



T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

FATMA NUR İNANIR

Ağustos 2019

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

FATMA NUR İNANIR

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Meral YAŞAR KARTAL

Ağustos 2019

Fatma Nur İNANIR tarafından **Dr. Öğr. Üyesi Meral YAŞAR KARTAL** danışmanlığında hazırlanan “Bazı Sayı Dizilerinin Kuaterniyonları ve Özellikleri” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Doç. Dr. Necati TAŞKARA**

(Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)



Üye : **Dr. Öğr. Üyesi Osman KELEKÇİ**

(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi FEF Matematik Bölümü)



Üye : **Dr. Öğr. Üyesi Meral YAŞAR KARTAL**

(Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi FEF Matematik Bölümü)



ONAY:

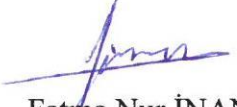
Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/....../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/....../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Fatma Nur İNANIR

ÖZET

BAZI SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

İNANIR, Fatma Nur

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Meral YAŞAR KARTAL

Ağustos 2019, 69 sayfa

Bu tez çalışması, “On Fibonacci Quaternions”, “A Note On Fibonacci Quaternions”, “Some Results On Fibonacci Quaternions”, ”On Pell Quaternions and Pell – Lucas Quaternions” adlı çalışmaların incelenmesi ile derleme bir çalışma olarak yapılmıştır. Fibonacci, Lucas, Pell gibi sayı dizilerinin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Fibonacci, Lucas, Pell gibi kuaterniyon çeşitlerinin özellikleri ve aralarındaki bağıntılar irdelenmiştir. Daha önce yapılan çalışmalardan faydalanılarak Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell - Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonu ve Binet formülü ve bu yapıların sağladığı özellikler incelenmiştir. Ardından yüksek dereceli kuaterniyonlar için ortaya konulan bazı özdeşlikler üzerinde durulmuştur. Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları incelenmiş ve bu kuaterniyonları birbirine bağlayan ilişkiler verilmiştir. Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonları ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkilerin Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlanarak türetildiği aktarılmıştır. Bilinen Pell ve Pell-Lucas sayıları ile ilişkili kuaterniyon sayı sınıflarının daha önce yapılan sistematik bir araştırması incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Fibonacci, Lucas, Pell sayıları, Fibonacci, Lucas, Pell kuaterniyonları, Binet formülleri, toplam formülleri, üreteç fonksiyonları

SUMMARY

QUATERNIONS OF SOME NUMBER SEQUENCES AND THEIR PROPERTIES

İNANIR, Fatma Nur

Niğde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asist. Prof. Dr. Meral YAŞAR KARTAL

August 2019, 69 pages

This thesis was conducted as a compilation study with the studies of named “On Fibonacci Quaternions”, “A Note On Fibonacci Quaternions”, “Some Results On Fibonacci Quaternions”, “On Pell Quaternions and Pell - Lucas Quaternions”. Fibonacci, Lucas, Pell definitions and some properties of such sequences are given. Fibonacci, Lucas, Pell quaternion varieties such as the characteristics and relations between them are examined. Using the previous studies, generating function and Binet formula for Fibonacci, Lucas, Pell and Pell – Lucas quaternions and their properties are examined. Then, some identities for the high – grade quaternions are discussed. Fibonacci and Lucas quaternions are examined and the relationships that connect these quaternions are given. Fibonacci and Lucas quaternions with the Fibonacci and Lucas numbers and the relationship between Fibonacci and Lucas numbers have been transferred by linking. A previous systematic research of the quaternion number classes associated with known Pell and Pell – Lucas numbers was examined.

Keywords: Fibonacci, Lucas, Pell numbers, Fibonacci, Lucas, Pell quaternions, Binet formulas, total formulas, generating functions

ÖN SÖZ

Bu yüksek lisans çalışmasında, Fibonacci kuaterniyonları, Lucas kuaterniyonları, Pell kuaterniyonları, Pell - Lucas kuaterniyonları incelenmiş ve bu kuaterniyonların birbirleriyle daha önce elde edilmiş olan bağlantıları ve özellikleri üzerinde durulmuştur. Bu kapsamda Fibonacci, Lucas, Pell sayılarının da Fibonacci, Pell, Lucas kuaterniyonlarıyla olan ilişkileri açıklanmış, gerekli bağlantılar verilmiştir.

Yüksek lisans tez çalışmamın yürütülmesi esnasında, çalışmalarına yön veren, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Meral YAŞAR KARTAL'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans tezimin hazırlanması esnasında bana her türlü desteği sağlayan değerli aileme minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGE VE KISALTMALAR	viii
BÖLÜM I GİRİŞ	1
BÖLÜM II SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ	5
BÖLÜM III SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ	11
BÖLÜM IV SONUÇLAR	65
KAYNAKLAR	66
ÖZ GEÇMİŞ	69

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler

Açıklama

F_m	m . Fibonacci sayısı
H_m	m . Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
L_m	m . Lucas sayısı
p_m	m . Pell sayısı
q_m	m . Pell – Lucas sayısı
Q_m	m . Fibonacci kuaterniyonu
P_m	m . Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonu
T_m	m . Lucas kuaterniyonu
QP_m	m . Pell kuaterniyonu
QPL_m	m . Pell - Lucas kuaterniyonu
$\bar{t}$	t kuaterniyonunun eşleniği
t^{-1}	t kuaterniyonunun tersi
$ t $	t kuaterniyonunun normu

BÖLÜM I

GİRİŞ

Kuaterniyonlar, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından karmaşık sayıların bir uzantısı olarak araştırılmıştır. Kuaterniyonların pratik olarak kullanımı ise 20. yüzyılın ortalarına kadar diğer yöntemlere göre daha az olmuştur. Kuaterniyon aritmetiği, bilgisayar bilimleri, fizik ve uygulamalı matematik gibi çeşitli alanlarda kullanılabilmektedir. Günümüzde, geometri, jeostatik, analiz ve kuantum fiziği gibi bazı uygulamalı bilim dallarında birçok cebir probleminin ortaya çıkmasıyla kuaterner alanda cebirsel problemler üzerine olan ilgi artmıştır. Fibonacci, genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas, Pell, Pell – Lucas sayılarının ilgi çekiciliği yanında bu sayı dizilerinin kuaterniyonlarına yönelik tanımlanan çeşitli kuaterniyon sayı dizileri ve analizi için aktif araştırmalar yürütülmektedir. Literatürdeki bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

A. F. Horadam “A Generalized Fibonacci Sequence” adlı çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi ve bazı özelliklerini incelemiştir (Horadam, 1961).

A. F. Horadam 1963’ te yaptığı “Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions” çalışmasında kompleks Fibonacci sayıları ve Fibonacci kuaterniyonları üzerine yoğunlaşmıştır (Horadam, 1963).

M. R. Iyer “A Note On Fibonacci quaternions” adlı çalışmasında Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarını birbirine bağlayan daha fazla ilişki türetmek amacıyla çalışmalarda bulunmuştur (Iyer, 1969a).

M. R. Iyer “Some Results On Fibonacci Quaternions” adlı çalışmasında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkilerden bahsetmiştir (Iyer, 1969b).

M. R. Iyer 1969 yılında hazırladığı “Identities Involving Generalized Fibonacci Numbers” çalışmasında Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özdeşlikler vermiştir (Iyer, 1969c).

A. F. Horadam “Pell Identities” adlı çalışmasında Pell sayılarına, Pell sayılarının Binet formülüne, üreteç fonksiyonu ve çeşitli özdeşliklerine değinmiştir (Horadam, 1971).

M. N. S. Swamy “On generalized Fibonacci quaternions” adlı çalışmasında Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları arasındaki ilişkilere değinmiş, Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını da kullanarak kuaterniyonların çeşitli özelliklerinden bahsetmiştir (Swamy, 1973).

A. L., Iakin’ in “Generalized Quaternions of Higher Order” adlı çalışmasında daha yüksek dereceli bir kuaterniyon kavramı ortaya konulmuş ve bu kuaterniyon için bazı özdeşlikler oluşturulmuştur (Iakin, 1977).

A.F. Horadam “Quaternion recurrence relations” adlı çalışmasında bazı kuaterniyonların rekürans bağıntıları üzerinde durmuştur (Horadam, 1993).

P. Filipponi ve A.F.Horadam “Real Pell and Pell-Lucas numbers with real subscripts” adlı çalışmalarında Pell ve Pell – Lucas sayılarına ve bu sayıların çeşitli özelliklerine sahip polinomsal ifadeler ve özelliklerine değinmişlerdir (Filipponi ve Horadam, 1995).

Z. Cerin ve G.M. Gianella “On sums of squares of Pell – Lucas numbers” adlı çalışmalarında Pell-Lucas sayılarının karelerinin toplamını, tek Pell – Lucas sayılarının karelerinin toplamını, çift Pell – Lucas sayılarının karelerinin toplamını vermişlerdir (Cerin ve Gianella, 2006).

Z. Cerin ve G.M. Gianella “On sums of Pell numbers” adlı çalışmalarında Pell sayılarının toplamlarına, çift ve tek Pell sayılarının toplamlarına değinmişlerdir (Cerin ve Gianella, 2007).

S. Halici “On Fibonacci quaternions” adlı çalışmasında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını araştırmış, bu kuaterniyonlar için üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri vermiştir. Ayrıca bu kuaterniyonlar için toplam formülleri türetmiştir (Halici, 2012).

S. Halici 2013' te hazırladığı “On complex Fibonacci quaternions” adlı çalışmasında Fibonacci kuaterniyonlarıyla ilgili çeşitli bağıntılara, Binet formüllerine, üreteç fonksiyonlarına değinmiştir (Halici, 2013).

M. Akyiğit, H.H. Kösal ve M. Tosun “Split Fibonacci quaternions” adlı çalışmalarında bölünmüş Fibonacci, bölünmüş Lucas ve bölünmüş genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları üzerinde yoğunlaşmışlardır. Ayrıca Fibonacci, Lucas, genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları arasındaki ilişkileri Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili özdeşliklerden faydalanarak açıklamışlardır (Akyiğit vd., 2013).

C. Flaut ve V. Shpakivskyi tarafından “On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions” adlı çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci ve Fibonacci – Narayana kuaterniyonlarının bazı özellikleri araştırılmıştır (Flaut ve Shpakivskyi, 2013).

C. Flaut ve V. Shpakivskyi “Quaternion Algebras and Generalized Fibonacci-Lucas Quaternions” adlı çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci - Lucas kuaterniyonları ve bu kuaterniyonların kuaterniyon cebiriyle bağlantısını vermişlerdir (Flaut ve Shpakivskyi, 2015).

C. B. Çimen ve A. İpek bilinen Pell ve Pell – Lucas sayılarıyla ilişkili yeni kuaterniyon sayı sınıflarının sistematik bir araştırmasını yapmış ve “On Pell Quaternions and Pell-Lucas Quaternions” adlı çalışmalarında sunmuşlardır. Bu dörtlük sayılar için rekürans bağıntıları, toplam formülleri, Binet formülleri gibi çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir (Çimen ve İpek, 2016).

I. A. Güren ve S. K. Nurkan “Dual Fibonacci quaternions” adlı çalışmalarında çift Fibonacci kuaterniyonlarının ve çift Lucas kuaterniyonlarının tanımlarını, bu kuaterniyonları birbirine bağlayan ilişkileri, Binet formüllerini ve bazı özdeşlikleri vermişlerdir (Güren ve Nurkan, 2015a).

I. A. Güren ve S. K. Nurkan tarafından çift Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile ilgili çalışmalar, Binet formülleri ve Cassini, Catalan gibi özdeşlikler “A new approach to

Fibonacci, Lucas numbers and dual vectors” adlı çalışmalarında ele alınmıştır (Güren ve Nurkan, 2015b).

Genel olarak, kuaterniyonik sayı dizilerinin formül ve özdeşliklerinin çok karmaşık olabilmesi sebebiyle bu konu üzerinde çalışan araştırma grupları çalışmalarını Binet formülleri, toplam formülleri, üreteç fonksiyonları, rekürans bağıntıları üzerinde yoğunlaştırmaktadırlar.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup kuaterniyonların kullanım alanları ve kuaterniyonlarla ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan Fibonacci, genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell – Lucas sayılarının tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde Fibonacci, Lucas, Pell gibi bazı sayı dizilerinin kuaterniyonları ve bu kuaterniyonların daha önce elde edilmiş olan bazı özellikleri verilmiştir. Elemanları bilinen Pell ve Pell – Lucas sayılarının kullanılmasıyla oluşturulan kuaterniyonlar incelenmiştir. Oluşturulan bu kuaterniyonların toplam formülleri, üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri üzerinde durulmuştur. Fibonacci kuaterniyonları ile genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarını birbirine bağlayan ilişkilerden bahsedilmiş, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkinin Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişki cinsinden elde edildiği görülmüştür. Dördüncü bölümde ise sonuçlar sunulmuştur.

BÖLÜM II

SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1: Fibonacci sayı dizisi $m \geq 2$ olmak üzere

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \quad (2.1)$$

rekürans bağıntısı ve $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç şartları ile tanımlanan sayı dizisidir (Koshy, 2001).

Tanım 2.2: Genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi $m \geq 3$ ve p, q rastgele tam sayılar olmak üzere

$$H_m = H_{m-1} + H_{m-2} \quad (2.2)$$

rekürans bağıntısı ve $H_1 = p, H_2 = p + q$ başlangıç şartları ile tanımlanan sayı dizisidir (Horadam, 1961).

Tanım 2.3: Lucas sayı dizisi $m \geq 2$ olmak üzere

$$L_m = L_{m-1} + L_{m-2} \quad (2.3)$$

rekürans bağıntısı ve $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç şartları ile tanımlanan sayı dizisidir (Koshy, 2001).

Tanım 2.4: Pell sayı dizisi

$$p_m = 2p_{m-1} + p_{m-2}, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.4)$$

rekürans bağıntısı ve $p_0 = 0, p_1 = 1$ başlangıç şartları ile tanımlanan sayı dizisidir (Horadam, 1971).

Tanım 2.5: Pell - Lucas sayıları dizisi

$$q_m = 2q_{m-1} + q_{m-2}, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.5)$$

rekürans bağıntısı ve $q_0 = 1, q_1 = 1$ başlangıç şartları ile tanımlanan sayı dizisidir (Horadam ve Mohan, 1985).

Teorem 2.6: Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla,

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda^2 = \lambda + 1 \text{ denkleminin çözümleri olmak üzere}$$

$$F_m = \frac{\tau^m - \psi^m}{\tau - \psi}, \quad L_m = \tau^m + \psi^m \quad (2.6)$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

İspat: $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve genel formülü $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ olarak verilen Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir. Denklemin kökleri

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.

$$F_m = D\tau^m + Y\psi^m$$

$$F_m = D\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + Y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

$$m = 0 \text{ için } 0 = D \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + Y \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0$$

$$m = 1 \text{ için } 1 = D \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + Y \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

şeklindedir.

$m = 0$ için yazılan denklemden $D = -Y$ olur.

$m = 1$ için yazılan denklemde $D = -Y$ yazılır ve Y parantezine alınırsa

$$1 = Y \left[- \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right]$$

olur. Buradan

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ve } D = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olur. Bulunan D ve Y katsayıları $F_m = D\tau^m + Y\psi^m$ ifadesinde yerine yazıldığında

$$F_m = \frac{\tau^m - \psi^m}{\sqrt{5}} = \frac{\tau^m - \psi^m}{\tau - \psi}$$

$$F_m = \frac{\tau^m - \psi^m}{\tau - \psi}$$

şeklinde Fibonacci sayıları için Binet formülü elde edilir. Lucas sayılarının Binet formülü de benzer şekilde elde edilir.

Teorem 2.7: Pell ve Pell – Lucas sayılarının Binet formülleri sırasıyla,

$$\tau = 1 + \sqrt{2}, \psi = 1 - \sqrt{2}, \lambda^2 = 2\lambda + 1 \text{ denkleminin çözümleri olmak üzere}$$

$$p_m = \frac{\tau^m - \psi^m}{\tau - \psi}, \quad q_m = \frac{\tau^m + \psi^m}{2} \quad (2.7)$$

şeklindedir (Bicknell, 1975).

Tanım 2.8: $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ dizisi için üreteç fonksiyonu

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir (Koshy, 2001).

Teorem 2.9: $m \geq 0$ için Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} \quad (2.9)$$

şeklindedir (Koshy, 2001).

İspat: Genel formülü $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$ olan ve $F_0 = F_1 = 1$ başlangıç şartlarına sahip bir Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m = g(x)$$

olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_{m+2} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} F_{m+1} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} F_m x^{m-2} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m$$

$$x^{-2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m - F_0 x^0 - F_1 x^1 \right) = x^{-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m - F_0 x^0 \right) + \sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m$$

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ ve } \sum_{m=0}^{\infty} F_m x^m = g(x)$$

idi. Yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$x^{-2}(g(x)-1-x) = x^{-1}(g(x)-1) + g(x)$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler ile

$$x^{-2}g(x) - x^{-1}g(x) - g(x) = -x^{-1} + x^{-1} + x^{-2}$$

$$g(x)(x^{-2} - x^{-1} - 1) = x^{-2}$$

elde edilir. Her taraf x^2 ile çarpılırsa

$$g(x)(x^{-2} - x^{-1} - 1)x^2 = x^{-2}x^2$$

olur. Buradan

$$g(x) = \frac{1}{(1-x-x^2)}$$

şeklinde elde edilir. Lucas, Pell ve Pell – Lucas sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları da benzer şekilde yazılabilir.

Aşağıda Fibonacci sayıları ile Lucas sayıları arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Bu ilişkiler verilirken Fibonacci ve Lucas sayılarının

$$F_m = \frac{\tau^m - \psi^m}{\sqrt{5}}, \quad L_m = \tau^m + \psi^m$$

Binet formüllerinden faydalanılmıştır. Burada τ, ψ Fibonacci ve Lucas rekürans bağıntılarından elde edilen

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \tag{2.10}$$

denkleminin kökleridir. Bu kökler:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (2.10a)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\tau + \psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \quad (2.10b)$$

$$\tau - \psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \quad (2.10c)$$

$$\tau.\psi = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1 \quad (2.10d)$$

dir.

Teorem 2.10: Fibonacci ve Lucas sayıları arasında aşağıdaki ilişkiler geçerlidir (Iyer, 1969b).

$$\textbf{i)} F_{m+r}L_{m+r} + F_{m-r}L_{m-r} = F_{2m}L_{2r} \quad (2.11)$$

$$\textbf{ii)} F_{m+r}L_{m+r} - F_{m-r}L_{m-r} = F_{2r}L_{2m} \quad (2.12)$$

$$\textbf{iii)} F_{m+r}L_{m-r} = F_{2m} + (-1)^{m-r} F_{2r} \quad (2.13)$$

$$\textbf{iv)} F_{m-r}L_{m+r} = F_{2m} - (-1)^{m-r} F_{2r} \quad (2.14)$$

$$\textbf{v)} F_{m+r}L_{m-r} + F_{m-r}L_{m+r} = 2F_{2m} \quad (2.15)$$

$$\textbf{vi)} F_{m+r}L_{m-r} - F_{m-r}L_{m+r} = 2(-1)^{m-r} F_{2r} \quad (2.16)$$

İspat: v) (2.13) ve (2.14) nolu ifadelerin taraf tarafa toplanması ile (2.15) elde edilir.

vi) (2.13) ve (2.14) nolu ifadelerin taraf tarafa çıkarılması ile (2.16) edilir.

BÖLÜM III

SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.1: Bir kuaterniyon, hiper karmaşık bir sayıdır ve aşağıdaki (3.1) denklemi ile tanımlanır.

$$t = t_0 + it_1 + jt_2 + kt_3 = (t_0, t_1, t_2, t_3) \quad (3.1)$$

Burada (t_0, t_1, t_2, t_3) gerçekte sayılar olup i, j, k R^3 uzayının ortonormal bazlarıdır.

Bir t kuaterniyonu

$$t = t_0 + u = t_0 + it_1 + jt_2 + kt_3 \quad (3.1a)$$

şeklinde de yazılabilir. t_0 , t kuaterniyonunun skaler kısmı ve u , t kuaterniyonunun vektörel kısmı olmak üzere (t_0, t_1, t_2, t_3) , t kuaterniyonunun bileşenleri olarak adlandırılır.

Kuaterniyon çarpımı aşağıdaki kurallar ile tanımlanır (Horadam, 1963).

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik \quad (3.1b)$$

Tanım 3.2: Bir t kuaterniyonunun eşleniği $\bar{t}$ ile gösterilir ve

$$\bar{t} = t_0 - u = t_0 - it_1 - jt_2 - kt_3 \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. t, s kuaterniyonları için

$$\overline{(ts)} = \bar{s}\bar{t}, \quad \overline{(\bar{t}s)} = \bar{s}t \quad (3.2a)$$

şeklindedir (Bihan vd., 2011).

Tanım 3.3: Bir t kuaterniyonunun normu

$$|t| = N(t) = \sqrt{(t\bar{t})} \quad (3.3)$$

ile tanımlanır. Burada t kuaterniyonun normunun 1 olması halinde bir birim kuaterniyon olarak adlandırılır (Halici, 2012).

Tanım 3.4: Bir t kuaterniyonunun tersi t^{-1} ile gösterilir ve

$$t^{-1} = \frac{\bar{t}}{N^2(t)} = \frac{\bar{t}}{|t|^2} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır (Halici, 2012).

Tanım 3.5: Fibonacci kuaterniyonu,

F_m , m . Fibonacci sayısı ve i, j, k R^3 uzayının bazları olmak üzere

$$Q_m = F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır (Horadam, 1963).

Tanım 3.6: H_m , m . genelleştirilmiş Fibonacci sayısı olmak üzere genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonu

$$P_m = H_m + iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır (Horadam, 1963).

Tanım 3.7: Lucas kuaterniyonu, L_m , m . Lucas sayısı ve i, j, k R^3 uzayının bazları olmak üzere

$$T_m = L_m + iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır (Horadam, 1963).

Tanım 3.8: Pell sayılarının kullanımı ile oluşturulan Pell kuaterniyonu

$$QP_m = p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k \quad (3.8)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

Tanım 3.9: Pell – Lucas sayılarıyla oluşturulan Pell – Lucas kuaterniyonu

$$QPL_m = q_m + q_{m+1}i + q_{m+2}j + q_{m+3}k \quad (3.9)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

Teorem 3.10: Q_m , m . Fibonacci kuaterniyonu olmak üzere

$$Q_m + Q_{m+1} = Q_{m+2} \quad (3.10)$$

dır (Halici, 2012).

İspat: u , Q_m Fibonacci kuaterniyonunun vektörel kısmı olmak üzere

$$Q_m = F_m + u ; u = iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3} \quad (3.10a)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$Q_{m+1} = F_{m+1} + u ; u = iF_{m+2} + jF_{m+3} + F_{m+4}$$

olur. Ayrıca $m \geq 0$ için bu kuaterniyonlar taraf tarafa toplanırsa

$$Q_m + Q_{m+1} = F_m + F_{m+1} + i(F_{m+1} + F_{m+2}) + j(F_{m+2} + F_{m+3}) + k(F_{m+3} + F_{m+4})$$

olur. Fibonacci sayılarının tanımından

$$Q_m + Q_{m+1} = F_{m+2} + iF_{m+3} + jF_{m+4} + kF_{m+5}$$

olur.

$$Q_m + Q_{m+1} = F_{m+2} + u ; u = iF_{m+3} + jF_{m+4} + kF_{m+5}$$

Buradan (3.10a) ile

$$Q_m + Q_{m+1} = Q_{m+2}$$

elde edilir.

Teorem 3.11: T_m , m . Lucas kuaterniyonu olmak üzere

$$T_{m+2} = T_{m+1} + T_m \tag{3.11}$$

dır (Halici, 2012).

İspat: v , Lucas kuaterniyonunun vektörel kısmı olmak üzere

$$T_m = L_m + v ; v = iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3} \tag{3.11a}$$

ile tanımlanırsa

$$T_{m+1} = L_{m+1} + v ; v = iL_{m+2} + jL_{m+3} + kL_{m+4}$$

olur. Ayrıca $m \geq 0$ için bu kuaterniyonlar taraf tarafa toplanırsa

$$T_m + T_{m+1} = L_m + L_{m+1} + i(L_{m+1} + L_{m+2}) + j(L_{m+2} + L_{m+3}) + k(L_{m+3} + L_{m+4}) ;$$

Lucas sayılarının tanımından

$$T_m + T_{m+1} = L_{m+2} + i(L_{m+3}) + j(L_{m+4}) + k(L_{m+5})$$

olur.

$$T_m + T_{m+1} = L_{m+2} + v ; v = iL_{m+3} + jL_{m+4} + kL_{m+5}$$

Buradan (3.11a) ile

$$T_{m+2} = T_{m+1} + T_m$$

elde edilir. Pell, Pell – Lucas kuaterniyonları için de benzer şekilde bağıntılar elde edilebilir.

Teorem 3.12: $m \geq 0$, $\underline{\tau} = 1 + i\tau + j\tau^2 + k\tau^3$ ve $\underline{\psi} = 1 + i\psi + j\psi^2 + k\psi^3$ olmak üzere

Fibonacci kuaterniyonunun Binet formülü

$$Q_m = \frac{1}{\sqrt{5}} (\underline{\tau}\tau^m - \underline{\psi}\psi^m) \quad (3.12)$$

şeklindedir (Halici, 2012).

İspat: (3.10) da bulunan rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dır. Ve

$$Q_m = D\tau^m + Y\psi^m$$

şeklinde olur.

Fibonacci kuaterniyonunun rekürans bağıntısı ve başlangıç değerleri olan $Q_0 = (0,1,1,2)$ ve $Q_1 = (1,1,2,3)$ kullanılarak son eşitlikte yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$m = 0 \text{ için } (0,1,1,2) = D\tau^0 + Y\psi^0$$

$$m = 1 \text{ için } (1,1,2,3) = D\tau^1 + Y\psi^1.$$

$m = 0$ için yazılan denklem $-\tau$ ile çarpılır, $m = 1$ için yazılan denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$(1,1-\tau,2-\tau,3-2\tau) = D(\tau^1 - \tau) + Y(\psi - \tau)^1$$

olur. Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} Y = \frac{(1,1-\tau,2-\tau,3-2\tau)}{(\psi - \tau)^1} &= \frac{\left(1, 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 3 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}\right)}{-\sqrt{5}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\psi^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\psi^3 = \psi^2\psi = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{8-4\sqrt{5}}{4} = 2-\sqrt{5}$$

Yukarıda bulunan sayılar, ψ nin kuvvetleri cinsinden Y nin son ifadesinde yerine yazılırsa

$$Y = \frac{(1, \psi, \psi^2, \psi^3)}{-\sqrt{5}}, \quad \underline{\psi} = 1 + i\psi + j\psi^2 + k\psi^3 = (1, \psi, \psi^2, \psi^3)$$

olur. Buradan

$$Y = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Yine yukarıda $m = 0$ için yazılan denklem $-\psi$ ile çarpılır, $m = 1$ için yazılan denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$(1, 1-\psi, 2-\psi, 3-2\psi) = D(\tau-\psi) + Y(\psi-\psi)$$

olur. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$D = \frac{(1, 1-\psi, 2-\psi, 3-2\psi)}{(\tau-\psi)^1} = \frac{\left(1, 1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 3-2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tau^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \tau^3 &= \tau^2 \tau = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}\end{aligned}$$

Yukarıda bulunan sayılar, τ nın kuvvetleri cinsinden D nin son ifadesinde yerine yazılırsa

$$D = \frac{(1, \tau, \tau^2, \tau^3)}{\sqrt{5}}, \quad \underline{\tau} = 1 + i\tau + j\tau^2 + k\tau^3 = (1, \tau, \tau^2, \tau^3)$$

olur. Buradan

$$D = \frac{\underline{\tau}}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Bulunan D ve Y katsayılarının $Q_m = D\tau^m + Y\psi^m$ ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$Q_m = \frac{\tau}{\sqrt{5}} \tau^m - \frac{\psi}{\sqrt{5}} \psi^m$$

olur. Bu ifade $\frac{1}{\sqrt{5}}$ parantezine alınarak, Fibonacci kuaterniyonu için Binet formülü

$$Q_m = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau \tau^m - \psi \psi^m)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.13: $m \geq 0$, $\tau = 1 + i\tau + j\tau^2 + k\tau^3$ ve $\psi = 1 + i\psi + j\psi^2 + k\psi^3$ olmak üzere

Lucas kuaterniyonunun Binet formülü

$$T_m = (\tau \tau^m + \psi \psi^m) \quad (3.13)$$

şeklindedir (Halici, 2012).

İspat: (3.11) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

dır. Dolayısıyla (3.11) fark denkleminin genel çözümü

$$T_m = D\tau^m + Y\psi^m$$

şeklinde olur.

Lucas kuaterniyonunun başlangıç değerleri olan $T_0 = (2, 1, 3, 4)$ ve $T_1 = (1, 3, 4, 7)$ son eşitlikte yerine yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$m = 0 \text{ için } (2, 1, 3, 4) = D\tau^0 + Y\psi^0$$

$$m = 1 \text{ için } (1, 3, 4, 7) = D\tau^1 + Y\psi^1 .$$

$m = 0$ için yazılan denklem $-\tau$ ile çarpılır, $m = 1$ için yazılan denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - 2\tau, 3 - \tau, 4 - 3\tau, 7 - 4\tau) = D(\tau^1 - \tau) + Y(\psi - \tau)^1$$

olur. Gerekli düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(1 - 2\tau, 3 - \tau, 4 - 3\tau, 7 - 4\tau)}{(\psi - \tau)^1} = \frac{\left(1 - 2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), 3 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), 4 - 3\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), 7 - 4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(-\sqrt{5}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}, 5 - 2\sqrt{5}\right)}{-\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}\left(1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)}{-\sqrt{5}} = \left(1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\psi^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\psi^3 = \psi^2\psi = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{8 - 4\sqrt{5}}{4} = 2 - \sqrt{5}$$

Yukarıda bulunan sayılar, ψ nın kuvvetleri cinsinden Y nin son ifadesinde yerine yazılırsa

$$Y = (1, \psi, \psi^2, \psi^3), \underline{\psi} = 1 + i\psi + j\psi^2 + k\psi^3 = (1, \psi, \psi^2, \psi^3)$$

olur. Buradan

$$Y = \underline{\psi}$$

elde edilir.

Yine yukarıda $m = 0$ için yazılan denklem $-\psi$ ile çarpılır, $m = 1$ için yazılan denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$(1-2\psi, 3-\psi, 4-3\psi, 7-4\psi) = D(\tau-\psi) + Y(\psi-\psi)$$

olur. Yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} D = \frac{(1-2\psi, 3-\psi, 4-3\psi, 7-4\psi)}{(\tau-\psi)^1} &= \frac{\left(1-2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 4-3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 7-4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{5}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+3\sqrt{5}}{2}, 5+2\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}} = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\tau^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\tau^3 = \tau^2\tau = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}$$

Yukarıda elde edilen sayılar, τ nın kuvvetleri cinsinden D nin son ifadesinde yerine yazılırsa

$$D = (1, \tau, \tau^2, \tau^3), \quad \underline{\tau} = 1 + i\tau + j\tau^2 + k\tau^3 = (1, \tau, \tau^2, \tau^3)$$

olur. Buradan

$$D = \underline{\tau}$$

elde edilir. Bulunan D ve Y katsayıları $T_m = D\tau^m + Y\psi^m$ ifadesinde yerine yazılırsa

Lucas kuaterniyonu için Binet formülü

$$T_m = \underline{\tau}\tau^m + \underline{\psi}\psi^m$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.14: $m \geq 1$, $D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$ olmak üzere

$$\text{i) } \tau QP_m + QP_{m-1} = \tau^m D, \quad (3.14)$$

$$\text{ii) } \psi QP_m + QP_{m-1} = \psi^m Y \quad (3.15)$$

dır (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) $m \geq 1$, $D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$ olmak üzere QP_m ve QP_{m+1} kuaterniyonları için

$$\begin{aligned} \tau QP_m + QP_{m-1} &= \tau(p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) + (p_{m-1} + p_m i + p_{m+1}j + p_{m+2}k) \\ \tau QP_m + QP_{m-1} &= (\tau p_m + p_{m-1}) + (\tau p_{m+1} + p_m)i + (\tau p_{m+2} + p_{m+1})j + (\tau p_{m+3} + p_{m+2})k \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir.

$$\tau^m = \tau p_m + p_{m-1}$$

özdeşliği ve gerekli düzenlemeler ile

$$\tau QP_m + QP_{m-1} = \tau^m D$$

olur.

ii) Benzer şekilde $m \geq 1$ ve $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi QP_m + QP_{m-1} &= \psi(p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) + (p_{m-1} + p_m i + p_{m+1}j + p_{m+2}k) \\ \psi QP_m + QP_{m-1} &= (\psi p_m + p_{m-1}) + (\psi p_{m+1} + p_m)i + (\psi p_{m+2} + p_{m+1})j + (\psi p_{m+3} + p_{m+2})k \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir.

$$\psi^m = \psi p_m + p_{m-1}$$

özdeşliği ve gerekli düzenlemeler ile

$$\psi QP_m + QP_{m-1} = \psi^m Y$$

olur.

Teorem 3.15: $D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$ olmak üzere

QP_m kuaterniyonunun Binet formülü

$$QP_m = \frac{\tau^m D - \psi^m Y}{\tau - \psi} \quad (3.18)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: (3.14) ve (3.15) ile

$$\tau^m D - \psi^m Y = \tau QP_m - \psi QP_m$$

olur. Ve $\tau = 1 + \sqrt{2}$, $\psi = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$\frac{D\tau^m - \psi^m Y}{(\tau - \psi)} = QP_m$$

elde edilir.

Teorem 3.16: $D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$ olmak üzere

QPL_m kuaterniyonunun Binet formülü

$$QPL_m = \frac{\tau^m D + \psi^m Y}{2} \quad (3.19)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: Benzer şekilde (3.14) ve (3.15) ile

$$\tau^m D + \psi^m Y = (\tau + \psi) QP_m + 2QP_{m-1}$$

olur.

$$\tau + \psi = 2 \text{ , } QP_m + QP_{m+1} = QPL_{m+1} \text{ ile}$$

$$QPL_m = \frac{\tau^m D + \psi^m Y}{2}$$

elde edilir.

Tanım 3.17: $S_\tau = \tau_0$, $S_\psi = \psi_0$, $\vec{V}_\tau = \tau_1 i + \tau_2 j + \tau_3 k$, $\vec{V}_\psi = \psi_1 i + \psi_2 j + \psi_3 k$ olmak üzere $\tau = S_\tau + \vec{V}_\tau$ ve $\psi = S_\psi + \vec{V}_\psi$ şeklindeki τ, ψ kuaterniyonlarının çarpımı

$$\tau\psi = S_\tau S_\psi + S_\tau \vec{V}_\psi + \vec{V}_\tau S_\psi - \vec{V}_\tau \vec{V}_\psi + \vec{V}_\tau \times \vec{V}_\psi \quad (3.20)$$

şeklindedir. Burada

$$\vec{V}_\tau \vec{V}_\psi = \tau_1 \psi_1 + \tau_2 \psi_2 + \tau_3 \psi_3$$

ve

$$\vec{V}_\tau \times \vec{V}_\psi = (\tau_2 \psi_3 - \tau_3 \psi_2) i - (\tau_1 \psi_3 - \tau_3 \psi_1) j + (\tau_1 \psi_2 - \tau_2 \psi_1) k$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

Tanım 3.18: QP_m ve QN_m

$$QP_m = p_m + p_{m+1} i + p_{m+2} j + p_{m+3} k$$

$$QN_m = n_m + n_{m+1} i + n_{m+2} j + n_{m+3} k$$

şeklinde iki Pell kuaterniyonu olsun.

$$QP_m \pm QN_m = (p_m + p_{m+1} i + p_{m+2} j + p_{m+3} k) \pm (n_m + n_{m+1} i + n_{m+2} j + n_{m+3} k)$$

$$QP_m \pm QN_m = (p_m \pm n_m) + (p_{m+1} \pm n_{m+1}) i + (p_{m+2} \pm n_{m+2}) j + (p_{m+3} \pm n_{m+3}) k \quad (3.21)$$

dır (Çimen ve İpek, 2016).

Tanım 3.19: QP_m kuaterniyonunun skaler ve vektörel kısımları sırasıyla

$$S_{QP_m} = p_m, \quad \vec{V}_{QP_m} = p_{m+1} i + p_{m+2} j + p_{m+3} k$$

ve

QN_m kuaterniyonunun skaler ve vektörel kısımları sırasıyla

$$S_{QN_m} = n_m, \overrightarrow{V_{QN_m}} = n_{m+1}i + n_{m+2}j + n_{m+3}k$$

olmak üzere

$$QP_m QN_m = S_{QP_m} S_{QN_m} + S_{QP_m} \overrightarrow{V_{QN_m}} + \overrightarrow{V_{QP_m}} S_{QN_m} - \overrightarrow{V_{QP_m}} \overrightarrow{V_{QN_m}} + \overrightarrow{V_{QP_m}} \times \overrightarrow{V_{QN_m}} \quad (3.22)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

Teorem 3.20: $m \geq 2$ için

$$\text{i) } QP_m + \overline{QP_m} = 2p_m \quad (3.23)$$

$$\text{ii) } QP_m^2 + QP_m \overline{QP_m} = 2p_m QP_m \quad (3.24)$$

$$\text{iii) } QP_m \overline{QP_m} = 6p_{2m+3} \quad (3.25)$$

dır (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) (3.2) ve (3.21) ile

$$\begin{aligned} QP_m + \overline{QP_m} &= (p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) + (p_m - p_{m+1}i - p_{m+2}j - p_{m+3}k) \\ &= 2p_m \end{aligned}$$

olur.

ii) (3.23) nolu eşitliğin her tarafı QP_m ile çarpılırsa

$$QP_m (QP_m + \overline{QP_m}) = 2p_m QP_m$$

$$QP_m^2 + QP_m \overline{QP_m} = 2p_m QP_m$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{iii) } QP_m \overline{QP_m} &= (p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k)(p_m - p_{m+1}i - p_{m+2}j - p_{m+3}k) \\ &= p_m^2 - p_m p_{m+1}i - p_m p_{m+2}j - p_m p_{m+3}k + p_m p_{m+1}i - p_{m+1}^2 p_m i^2 - p_{m+2} p_{m+1}ij - p_{m+3} p_{m+1}ik + p_m p_{m+2}j \\ &\quad - p_{m+1} p_{m+2}ji - p_{m+2}^2 j^2 - p_{m+3} p_{m+2}jk + p_m p_{m+3}k - p_{m+1} p_{m+3}ki - p_{m+2} p_{m+3}kj - p_{m+3}^2 k^2 \end{aligned}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik \quad \text{ile}$$

$$\begin{aligned} QP_m \overline{QP_m} &= p_m^2 - p_m p_{m+1}i - p_m p_{m+2}j - p_m p_{m+3}k + p_m p_{m+1}i + p_{m+1}^2 - p_{m+2} p_{m+1}k + p_{m+3} p_{m+1}j + p_m p_{m+2}j \\ &\quad + p_{m+1} p_{m+2}k + p_{m+2}^2 - p_{m+3} p_{m+2}i + p_m p_{m+3}k - p_{m+1} p_{m+3}j + p_{m+2} p_{m+3}i + p_{m+3}^2 \end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli işlemlerin yapılmasıyla

$$QP_m \overline{QP_m} = p_m^2 + p_{m+1}^2 + p_{m+2}^2 + p_{m+3}^2 \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilir.

$$p_m^2 + p_{m+1}^2 = p_{2m+1}$$

eşitliği kullanılarak

$$p_m^2 + p_{m+1}^2 = p_{2m+1}, \quad p_{m+2}^2 + p_{m+3}^2 = p_{2m+5}$$

olur. Bulunan ifadeler (3.26) da yerine yazılırsa

$$QP_m \overline{QP_m} = p_{2m+1} + p_{2m+5}$$

elde edilir. Buradan Pell sayılarının genel formülü ile

$$QP_m \overline{QP_m} = p_{2m+1} + (2p_{2m+4} + p_{2m+3})$$

$$\begin{aligned}
&= p_{2m+1} + 2(2p_{2m+3} + p_{2m+2}) + p_{2m+3} \\
&= p_{2m+1} + 2p_{2m+2} + 4p_{2m+3} + p_{2m+3} \\
&= p_{2m+3} + 4p_{2m+3} + p_{2m+3} \\
&= 6p_{2m+3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.21: $m \geq 2$ için,

$$\text{i) } QP_m + 2QP_{m+1} = QP_{m+2} \quad (3.27)$$

$$\text{ii) } QP_m - QP_{m+1}i - QP_{m+2}j - QP_{m+3}k = 12q_{m+3} \quad (3.28)$$

dır (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) Pell kuaterniyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
QP_m + 2QP_{m+1} &= (p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) + 2(p_{m+1} + p_{m+2}i + p_{m+3}j + p_{m+4}k) \\
&= (p_m + 2p_{m+1}) + (p_{m+1} + 2p_{m+2})i + (p_{m+2} + 2p_{m+3})j + (p_{m+3} + 2p_{m+4})k
\end{aligned}$$

dır. Pell sayılarının genel formülünden

$$\begin{aligned}
QP_m + 2QP_{m+1} &= p_{m+2} + p_{m+3}i + p_{m+4}j + p_{m+5}k \\
&= QP_{m+2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Pell kuaterniyonunun tanımı ve (3.1b) ile

$$\begin{aligned}
QP_m - QP_{m+1}i - QP_{m+2}j - QP_{m+3}k &= p_m + p_{m+2} + p_{m+4} + p_{m+6} \\
&= \sum_{s=0}^3 p_{m+2s}
\end{aligned}$$

dır.

$$q_m = p_{m+1} - p_m \text{ ve } p_m = 2p_{m-1} + p_{m-2}$$

özdeşlikleri kullanılarak

$$QP_m - QP_{m+1}i - QP_{m+2}j - QP_{m+3}k = 12q_{m+3}$$

ifadesi bulunur.

Teorem 3.22: $m \geq 2$ için,

$$\text{i) } QP_m + QP_{m+1} = QPL_{m+1} \quad (3.29)$$

$$\text{ii) } QP_{m+1} - QP_m = QPL_m \quad (3.30)$$

$$\text{iii) } QP_{m-1} + QP_{m+1} = QPL_m \quad (3.31)$$

$$\text{iv) } 2QP_m + QPL_m = QPL_{m+1} \quad (3.32)$$

dır (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) Pell kuaterniyonunun tanımından

$$\begin{aligned} QP_m + QP_{m+1} &= (p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) + (p_{m+1} + p_{m+2}i + p_{m+3}j + p_{m+4}k) \\ &= (p_m + p_{m+1}) + (p_{m+1} + p_{m+2})i + (p_{m+2} + p_{m+3})j + (p_{m+3} + p_{m+4})k \end{aligned}$$

dır.

$$q_{m+1} = p_m + p_{m+1}$$

özdeşliği kullanılarak

$$QP_m + QP_{m+1} = q_{m+1} + q_{m+2}i + q_{m+3}j + q_{m+4}k$$

olur. Pell – Lucas kuaterniyonunun tanımından

$$QP_m + QP_{m+1} = QPL_{m+1}$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde (3.8) den

$$\begin{aligned} QP_{m+1} - QP_m &= (p_{m+1} + p_{m+2}i + p_{m+3}j + p_{m+4}k) - (p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) \\ &= (p_{m+1} - p_m) + (p_{m+2} - p_{m+1})i + (p_{m+3} - p_{m+2})j + (p_{m+4} - p_{m+3})k \end{aligned}$$

olur. Ve

$$q_m = p_{m+1} - p_m$$

özdeşliğinden faydalanılarak

$$QP_{m+1} - QP_m = q_m + q_{m+1}i + q_{m+2}j + q_{m+3}k$$

elde edilir. Pell – Lucas kuaterniyonunun tanımından

$$QP_{m+1} - QP_m = QPL_m$$

olarak elde edilir.

iii) Pell kuaterniyonunun tanımından

$$\begin{aligned} QP_{m-1} + QP_{m+1} &= (p_{m-1} + p_m i + p_{m+1} j + p_{m+2} k) + (p_{m+1} + p_{m+2} i + p_{m+3} j + p_{m+4} k) \\ &= (p_{m-1} + p_{m+1}) + (p_m + p_{m+2})i + (p_{m+1} + p_{m+3})j + (p_{m+2} + p_{m+4})k \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$p_{m-1} + p_{m+1} = q_m$$

özdeşliği kullanılarak

$$QP_{m-1} + QP_{m+1} = q_m + q_{m+1}i + q_{m+2}j + q_{m+3}k$$

yazılır. (3.9) ile

$$QP_{m-1} + QP_{m+1} = QPL_m$$

elde edilir.

iv) (3.8) ve (3.9) dan faydalanılarak

$$\begin{aligned} 2QP_m + QPL_m &= 2(p_m + p_{m+1}i + p_{m+2}j + p_{m+3}k) + (q_m + q_{m+1}i + q_{m+2}j + q_{m+3}k) \\ &= (2p_m + q_m) + (2p_{m+1} + q_{m+1})i + (2p_{m+2} + q_{m+2})j + (2p_{m+3} + q_{m+3})k \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$q_{m+1} - q_m = 2p_m$$

özdeşliği ve Pell – Lucas kuaterniyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} 2QP_m + QPL_m &= q_{m+1} + q_{m+2}i + q_{m+3}j + q_{m+4}k \\ &= QPL_{m+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.23: i) $\sum_{s=1}^m QP_s = \frac{1}{2}(QPL_{m+1} - QPL_1)$ (3.33)

ii) $\sum_{s=1}^m QP_{2s} = \frac{1}{2}(QP_{2m+1} - QP_1)$ (3.34)

iii) $\sum_{s=1}^m QP_{2s-1} = \frac{1}{2}(QP_{2m} - QP_0)$ (3.35)

(Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) $\sum_{i=0}^m p_{k+i} = \frac{1}{2}(q_{k+m+1} - q_k)$ eşitliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_s &= \left(\sum_{s=1}^m p_s\right) + \left(\sum_{s=1}^m p_{s+1}\right)i + \left(\sum_{s=1}^m p_{s+2}\right)j + \left(\sum_{s=1}^m p_{s+3}\right)k \\ &= \left[\frac{1}{2}(q_{m+1} - q_0) - p_0\right] + \left[\frac{1}{2}(q_{m+2} - q_1) - p_1\right]i + \left[\frac{1}{2}(q_{m+3} - q_2) - p_2\right]j + \left[\frac{1}{2}(q_{m+4} - q_3) - p_3\right]k \end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_s &= \frac{1}{2}(q_{m+1} + q_{m+2}i + q_{m+3}j + q_{m+4}k - q_0 - q_1i - q_2j - q_3k - 2p_0 - 2p_1i - 2p_2j - 2p_3k) \\ &= \frac{1}{2}(QPL_{m+1} - QPL_0 - 2QP_0) \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir.

$$QPL_{m+1} = 2QP_m + QPL_m$$

ile

$$\sum_{s=1}^m QP_s = \frac{1}{2}(QPL_{m+1} - QPL_1)$$

olarak bulunur. İkinci yol olarak,

$$QP_m = \frac{\tau^m D - \psi^m Y}{\tau - \psi} , \quad QPL_m = \frac{\tau^m D + \psi^m Y}{2}$$

ile

$$\sum_{s=1}^m QP_s = \sum_{s=1}^m \frac{\tau^s D - \psi^s Y}{\tau - \psi}$$

dır.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_s &= \frac{1}{\tau - \psi} \left[D\tau \sum_{s=1}^m \tau^{s-1} - Y\psi \sum_{s=1}^m \psi^{s-1} \right] \\ &= \frac{1}{\tau - \psi} \left[D\tau \frac{\tau^m - 1}{\tau - 1} - Y\psi \frac{\psi^m - 1}{\psi - 1} \right] \end{aligned}$$

$D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$, $\tau = 1 + \sqrt{2}$ ve $\psi = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_s &= \left[\frac{D\tau^m - Y\psi^m}{\tau - \psi} + \frac{D\tau^{m+1} - Y\psi^{m+1}}{\tau - \psi} - \frac{D\tau - Y\psi}{\tau - \psi} - \frac{D - Y}{\tau - \psi} \right] \\ &= \frac{1}{2} (QP_m + QP_{m+1} - QP_1 - QP_0) \end{aligned}$$

dır.

$$QPL_{m+1} = QP_m + QP_{m+1}$$

ile

$$\sum_{s=1}^m QP_s = \frac{1}{2} (QPL_{m+1} - QPL_1)$$

elde edilebilir.

ii) QP_m tanımı ve (3.36) eşitliği ile

$$\sum_{s=1}^m QP_{2s} = \left(\sum_{s=1}^m p_{2s} \right) + \left(\sum_{s=1}^m p_{2s+1} \right) i + \left(\sum_{s=1}^m p_{2s+2} \right) j + \left(\sum_{s=1}^m p_{2s+3} \right) k$$

olur.

$$\sum_{i=0}^m p_{2k+2i} = \frac{1}{2} (q_{2k+2m+2} - p_{2k+2m+2} + q_{2k} + p_{2k}) \text{ ve } \sum_{i=0}^m p_{2k+2i+1} = \frac{1}{2} (2q_{2k+2m} + 3p_{2k+2m} - p_{2k})$$

özdeşlikleri ile

$$\sum_{s=1}^m QP_{2s} = \frac{1}{2} (q_{2m} + p_{2m} - q_0 - p_0) + \frac{1}{2} (2q_{2m} + 3p_{2m} - p_0 - 2p_1) i + \frac{1}{2} (q_{2m+2} + p_{2m+2} - q_2 - p_2) j + \frac{1}{2} (2q_{2m+2} + 3p_{2m+2} - p_2 - 2p_3) k$$

dır.

$$q_m = p_{m+1} - p_m, \quad QP_m + 2QP_{m+1} = QP_{m+2}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\sum_{s=1}^m QP_{2s} = \frac{1}{2} (p_{2m+1} + p_{2m+2} i + p_{2m+3} j + p_{2m+4} k) - \frac{1}{2} (p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k)$$

ifadesi bulunur. Buradan

$$\sum_{s=1}^m QP_{2s} = \frac{1}{2} (QP_{2m+1} - QP_1)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $\sum_{s=1}^m QP_{2s}$ için sırasıyla Pell kuaterniyonunun ve Pell – Lucas kuaterniyonunun Binet formülü olan

$$QP_m = \frac{\tau^m D - \psi^m Y}{\tau - \psi}, \quad QPL_m = \frac{\tau^m D + \psi^m Y}{2}$$

ifadelerinin kullanılmasıyla

$$\sum_{s=1}^m QP_{2s} = \sum_{s=1}^m \frac{\tau^{2s} D - \psi^{2s} Y}{\tau - \psi}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_{2s} &= \frac{1}{\tau - \psi} \left[D\tau^2 \sum_{s=1}^m \tau^{2(s-1)} - Y\psi^2 \sum_{s=1}^m \psi^{2(s-1)} \right] \\ &= \frac{1}{\tau - \psi} \left[D\tau^2 \frac{\tau^{2m} - 1}{\tau^2 - 1} - Y\psi^2 \frac{\psi^{2m} - 1}{\psi^2 - 1} \right] \end{aligned}$$

dır.

$D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$, $\tau = 1 + \sqrt{2}$ ve $\psi = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_{2s} &= -\frac{1}{4} \left[\frac{D\tau^{2m} - Y\psi^{2m}}{\tau - \psi} - \frac{D\tau^{2m+2} - Y\psi^{2m+2}}{\tau - \psi} + \frac{D\tau^2 - Y\psi^2}{\tau - \psi} - \frac{D - Y}{\tau - \psi} \right] \\ &= \frac{1}{4} (QP_{2m+2} - QP_{2m} + QP_0 - QP_2) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece

$$QP_m + 2QP_{m+1} = QP_{m+2}$$

eşitliği ile

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_{2s} &= \frac{1}{4} (2QP_{2m+1} - 2QP_1) \\ &= \frac{1}{2} (QP_{2m+1} - 2QP_1) \end{aligned}$$

şeklinde de elde edilebilir.

$$\text{iii)} \sum_{i=0}^m p_{2k+2i} = \frac{1}{2}(q_{2k+2m+2} - p_{2k+2m+2} + q_{2k} + p_{2k}),$$

$$\sum_{i=0}^m p_{2k+2i+1} = \frac{1}{2}(2q_{2k+2m} + 3p_{2k+2m} - p_{2k})$$

eşitlikleri ile

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_{2s-1} &= \left(\sum_{s=1}^m p_{2s-1} \right) + \left(\sum_{s=1}^m p_{2s} \right) i + \left(\sum_{s=1}^m p_{2s+1} \right) j + \left(\sum_{s=1}^m p_{2s+2} \right) k \\ &= \left[\frac{1}{2}(2q_{2m-2} + 3p_{2m-2} - p_{-2} - 2p_{-1}) \right] + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+1} - p_1) \right] i + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+2} - p_2) \right] j + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+3} - p_3) \right] k \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$q_m = p_{m+1} - p_m, \quad QP_m + 2QP_{m+1} = QP_{m+2} \quad \text{ve} \quad p_{-m} = (-1)^{m+1} p_m$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m QP_{2s-1} &= \left[\frac{1}{2}(2q_{2m-2} + 3p_{2m-2} + p_2 - 2p_1) \right] + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+1} - p_1) \right] i + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+2} - p_2) \right] j + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+3} - p_3) \right] k \\ &= \left[\frac{1}{2}(p_{2m} + p_0) \right] + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+1} - p_1) \right] i + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+2} - p_2) \right] j + \left[\frac{1}{2}(p_{2m+3} - p_3) \right] k \\ &= \frac{1}{2}(p_{2m} + p_{2m+1}i + p_{2m+2}j + p_{2m+3}k) - \frac{1}{2}(p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) \\ &= \frac{1}{2}(QP_{2m} - QP_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Pell kuaterniyonunun Binet formülü kullanılarak ve

$$D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k, \quad Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k, \quad \tau = 1 + \sqrt{2}, \quad \psi = 1 - \sqrt{2} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\sum_{s=1}^m QP_{2s-1} = \sum_{s=1}^m \frac{\tau^{2s-1} D - \psi^{2s-1} Y}{\tau - \psi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tau - \psi} \left[D\tau \frac{\tau^{2m}-1}{\tau^2-1} - Y\psi \frac{\psi^{2m}-1}{\psi^2-1} \right] = \frac{1}{\tau - \psi} \left[D\tau \sum_{s=1}^m \tau^{2(s-1)} - Y\psi \sum_{s=1}^m \psi^{2(s-1)} \right] \\
&= -\frac{1}{4} \left[\frac{D\tau^{2m-1} - Y\psi^{2m-1}}{\tau - \psi} - \frac{D\tau^{2m+1} - Y\psi^{2m+1}}{\tau - \psi} + \frac{(D-Y)(\tau + \psi)}{\tau - \psi} \right]
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Böylece

$$QP_{2s-1} = \frac{1}{2}(QP_{2m} - QP_0)$$

olur.

Teorem 3.24: (Cassini Özdeşlikleri)

$D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$ ve $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$ olmak üzere

$$\text{i) } QP_{m+1}QP_{m-1} - QP_m^2 = (-1)^m \left[\frac{(\tau^2 + 2)DY + \psi^2 YD}{(\tau - \psi)^2} \right] \quad (3.37)$$

$$\text{ii) } QPL_{m+1}QPL_{m-1} - QPL_m^2 = (-1)^{m+1} \left[\frac{(\tau^2 + 2)DY + \psi^2 YD}{4} \right] \quad (3.38)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) $D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$, $\tau = 1 + \sqrt{2}$, $\psi = 1 - \sqrt{2}$

olmak üzere ve Pell kuaterniyonunun Binet formülünden

$$QP_{m+1}QP_{m-1} - QP_m^2 = \left(\frac{\tau^{m+1}D - \psi^{m+1}Y}{\tau - \psi} \right) \left(\frac{\tau^{m-1}D - \psi^{m-1}Y}{\tau - \psi} \right) - \left(\frac{\tau^m D - \psi^m Y}{\tau - \psi} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\tau - \psi)^2} \left[\tau^{2m} D^2 - \tau^{m+1} \psi^{m-1} DY - \psi^{m+1} \tau^{m-1} YD + \psi^{2m} Y^2 - \tau^{2m} D^2 + 2\tau^m \psi^m YD - \psi^{2m} Y^2 \right] \\
&= \frac{1}{(\tau - \psi)^2} \left[-\tau^{m+1} \psi^{m-1} DY - \psi^{m+1} \tau^{m-1} YD + 2\tau^m \psi^m DY \right] \\
&= (-1)^m \left[\frac{(\tau^2 + 2)DY + \psi^2 YD}{(\tau - \psi)^2} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

ii) Benzer şekilde Pell – Lucas kuaterniyonunun Binet formülünden ve

$\tau = 1 + \sqrt{2}$, $\psi = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
QPL_{m+1} QPL_{m-1} - QPL_m^2 &= \left(\frac{\tau^{m+1} D + \psi^{m+1} Y}{2} \right) \left(\frac{\tau^{m-1} D + \psi^{m-1} Y}{2} \right) - \left(\frac{\tau^m D + \psi^m Y}{2} \right)^2 \\
&= (-1)^{m+1} \left(\frac{\tau^2 DY + \psi^2 YD + 2DY}{4} \right) \\
&= (-1)^{m+1} \left(\frac{(\tau^2 + 2)DY + \psi^2 YD}{4} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.25: $D = 1 + \tau i + \tau^2 j + \tau^3 k$, $Y = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$ olmak üzere

$$\text{i) } QPL_m^2 - QP_m^2 = (-1)^m DY \quad (3.39)$$

$$\text{ii) } n \geq 1, QPL_{2n+1}^2 - QPL_{2n-1} QPL_{2n+3} = \frac{-DY}{2} + \frac{1}{4} (\tau^4 DY + \psi^4 YD) \quad (3.40)$$

dır (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: i) Pell, Pell – Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri ve $\tau\psi = -1$ olmasından faydalanılarak

$$QPL_m^2 - QP_m^2 = \frac{\tau^{2m}D^2 + 2\tau^m\psi^mDY + \psi^{2m}Y^2 - \tau^{2m}D^2 + 2\tau^m\psi^mDY - \psi^{2m}Y^2}{4}$$

$$QPL_m^2 - QP_m^2 = (-1)^m DY$$

bulunur.

ii) Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} QPL_{2n+1}^2 - QPL_{2n-1}QPL_{2n+3} &= \left(\frac{\tau^{2n+1}D - \psi^{2n+1}Y}{\tau - \psi} \right)^2 - \left(\frac{\tau^{2n-1}D - \psi^{2n-1}Y}{\tau - \psi} \right) \left(\frac{\tau^{2n+3}D - \psi^{2n+3}Y}{\tau - \psi} \right) \\ &= \frac{-DY}{2} + \frac{1}{4}(\tau^4DY + \psi^4YD) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.26: Fibonacci sayıları ve Fibonacci kuaterniyonları arasında

$$Q_m \overline{Q_m} = \sum_{i=0}^3 F_{m+i}^2 = 3F_{2m+3} \quad (3.41)$$

şeklinde bir ilişki vardır (Horadam, 1963).

$$\text{İspat: } Q_m \overline{Q_m} = (F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})(F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3})$$

$$\begin{aligned} &= F_m^2 - iF_mF_{m+1} - jF_mF_{m+2} - kF_mF_{m+3} + iF_{m+1}F_m - i^2F_{m+1}F_{m+1} - ijF_{m+1}F_{m+2} - ikF_{m+1}F_{m+3} \\ &\quad + jF_{m+2}F_m - jiF_{m+2}F_{m+1} - j^2F_{m+2}F_{m+2} - jkF_{m+2}F_{m+3} + kF_{m+3}F_m - kiF_{m+3}F_{m+1} - kjF_{m+3}F_{m+2} - k^2F_{m+3}F_{m+3} \end{aligned}$$

(3.1b) ile

$$\begin{aligned} Q_m \overline{Q_m} &= F_m^2 - iF_mF_{m+1} - jF_mF_{m+2} - kF_mF_{m+3} + iF_{m+1}F_m + F_{m+1}^2 - kF_{m+1}F_{m+2} + jF_{m+1}F_{m+3} + jF_{m+2}F_m \\ &\quad + kF_{m+2}F_{m+1} + F_{m+2}^2 - iF_{m+2}F_{m+3} + kF_{m+3}F_m - jF_{m+3}F_{m+1} + iF_{m+3}F_{m+2} + F_{m+3}^2 \\ &= F_m^2 + i(-F_mF_{m+1} + F_{m+1}F_m - F_{m+2}F_{m+3} + F_{m+3}F_{m+2}) + j(-F_mF_{m+2} + F_{m+1}F_{m+3} + F_{m+2}F_m - F_{m+3}F_{m+1}) \\ &\quad + k(-F_mF_{m+3} - F_{m+1}F_{m+2} + F_{m+2}F_{m+1} + F_{m+3}F_m) + F_{m+1}^2 + F_{m+2}^2 + F_{m+3}^2 \\ &= F_m^2 + F_{m+1}^2 + F_{m+2}^2 + F_{m+3}^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^3 F_{m+i}^2$$

dır. Buradan

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

özdeşliği ve bazı düzenlemeler ile

$$Q_m \overline{Q_m} = \sum_{i=0}^3 F_{m+i}^2 = 3F_{2m+3}$$

elde edilir.

Teorem 3.27: Q_m Fibonacci kuaterniyonu için

$$Q_m^2 = 2F_m Q_m - Q_m \overline{Q_m} \quad (3.42)$$

eşitliği geçerlidir (Horadam, 1963).

İspat: $Q_m^2 = Q_m Q_m$

$$\begin{aligned} &= Q_m (F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) \\ &= Q_m (2F_m - F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) \\ &= Q_m (2F_m - (F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3})) \\ &= Q_m (2F_m - \overline{Q_m}) \\ &= 2F_m Q_m - Q_m \overline{Q_m} \end{aligned}$$

Böylece

$$Q_m^2 = 2F_m Q_m - Q_m \overline{Q_m}$$

elde edilir.

Teorem 3.28: $Q_m \neq 0$ olmak üzere Fibonacci kuaterniyonu için

$$2F_m = Q_m + \overline{Q_m} \quad (3.43)$$

eşitliği geçerlidir (Horadam, 1963).

İspat: $2F_m = F_m + F_m$

$$\begin{aligned} &= F_m + F_m + iF_{m+1} - iF_{m+1} + jF_{m+2} - jF_{m+2} + kF_{m+3} - kF_{m+3} \\ &= F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3} + F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3} \\ &= (F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) + (F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3}) \\ &= Q_m + \overline{Q_m} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 3.29: $H = \{Q_m : Q_m = (F_m, F_{m+1}, F_{m+2}, F_{m+3}); F_m, m. \text{ Fibonacci sayısı} \}$

$$H' = \left\{ B_m : B_m = \begin{pmatrix} w & -z \\ z & w \end{pmatrix}; w, z \in C \right\}$$

şeklinde tanımlanan H ve H' kümeleri arasında

$$Q_m = (F_m, F_{m+1}, F_{m+2}, F_{m+3}) \rightarrow B_m = \begin{pmatrix} F_m + iF_{m+1} & -F_{m+2} - iF_{m+3} \\ F_{m+2} - iF_{m+3} & F_m - iF_{m+1} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmdir. Dolayısıyla

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$B_m = F_m E + F_{m+1} I + F_{m+2} J + F_{m+3} K \quad (3.44)$$

şeklinde yazılır. B_m kuaterniyon matrisinin determinanı sıfırdan farklı olduğundan tersi vardır ve H' kümesinde bulunur(Halici, 2012).

Teorem 3.30: Fibonacci kuaterniyonu Q_m için üreteç fonksiyonu

$$G(x, t) = \frac{t + i + j(t + 1) + k(t + 2)}{1 - t - t^2} \quad (3.45)$$

şeklindedir (Halici, 2012).

İspat: Genel formülü $Q_{m+2} = Q_{m+1} + Q_m$ ve başlangıç şartları $Q_0 = (0, 1, 1, 2)$, $Q_1 = (1, 1, 2, 3)$ olan Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m t^m = G(x, t)$$

olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+2} t^m = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{m+1} t^m + \sum_{n=0}^{\infty} Q_m t^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} Q_m t^{m-2} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} Q_m t^m$$

$$t^{-2}(\sum_{m=0}^{\infty} Q_m t^m - Q_0 t^0 - Q_1 t^1) = t^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} Q_m t^m - Q_0 t^0) + \sum_{m=0}^{\infty} Q_m t^m$$

$Q_0 = (0, 1, 1, 2)$, $Q_1 = (1, 1, 2, 3)$ ve $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m t^m = G(x, t)$ ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$t^{-2}(G(x, t) - (0, 1, 1, 2) - (1, 1, 2, 3)t) = t^{-1}(G(x, t) - (0, 1, 1, 2)) + G(x, t)$$

olur. Her taraf t^2 ile çarpılırsa

$$G(x, t) - (0, 1, 1, 2) - (t, t, 2t, 3t) = tG(x, t) - (0, t, t, 2t) + t^2 G(x, t)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$G(x, t)(1 - t - t^2) = (0, 1, 1, 2) + (t, t, 2t, 3t) - (0, t, t, 2t)$$

olur. Buradan

$$G(x, t)(1 - t - t^2) = (t, 1, 1 + t, 2 + t)$$

$$G(x, t) = \frac{(t, 1, 1 + t, 2 + t)}{1 - t - t^2}$$

$$G(x, t) = \frac{t + i + (1 + t)j + (2 + t)k}{1 - t - t^2}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.31: Lucas kuaterniyonu T_m için üreteç fonksiyonu

$$L(x, t) = \frac{(2 - t) + (1 + 2t)i + (3 + t)j + (4 + 3t)k}{1 - t - t^2} \quad (3.46)$$

şeklindedir (Horadam, 1963).

İspat: Genel formülü $T_{m+2} = T_{m+1} + T_m$ ve başlangıç şartları $T_0 = (2, 1, 3, 4)$, $T_1 = (1, 3, 4, 7)$ olan Lucas kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m = L(x, t)$$

olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_{m+2} t^m = \sum_{m=0}^{\infty} T_{m+1} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} T_m t^{m-2} = \sum_{m=1}^{\infty} T_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m$$

$$t^{-2}(\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m - T_0 t^0 - T_1 t^1) = t^{-1}(\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m - T_0 t^0) + \sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m$$

$T_0 = (2, 1, 3, 4)$, $T_1 = (1, 3, 4, 7)$ ve $\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m = L(x, t)$ ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$t^{-2}(L(x, t) - (2, 1, 3, 4) - (1, 3, 4, 7)t) = t^{-1}(L(x, t) - (2, 1, 3, 4)) + L(x, t)$$

olur. Her taraf t^2 ile çarpılırsa

$$L(x, t) - (2, 1, 3, 4) - (t, 3t, 4t, 7t) = tL(x, t) - (2t, t, 3t, 4t) + t^2 L(x, t)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L(x, t)(1 - t - t^2) = (2, 1, 3, 4) + (t, 3t, 4t, 7t) - (2t, t, 3t, 4t)$$

olur. Buradan

$$L(x, t)(1 - t - t^2) = (2 - t, 1 + 2t, 3 + t, 4 + 3t)$$

$$L(x, t) = \frac{(2 - t, 1 + 2t, 3 + t, 4 + 3t)}{1 - t - t^2}$$

$$L(x, t) = \frac{(2 - t) + (1 + 2t)i + (3 + t)j + (4 + 3t)k}{1 - t - t^2}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.32: Pell kuaterniyonu QP_m için üreteç fonksiyonu

$$P(x, t) = \frac{t + i + (2 + t)j + (5 + 2t)k}{1 - 2t - t^2} \quad (3.47)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: Genel formülü $QP_{m+2} = 2QP_{m+1} + QP_m$ ve başlangıç şartları $QP_0 = (0,1,2,5)$, $QP_1 = (1,2,5,12)$ olan Pell kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m = P(x,t)$$

olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} QP_{m+2} t^m = 2 \sum_{m=0}^{\infty} QP_{m+1} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} QP_m t^{m-2} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} QP_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m$$

$$t^{-2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m - QP_0 t^0 - QP_1 t^1 \right) = 2t^{-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m - QP_0 t^0 \right) + \sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m$$

$QP_0 = (0,1,2,5)$, $QP_1 = (1,2,5,12)$ ve $\sum_{m=0}^{\infty} QP_m t^m = P(x,t)$ ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$t^{-2}(P(x,t) - (0,1,2,5) - (1,2,5,12)t) = 2t^{-1}(P(x,t) - (0,1,2,5)) + P(x,t)$$

olur. Her taraf t^2 ile çarpılırsa

$$P(x,t) - (0,1,2,5) - (t,2t,5t,12t) = 2tP(x,t) - (0,2t,4t,10t) + t^2P(x,t)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P(x,t)(1 - 2t - t^2) = (0,1,2,5) + (t,2t,5t,12t) - (0,2t,4t,10t)$$

olur. Buradan

$$P(x,t)(1 - 2t - t^2) = (t,1,2+t,5+2t)$$

$$P(x,t) = \frac{(t,1,2+t,5+2t)}{1 - 2t - t^2}$$

$$P(x, t) = \frac{t + i + (2 + t)j + (5 + 2t)k}{1 - 2t - t^2}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.33: Pell - Lucas kuaterniyonu QPL_m için üreteç fonksiyonu

$$PL(x, t) = \frac{1 - t + (1 + t)i + (3 + t)j + (7 + 3t)k}{1 - 2t - t^2} \quad (3.48)$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

İspat: Genel formülü $QPL_{m+2} = 2QPL_{m+1} + QPL_m$ ve başlangıç şartları $QPL_0 = (1, 1, 3, 7)$, $QPL_1 = (1, 3, 7, 17)$ olan Pell - Lucas kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m = PL(x, t)$$

olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} QPL_{m+2} t^m = 2 \sum_{m=0}^{\infty} QPL_{m+1} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} QPL_m t^{m-2} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} QPL_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m$$

$$t^{-2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m - QPL_0 t^0 - QPL_1 t^1 \right) = 2t^{-1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m - QPL_0 t^0 \right) + \sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m$$

$$QPL_0 = (1, 1, 3, 7), \quad QPL_1 = (1, 3, 7, 17) \quad \text{ve} \quad \sum_{m=0}^{\infty} QPL_m t^m = PL(x, t) \quad \text{ifadeleri yukarıdaki}$$

denklemden yerine yazılırsa

$$t^{-2} (PL(x, t) - (1, 1, 3, 7) - (1, 3, 7, 17)t) = 2t^{-1} (PL(x, t) - (1, 1, 3, 7)) + PL(x, t)$$

olur. Her taraf t^2 ile çarpılırsa

$$PL(x, t) - (1, 1, 3, 7) - (t, 3t, 7t, 17t) = 2tPL(x, t) - (2t, 2t, 6t, 14t) + t^2 PL(x, t)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$PL(x, t)(1 - 2t - t^2) = (1, 1, 3, 7) + (t, 3t, 7t, 17t) - (2t, 2t, 6t, 14t)$$

olur. Buradan

$$PL(x, t)(1 - 2t - t^2) = (1 - t, 1 + t, 3 + t, 7 + 3t)$$

$$PL(x, t) = \frac{(1 - t, 1 + t, 3 + t, 7 + 3t)}{1 - 2t - t^2}$$

$$PL(x, t) = \frac{1 - t + (1 + t)i + (3 + t)j + (7 + 3t)k}{1 - 2t - t^2}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.34: $m, n \in \mathbb{Z}$ ve Q_{n+m} kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m} x^m = \frac{Q_n + Q_{n-1}x}{1 - x - x^2} \quad (3.49)$$

şeklindedir (Halici, 2012).

İspat: Genel formülü $Q_{n+m+2} = Q_{n+m+1} + Q_{n+m}$ olan bir Q_{n+m} kuaterniyonu için

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m} x^m = G(x)$$

olsun.

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m+2} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m+1} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m} x^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} Q_{n+m} x^{m-2} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{n+m} x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m} x^m$$

$$x^{-2}(\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m - Q_{n+0}x^0 - Q_{n+1}x^1) = x^{-1}(\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m - Q_{n+0}x^0) + \sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m$$

Her taraf x^2 ile çarpılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m - Q_n - Q_{n+1}x = x \sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m - xQ_n + x^2 \sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m$$

olur.

$\sum_{m=0}^{\infty} Q_{n+m}x^m = G(x)$ ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$G(x) - Q_n - Q_{n+1}x = xG(x) - xQ_n + x^2G(x)$$

olur. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$G(x)(1 - x - x^2) = Q_n + x(Q_{n+1} - Q_n)$$

olur. Buradan

$$Q_{n-1} = Q_{n+1} - Q_n$$

eşitliği ile

$$G(x)(1 - x - x^2) = Q_n + xQ_{n-1}$$

olur. Ve

$$G(x) = \frac{Q_n + xQ_{n-1}}{1 - x - x^2}$$

elde edilir.

Tanım 3.35: $Q = \begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}$ (3.50)

matrisine Fibonacci kuaterniyon matrisi denir (Halici, 2012).

Teorem 3.36: (Cassini özdeşliği) $m \geq 0$ için

$$Q_{m-1}Q_{m+1} - Q_m^2 = (-1)^m (2Q_1 - 3k) \quad (3.51)$$

dir (Halici, 2012).

İspat: $Q = \begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}$, $\det(Q) = Q_0Q_2 - Q_1^2 = -(2Q_1 - 3k)$

$$Q^2 = Q_2 = \begin{pmatrix} Q_3 & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}, \det(Q^2) = Q_1Q_3 - Q_2^2 = (2Q_1 - 3k)$$

$$Q^m = (F_{m-1} + iF_m + jF_{m+1} + kF_{m+2})(F_{m+1} + iF_{m+2} + jF_{m+3} + kF_{m+4}) - (F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})^2$$

$$Q^m = Q_m = (-1)^m (2Q_1 - 3k)$$

elde edilir.

Tanım 3.37: Q_m Fibonacci kuaterniyonu

i) $Q^{-m} = Q_{-m} = (-1)^m (-F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})$ (3.52)

ii) $Q^{-m} + \overline{(Q^{-m})} = 2(-1)^{m+1} F_m$ (3.53)

iii) $\frac{1}{2}(Q^m + Q^{-m}) = \begin{cases} F_m + jF_{m+2}; m \text{ tek} \\ iF_{m+1} + kF_{m+3}; m \text{ çift} \end{cases}$ (3.54)

eşitliklerini sağlar (Halici, 2012).

Tanım 3.38: Q_m Fibonacci kuaterniyonu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Halici, 2012).

$$\text{i)} \sum_{i=0}^m Q_i = Q_{m+2} - Q_1 \quad (3.55)$$

$$\text{ii)} \sum_{i=0}^m Q_{2i} = Q_{2m+1} - (1, 0, 1, 1) \quad (3.56)$$

$$\text{iii)} \sum_{i=0}^{m-1} Q_{2i+1} = Q_{2m} - Q_0 \quad (3.57)$$

Teorem 3.39: P_m ve Q_m kuaterniyonları arasında

$$P_m + qQ_m = pQ_m + qQ_{m+1} \quad (3.58)$$

şeklinde bir ilişki vardır (Iyer, 1969a).

İspat: P_m ve Q_m kuaterniyonlarının tanımından

$$P_m + qQ_m = [H_m + iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3}] + q[F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}]$$

dır. Burada

$$H_m = (p - q)F_m + qF_{m+1}$$

(Horadam, 1963), ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} P_m + qQ_m = & [(p - q)F_m + qF_{m+1}] + i[(p - q)F_{m+1} + qF_{m+2}] + j[(p - q)F_{m+2} + qF_{m+3}] \\ & + k[(p - q)F_{m+3} + qF_{m+4}] + q[F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}] \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} P_m + qQ_m = & pF_m - qF_m + qF_{m+1} + i pF_{m+1} - iqF_{m+1} + iqF_{m+2} + j pF_{m+2} - jqF_{m+2} + jqF_{m+3} + k pF_{m+3} \\ & - kqF_{m+3} + kqF_{m+4} + qF_m + qiF_{m+1} + qjF_{m+2} + qkF_{m+3} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem p parantezine ve q parantezine alınırsa

$$P_m + qQ_m = p(F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) + q(-F_m + F_{m+1} - iF_{m+1} + iF_{m+2} - jF_{m+2} + jF_{m+3} - kF_{m+3} + kF_{m+4} + F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})$$

olur. Q_m kuaterniyonunun tanımı ile

$$P_m + qQ_m = pQ_m + q[(-F_m + F_m) + F_{m+1} + i(-F_{m+1} + F_{m+1} + F_{m+2}) + j(-F_{m+2} + F_{m+2} + F_{m+3}) + k(-F_{m+3} + F_{m+3} + F_{m+4})]$$

elde edilir. Buradan

$$P_m + qQ_m = pQ_m + q[F_{m+1} + iF_{m+2} + jF_{m+3} + kF_{m+4}]$$

dır. Q_{m+1} kuaterniyonunun tanımı ile

$$P_m + qQ_m = pQ_m + qQ_{m+1}$$

olur. Böylece

$$P_m + qQ_m = pQ_m + qQ_{m+1}$$

elde edilir. Veya

$$P_m = pQ_m + q(Q_{m+1} - Q_m)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Q_m kuaterniyonunun genel formülünden

$$P_m = pQ_m + qQ_{m-1}$$

olarak düzenlenebilir.

Teorem 3.40: P_m ve Q_m kuaterniyonları arasında

$$P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m = 2(F_m P_m - H_m Q_m) \quad (3.59)$$

şeklinde bir bağıntı bulunmaktadır (Iyer, 1969a).

İspat:
$$\begin{aligned} P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m &= (H_m + iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3})(F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3}) \\ &\quad - (H_m - iH_{m+1} - jH_{m+2} - kH_{m+3})(F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) \\ &= H_m F_m - iH_m F_{m+1} - jH_m F_{m+2} - kH_m F_{m+3} + iH_{m+1} F_m - i^2 H_{m+1} F_{m+1} - ijH_{m+1} F_{m+2} \\ &\quad - ikH_{m+1} F_{m+3} + jH_{m+2} F_m - jiH_{m+2} F_{m+1} - j^2 H_{m+2} F_{m+2} - jkH_{m+2} F_{m+3} + kH_{m+3} F_m - kiH_{m+3} F_{m+1} \\ &\quad - kjH_{m+3} F_{m+2} - k^2 H_{m+3} F_{m+3} - H_m F_m - iH_m F_{m+1} - jH_m F_{m+2} - kH_m F_{m+3} + iH_{m+1} F_m + i^2 H_{m+1} F_{m+1} \\ &\quad + ijH_{m+1} F_{m+2} + ikH_{m+1} F_{m+3} + jH_{m+2} F_m + jiH_{m+2} F_{m+1} + j^2 H_{m+2} F_{m+2} + jkH_{m+2} F_{m+3} + kH_{m+3} F_m \\ &\quad + kiH_{m+3} F_{m+1} + kjH_{m+3} F_{m+2} + k^2 H_{m+3} F_{m+3} \end{aligned}$$

(3.1b) den

$$\begin{aligned} P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m &= H_m F_m - iH_m F_{m+1} - jH_m F_{m+2} - kH_m F_{m+3} + iH_{m+1} F_m + H_{m+1} F_{m+1} - kH_{m+1} F_{m+2} \\ &\quad + jH_{m+1} F_{m+3} + jH_{m+2} F_m + kH_{m+2} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} - iH_{m+2} F_{m+3} + kH_{m+3} F_m - jH_{m+3} F_{m+1} \\ &\quad + iH_{m+3} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3} - H_m F_m - iH_m F_{m+1} - jH_m F_{m+2} - kH_m F_{m+3} + iH_{m+1} F_m - H_{m+1} F_{m+1} \\ &\quad + kH_{m+1} F_{m+2} - jH_{m+1} F_{m+3} + jH_{m+2} F_m - kH_{m+2} F_{m+1} - H_{m+2} F_{m+2} + iH_{m+2} F_{m+3} + kH_{m+3} F_m \\ &\quad + jH_{m+3} F_{m+1} - iH_{m+3} F_{m+2} - H_{m+3} F_{m+3} \end{aligned}$$

dır. Tüm terimler ayrı ayrı i, j, k parantezine alınır

$$\begin{aligned} P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m &= H_m F_m + H_{m+1} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3} - H_m F_m - H_{m+1} F_{m+1} - H_{m+2} F_{m+2} - H_{m+3} F_{m+3} \\ &\quad + i(-H_m F_{m+1} + H_{m+1} F_m - H_{m+2} F_{m+3} + H_{m+3} F_{m+2} - H_m F_{m+1} + H_{m+1} F_m + H_{m+2} F_{m+3} - H_{m+3} F_{m+2}) \\ &\quad + j(-H_m F_{m+2} + H_{m+1} F_{m+3} + H_{m+2} F_m - H_{m+3} F_{m+1} - H_m F_{m+2} - H_{m+1} F_{m+3} + H_{m+2} F_m + H_{m+3} F_{m+1}) \\ &\quad + k(-H_m F_{m+3} - H_{m+1} F_{m+2} + H_{m+2} F_{m+1} + H_{m+3} F_m - H_m F_{m+3} + H_{m+1} F_{m+2} - H_{m+2} F_{m+1} + H_{m+3} F_m) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler ile

$$\begin{aligned} P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m &= i(-2H_m F_{m+1} + 2H_{m+1} F_m) + j(-2H_m F_{m+2} + 2H_{m+2} F_m) + k(-2H_m F_{m+3} + 2H_{m+3} F_m) \\ &= -2iH_m F_{m+1} + 2iH_{m+1} F_m - 2jH_m F_{m+2} + 2jH_{m+2} F_m - 2kH_m F_{m+3} + 2kH_{m+3} F_m \end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki denklem ayrı ayrı $-2H_m$ ve $-2F_m$ parantezlerine alınır

$$P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m = -2H_m(iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) + 2F_m(iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3})$$

olur. Burada Q_m ve P_m kuaterniyonlarının tanımından faydalanılarak

$$P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m = -2H_m(Q_m - F_m) + 2F_m(P_m - H_m)$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m &= -2H_m Q_m + 2H_m F_m + 2F_m P_m - 2F_m H_m \\ &= -2H_m Q_m + 2F_m P_m \\ &= 2(F_m P_m - H_m Q_m) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m = 2(F_m P_m - H_m Q_m)$$

ilişkisi sağlanır. Ayrıca yukardaki eşitliğin her iki tarafının $P_m Q_m \neq 0$ ile bölünmesiyle

$$\frac{P_m \overline{Q_m} - \overline{P_m} Q_m}{P_m Q_m} = \frac{2(F_m P_m - H_m Q_m)}{P_m Q_m}$$

elde edilir.

$$\frac{P_m \overline{Q_m}}{P_m Q_m} - \frac{\overline{P_m} Q_m}{P_m Q_m} = 2 \left(\frac{F_m P_m}{P_m Q_m} - \frac{H_m Q_m}{P_m Q_m} \right)$$

$$\frac{\overline{Q_m}}{Q_m} - \frac{\overline{P_m}}{P_m} = 2 \left(\frac{F_m}{Q_m} - \frac{H_m}{P_m} \right)$$

Gerekli işlemler ile

$$\frac{\overline{Q_m}}{Q_m} - \frac{2F_m}{Q_m} = \frac{\overline{P_m}}{P_m} - \frac{2H_m}{P_m}$$

olur. Buradan

$$\frac{\overline{Q_m} - 2F_m}{Q_m} = \frac{\overline{P_m} - 2H_m}{P_m} \quad (3.60)$$

ilişkisi de elde edilebilir.

Teorem 3.41: P_m ve Q_m kuaterniyonları arasında

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2(P_m F_m + Q_m H_m - P_m Q_m) \quad (3.61)$$

şeklinde bir bağıntı bulunmaktadır (Iyer, 1969a).

İspat: $P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = (H_m + iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3})(F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3})$
 $+ (H_m - iH_{m+1} - jH_{m+2} - kH_{m+3})(F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})$
 $= H_m F_m - iH_m F_{m+1} - jH_m F_{m+2} - kH_m F_{m+3} + iH_{m+1} F_m - i^2 H_{m+1} F_{m+1} - ijH_{m+1} F_{m+2} - ikH_{m+1} F_{m+3}$
 $+ jH_{m+2} F_m - jiH_{m+2} F_{m+1} - j^2 H_{m+2} F_{m+2} - jkH_{m+2} F_{m+3} + kH_{m+3} F_m - kiH_{m+3} F_{m+1} - kjH_{m+3} F_{m+2} - k^2 H_{m+3} F_{m+3}$
 $+ H_m F_m + iH_m F_{m+1} + jH_m F_{m+2} + kH_m F_{m+3} - iH_{m+1} F_m - i^2 H_{m+1} F_{m+1} - ijH_{m+1} F_{m+2} - ikH_{m+1} F_{m+3}$
 $- jH_{m+2} F_m - jiH_{m+2} F_{m+1} - j^2 H_{m+2} F_{m+2} - jkH_{m+2} F_{m+3} - kH_{m+3} F_m - kiH_{m+3} F_{m+1} - kjH_{m+3} F_{m+2} - k^2 H_{m+3} F_{m+3}$

(3.1b) den

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = H_m F_m - iH_m F_{m+1} - jH_m F_{m+2} - kH_m F_{m+3} + iH_{m+1} F_m + H_{m+1} F_{m+1} - kH_{m+1} F_{m+2} + jH_{m+1} F_{m+3}$$

$$+ jH_{m+2} F_m + kH_{m+2} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} - iH_{m+2} F_{m+3} + kH_{m+3} F_m - jH_{m+3} F_{m+1} + iH_{m+3} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3}$$

$$+ H_m F_m + iH_m F_{m+1} + jH_m F_{m+2} + kH_m F_{m+3} - iH_{m+1} F_m + H_{m+1} F_{m+1} - kH_{m+1} F_{m+2} + jH_{m+1} F_{m+3}$$

$$- jH_{m+2} F_m + kH_{m+2} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} - iH_{m+2} F_{m+3} - kH_{m+3} F_m - jH_{m+3} F_{m+1} + iH_{m+3} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3}$$

olur. Tüm terimler ayrı ayrı i, j, k parantezine alınır,

$$\begin{aligned}
P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = & H_m F_m + H_{m+1} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3} + H_m F_m + H_{m+1} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3} \\
& + i(-H_m F_{m+1} + H_{m+1} F_m - H_{m+2} F_{m+3} + H_{m+3} F_{m+2} + H_m F_{m+1} - H_{m+1} F_m - H_{m+2} F_{m+3} + H_{m+3} F_{m+2}) \\
& + j(-H_m F_{m+2} + H_{m+1} F_{m+3} + H_{m+2} F_m - H_{m+3} F_{m+1} + H_m F_{m+2} + H_{m+1} F_{m+3} - H_{m+2} F_m - H_{m+3} F_{m+1}) \\
& + k(-H_m F_{m+3} - H_{m+1} F_{m+2} + H_{m+2} F_{m+1} + H_{m+3} F_m + H_m F_{m+3} - H_{m+1} F_{m+2} + H_{m+2} F_{m+1} - H_{m+3} F_m)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = & 2H_m F_m + 2H_{m+1} F_{m+1} + 2H_{m+2} F_{m+2} + 2H_{m+3} F_{m+3} - 2iH_{m+2} F_{m+3} + 2iH_{m+3} F_{m+2} \\
& + 2jH_{m+1} F_{m+3} - 2jH_{m+3} F_{m+1} - 2kH_{m+1} F_{m+2} + 2kH_{m+2} F_{m+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin skaler kısmı toplam formülü kullanarak yazılırsa

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2 \sum_{i=0}^3 H_{m+i} F_{m+i} - 2iH_{m+2} F_{m+3} + 2iH_{m+3} F_{m+2} + 2jH_{m+1} F_{m+3} - 2jH_{m+3} F_{m+1} - 2kH_{m+1} F_{m+2} + 2kH_{m+2} F_{m+1}$$

olur. (3.1b) den

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2 \sum_{i=0}^3 H_{m+i} F_{m+i} - 2jkH_{m+2} F_{m+3} - 2kjH_{m+3} F_{m+2} - 2ikH_{m+1} F_{m+3} - 2kiH_{m+3} F_{m+1} - 2ijH_{m+1} F_{m+2} - 2jiH_{m+2} F_{m+1}$$

olur. Yukarıdaki ifadenin vektörel kısmı ayrı ayrı $-2iH_{m+1}$, $-2jH_{m+2}$, $-2kH_{m+3}$ parantezlerine alınırsa

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2 \sum_{i=0}^3 H_{m+i} F_{m+i} - 2iH_{m+1}(jF_{m+2} + kF_{m+3}) - 2jH_{m+2}(iF_{m+1} + kF_{m+3}) - 2kH_{m+3}(iF_{m+1} + jF_{m+2})$$

olur. Böylece

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2 \sum_{i=0}^3 H_{m+i} F_{m+i} - 2iH_{m+1}(jF_{m+2} + kF_{m+3}) - 2jH_{m+2}(iF_{m+1} + kF_{m+3}) - 2kH_{m+3}(iF_{m+1} + jF_{m+2})$$

elde edilir. Ayrıca (3.1b) ifadesi kullanılarak

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2H_m F_m + 2H_{m+1}(F_{m+1} + jF_{m+3} - kF_{m+2}) + 2H_{m+2}(F_{m+2} + kF_{m+1} - iF_{m+3}) + 2H_{m+3}(F_{m+3} - jF_{m+1} + iF_{m+2})$$

olur.

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2H_m F_m - 2(-H_{m+1} F_{m+1} - jH_{m+1} F_{m+3} + kH_{m+1} F_{m+2} - H_{m+2} F_{m+2} - kH_{m+2} F_{m+1} + iH_{m+2} F_{m+3} - H_{m+3} F_{m+3} + jH_{m+3} F_{m+1} - iH_{m+3} F_{m+2})$$

(3.1b) den

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2H_m F_m - 2(i^2 H_{m+1} F_{m+1} + ikH_{m+1} F_{m+3} + ijH_{m+1} F_{m+2} + j^2 H_{m+2} F_{m+2} + jiH_{m+2} F_{m+1} + jkH_{m+2} F_{m+3} + k^2 H_{m+3} F_{m+3} + kiH_{m+3} F_{m+1} + kjH_{m+3} F_{m+2})$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m &= 2H_m F_m - 2[iH_{m+1}(iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) + jH_{m+2}(iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) + kH_{m+3}(iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})] \\ &= 2H_m F_m - 2(iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3})(iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) \\ &= 2H_m F_m - 2(P_m - H_m)(Q_m - F_m) \\ &= 2H_m F_m - 2(P_m Q_m - P_m F_m - H_m Q_m + H_m F_m) \\ &= -2(P_m Q_m - P_m F_m - H_m Q_m) \\ &= 2(P_m F_m + H_m Q_m - P_m Q_m) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$P_m \overline{Q_m} + \overline{P_m} Q_m = 2(P_m F_m + Q_m H_m - P_m Q_m)$$

dır.

P_m ve $Q_m \neq 0$ iken yukarıdaki ifadenin her tarafının $P_m Q_m$ ile bölünmesiyle

$$\frac{P_m \overline{Q_m}}{P_m Q_m} + \frac{\overline{P_m} Q_m}{P_m Q_m} = 2 \left(\frac{F_m P_m}{P_m Q_m} + \frac{H_m Q_m}{P_m Q_m} - \frac{P_m Q_m}{P_m Q_m} \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\overline{Q_m}}{Q_m} + \frac{\overline{P_m}}{P_m} = 2 \left(\frac{F_m}{Q_m} + \frac{H_m}{P_m} - 1 \right)$$

olur. Gerekli düzenlemeler ile

$$\frac{\overline{Q_m - 2F_m}}{Q_m} = \frac{2H_m - \overline{P_m}}{P_m} - 2$$

olur. Buradan

$$\frac{\overline{Q_m - 2F_m}}{Q_m} = \frac{2H_m - \overline{P_m}}{P_m} - 1 - 1$$

$$\frac{\overline{Q_m - 2F_m}}{Q_m} + 1 = \frac{2H_m - \overline{P_m}}{P_m} - 1$$

dır. Veya

$$\frac{\overline{Q_m - 2F_m}}{Q_m} + 1 = - \left[\frac{\overline{P_m - 2H_m}}{P_m} + 1 \right] \quad (3.62)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Teorem 3.42: P_m ve Q_m kuaterniyonları arasında

$$P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} = 2(F_m P_m + H_m Q_m - 2H_m F_m) \quad (3.63)$$

şeklinde bir ilişki vardır (Iyer, 1969a).

İspat: P_m ve Q_m kuaterniyonlarının tanımıyla

$$\begin{aligned} P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} &= H_m F_m + i H_m F_{m+1} + j H_m F_{m+2} + k H_m F_{m+3} + i H_{m+1} F_m + i^2 H_{m+1} F_{m+1} + i j H_{m+1} F_{m+2} + i k H_{m+1} F_{m+3} \\ &\quad + j H_{m+2} F_m + j i H_{m+2} F_{m+1} + j^2 H_{m+2} F_{m+2} + j k H_{m+2} F_{m+3} + k H_{m+3} F_m + k i H_{m+3} F_{m+1} + k j H_{m+3} F_{m+2} + k^2 H_{m+3} F_{m+3} \\ &\quad - H_m F_m + i H_m F_{m+1} + j H_m F_{m+2} + k H_m F_{m+3} + i H_{m+1} F_m - i^2 H_{m+1} F_{m+1} - i j H_{m+1} F_{m+2} - i k H_{m+1} F_{m+3} \\ &\quad + j H_{m+2} F_m - j i H_{m+2} F_{m+1} - j^2 H_{m+2} F_{m+2} - j k H_{m+2} F_{m+3} + k H_{m+3} F_m - k i H_{m+3} F_{m+1} - k j H_{m+3} F_{m+2} - k^2 H_{m+3} F_{m+3} \end{aligned}$$

olur. Ve

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ ve } ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik \text{ ile}$$

$$\begin{aligned}
P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} &= H_m F_m + i H_m F_{m+1} + j H_m F_{m+2} + k H_m F_{m+3} + i H_{m+1} F_m - H_{m+1} F_{m+1} + k H_{m+1} F_{m+2} - j H_{m+1} F_{m+3} \\
&+ j H_{m+2} F_m - k H_{m+2} F_{m+1} - H_{m+2} F_{m+2} + i H_{m+2} F_{m+3} + k H_{m+3} F_m + j H_{m+3} F_{m+1} - i H_{m+3} F_{m+2} - H_{m+3} F_{m+3} \\
&- H_m F_m + i H_m F_{m+1} + j H_m F_{m+2} + k H_m F_{m+3} + i H_{m+1} F_m + H_{m+1} F_{m+1} - k H_{m+1} F_{m+2} + j H_{m+1} F_{m+3} \\
&+ j H_{m+2} F_m + k H_{m+2} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} - i H_{m+2} F_{m+3} + k H_{m+3} F_m - j H_{m+3} F_{m+1} + i H_{m+3} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı ayrı i, j, k parantezlerine alınarak,

$$\begin{aligned}
P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} &= (H_m F_m - H_{m+1} F_{m+1} - H_{m+2} F_{m+2} - H_{m+3} F_{m+3} - H_m F_m + H_{m+1} F_{m+1} + H_{m+2} F_{m+2} + H_{m+3} F_{m+3}) \\
&+ i(H_m F_{m+1} + H_{m+1} F_m + H_{m+2} F_{m+3} - H_{m+3} F_{m+2} + H_m F_{m+1} + H_{m+1} F_m - H_{m+2} F_{m+3} + H_{m+3} F_{m+2}) \\
&+ j(H_m F_{m+2} - H_{m+1} F_{m+3} + H_{m+2} F_m + H_{m+3} F_{m+1} + H_m F_{m+2} + H_{m+1} F_{m+3} + H_{m+2} F_m - H_{m+3} F_{m+1}) \\
&+ k(H_m F_{m+3} + H_{m+1} F_{m+2} - H_{m+2} F_{m+1} + H_{m+3} F_m + H_m F_{m+3} - H_{m+1} F_{m+2} + H_{m+2} F_{m+1} + H_{m+3} F_m)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} &= i(2H_m F_{m+1} + 2H_{m+1} F_m) + j(2H_m F_{m+2} + 2H_{m+2} F_m) + k(2H_m F_{m+3} + 2H_{m+3} F_m) \\
&= 2iH_m F_{m+1} + 2iH_{m+1} F_m + 2jH_m F_{m+2} + 2jH_{m+2} F_m + 2kH_m F_{m+3} + 2kH_{m+3} F_m
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade ayrı ayrı $2F_m$ ve $2H_m$ parantezine alınarak

$$P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} = +2F_m(iH_{m+1} + jH_{m+2} + kH_{m+3}) + 2H_m(iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})$$

haline gelir. P_m ve Q_m kuaterniyonlarının tanımıyla

$$P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} = +2F_m(P_m - H_m) + 2H_m(Q_m - F_m)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} &= 2F_m P_m - 2F_m H_m + 2H_m Q_m - 2H_m F_m \\
&= 2(F_m P_m + H_m Q_m - 2H_m F_m)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$P_m Q_m - \overline{P_m Q_m} = 2(F_m P_m + H_m Q_m - 2H_m F_m)$$

elde edilir.

Teorem 3.43: Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas sayıları arasında

$$Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = 2Q_{2m-1} - 3L_{2m+2} \quad (3.64)$$

şeklinde bir ilişki vardır (Iyer, 1969a).

İspat: $Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = Q_{m-1} Q_{m-1} + Q_m Q_m$

$$\begin{aligned}
&= (F_{m-1} + iF_m + jF_{m+1} + kF_{m+2})(F_{m-1} + iF_m + jF_{m+1} + kF_{m+2}) + (F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3})(F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3}) \\
&= (F_{m-1}^2 + iF_{m-1}F_m + jF_{m-1}F_{m+1} + kF_{m-1}F_{m+2} + iF_mF_{m-1} + i^2F_mF_m + ijF_mF_{m+1} + ikF_mF_{m+2} \\
&\quad + jF_{m+1}F_{m-1} + jiF_{m+1}F_m + j^2F_{m+1}F_{m+1} + jkF_{m+1}F_{m+2} + kF_{m+2}F_{m-1} + kiF_{m+2}F_m + kjF_{m+2}F_{m+1} + k^2F_{m+2}F_{m+2}) \\
&\quad + (F_m^2 + iF_mF_{m+1} + jF_mF_{m+2} + kF_mF_{m+3} + iF_{m+1}F_m + i^2F_{m+1}F_{m+1} + ijF_{m+1}F_{m+2} + ikF_{m+1}F_{m+3} \\
&\quad + jF_{m+2}F_m + jiF_{m+2}F_{m+1} + j^2F_{m+2}F_{m+2} + jkF_{m+2}F_{m+3} + kF_{m+3}F_m + kiF_{m+3}F_{m+1} + kjF_{m+3}F_{m+2} + k^2F_{m+3}F_{m+3})
\end{aligned}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \text{ ve } ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik \text{ ile}$$

$$\begin{aligned}
Q_{m-1}^2 + Q_m^2 &= (F_{m-1}^2 + iF_{m-1}F_m + jF_{m-1}F_{m+1} + kF_{m-1}F_{m+2} + iF_mF_{m-1} - F_mF_m + kF_mF_{m+1} - jF_mF_{m+2} \\
&\quad + jF_{m+1}F_{m-1} - kF_{m+1}F_m - F_{m+1}F_{m+1} + iF_{m+1}F_{m+2} + kF_{m+2}F_{m-1} + jF_{m+3}F_m - iF_{m+2}F_{m+1} - F_{m+2}F_{m+2}) \\
&\quad + (F_m^2 + iF_mF_{m+1} + jF_mF_{m+2} + kF_mF_{m+3} + iF_{m+1}F_m - F_{m+1}F_{m+1} + kF_{m+1}F_{m+2} - jF_{m+1}F_{m+3} \\
&\quad + jF_{m+2}F_m - kF_{m+2}F_{m+1} - F_{m+2}F_{m+2} + iF_{m+2}F_{m+3} + kF_{m+3}F_m + jF_{m+3}F_{m+1} - iF_{m+3}F_{m+2} - F_{m+3}F_{m+3})
\end{aligned}$$

olur. Ve elde edilen bu ifade i, j, k parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}
Q_{m-1}^2 + Q_m^2 &= F_{m-1}^2 - F_m^2 - F_{m+1}^2 - F_{m+2}^2 + F_m^2 - F_{m+1}^2 - F_{m+2}^2 - F_{m+3}^2 \\
&\quad + i(F_{m-1}F_m + F_mF_{m-1} + F_{m+1}F_{m+2} - F_{m+2}F_{m+1} + F_mF_{m+1} + F_{m+1}F_m + F_{m+2}F_{m+3} - F_{m+3}F_{m+2}) \\
&\quad + j(F_{m-1}F_{m+1} - F_mF_{m+2} + F_{m+1}F_{m-1} + F_{m+2}F_m + F_mF_{m+2} - F_{m+1}F_{m+3} + F_{m+2}F_m + F_{m+3}F_{m+1}) \\
&\quad + k(F_{m-1}F_{m+2} + F_mF_{m+1} - F_{m+1}F_m + F_{m+2}F_{m-1} + F_mF_{m+3} + F_{m+1}F_{m+2} - F_{m+2}F_{m+1} + F_{m+3}F_m)
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}
Q_{m-1}^2 + Q_m^2 &= F_{m-1}^2 - 2F_{m+1}^2 - 2F_{m+2}^2 - F_{m+3}^2 + i(2F_{m-1}F_m + 2F_mF_{m+1}) + j(2F_{m-1}F_{m+1} + 2F_mF_{m+2}) + k(2F_{m-1}F_{m+2} + 2F_mF_{m+3}) \\
&= F_{m-1}^2 - F_{m+1}^2 - (F_{m+1}^2 + F_{m+2}^2) - (F_{m+2}^2 + F_{m+3}^2) + 2i(F_{m-1}F_m + F_mF_{m+1}) + 2j(F_{m-1}F_{m+1} + F_mF_{m+2}) + 2k(F_{m-1}F_{m+2} + F_mF_{m+3})
\end{aligned}$$

$$F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m}$$

özdeşliğinden faydalanılarak

$$Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = F_{m-1}^2 - F_{m+1}^2 - (F_{m+1}^2 + F_{m+2}^2) - (F_{m+2}^2 + F_{m+3}^2) + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2}$$

yazılır.

$$Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = -(F_{m+1}^2 - F_{m-1}^2) + (F_{m+1}^2 + F_{m+2}^2) + (F_{m+2}^2 + F_{m+3}^2) + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2}$$

$$F_{n+2}F_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_n^2, \quad F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m} \quad \text{ve} \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

özdeşlikleri ile

$$Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = -[F_{2m} + F_{2m+3} + F_{2m+5}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2}$$

olur.

$$\begin{aligned}
Q_{m-1}^2 + Q_m^2 &= -(F_{2m} + F_{2m+1}) + (F_{2m+2} + F_{2m+3}) + (-F_{2m+3} + F_{2m+5}) + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[F_{2m+2} + F_{2m+4} + F_{2m+4}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[F_{2m+2} + 2F_{2m+4}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[F_{2m+2} + 2(F_{2m+2} + F_{2m+3})] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3F_{2m+2} + 2F_{2m+3}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3F_{2m+2} + 2(F_{2m+2} + F_{2m+1})] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[5F_{2m+2} + 2F_{2m+1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[5(F_{2m} + F_{2m+1}) + 2F_{2m+1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[5F_{2m} + 7F_{2m+1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[5F_{2m} + 7(F_{2m} + F_{2m-1})] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[12F_{2m} + 7F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[12F_{2m} + (9-2)F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[12F_{2m} + 9F_{2m-1} - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3(4F_{2m} + 3F_{2m-1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3(F_{2m} + 3F_{2m} + 3F_{2m-1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[3(F_{2m} + 3F_{2m+1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3(F_{2m} + (1+2)F_{2m+1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3((F_{2m} + F_{2m+1}) + 2F_{2m+1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3(F_{2m+2} + F_{2m+1} + F_{2m+1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -[3(F_{2m+3} + F_{2m+1}) - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2}
\end{aligned}$$

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

özdeşliği kullanılarak

$$Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = -[3L_{2m+2} - 2F_{2m-1}] + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
Q_{m-1}^2 + Q_m^2 &= -3L_{2m+2} + 2F_{2m-1} + 2iF_{2m} + 2jF_{2m+1} + 2kF_{2m+2} \\
&= -3L_{2m+2} + 2(F_{2m-1} + iF_{2m} + jF_{2m+1} + kF_{2m+2})
\end{aligned}$$

Böylece Fibonacci kuaterniyonunun tanımından

$$Q_{m-1}^2 + Q_m^2 = 2Q_{2m-1} - 3L_{2m+2}$$

elde edilir.

Teorem 3.44: Fibonacci ve Lucas sayılarının arasındaki ilişkilerden faydalanılarak Fibonacci kuaterniyonları Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Iyer, 1969b).

$$\text{i) } Q_m - iQ_{m+1} - jQ_{m+2} - kQ_{m+3} = L_{m+3} \quad (3.65)$$

$$\text{ii) } Q_{m+1}^2 - Q_{m-1}^2 = Q_m T_m = (2Q_{2m} - 3L_{2m+3}) + 2(-1)^{m+1}(Q_0 - 3k) \quad (3.66)$$

$$\text{iii) } Q_{m-2}Q_{m-1} + Q_mQ_{m+1} = 6F_mQ_{m-1} - 9F_{2m+2} + 2(-1)^{m+1}(Q_{(-1)} - 3k) \quad (3.67)$$

$$\text{iv) } Q_{m+r}L_{m+r} - Q_{m-r}L_{m-r} = F_{2r}T_{2m} \quad (3.68)$$

Teorem 3.45: Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiler kullanılarak Lucas kuaterniyonları da Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Iyer, 1969b).

$$\text{i) } T_m - iT_{m+1} - jT_{m+2} - kT_{m+3} = 15F_{m+3} \quad (3.69)$$

$$\text{ii) } T_{m+r}F_{m+r} - T_{m-r}F_{m-r} = F_{2r}T_{2m} \quad (3.70)$$

$$\text{iii) } T_{m+r}F_m - T_mF_{m+r} = (-1)^{m+1}F_rT_0 \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \text{İspat: i) } T_m - iT_{m+1} - jT_{m+2} - kT_{m+3} &= (L_m + iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3}) - i(L_{m+1} + iL_{m+2} + jL_{m+3} + kL_{m+4}) \\ &\quad - j(L_{m+2} + iL_{m+3} + jL_{m+4} + kL_{m+5}) - k(L_{m+3} + iL_{m+4} + jL_{m+5} + kL_{m+6}) \\ &= L_m + iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3} - iL_{m+1} - i^2L_{m+2} - ijL_{m+3} - ikL_{m+4} \\ &\quad - jL_{m+2} - jiL_{m+3} - j^2L_{m+4} - jkL_{m+5} - kL_{m+3} - kiL_{m+4} - kjL_{m+5} - k^2L_{m+6} \end{aligned}$$

(3.1b) ile

$$\begin{aligned} &= L_m + iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3} - iL_{m+1} + L_{m+2} - kL_{m+3} + jL_{m+4} \\ &\quad - jL_{m+2} + kL_{m+3} + L_{m+4} - iL_{m+5} - kL_{m+3} - jL_{m+4} + iL_{m+5} + L_{m+6} \\ &= L_m + L_{m+2} + L_{m+4} + L_{m+6} \end{aligned}$$

olur.

$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$ özdeşliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned} T_m - iT_{m+1} - jT_{m+2} - kT_{m+3} &= 5F_{m+1} + 5F_{m+5} \\ &= 5(F_{m+1} + F_{m+4} + F_{m+3}) \\ &= 5(F_{m+1} + F_{m+2} + F_{m+3} + F_{m+3}) \\ &= 5(F_{m+3} + F_{m+3} + F_{m+3}) \\ &= 15F_{m+3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.46: Fibonacci kuaterniyonları ve Lucas kuaterniyonları arasında aşağıdaki ilişkiler geçerlidir (Iyer,1969b).

$$\textbf{i)} \quad Q_m L_m + T_m F_m = 2Q_{2m} \quad (3.72)$$

$$\textbf{ii)} \quad Q_m L_m - T_m F_m = 2(-1)^m Q_0 \quad (3.73)$$

$$\textbf{iii)} \quad Q_m + T_m = 2Q_{m+1} \quad (3.74)$$

$$\textbf{iv)} \quad T_m - Q_m = 2Q_{m-1} \quad (3.75)$$

İspat: **iii)** $Q_m + T_m = F_m + iF_{m+1} + jF_{m+2} + kF_{m+3} + L_m + iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3}$

$$= (F_m + L_m) + i(F_{m+1} + L_{m+1}) + j(F_{m+2} + L_{m+2}) + k(F_{m+3} + L_{m+3})$$

$$F_n + L_n = 2F_{n+1}$$

özdeşliği ile

$$\begin{aligned} Q_m + T_m &= 2F_{m+1} + 2iF_{m+2} + 2jF_{m+3} + 2kF_{m+4} \\ &= 2Q_{m+1} \end{aligned}$$

olur.

iv) $T_m - Q_m = L_m + iL_{m+1} + jL_{m+2} + kL_{m+3} - F_m - iF_{m+1} - jF_{m+2} - kF_{m+3}$

$$= (L_m - F_m) + i(L_{m+1} - F_{m+1}) + j(L_{m+2} - F_{m+2}) + k(L_{m+3} - F_{m+3})$$

$$F_n + L_n = 2F_{n+1}$$

özdeşliği ile

$$T_m - Q_m = (2F_{m+1} - F_m - F_m) + i(2F_{m+2} - F_{m+1} - F_{m+1}) + j(2F_{m+3} - F_{m+2} - F_{m+2}) + k(2F_{m+4} - F_{m+3} - F_{m+3})$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
T_m - Q_m &= 2(F_{m+1} - F_m) + 2i(F_{m+2} - F_{m+1}) + 2j(L_{m+3} - F_{m+2}) + 2k(F_{m+4} - F_{m+3}) \\
&= 2F_{m-1} + 2iF_m + 2jF_{m+1} + 2kF_{m+2} \\
&= 2(F_{m-1} + iF_m + jF_{m+1} + kF_{m+2}) \\
&= 2Q_{m-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunmuştur.



BÖLÜM IV

SONUÇLAR

Bu tez çalışması “On Fibonacci Quaternions”, “A Note On Fibonacci Quaternions”, “Some Results On Fibonacci Quaternions”, “On Pell Quaternions and Pell – Lucas Quaternions” adlı çalışmalarda bulunan kuaterniyonlar incelenerek hazırlanmış ve derleme bir çalışma olarak sunulmuştur. Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri kullanılarak bazı toplam formüllerinin türetilbildiği görülmüş ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili bazı yazarlar tarafından elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Fibonacci kuaterniyonları ve Fibonacci, Lucas sayıları arasındaki ilişkiler, Lucas kuaterniyonları ve Fibonacci, Lucas sayıları arasındaki ilişkiler aktarılmış, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki var olan bazı ilişkiler verilmiştir.

Pell ve Pell – Lucas kuaterniyonları incelenmiş ayrıca bu dörtlü sayılar sınıfında rekürans bağıntıları, toplam formülleri, Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları dahil olmak üzere çeşitli sonuçlar üzerinde durulmuştur.

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde kuaterniyonlar ile ilgili yapılan çalışmalara ve kuaterniyonların kullanım alanlarına değinilmiş ve giriş bölümü olarak aktarılmıştır. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan Fibonacci, genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell – Lucas sayı dizilerinin tanımları ve bazı özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde yukarıda adı geçen çalışmalarda kullanılan Fibonacci, Lucas, Pell gibi bazı sayı dizilerinin kuaterniyonları ve özellikleri verilmiştir. Bilinen Pell ve Pell – Lucas sayılarının kullanılmasıyla oluşturulan kuaterniyonların ve Fibonacci, Lucas kuaterniyonlarının toplam formülleri, üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri incelenmiştir. Genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları ile Fibonacci kuaterniyonları arasındaki ilişkilerden bahsedilmiş, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkinin Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişki cinsinden elde edildiği görülmüştür. Son bölüm olan dördüncü bölümde de sonuçlar verilmiştir.

KAYNAKLAR

Akyigit, M., Kösal, H. H. and Tosun, M., “Split Fibonacci quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 23, 535–545, 2013.

Bicknell, M., “A premier on the Pell sequence and related sequences”, *The Fibonacci Quarterly*, 13 (4), 345-349, 1975.

Bihan, L. N., Ell, T. A. and Sangwine S. J., “Fundamental Representations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 21, 607-636, 2011.

Bolat, C., “k-Fibonacci, k-Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, s. 1-62, 2008.

Cerin, Z. and Gianella, G. M., “On sums of Pell numbers”, *Acc. Sc. Torino-Atti Sc. Fis.*, 141, 23–31, 2007.

Cerin, Z. and Gianella, G. M., “On sums of squares of Pell-Lucas numbers”, *Integers Electron. J. Comb. Number Theory* 6, 15, 1–16, 2006.

Çimen, C. B. and İpek, A., “On Pell quaternions and Pell-Lucas quaternions”, *Adv. in Appl. Clifford Algebras*, 26 (1), 39-51, 2016.

Filipponi, P. and Horadam, A. F., “Real Pell and Pell-Lucas numbers with real subscripts”, *Fibonacci Quart.*, 33, 5, 1995.

Flaut, C. and Savin, D., “Quaternion Algebras and Generalized Fibonacci–Lucas Quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25 (4), 2015.

Flaut, C. and Shpakivskyi, V., “On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci–Narayana quaternions”, *Appl. Clifford Adv. Algebr.*, 23 (3), 673– 688, 2013.

Güren, I. A. and Nurkan, S. K., “Dual Fibonacci quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 25, 403–414, 2015a.

Güren, I. A. and Nurkan, S. K., “A new approach to Fibonacci, Lucas numbers and dual vectors”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 25, 577–590, 2015b.

Gürlebeck, K. and Sprössig, W., “Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers”, *Wiley*, New York, 1997.

Halici, S., “On complex Fibonacci quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 23, 105-112, 2013.

Halici, S., “On Fibonacci quaternions”, *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 22 (2), 321-327, 2012.

Hoggatt, V. E. Jr., “Fibonacci and Lucas numbers”, *The Fibonacci Association*, University of Santa Clara, Santa Clara, 1969.

Horadam, A. F. and Mohan J. M., “Pell and Pell – Lucas Polynomials”, *Fibonacci Quarterly*, 23 (1), 7-20, 1985.

Horadam, A. F., “Quaternion recurrence relations”, *Ulam Quart.*, 2, 23-33, 1993.

Horadam, A. F., “A Generalized Fibonacci Sequence”, *Amer. Math. Monthly*, 68, 455-459, 1961.

Horadam, A. F., “Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions”, *Amer. Math. Monthly*, 70, 289-291, 1963.

Horadam, A. F., “Pell identities”, *Fibonacci Quart.*, 9, 245-252, 1971.

Iakin, A. L., “Generalized quaternions of higher order”, *The Fib. Quarterly*, 15, 343-346, 1977.

Iyer, M. R., “A note on Fibonacci quaternions”, *The Fibonacci Quart.*, 3, 225-229, 1969a.

Iyer, M. R., “Some results on Fibonacci quaternions”, *Indian Statistical Institute*, Calcutta, India, Apr., 1969b.

Iyer, M. R., “Identities involving generalized Fibonacci numbers”, *the Fibonacci Quarterly*, Vol. 7, No. 1, 66-72, Feb., 1969c.

Korkmaz, H., “Fibonacci sayıları ve üçgensel graflar”, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Balıkesir, s. 1-46, 2016.

Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, *Wiley Interseccion*, New York, 2001.

Lucas, E., *Theorie des Numbers*, *Gauthier-Villar*, Paris, 1961.

Swamy, M. N. S., “On generalized Fibonacci quaternions”, *Fibonacci Quat.*, 11 (5), 547-549, 1973.

Vajda, S., “Fibonacci and Lucas numbers and the Golden section”, *Ellis Horwood Limited Publ.*, England, 1989.

ÖZ GEÇMİŞ

Fatma Nur İNANIR, 24.01.1989 tarihinde Adana’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2007 yılında girdiği Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’nden Haziran 2011’de mezun oldu. 2012 yılında Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi’nde formasyon eğitimini aldı. 2016 yılı Şubat ayında Niğde iline bağlı Dünderlı Anadolu Lisesi’ ne matematik öğretmeni olarak atandı. 2016 Eylül ayında Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Dünderlı Anadolu Lisesi’nde görev yapmaktadır.

