki kesin çözüme nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.20 de verilmiştir[18].

### 5.4.3 2-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.1$  ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0;r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1;r) \\ \bar{y}_0(r) = \bar{Y}(0;r) \quad \bar{y}_1(r) = \bar{Y}(t_1;r) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (5.61)$$

olmak üzere (4.75) eşitliklerinden (5.4.1) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) - \frac{3h}{2} t_{n-1}^2 \bar{y}_{n-1}(r) + \frac{9h}{2} t_n^2 \underline{y}_n(r) \quad (5.62)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) - \frac{3h}{2} t_{n-1}^2 \underline{y}_{n-1}(r) + \frac{9h}{2} t_n^2 \bar{y}_n(r)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.21 de verilmiştir. [20]

### 5.4.4 Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.1$  ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0;r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1;r) \quad \underline{y}_2(r) = \underline{Y}(t_2;r) \\ \bar{y}_0(r) = \bar{Y}(0;r) \quad \bar{y}_1(r) = \bar{Y}(t_1;r) \quad \bar{y}_2(r) = \bar{Y}(t_2;r) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (5.63)$$

olmak üzere, (4.95) eşitliklerinden (5.54) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+2}(r) &= \underline{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{4} \left( 5t_{n-1}^2 \underline{y}_{n-1} - 16t_n^2 \underline{y}_n + 23t_{n+1}^2 \underline{y}_{n+1} \right) \\ \bar{y}_{n+2}(r) &= \bar{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{4} \left( 5t_{n-1}^2 \bar{y}_{n-1} - 16t_n^2 \bar{y}_n + 23t_{n+1}^2 \bar{y}_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.22 de verilmiştir. [21]

### 5.4.5 3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.01$  olsun. (4.113) ve (4.115)

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \underline{K}_1 &= ht_n^2 \underline{y}_n(r) \\ \underline{K}_2 &= 3h \underline{y}_n(r) \left( \frac{2h}{3} + t_n \right)^2 (1 + 2ht_n^2) \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\underline{K}_3 = 3h \underline{y}_n(r) \left( \frac{2h}{3} + t_n \right)^2 \left( 1 + 2h \left( \frac{2h}{3} + t_n \right)^2 (1 + 2ht_n^2) \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= ht_n^2 \bar{y}_n(r) \\ \bar{K}_2 &= 3h \bar{y}_n(r) \left( \frac{2h}{3} + t_n \right)^2 (1 + 2ht_n^2) \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\bar{K}_3 = 3h \bar{y}_n(r) \left( \frac{2h}{3} + t_n \right)^2 \left( 1 + 2h \left( \frac{2h}{3} + t_n \right)^2 (1 + 2ht_n^2) \right)$$

olmak üzere (4.114) ve (4.116) eşitliklerinden (5.54) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{1}{8}(2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3) \quad (5.67)$$

$$\overline{y}_{n+1}(r) = \overline{y}_n(r) + \frac{1}{8}(2\overline{K}_1 + 3\overline{K}_2 + 3\overline{K}_3)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.23 de verilmiştir.[25,26]

#### 5.4.6 He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r))$ , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(t) = (\underline{\lambda}(t), \overline{\lambda}(t))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = (f(t, \underline{y}(t;r)), \overline{f}(t, \overline{y}(t;r)))$  olmak üzere (4.120) bulanık diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon denklemlerinden (5.64) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) - 3\zeta^2 \overline{y}(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \overline{y}_{n+1}(t;r) &= \overline{y}_n(t;r) + \int_0^t \overline{\lambda}(\zeta) \left( \overline{y}'_n(\zeta;r) - 3\zeta^2 \underline{y}(\zeta;r) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(t;r) &= \underline{Y}(0;r) = 0.5\sqrt{r} \\ \overline{y}_0(t;r) &= \overline{Y}(0;r) = 0.2\sqrt{1-r} + 0.5 \end{aligned}$$

Genel Lagrange çarpanları  $\underline{\lambda}(\zeta) = \overline{\lambda}(\zeta) = -1$  olduğundan (5.68) denklemi

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) - 3\zeta^2 \overline{y}(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \overline{y}_{n+1}(t;r) &= \overline{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \overline{y}'_n(\zeta;r) - 3\zeta^2 \underline{y}(\zeta;r) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(t;r) &= \underline{Y}(0;r) = 0.5\sqrt{r} \\ \overline{y}_0(t;r) &= \overline{Y}(0;r) = 0.2\sqrt{1-r} + 0.5 \end{aligned}$$

şeklinde yazılarak iterasyon denklemleri elde edilir. 4. iterasyon sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.24'da verilmiştir.

Çizelge 5.19 (5.54) Denklemın modifiye edilmiş Euler metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	0.700701	0.7007	$8.75744 \times 10^{-7}$
<b>0.1</b>	0.158272	0.158272	$1.9781 \times 10^{-7}$	0.690428	0.69042	$8.62903 \times 10^{-7}$
<b>0.2</b>	0.223831	0.223831	$2.79746 \times 10^{-7}$	0.679566	0.679565	$8.49328 \times 10^{-7}$
<b>0.3</b>	0.274136	0.274135	$3.42618 \times 10^{-7}$	0.668001	0.668	$8.34874 \times 10^{-7}$
<b>0.4</b>	0.316545	0.316544	$3.95621 \times 10^{-7}$	0.655575	0.655575	$8.19345 \times 10^{-7}$
<b>0.5</b>	0.353908	0.353907	$4.42317 \times 10^{-7}$	0.642064	0.642063	$8.02458 \times 10^{-7}$
<b>0.6</b>	0.387686	0.387686	$4.84534 \times 10^{-7}$	0.627119	0.627118	$7.83779 \times 10^{-7}$
<b>0.7</b>	0.418749	0.418749	$5.23357 \times 10^{-7}$	0.610155	0.610154	$7.62578 \times 10^{-7}$
<b>0.8</b>	0.447662	0.447661	$5.59492 \times 10^{-7}$	0.590033	0.590032	$7.3743 \times 10^{-7}$
<b>0.9</b>	0.474817	0.474816	$5.93431 \times 10^{-7}$	0.56381	0.563809	$7.04655 \times 10^{-7}$
<b>1.</b>	0.500501	0.5005	$6.25531 \times 10^{-7}$	0.500501	0.5005	$6.25531 \times 10^{-7}$

Çizelge 5.20 (5.54) Denklemın modifiye edilmiş Simpson metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	0.7007	0.7007	$8.32464 \times 10^{-10}$
<b>0.1</b>	0.158272	0.158272	$1.88034 \times 10^{-10}$	0.69042	0.69042	$8.20259 \times 10^{-10}$
<b>0.2</b>	0.223831	0.223831	$2.65921 \times 10^{-10}$	0.679565	0.679565	$8.07354 \times 10^{-10}$
<b>0.3</b>	0.274135	0.274135	$3.25685 \times 10^{-10}$	0.668	0.668	$7.93614 \times 10^{-10}$
<b>0.4</b>	0.316544	0.316544	$3.76069 \times 10^{-10}$	0.655575	0.655575	$7.78853 \times 10^{-10}$
<b>0.5</b>	0.353907	0.353907	$4.20458 \times 10^{-10}$	0.642063	0.642063	$7.628 \times 10^{-10}$
<b>0.6</b>	0.387686	0.387686	$4.60589 \times 10^{-10}$	0.627118	0.627118	$7.45045 \times 10^{-10}$
<b>0.7</b>	0.418749	0.418749	$4.97492 \times 10^{-10}$	0.610154	0.610154	$7.24891 \times 10^{-10}$
<b>0.8</b>	0.447661	0.447661	$5.31842 \times 10^{-10}$	0.590032	0.590032	$7.00986 \times 10^{-10}$
<b>0.9</b>	0.474816	0.474816	$5.64103 \times 10^{-10}$	0.563809	0.563809	$6.69831 \times 10^{-10}$
<b>1.</b>	0.5005	0.5005	$5.94617 \times 10^{-10}$	0.5005	0.5005	$5.94617 \times 10^{-10}$

Çizelge 5.21 (5.54) Denklem 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	-0.0008848	0.	0.000884818	0.703322	0.7007	0.00262133
<b>0.1</b>	0.157423	0.158272	0.000848831	0.692916	0.69042	0.00248968
<b>0.2</b>	0.223112	0.223831	0.000718633	0.681919	0.679565	0.00235451
<b>0.3</b>	0.273564	0.274135	0.000571769	0.670215	0.668	0.00221526
<b>0.4</b>	0.316129	0.316544	0.000415353	0.657646	0.655575	0.00207103
<b>0.5</b>	0.353655	0.353907	0.000251846	0.643984	0.642063	0.00192052
<b>0.6</b>	0.387604	0.387686	0.0000820915	0.62888	0.627118	0.00176172
<b>0.7</b>	0.418843	0.418749	0.0000940908	0.611746	0.610154	0.00159127
<b>0.8</b>	0.447939	0.447661	0.000278192	0.591435	0.590032	0.00140258
<b>0.9</b>	0.475291	0.474816	0.00047514	0.564988	0.563809	0.00117867
<b>1.</b>	0.501241	0.5005	0.000740684	0.501241	0.5005	0.000740684

Çizelge 5.22 (5.54) Denklem Adams-Bashforh 3-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	-0.001066	0.	0.00106584	0.70187	0.7007	0.00116955
<b>0.1</b>	0.157486	0.158272	0.000786038	0.691338	0.69042	0.000911649
<b>0.2</b>	0.22317	0.223831	0.000660092	0.680358	0.679565	0.000793798
<b>0.3</b>	0.273577	0.274135	0.000558536	0.668698	0.668	0.000697976
<b>0.4</b>	0.316075	0.316544	0.000468851	0.656187	0.655575	0.000612728
<b>0.5</b>	0.353521	0.353907	0.000385936	0.642596	0.642063	0.000533343
<b>0.6</b>	0.387379	0.387686	0.000306822	0.627575	0.627118	0.000457017
<b>0.7</b>	0.418519	0.418749	0.000229172	0.610536	0.610154	0.000381454
<b>0.8</b>	0.447511	0.447661	0.000150306	0.590336	0.590032	0.000303889
<b>0.9</b>	0.474751	0.474816	0.0000650928	0.564028	0.563809	0.000218813
<b>1.</b>	0.500574	0.5005	0.000074076	0.500574	0.5005	0.000074076

Çizelge 5.23 (5.54) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	0.7007	0.7007	$1.10934 \times 10^{-10}$
<b>0.1</b>	0.158272	0.158272	$2.50575 \times 10^{-11}$	0.690427	0.69042	$1.09307 \times 10^{-10}$
<b>0.2</b>	0.223831	0.223831	$3.54366 \times 10^{-11}$	0.679565	0.679565	$1.07588 \times 10^{-10}$
<b>0.3</b>	0.274135	0.274135	$4.34008 \times 10^{-11}$	0.668	0.668	$1.05757 \times 10^{-10}$
<b>0.4</b>	0.316544	0.316544	$5.01149 \times 10^{-11}$	0.655575	0.655575	$1.0379 \times 10^{-10}$
<b>0.5</b>	0.353907	0.353907	$5.60301 \times 10^{-11}$	0.642063	0.642063	$1.01651 \times 10^{-10}$
<b>0.6</b>	0.387686	0.387686	$6.1378 \times 10^{-11}$	0.627118	0.627118	$9.92846 \times 10^{-11}$
<b>0.7</b>	0.418749	0.418749	$6.62957 \times 10^{-11}$	0.610154	0.610154	$9.6599 \times 10^{-11}$
<b>0.8</b>	0.447661	0.447661	$7.08732 \times 10^{-11}$	0.590032	0.590032	$9.34133 \times 10^{-11}$
<b>0.9</b>	0.474816	0.474816	$7.51724 \times 10^{-11}$	0.563809	0.563809	$8.92616 \times 10^{-11}$
<b>1.</b>	0.5005	0.5005	$7.92386 \times 10^{-11}$	0.5005	0.5005	$7.92386 \times 10^{-11}$

Çizelge 5.24 (5.54) Denklem varyasyonel iterasyon metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	0.7007	0.7007	0.
<b>0.1</b>	0.158272	0.158272	0.	0.690427	0.69042	0.
<b>0.2</b>	0.223831	0.223831	0.	0.679565	0.679565	0.
<b>0.3</b>	0.274135	0.274135	0.	0.668	0.668	0.
<b>0.4</b>	0.316544	0.316544	0.	0.655575	0.655575	0.
<b>0.5</b>	0.353907	0.353907	0.	0.642063	0.642063	0.
<b>0.6</b>	0.387686	0.387686	0.	0.627118	0.627118	0.
<b>0.7</b>	0.418749	0.418749	0.	0.610154	0.610154	0.
<b>0.8</b>	0.447661	0.447661	0.	0.590032	0.590032	0.
<b>0.9</b>	0.474816	0.474816	0.	0.563809	0.563809	0.
<b>1.</b>	0.5005	0.5005	0.	0.5005	0.5005	0.

**Uygulama 5.5** Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklem;

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = t\tilde{y}^2(t) & , \quad t \in [0,1] \\ \tilde{y}(0) = (1.1 + 0.1r, 1.3 - 0.1r) \end{cases} \quad (5.70)$$

şeklinde olsun.  $\tilde{y}(t) = (\underline{y}(t), \bar{y}(t))$  bulanık sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun seviyeleri,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = t\tilde{y}^2(t;r)$  olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \underline{y}'(t;r) &= t\underline{y}^2(t;r) \\ \bar{y}'(t;r) &= t\bar{y}^2(t;r) \\ \underline{y}(0;r) &= 1.1 + 0.1r \\ \bar{y}(0;r) &= 1.3 - 0.1r \end{aligned} \quad (5.71)$$

biçimindeki (5.70) denkleminin parametrik formu oluşur. (5.70) denkleminin kesin çözümü;[21]

$$\tilde{Y}(t;r) = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{1.1 + 0.1r}}, -\frac{1}{\frac{t^2}{2} - \frac{1}{1.3 - 0.1r}} \end{array} \right) \quad (5.72)$$

### 5.5.1 Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.2$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.02$  dir. Buradan (4.34) ve (4.35)

modifiye edilmiş Euler metodu iterasyon denkleminde

$$F[t, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] = \underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = t\underline{y}^2(t;r) \quad (5.73)$$

$$G[t, \underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r)] = \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = t\bar{y}^2(t;r)$$

$\underline{y}(t_n; r) = \underline{y}_n(r)$  ve  $\bar{y}(t_n; r) = \bar{y}_n(r)$  olmak üzere (5.70) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{h}{2} t_n \underline{y}_n^2(r) + \frac{h}{2} t_{n+1} \left( \underline{y}_n(r) + h t_n \underline{y}_n^2(r) \right)^2 \quad (5.74)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{h}{2} t_n \bar{y}_n^2(r) + \frac{h}{2} t_{n+1} \left( \bar{y}_n(r) + h t_n \bar{y}_n^2(r) \right)^2$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu itarasyonlar sonucundaki nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.25 de verilmiştir.[17]

### 5.5.2 Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.2$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T - t_0}{N} = 0.02$  olsun.

$$\underline{f}'(t, \tilde{y}(t)) = \underline{y}^2(t) (1 + 2t^2 \underline{y}(t)) \quad (5.75)$$

$$\bar{f}'(t, \tilde{y}(t)) = \bar{y}^2(t) (1 + 2t^2 \bar{y}(t))$$

olur. Buradan sağ ve sol yan fonksiyonların ikinci başlangıç değerleri (4.50) eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(r) &= \underline{y}_0(r) + h \underline{y}_0^2(r) \left( t_0 + \frac{h}{2} (1 + 2t_0^2 \underline{y}_0(r)) \right) \\ \bar{y}_1(r) &= \bar{y}_0(r) + h \bar{y}_0^2(r) \left( t_0 + \frac{h}{2} (1 + 2t_0^2 \bar{y}_0(r)) \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

şeklinde olur. (4.48) ve (4.49) eşitliklerinden (5.70) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3}t_{n-1}\underline{y}_{n-1}^2(r) + \frac{4h}{3}t_n\underline{y}_n^2(r) + \frac{h}{3}t_{n+1}\left(\underline{y}_n(r) + ht_n\underline{y}_n^2(r)\right)^2 \quad (5.77)$$

$$\overline{y}_{n+1}(r) = \overline{y}_{n-1}(r) + \frac{h}{3}t_{n-1}\overline{y}_{n-1}^2(r) + \frac{4h}{3}t_n\overline{y}_n^2(r) + \frac{h}{3}t_{n+1}\left(\overline{y}_n(r) + ht_n\overline{y}_n^2(r)\right)^2$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonların sonucundaki kesin çözüme nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.26 de verilmiştir. [18]

### 5.5.3 2-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.2$ ,  $N = 3$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} \cong 0.66$  olsun. Kesin çözümden alınan

başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0; r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1; r) \\ \overline{y}_0(r) = \overline{Y}(0; r) \quad \overline{y}_1(r) = \overline{Y}(t_1; r) \end{aligned} \quad (5.78)$$

olmak üzere (4.75) eşitliklerinden (5.70) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) - \frac{h}{2}t_{n-1}\underline{y}_{n-1}^2(r) + \frac{3h}{2}t_n\underline{y}_n^2(r) \quad (5.79)$$

$$\overline{y}_{n+1}(r) = \overline{y}_n(r) - \frac{h}{2}t_{n-1}\overline{y}_{n-1}^2(r) + \frac{3h}{2}t_n\overline{y}_n^2(r)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.27 de verilmiştir. [20]

### 5.5.4 Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.2$ ,  $N = 15$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} \cong 0.013$  olsun. Kesin çözümden

alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0;r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1;r) \quad \underline{y}_2(r) = \underline{Y}(t_2;r) \\ \overline{y}_0(r) = \overline{Y}(0;r) \quad \overline{y}_1(r) = \overline{Y}(t_1;r) \quad \overline{y}_2(r) = \overline{Y}(t_2;r) \end{aligned} \quad (5.80)$$

olmak üzere, (4.95) eşitliklerinden (5.70) bulanık başlangıç değer problemi için,

$$\underline{y}_{n+2}(r) = \underline{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( 5t_{n-1}\underline{y}_{n-1}^2 - 16t_n\underline{y}_n^2 + 23t_{n+1}\underline{y}_{n+1}^2 \right) \quad (5.81)$$

$$\overline{y}_{n+2}(r) = \overline{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( 5t_{n-1}\overline{y}_{n-1}^2 - 16t_n\overline{y}_n^2 + 23t_{n+1}\overline{y}_{n+1}^2 \right)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.28 de verilmiştir. [21]

### 5.5.5 3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.2$  ,  $N = 5$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.04$  olsun. (4.113) ve (4.115)

eşitliklerinden

$$\underline{K}_1 = ht_n\underline{y}_n^2(r)$$

$$\underline{K}_2 = h \left( \frac{2h}{3} + t_n \right) \left( \underline{y}_n(r) + \frac{2h}{3} t_n \underline{y}_n^2(r) \right)^2 \quad (5.82)$$

$$\underline{K}_3 = h \left( \frac{2h}{3} + t_n \right) \left( \underline{y}_n(r) + \frac{2h}{3} \left( \frac{2h}{3} + t_n \right) \left( \underline{y}_n(r) + \frac{2h}{3} t_n \underline{y}_n^2(r) \right)^2 \right)^2$$

$$\bar{K}_1 = ht_n \bar{y}_n^2(r)$$

$$\bar{K}_2 = h \left( \frac{2h}{3} + t_n \right) \left( \bar{y}_n(r) + \frac{2h}{3} t_n \bar{y}_n^2(r) \right)^2 \quad (5.83)$$

$$\bar{K}_3 = h \left( \frac{2h}{3} + t_n \right) \left( \bar{y}_n(r) + \frac{2h}{3} \left( \frac{2h}{3} + t_n \right) \left( \bar{y}_n(r) + \frac{2h}{3} t_n \bar{y}_n^2(r) \right)^2 \right)^2$$

olmak üzere (4.114) ve (4.116) eşitliklerinden (5.70) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{1}{8} (2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3) \quad (5.84)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{1}{8} (2\bar{K}_1 + 3\bar{K}_2 + 3\bar{K}_3)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.29 de verilmiştir.[25,26]

### 5.5.6 Varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $\tilde{y}(t; r) = (\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r))$ , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(t) = (\underline{\lambda}(t), \bar{\lambda}(t))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t; r)) = (\underline{f}(t, \tilde{y}(t; r)), \bar{f}(t, \tilde{y}(t; r)))$  olmak üzere (4.120) bulanık diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon denklemlerinden (5.70) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(t; r) &= \underline{y}_n(t; r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \underline{y}'_n(\zeta; r) - \zeta \underline{y}_n^2(\zeta; r) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t; r) &= \bar{y}_n(t; r) + \int_0^t \bar{\lambda}(\zeta) \left( \bar{y}'_n(\zeta; r) - \zeta \bar{y}_n^2(\zeta; r) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\underline{y}_0(t; r) = \underline{Y}(0; r) = 1.1 + 0.1r$$

$$\bar{y}_0(t; r) = \bar{Y}(0; r) = 1.3 - 0.1r$$

Genel Lagrange çarpanları  $\underline{\lambda}(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta) = -1$  olduğundan (5.85) denklemi

$$\begin{aligned}\underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) - \zeta \underline{y}_n^2(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t;r) &= \bar{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \bar{y}'_n(\zeta;r) - \zeta \bar{y}_n^2(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \underline{y}_0(t;r) &= \underline{Y}(0;r) = 1.1 + 0.1r \\ \bar{y}_0(t;r) &= \bar{Y}(0;r) = 1.3 - 0.1r\end{aligned}\tag{5.86}$$

şeklinde yazılarak iterasyon denklemleri elde edilir. 10. iterasyon sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizilge 5.30'da verilmiştir.

Çizelge 5.25 (5.70) Denklemnin modifiye edilmiş Euler metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	1.17772	1.12474	0.0529761	1.40996	1.3347	0.0752582
<b>0.1</b>	1.18919	1.1352	0.0539893	1.39821	1.32416	0.0740417
<b>0.2</b>	1.20068	1.14566	0.0550129	1.38646	1.31363	0.0728361
<b>0.3</b>	1.21218	1.15613	0.056047	1.37474	1.3031	0.0716414
<b>0.4</b>	1.22369	1.1666	0.0570917	1.36303	1.29257	0.0704576
<b>0.5</b>	1.23522	1.17707	0.0581469	1.35134	1.28205	0.0692846
<b>0.6</b>	1.24676	1.18755	0.0592126	1.33966	1.27153	0.0681225
<b>0.7</b>	1.25832	1.19803	0.060289	1.32799	1.26102	0.0669712
<b>0.8</b>	1.2699	1.20852	0.061376	1.31634	1.25051	0.0658307
<b>0.9</b>	1.28149	1.21901	0.0624736	1.30471	1.24001	0.064701
<b>1.</b>	1.29309	1.22951	0.063582	1.29309	1.22951	0.063582

Çizelge 5.26 (5.70) Denklemnin modifiye edilmiş Simpson metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	1.12474	1.12474	$2.35703 \times 10^{-6}$	1.3347	1.3347	$3.96344 \times 10^{-6}$
<b>0.1</b>	1.1352	1.1352	$2.42414 \times 10^{-6}$	1.32416	1.32416	$3.86909 \times 10^{-6}$
<b>0.2</b>	1.14566	1.14566	$2.49256 \times 10^{-6}$	1.31363	1.31363	$3.7763 \times 10^{-6}$
<b>0.3</b>	1.15613	1.15613	$2.5623 \times 10^{-6}$	1.3031	1.3031	$3.68506 \times 10^{-6}$
<b>0.4</b>	1.1666	1.1666	$2.63337 \times 10^{-6}$	1.29257	1.29257	$3.59536 \times 10^{-6}$
<b>0.5</b>	1.17707	1.17707	$2.70578 \times 10^{-6}$	1.28205	1.28205	$3.50717 \times 10^{-6}$
<b>0.6</b>	1.18755	1.18755	$2.77956 \times 10^{-6}$	1.27153	1.27153	$3.4205 \times 10^{-6}$
<b>0.7</b>	1.19803	1.19803	$2.85471 \times 10^{-6}$	1.26102	1.26102	$3.33531 \times 10^{-6}$
<b>0.8</b>	1.20852	1.20852	$2.93125 \times 10^{-6}$	1.25051	1.25051	$3.25161 \times 10^{-6}$
<b>0.9</b>	1.21901	1.21901	$3.0092 \times 10^{-6}$	1.24001	1.24001	$3.16936 \times 10^{-6}$
<b>1.</b>	1.22951	1.22951	$3.08856 \times 10^{-6}$	1.22951	1.22951	$3.08856 \times 10^{-6}$

Çizelge 5.27 (5.70) Denklemin 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	1.12348	1.12474	0.00126826	1.33546	1.3347	0.000753928
<b>0.1</b>	1.13404	1.1352	0.00116613	1.32482	1.32416	0.000653893
<b>0.2</b>	1.1446	1.14566	0.0010641	1.31418	1.31363	0.000553739
<b>0.3</b>	1.15517	1.15613	0.000962169	1.30355	1.3031	0.000453468
<b>0.4</b>	1.16574	1.1666	0.000860346	1.29293	1.29257	0.00035308
<b>0.5</b>	1.17631	1.17707	0.000758629	1.2823	1.28205	0.000252576
<b>0.6</b>	1.18689	1.18755	0.000657017	1.27169	1.27153	0.000151958
<b>0.7</b>	1.19748	1.19803	0.000555512	1.26107	1.26102	0.0000512256
<b>0.8</b>	1.20807	1.20852	0.000454114	1.25046	1.25051	0.0000496199
<b>0.9</b>	1.21866	1.21901	0.000352826	1.23986	1.24001	0.000150578
<b>1.</b>	1.22926	1.22951	0.000251646	1.22926	1.22951	0.000251646

Çizelge 5.28 (5.70) Denklemin Adams-Bashforh 3-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	1.1126	1.12474	0.0121425	1.34797	1.3347	0.0132655
<b>0.1</b>	1.12432	1.1352	0.0108855	1.33614	1.32416	0.0119761
<b>0.2</b>	1.13604	1.14566	0.00962764	1.32432	1.31363	0.0106893
<b>0.3</b>	1.14776	1.15613	0.00836887	1.3125	1.3031	0.00940503
<b>0.4</b>	1.15949	1.1666	0.00710908	1.3007	1.29257	0.00812314
<b>0.5</b>	1.17122	1.17707	0.00584818	1.28889	1.28205	0.00684354
<b>0.6</b>	1.18297	1.18755	0.00458606	1.2771	1.27153	0.00556614
<b>0.7</b>	1.19471	1.19803	0.00332264	1.26531	1.26102	0.00429082
<b>0.8</b>	1.20646	1.20852	0.00205781	1.25353	1.25051	0.0030175
<b>0.9</b>	1.21822	1.21901	0.000791478	1.24175	1.24001	0.00174608
<b>1.</b>	1.22998	1.22951	0.000476452	1.22998	1.22951	0.000476452

Çizelge 5.29 (5.70) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
0.	1.12474	1.12474	$5.44138 \times 10^{-7}$	1.3347	1.3347	$9.21567 \times 10^{-7}$
0.1	1.1352	1.1352	$5.59832 \times 10^{-7}$	1.32416	1.32416	$8.99304 \times 10^{-7}$
0.2	1.14566	1.14566	$5.75838 \times 10^{-7}$	1.31363	1.31363	$8.77422 \times 10^{-7}$
0.3	1.15613	1.15613	$5.9216 \times 10^{-7}$	1.3031	1.3031	$8.55915 \times 10^{-7}$
0.4	1.1666	1.1666	$6.08801 \times 10^{-7}$	1.29257	1.29257	$8.3478 \times 10^{-7}$
0.5	1.17707	1.17707	$6.25766 \times 10^{-7}$	1.28205	1.28205	$8.14013 \times 10^{-7}$
0.6	1.18755	1.18755	$6.43059 \times 10^{-7}$	1.27153	1.27153	$7.93611 \times 10^{-7}$
0.7	1.19803	1.19803	$6.60681 \times 10^{-7}$	1.26102	1.26102	$7.7357 \times 10^{-7}$
0.8	1.20852	1.20852	$6.78638 \times 10^{-7}$	1.25051	1.25051	$7.53885 \times 10^{-7}$
0.9	1.21901	1.21901	$6.96934 \times 10^{-7}$	1.24001	1.24001	$7.34553 \times 10^{-7}$
1.	1.22951	1.22951	$7.15571 \times 10^{-7}$	1.22951	1.22951	$7.15571 \times 10^{-7}$

Çizelge 5.30 (5.70) Denklem varyasyonel iterasyon metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
0.	1.12474	1.12474	$2.22045 \times 10^{-16}$	1.3347	1.3347	0.
0.1	1.1352	1.1352	$1.5952 \times 10^{-17}$	1.32416	1.32416	$5.28548 \times 10^{-17}$
0.2	1.14566	1.14566	$7.37533 \times 10^{-17}$	1.31363	1.31363	$1.80439 \times 10^{-16}$
0.3	1.15613	1.15613	$1.56765 \times 10^{-16}$	1.3031	1.3031	$2.99585 \times 10^{-17}$
0.4	1.1666	1.1666	$1.29403 \times 10^{-16}$	1.29257	1.29257	$2.05738 \times 10^{-17}$
0.5	1.17707	1.17707	$7.65748 \times 10^{-17}$	1.28205	1.28205	$2.4312 \times 10^{-16}$
0.6	1.18755	1.18755	$7.28758 \times 10^{-17}$	1.27153	1.27153	$1.36672 \times 10^{-16}$
0.7	1.19803	1.19803	$9.18593 \times 10^{-17}$	1.26102	1.26102	$8.0161 \times 10^{-17}$
0.8	1.20852	1.20852	$4.26808 \times 10^{-17}$	1.25051	1.25051	$1.90525 \times 10^{-16}$
0.9	1.21901	1.21901	$1.17052 \times 10^{-16}$	1.24001	1.24001	$4.88134 \times 10^{-17}$
1.	1.22951	1.22951	$1.95203 \times 10^{-16}$	1.22951	1.22951	$9.44673 \times 10^{-17}$

**Uygulama 5.6** Birinci mertebeden bulanık diferansiyel denklem;

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = 3A\tilde{y}^2(t) & , \quad t \in [0, 0.1] \\ \tilde{y}(0) = (0.5\sqrt{r}, 0.2\sqrt{1-r} + 0.5) \end{cases} \quad (5.86)$$

şeklinde olsun. Diğer örneklerden farklı olarak bu örnekte  $A$  sayısı bulanık bir sayıdır ve  $A = (1+r, 3-r)$  dir.  $\tilde{y}(t) = (\underline{y}(t), \bar{y}(t))$  bulanık sayı değerli bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun seviyeleri,  $\tilde{y}(t; r) = (\underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t; r)) = 3A\tilde{y}^2(t; r)$  olacak şekilde;

$$\begin{aligned} \underline{y}'(t; r) &= 3(1+r)\underline{y}^2(t; r) \\ \bar{y}'(t; r) &= 3(3-r)\bar{y}^2(t; r) \\ \underline{y}(0; r) &= 0.5\sqrt{r} \\ \bar{y}(0; r) &= 0.2\sqrt{1-r} + 0.5 \end{aligned} \quad (5.87)$$

biçimindeki (5.86) denkleminin parametrik formu oluşur. (5.86) denkleminin kesin çözümü;[31]

$$\tilde{Y}(t; r) = \left( \frac{1}{3(1+r)t - \frac{1}{0.5\sqrt{r}}}, \frac{1}{3(3-r)t - \frac{1}{0.2\sqrt{1-r} + 0.5}} \right) \quad (5.88)$$

### 5.6.1 Modifiye edilmiş Euler metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  dir. Buradan (4.34) ve (4.35)

modifiye edilmiş Euler metodu iterasyon denkleminde

$$F[t, \underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] = \underline{f}(t, \tilde{y}(t; r)) = 3(1+r)\underline{y}^2(t; r) \quad (5.89)$$

$$G[t, \underline{y}(t; r), \bar{y}(t; r)] = \bar{f}(t, \tilde{y}(t; r)) = 3(3-r)\bar{y}^2(t; r)$$

$\underline{y}(t_n; r) = \underline{y}_n(r)$  ve  $\bar{y}(t_n; r) = \bar{y}_n(r)$  olmak üzere (5.86) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{3h}{2}(1+r)\underline{y}_n^2(r) + \frac{3h}{2}(1+r)\left(\underline{y}_n(r) + 3h(1+r)\underline{y}_n^2(r)\right)^2 \quad (5.90)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{3h}{2}(3-r)\bar{y}_n^2(r) + \frac{3h}{2}(3-r)\left(\bar{y}_n(r) + 3h(3-r)\bar{y}_n^2(r)\right)^2$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu itarasyonlar sonucundaki nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.31 de verilmiştir.[17]

### 5.6.2 Modifiye edilmiş 2-adım Simpson metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 10$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.01$  olsun.

$$\underline{f}'(t, \tilde{y}(t)) = 18(1+r)^2 \underline{y}^3(t) \quad (5.91)$$

$$\bar{f}'(t, \tilde{y}(t)) = 18(3-r)^2 \bar{y}^3(t)$$

olur. Buradan sağ ve sol yan fonksiyonların ikinci başlangıç değerleri (4.50) eşitliğinden;

$$\begin{aligned} \underline{y}_1(r) &= \underline{y}_0(r) + 3h(1+r)\underline{y}_0^2(r)\left(1 + 3h(1+r)\underline{y}_0(r)\right) \\ \bar{y}_1(r) &= \bar{y}_0(r) + 3h(3-r)\bar{y}_0^2(r)\left(1 + 3h(3-r)\bar{y}_0(r)\right) \end{aligned} \quad (5.92)$$

şeklinde olur. (4.48) ve (4.49) eşitliklerinden (5.86) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(r) &= \underline{y}_{n-1}(r) + h(1+r)\underline{y}_{n-1}^2(r) + 4h(1+r)\underline{y}_n^2(r) + \\ &+ h(1+r)\left(\underline{y}_n(r) + 3h(1+r)\underline{y}_n^2(r)\right)^2 \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1}(r) &= \bar{y}_{n-1}(r) + h(3-r)\bar{y}_{n-1}^2(r) + 4h(3-r)\bar{y}_n^2(r) + \\ &+ h(3-r)\left(\bar{y}_n(r) + 3h(3-r)\bar{y}_n^2(r)\right)^2 \end{aligned}$$

şeklindeki iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonların sonucundaki kesin çözüme nümerik olarak yaklaşım ve hatalar çizelge 5.32 de verilmiştir. [18]

### 5.6.3 2-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $T = 0.1$ ,  $N = 2$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.05$  olsun. Kesin çözümden alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0; r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1; r) \\ \bar{y}_0(r) = \bar{Y}(0; r) \quad \bar{y}_1(r) = \bar{Y}(t_1; r) \end{aligned} \quad (5.94)$$

şeklinindedir. Burada adım aralığının büyük alınmasının sebebi, adım aralığının küçüldükçe, dolayısıyla iterasyon sayısının artmasıyla yaklaşım ile kesin çözüm arasındaki hatanın artmasıdır. Dolayısıyla 1. iterasyon ile en az hata elde edilmiştir. (4.75) eşitliklerinden (5.86) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) - \frac{3h}{2}(3-r)\underline{y}_{n-1}^2(r) + \frac{9h}{2}(1+r)\underline{y}_n^2(r) \quad (5.95)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) - \frac{3h}{2}(1+r)\bar{y}_{n-1}^2(r) + \frac{9h}{2}(3-r)\bar{y}_n^2(r)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.33 de verilmiştir. [20]

#### 5.6.4 Adams-Bashforth 3-adım metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.1$  ,  $N = 15$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} \cong 0.033$  olsun. Kesin çözümden

alınan başlangıç değerleri;

$$\begin{aligned} \underline{y}_0(r) = \underline{Y}(0;r) \quad \underline{y}_1(r) = \underline{Y}(t_1;r) \quad \underline{y}_2(r) = \underline{Y}(t_2;r) \\ \bar{y}_0(r) = \bar{Y}(0;r) \quad \bar{y}_1(r) = \bar{Y}(t_1;r) \quad \bar{y}_2(r) = \bar{Y}(t_2;r) \end{aligned} \quad (5.96)$$

şeklinindedir. Burada da 2-adım metoduna benzer şekilde nümerik olarak, hataların iterasyon sayısı arttıkça artmasından dolayı 1. İterasyon alınarak hatanın en aza indirgenmesi sağlanacaktır. (4.95) eşitliklerinden (5.86) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+2}(r) = \underline{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{4} \left( 5(1+r)\underline{y}_{n-1}^2 - 16(3-r)\underline{y}_n^{-2} + 23(1+r)\underline{y}_{n+1}^2 \right) \quad (5.97)$$

$$\bar{y}_{n+2}(r) = \bar{y}_{n+1}(r) + \frac{h}{12} \left( 5(3-r)\bar{y}_{n-1}^{-2} - 16(1+r)\underline{y}_n^2 + 23(3-r)\bar{y}_{n+1}^{-2} \right)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.34 de verilmiştir. [21]

#### 5.6.5 3. mertebeden Runge-Kutta metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$  ,  $T = 0.1$  ,  $N = 7$  ve adım aralığı  $h = \frac{T-t_0}{N} = 0.0143$  olsun. (4.113) ve (4.115)

eşitliklerinden

$$\underline{K}_1 = 3h(1+r)\underline{y}_n^2(r)$$

$$\underline{K}_2 = 3h(1+r)\left(\underline{y}_n(r) + 2h(1+r)\underline{y}_n^2(r)\right)^2 \quad (5.98)$$

$$\underline{K}_3 = 3h(1+r)\left(\underline{y}_n(r) + 2h(1+r)\left(\underline{y}_n(r) + 2h(1+r)\underline{y}_n^2(r)\right)^2\right)^2$$

$$\bar{K}_1 = 3h(3-r)\bar{y}_n^2(r)$$

$$\bar{K}_2 = 3h(3-r)\left(\bar{y}_n(r) + 2h(3-r)\bar{y}_n^2(r)\right)^2 \quad (5.99)$$

$$\bar{K}_3 = 3h(3-r)\left(\bar{y}_n(r) + 2h(3-r)\left(\bar{y}_n(r) + 2h(3-r)\bar{y}_n^2(r)\right)^2\right)^2$$

olmak üzere (4.114) ve (4.116) eşitliklerinden (5.86) bulanık başlangıç değer problemi için

$$\underline{y}_{n+1}(r) = \underline{y}_n(r) + \frac{1}{8}(2\underline{K}_1 + 3\underline{K}_2 + 3\underline{K}_3) \quad (5.100)$$

$$\bar{y}_{n+1}(r) = \bar{y}_n(r) + \frac{1}{8}(2\bar{K}_1 + 3\bar{K}_2 + 3\bar{K}_3)$$

şeklinde iterasyon denklemleri elde edilir. Bu iterasyonlar sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizelge 5.35 de verilmiştir.[25,26]

### 5.5.6 He'nin varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşım

$t_0 = 0$ ,  $\tilde{y}(t;r) = (\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$ , genel Lagrange çarpanları  $\tilde{\lambda}(t) = (\underline{\lambda}(t), \bar{\lambda}(t))$  ve  $\tilde{f}(t, \tilde{y}(t;r)) = (\underline{f}(t, \tilde{y}(t;r)), \bar{f}(t, \tilde{y}(t;r)))$  olmak üzere (4.120) bulanık diferansiyel denklemler için varyasyonel iterasyon denklemlerinden (5.86) bulanık başlangıç değer problemi için;

$$\begin{aligned} \underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) + \int_0^t \underline{\lambda}(\zeta) \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) - 3(1+r)\underline{y}^2(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t;r) &= \bar{y}_n(t;r) + \int_0^t \bar{\lambda}(\zeta) \left( \bar{y}'_n(\zeta;r) - 3(3-r)\bar{y}^2(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \underline{y}_0(t;r) &= \underline{Y}(0;r) = 0.5\sqrt{r} \\ \bar{y}_0(t;r) &= \bar{Y}(0;r) = 0.2\sqrt{1-r} + 05 \end{aligned} \quad (5.101)$$

Genel Lagrange çarpanları  $\underline{\lambda}(\zeta) = \bar{\lambda}(\zeta) = -1$  olduğundan (5.101) denklemi

$$\begin{aligned}\underline{y}_{n+1}(t;r) &= \underline{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \underline{y}'_n(\zeta;r) - 3(1+r)\underline{y}_n^2(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \bar{y}_{n+1}(t;r) &= \bar{y}_n(t;r) - \int_0^t \left( \bar{y}'_n(\zeta;r) - 3(3-r)\bar{y}_n^2(\zeta;r) \right) d\zeta \\ \underline{y}_0(t;r) &= \underline{Y}(0;r) = 0.5\sqrt{r} \\ \bar{y}_0(t;r) &= \bar{Y}(0;r) = 0.2\sqrt{1-r} + 05\end{aligned}\tag{5.102}$$

şeklinde yazılarak iterasyon denklemleri elde edilir. 9. iterasyon sonucundaki nümerik yaklaşım ve hatalar çizlge 5.36'da verilmiştir.

Çizelge 5.31 (5.86) Denklemnin modifiye edilmiş Euler metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	1.87688	1.89189	0.0150119
<b>0.1</b>	0.166818	0.166818	$1.31181 \times 10^{-7}$	1.71436	1.72465	0.0102909
<b>0.2</b>	0.243182	0.243183	$7.43838 \times 10^{-7}$	1.57267	1.57977	0.00710592
<b>0.3</b>	0.306607	0.306609	$2.31458 \times 10^{-6}$	1.4475	1.45242	0.00492628
<b>0.4</b>	0.364655	0.36466	$5.59854 \times 10^{-6}$	1.33544	1.33886	0.00341734
<b>0.5</b>	0.420434	0.420446	0.0000117619	1.23367	1.23604	0.00236307
<b>0.6</b>	0.475717	0.47574	0.0000225754	1.13968	1.1413	0.00162105
<b>0.7</b>	0.531745	0.531786	0.0000406988	1.05091	1.052	0.00109544
<b>0.8</b>	0.589529	0.589599	0.0000701067	0.964049	0.964769	0.000720142
<b>0.9</b>	0.65	0.650117	0.000116729	0.872592	0.873039	0.000446603
<b>1.</b>	0.714096	0.714286	0.000189426	0.714096	0.714286	0.000189426

Çizelge 5.32 (5.86) Denklemnin modifiye edilmiş Simpson metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	1.87881	1.89189	0.01308
<b>0.1</b>	0.166818	0.166818	$9.00566 \times 10^{-8}$	1.71581	1.72465	0.00883377
<b>0.2</b>	0.243183	0.243183	$5.18081 \times 10^{-7}$	1.57376	1.57977	0.00601482
<b>0.3</b>	0.306609	0.306609	$1.63259 \times 10^{-6}$	1.44831	1.45242	0.00411501
<b>0.4</b>	0.36466	0.36466	$3.99592 \times 10^{-6}$	1.33604	1.33886	0.00281889
<b>0.5</b>	0.420446	0.420446	$8.4911 \times 10^{-6}$	1.23411	1.23604	0.00192591
<b>0.6</b>	0.475723	0.47574	0.0000164793	1.14	1.1413	0.00130583
<b>0.7</b>	0.531756	0.531786	0.0000300347	1.05113	1.052	0.000872358
<b>0.8</b>	0.589547	0.589599	0.0000522992	0.964202	0.964769	0.000566879
<b>0.9</b>	0.650029	0.650117	0.0000880227	0.872691	0.873039	0.000347236
<b>1.</b>	0.714141	0.714286	0.000144397	0.714141	0.714286	0.000144397

Çizelge 5.33 (5.86) Denklem 2-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	-0.11025	0.	0.11025	1.72678	1.89189	0.165108
<b>0.1</b>	0.0654001	0.166818	0.101418	1.6169	1.72465	0.107751
<b>0.2</b>	0.150854	0.243183	0.0923283	1.51334	1.57977	0.0664327
<b>0.3</b>	0.223614	0.306609	0.0829947	1.41523	1.45242	0.0371964
<b>0.4</b>	0.291223	0.36466	0.0734375	1.32167	1.33886	0.0171846
<b>0.5</b>	0.356762	0.420446	0.0636837	1.23173	1.23604	0.00430294
<b>0.6</b>	0.421974	0.47574	0.0537662	1.1443	1.1413	0.00299713
<b>0.7</b>	0.488071	0.531786	0.0437149	1.05786	1.052	0.00585882
<b>0.8</b>	0.556076	0.589599	0.0335226	0.969866	0.964769	0.00509683
<b>0.9</b>	0.627134	0.650117	0.0229824	0.874205	0.873039	0.00116678
<b>1.</b>	0.706445	0.714286	0.00784108	0.706445	0.714286	0.00784108

Çizelge 5.34 (5.86) Denklem Adams-Bashforh 3-adım metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	-0.314052	0.	0.314052	2.10569	1.89189	0.213799
<b>0.1</b>	-0.116826	0.166818	0.283644	1.93798	1.72465	0.213336
<b>0.2</b>	-0.0106809	0.243183	0.253864	1.78442	1.57977	0.204652
<b>0.3</b>	0.082048	0.306609	0.224561	1.64269	1.45242	0.190268
<b>0.4</b>	0.169096	0.36466	0.195564	1.51069	1.33886	0.171836
<b>0.5</b>	0.253762	0.420446	0.166684	1.38646	1.23604	0.150427
<b>0.6</b>	0.338041	0.47574	0.137699	1.268	1.1413	0.126698
<b>0.7</b>	0.423464	0.531786	0.108322	1.15298	1.052	0.100976
<b>0.8</b>	0.511501	0.589599	0.0780978	1.038	0.964769	0.0732324
<b>0.9</b>	0.604127	0.650117	0.0459899	0.91577	0.873039	0.0427316
<b>1.</b>	0.713268	0.714286	0.00101732	0.713268	0.714286	0.00101732

Çizelge 5.35 (5.86) Denklem 3. mertebeden Runge-Kutta metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	1.88906	1.89189	0.00283361
<b>0.1</b>	0.166818	0.166818	$1.3552 \times 10^{-9}$	1.72287	1.72465	0.0017805
<b>0.2</b>	0.243183	0.243183	$1.19842 \times 10^{-8}$	1.57864	1.57977	0.00112805
<b>0.3</b>	0.306609	0.306609	$5.00031 \times 10^{-8}$	1.45171	1.45242	0.000717713
<b>0.4</b>	0.36466	0.36466	$1.5206 \times 10^{-7}$	1.3384	1.33886	0.000456673
<b>0.5</b>	0.420446	0.420446	$3.8716 \times 10^{-7}$	1.23575	1.23604	0.000289238
<b>0.6</b>	0.475739	0.47574	$8.79199 \times 10^{-7}$	1.14112	1.1413	0.000181267
<b>0.7</b>	0.531784	0.531786	$1.84369 \times 10^{-6}$	1.05189	1.052	0.000111435
<b>0.8</b>	0.589595	0.589599	$3.64772 \times 10^{-6}$	0.964703	0.964769	0.000066171
<b>0.9</b>	0.65011	0.650117	$6.90844 \times 10^{-6}$	0.873002	0.873039	0.000036546
<b>1.</b>	0.714273	0.714286	0.0000126557	0.714273	0.714286	0.000012655

Çizelge 5.36 (5.86) Denklem 3. mertebeden varyasyonel iterasyon metoduyla nümerik yaklaşımı

$r$	$\underline{y}(r)$	$\underline{Y}(r)$	$ \underline{Y} - \underline{y} (r)$	$\bar{y}(r)$	$\bar{Y}(r)$	$ \bar{Y} - \bar{y} (r)$
<b>0.</b>	0.	0.	0.	1.8918	1.89189	0.0000888594
<b>0.1</b>	0.166818	0.166818	$2.66442 \times 10^{-17}$	1.72461	1.72465	0.0000390908
<b>0.2</b>	0.243183	0.243183	$5.12856 \times 10^{-16}$	1.57976	1.57977	0.0000171149
<b>0.3</b>	0.306609	0.306609	$1.3 \times 10^{-14}$	1.45242	1.45242	$7.41392 \times 10^{-6}$
<b>0.4</b>	0.36466	0.36466	$1.53974 \times 10^{-13}$	1.33885	1.33886	$3.15659 \times 10^{-6}$
<b>0.5</b>	0.420446	0.420446	$1.21614 \times 10^{-12}$	1.23604	1.23604	$1.31025 \times 10^{-6}$
<b>0.6</b>	0.47574	0.47574	$7.39035 \times 10^{-12}$	1.1413	1.1413	$5.24417 \times 10^{-7}$
<b>0.7</b>	0.531786	0.531786	$3.72906 \times 10^{-11}$	1.052	1.052	$1.98997 \times 10^{-7}$
<b>0.8</b>	0.589599	0.589599	$1.63749 \times 10^{-10}$	0.964769	0.964769	$6.94139 \times 10^{-8}$
<b>0.9</b>	0.650117	0.650117	$6.4574 \times 10^{-10}$	0.873039	0.873039	$2.06116 \times 10^{-8}$
<b>1.</b>	0.714286	0.714286	$2.33862 \times 10^{-9}$	0.714286	0.714286	$2.33862 \times 10^{-9}$

## BÖLÜM VI

### SONUÇLAR

Bu çalışmada Hukuhara ve kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik kullanılarak bulanık diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışları ve ayrıca çeşitli nümerik metotlarla bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri incelenmiştir.

Örneklere de görüldüğü gibi klasik adi diferansiyel denklemlerin başlangıç koşullarına bakılmaksızın denklemlerde cebirsel değişiklik yapılmıştır. Normalde oluşan diferansiyel denklemler klasik olarak birbirinden farksızdır. Başlangıç koşulları hepsinde aynı olmak suretiyle, her birinin başlangıç koşulları bulanık sayı olarak alınmıştır. Ortaya çıkan bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri yapıldığında, şekillerde de görüldüğü üzere her bir bulanık diferansiyel denklemin çözümü birbirinden farklı davranışlar göstermektedir. Ayrıca kullanılan diferansiyellenebilirlik kavramlarının çözümlerin davranışları üzerindeki etkisi de değişmektedir. Hukuhara diferansiyellenebilirlik alındığında çözümlerin destek bölgesi genişliği artmaktadır, bu ise çözümlerin kararsız bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir. Fakat, aynı bulanık diferansiyel denklemde kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik kavramı uygulandığında, çözümlerin destek bölgesi genişliği azalmaktadır ki bu da çözümlerin kararlı bir yapıya sahip olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmada bulanık diferansiyel denklemler için yedi nümerik metot verilmiştir. Öncelikle bu metotların klasik adi diferansiyel denklemler üzerinde uygulanışı, daha sonra ise bulanık diferansiyel denklemler üzerindeki uygulanışları verilmiştir. Bu metotların bulanık diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerindeki hata analizleri altı uygulama ile çizelgelerde de görüldüğü üzere karşılaştırmaları yapılmıştır. Bu karşılaştırmalar, her bir nümerik metotlardaki iterasyonlar sonucunda elde edilen  $t = T$  noktasındaki yaklaşık çözümlerle, bulanık diferansiyel denklemlerin  $t = T$  noktasındaki kesin çözümleri ile arasındaki farkın mutlak değerinde  $r \in [0,1]$ ,  $r = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  alınarak çizelgeler oluşturulmuştur.

Burada literatürdeki metotlar dışında, bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için varyasyonel iterasyon metodu verilmiştir. Uygulamalarda da görüldüğü gibi, çoğu uygulamada He'nin varyasyonel iterasyon metodunun bulanık diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerinde en az hata veren metot olduğu açıktır. Bu

metot dışında yine nümerik çözümler üzerinde iyi bir yaklaşımı olan diğer bir metot ise 3. mertebeden Runge-Kutta metotudur.

## KAYNAKLAR

- [1] Bede, B. and Gal, S.G., Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 581-599, 2005.
- [2] Bede, B., Rudas, I.J. and Bencsik, A., First order differential equations under generalized differentiability, *Information Sciences: an International Journal*, 7, 177, 2007.
- [3] Buckley, J.J. and Feuring, T., Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 110, 43-54, 2000.
- [4] Diamond, P., Stability and periodicity in fuzzy differential equations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, 583-590, 2000.
- [5] Ding, Z., Ma, M. and Kandel, A., Existence of the solutions of fuzzy differential equations with parameters, *Information Sciences*, 99, 205-217, 1997.
- [6] Gnana Bhaskar, T., Lakshmikantham, V. and Devi, V., Revisiting fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, 58, 351-358, 2004.
- [7] Kaleva, O., A note on fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis*, 64, 895-900, 2006.
- [8] Kleva, O., Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 24, 301-317, 1987.
- [9] Puri, M. and Ralescu, D., Differentials of fuzzy functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 91, 552-558, 1983.
- [10] Seikkala, S., On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 24, 319-330, 1987.
- [11] Song, S. and Wu, C., Existence and uniqueness of solution to the Cauchy problem of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 123, 49-62, 2001.
- [12] Wu, C., Song, S. and Stanley Lee, L., Approximate solutions, existence and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202, 629-644, 1996.
- [13] Bede, B., Department of Mathematical Sciences Lecture Series: Mathematical of epistemic uncertainty, The University of Texas At El Paso, USA.
- [14] Friedman, M. and Kandel, A., Fundamentals of Computer Numerical Analysis, CRC press, Boca Raton, 390-400, 441-444, 1994.
- [15] Ma, M., Friedman, M. and Kandel, A., Numerical solutions of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 105, 133-138, 1999.

- [16] Atkinson, K. E., An Introduction to Numerical Analysis, second ed., Jhon Wiley and Sons, 1989.
- [17] Shokri, J., Numerical solutions of fuzzy differential equations, Applied Mathematical Sciences, 1, 45, 2231-2246, 2007.
- [18] Moghadam, M. M. and Dahaghin, M. S., Two-step methods for numerical solution of fuzzy differential equations.
- [19] Kaleva, O., Interpolation of fuzzy data, Fuzzy Sets and Systems, 60, 63-70, 1994.
- [20] Allahviranloo, T., Ahmady, N. and Ahmady, E., Two step method for fuzzy differential equations, International Mathematical Forum, 1, 17, 823-832, 2006.
- [21] Allahviranloo, T., Ahmady, N. and Ahmady, E., Numerical Solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method, Information Sciences, 177, 1633-1647, 2007.
- [22] Bede, B., Note on “Numerical Solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method”, Information Sciences, 178, 1917-1922, 2008.
- [23] Butcher, J.C., The numerical analysis of ordinary differential equations Runge-Kutta and general linear methods, Willy, New York, 1987.
- [24] Goeken and Johnson, O., Runge-Kutta with higher order derivative approximations, Appl. Numer. Math., 34, 207-218, 2000.
- [25] Abasbandy, S. and Allahviranloo, T., Numerical solution of fuzzy differential equations by Runge-Kutta method, Nonlinear studies, 11, 1, 117-129, 2004.
- [26] Palligkinis, S.Ch., Papageorgiou, G. and Famelis, I.TH., Runge-Kutta methods for fuzzy differential equations, Appl. Math. Comp., 209, 97-105, 2009.
- [27] He, J.H., Variational iteration method for delay differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Number. Simul., 2 (4), 235-236, 1997.
- [28] He, J.H., Variational iteration method for autonomus ordinary differential systems, Appl. Math. Comput., 114 (2-3), 115-123, 2000.
- [29] Finlayson, B.A., The method of weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- [30] Allahviranloo, T., Panahi, A. and Rouhparvar, H., A computational method to find an approximate analytical solution for fuzzy differential equations, An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 17, 1, 5-14, 2009.
- [31] Effati, S. and Pakdaman, M., Artificial neural network approach for solving fuzzy differential equations, Information Sciences, 180, 1434-1457, 2010.

- [32] Najafi, H.S., Sasemasi, F.R., Roudkoli, S.S. and Nodehi, S.F., Comparison of two methods for solving fuzzy differential equations based on Euler method and Zadeh's extension, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, Vol.2 No.2, 295-306, 2011.
- [33] Abbasbandy, S. and Allahviranloo, T., Numerical solution of fuzzy differential equation, *Mathematical & Computational Applications*, Vol.7 No.1, 41-52, 2002.
- [34] Chang, S.L. and Zadeh, L.A., On fuzzy mapping and control, *IEEE Trans. Systems Man Cyber-net*, 2, 30-34, 1972.
- [35] Dubois, D. and Prade, H., Towards fuzzy differential calculus, Part:3 Differentiation, *Fuzzy Sets and Systems*, 8, 225-233, 1982.
- [36] Gotschel, R. and Voxman, W., Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, 18, 552-558, 1986.
- [37] Kandel, A. and Byatt, W.J., Fuzzy differential equations, in: *Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society*, Tokyo, 1213-1216, 1978.
- [38] Kaleva, O., The Cauchy problem for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 35, 389-396, 1990.
- [39] He, O. and Yi, W., On fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 24, 321-325, 1989.
- [40] Kloeden, P., Remarks on Peano-like theorems for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 44, 161-164, 1991.
- [41] Jowers, L.J., Buckley, J.J. and Reilly, K.D., Simulating continuous fuzzy systems, *Information Sci.*, 177, 436-448, 2007.
- [42] Gear, C.W., *Numerical initial value problem in ordinary differential equations*, Prentice Hall, 1971.
- [43] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353, 1968.