



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE HESAPLANMASI

RUKİYE AŞLAMA

Mayıs 2011

T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN VE
İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE HESAPLANMASI

RUKİYE AŞLAMA

Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

Mayıs 2011

Rukiye Aşlama tarafından Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık Atay danışmanlığında hazırlanan “**Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varyasyonel İterasyon Metodu İle Hesaplanması**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Tuncay Candan , Niğde Üniversitesi, Matematik Bölümü

(Unvan, Adı Soyadı) (Kurumu)



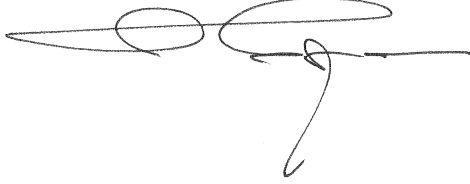
Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık Atay, Niğde Üniversitesi, Matematik Bölümü

(Unvan, Adı Soyadı) (Kurumu)



Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin Eryılmaz, Nevşehir Üniversitesi, Matematik Bölümü

(Unvan, Adı Soyadı) (Kurumu)



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 27/04/2011 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/....../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Nurettin ACIR
MÜDÜR

ÖZET

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARYASYONEL İTERASYON METODU İLE HESAPLANMASI

AŞLAMA, Rukiye
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY

Mayıs 2011, 72 sayfa

Lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemler modern matematiğin önemli bir dalıdır ve mühendislik, mekanik, fizik, kimya, astronomi, ekonomi, potansiyel teori gibi pek çok uygulama alanında ortaya çıkan problemlerin çözümüne ilgilendir. Lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlerin nümerik ve yarı-analitik çözümünde kullanılan Adomian Decomposition Metodu (ADM), Diferansiyel Transform Metodu (DTM), Homotopy Perturbation Metodu (HPM), Galerkin metodu, Taylor- Chebyshev collocation metotları gibi pek çok metod vardır.

Biz bu çalışmada son dönemde önerilmiş olan ve pek çok çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklem sistemlerine başarıyla uygulanmış olan analitik yaklaşım tekniği olan Varyasyonel İterasyon metodunu (VIM), lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemleri hesaplanmada kullandık.

Anahtar sözcükler: Lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemler, Varyasyonel İterasyon Metod

SUMMARY

COMPUTATION OF SOLUTIONS OF LINEAR AND NON-LINEAR INTEGRAL EQUATIONS AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS USING VARIATIONAL ITERATION METHOD

ASLAMA, Rukiye

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Mehmet Tarık ATAY

May 2011, 72 pages

Linear and non-linear integral and integro-differential equations are an important branch of modern mathematics and deal with the solution of the problems arising frequently in many applied areas which include engineering, mechanics, physics, chemistry, astronmy, electrostatics, potential teori, etc. There ara several numerical or semi-analytical methods available for solving linear and non-linear integral and integro-differential equations. For example, Adomian Decmposition Mehtod (ADM), Differential Transform Method (DTM), Homotopy Perturbation Method (HPM), Galerkin Method , Taylor- Chebhsyev collocation method.

In this work, recently proposed analytical approximation solution technique Variational Iteration Method (VIM), which has been succesfully applied to various kinds of linear and nonlinear differential equations, boundary-value and initial-value problems and differential equations systems, is used for solving of linear and non-linear integral and integro-differential equations.

Key Words: Linear and non-linear integral and integro-differential equations, Variational Iteration Method

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında emeğini esirgemeyen, enerji ve bilgisini cömertçe paylaşan tez danışmanım, değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY' a teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda en umutsuz anlarda beni yüreklendiren ve bana maddi-manevi her anlamda destek olan sevgili eşim Mustafa AŞLAMA' ya teşekkürler...

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
BÖLÜM I.GİRİŞ	1
1.1 İntegral Denklemler	1
1.1.1 Tanım	1
1.2 İntegral denklemlerin çeşitleri	3
1.2.1 Volterra integral denklemleri	3
1.2.2 Fredholm integral denklemleri	4
1.3 İntegro-Diferansiyel Denklemler	5
1.4 İntegral Denklem ve İntegro-Diferansiyel Denklemler Konusunda Yapılmış Nümerik ve Yarı Nümerik Çalışmalar	7
1.5 Çalışmanın Amacı	11
BÖLÜM II. TEMEL ANALİTİK METOTLAR	12
2.1 İntegral Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Temel Analitik Metotlar	12
2.1.1 Seri çözüm metodu	12
2.1.2 Ardışık yaklaşımlar metodu	14
2.1.3 Ardışık yerine koyma metodu	16
2.1.4 Direk hesaplama metodu	17
2.1.5 Volterra integral denklemin başlangıç değer diferansiyel denkleme dönüştürerek çözülmesi	19
2.2 İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Temel Analitik Metotlar	19
2.2.1 Volterra integral denkleme dönüşürme metodu	21
2.2.2 Fredholm integral denkleme dönüşürme metodu	23
2.2.2 Direk hesaplama metodu	24
2.2.3 Seri çözüm metodu	26
2.2.4 Volterra integro-diferansiyel denkleme başlangıç değer diferansiyel denkleme dönüştürerek çözme	28
BÖLÜM III. VARYASYONEL İTERASYON METODU	30
3.1 VIM Literatürü	30

3.2 Varyasyonel iterasyon teorisi	30
3.2.1 Varyasyon hesabında birinci problem	30
3.2.2 Fonksiyonel	32
3.2.3 Fonksiyonelin birinci bileşeni	32
3.2.4 Varyasyonel iterasyon metodu	33
BÖLÜM IV. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK METOTLAR VE VARYASYONEL İTERASYON METODUYLA ÇÖZÜMLERİ	37
4.1 İntegral Denklemler	37
4.1.1 Analitik metotların formülasyonu	37
4.1.1.1 Ardışık yaklaşım metodu	37
4.1.2 Analitik metotlarla çözümler	37
4.1.3 VIM formülasyonu	38
4.1.4 VIM çözümleri	39
4.2 İntegro-Diferansiyel Denklemler	42
4.2.1 Analitik metotların formülasyonu	42
4.2.1.1 Volterra integral denkleme dönüştürme metodu	42
4.2.1.2 Fredholm integral denkleme dönüştürme metodu	42
4.2.1.3 Seri yoluyla çözüm metodu	42
4.2.1.4 Ardışık yaklaşım metodu	42
4.2.1.5 Direk çözüm metodu	44
4.2.2 Analitik metotlarla çözümler	44
4.2.3 VIM formülasyonu	52
4.2.4 VIM çözümleri	53
BÖLÜM V. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	65
KAYNAKLAR	66

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	(4.15) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Çizelge 4.2	(4.101) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	55
Çizelge 4.3	(4.112) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	57
Çizelge 4.4	(4.125) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	58
Çizelge 4.5	(4.133) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	60
Çizelge 4.6	(4.145) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	63
Çizelge 4.7	(4.146) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması.....	64

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu çalışmanın ilk bölümünde lineer ve lineer olmayan integral denklem ve integro-diferansiyel denklemlere yer verilmiş, bunlarla ilgili temel tanım, teoremler ve örneklerle yer verilmiştir. Bölümün sonunda lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlerle ilgili şu ana kadar yapılmış önceki nümerik ve yarı nümerik çalışmalara ve çalışmanın amacına yer verilmiştir.

Bölüm II de lineer integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde literatürde kullanılan temel analitik metotlar ve bu analitik metotlarla ilgili örnekler verilmiştir.

Bölüm III de Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) tanıtılmıştır.

Bölüm IV de lineer ve lineer olmayan integral denklem ve integro-diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri ve VIM çözümleri verilmiştir.

Bölüm V da tartışma ve önerilere yer verilmiştir.

1.1 İntegral Denklemler

1.1.1 Tanım

Belirlenmek istenen bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun integral işaretinin altında olduğu denklemlere integral denklemleri denir. Bu tip denklemlerin genel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \quad (1.1)$$

Burada $u(x)$ bilinmeyen, $K(x,t)$ ve $f(x)$ ise bilinen fonksiyonlardır. x ve t reel değişkenler olup $((\alpha(x),\beta(x)))$ aralığında değerler almaktadır. λ ise sayısal bir parametredir.

İntegral denklemleri fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Bu alanlardaki uygulamalar sonlu $[a, b]$ aralığında başlangıç-değer problemleri olarak karşımıza çıkar.

Örnek1.1 $u'(x) = 2xu(x)$, $x \geq 0$ ve $u(0) = 1$ (1.2)

başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\frac{du(x)}{dx} = 2xu(x), \tag{1.3}$$

değişkenlere ayırma metodu (1.3) te verilen denkleme uygulanırsa;

$$\frac{du(x)}{u(x)} = 2x dx \tag{1.4}$$

$$\ln|u(x)| + c_1 = 2 \int x dx \Rightarrow \ln|u(x)| + c_1 = 2 \frac{1}{2} x^2 + c_0$$

$$\ln|u(x)| = x^2 + c_2$$

$$u(x) = e^{x^2+c_2} \Rightarrow u(x) = e^{x^2} c_2$$

$$u(0) = 1 \text{ için ; } c_2 = 0$$

$$u(x) = e^{x^2}. \tag{1.5}$$

Verilen (1.2) diferansiyel denklemi 0'dan x' e kadar, x' e göre integre edilir ve başlangıç değeri uygulanırsa,

$$\int_0^x u'(t) dt = \int_0^x 2tu(t) dt \Leftrightarrow u(x) = 1 + \int_0^x 2tu(t) dt, \tag{1.6}$$

$$u(x) - u(0) = \int_0^x 2tu(t) dt \Leftrightarrow u(x) = 1 + \int_0^x 2tu(t) dt \tag{1.7}$$

integral denklemi elde edilir. Başlangıçta verilen (1.2) denklemi ve bulduğumuz (1.7) denklemi integral denklemlerdir. Bulmak istediğimiz $u(x)$ fonksiyonu lineer olarak integral işaretinin altında çıkıyorsa bu sınıflamayı yapabiliriz.

1.2 İntegral Denklemlerin Çeşitleri

1.2.1 Volterra integral denklemleri

λ sayısal bir parametre, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (1.8)$$

denklemini Volterra denkleminin standard formudur. $K(x,t)$ fonksiyonuna Volterra denkleminin çekirdeği denir. İntegralin alt limiti olan “ a ” değerini “0” olarak seçmek genelliği bozmaz ve bundan sonra $a = 0$ olarak alınacaktır.

- $\phi(x) = 0$ ise $f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$ (1.9)

denklemini I.Çeşit Volterra İntegral denklemini,

- $\phi(x) = 1$ ise $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$ (1.10)

denklemini II. Çeşit Volterra İntegral denklemini olarak isimlendirilir.

Teorem 1.2.1

$L_2(a,b)$ uzayı, $\int_a^b f^2(x)dx$ integralinin mevcut olması halinde $[a,b]$ üzerinde $f(x)$ in

kuadratik olarak integre edilebildiği uzay olmak üzere $\Omega_0 \{0 \leq x, t \leq a\}$ bölgesi olsun.

$K(x,t)$ çekirdeği $L_2(\Omega_0)$ uzayına, $f(x)$ fonksiyonu $L_2(0,a)$ uzayına ait olan ve (1.10)

ile verilen ikinci çeşit Volterra integral denkleminin $L_2(0,a)$ uzayında bir ve yalnız bir

tek çözümü vardır. (1.10) Volterra İntegral denkleminde çözümün varlığı ve tekliği

$f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları üzerine yüklenen sürekli olma koşulundan daha genel

varsayımlar altında gerçekleşir. Daha detaylı bilgi için Krasnov, Kiselev ve Makeronko

(Çeviri) [1], incelenebilir.

Lineer olma özelliğine göre tanım verelim.

1.2.1.1 Lineer volterra integral denklemleri

İntegral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise lineer Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. Lineer Volterra integral denkleme örnek aşağıda verilmiştir.

$$\bullet \quad u(x) = x + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 u(t) dt . \quad (1.11)$$

1.2.1.2 Lineer olmayan volterra integral denklemleri

İntegral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun derecesi “1” den farklı ise lineer olmayan Volterra integral denklemi, olarak adlandırılır. Lineer olmayan Volterra integral denkleme örnek aşağıda verilmiştir.

$$\bullet \quad u(x) = e^x + \int_0^x t u^2(t) dt . \quad (1.12)$$

1.2.2 Fredholm integral denklemleri

λ sayısal bir parametre, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t) dt , \quad a \leq x, t \leq b \quad (1.13)$$

denklemi Fredholm integral denkleminin standard formudur. Burada x ve t reel değişkenler olup (a, b) aralığında değerler almaktadır.

$K(x,t)$ fonksiyonuna Fredholm integral denklemin **çekirdeği** denir. $K(x,t)$ çekirdeği xt düzleminin bir $\Omega = \{(x,y) | a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ karesinin üzerinde tanımlanmıştır ve süreklidir veya süreksizlik noktalarında, $\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt$ iki katlı integralinin sonlu bir değeri vardır.

- $\phi(x) = 0$ ise $f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$ (1.14)

denklemleri I.Çeşit Fredholm İntegral denklemleri,

- $\phi(x) = 1$ ise $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$ (1.15)

denklemleri II. Çeşit Fredholm İntegral denklemleri,

- $f(x) = 0$ ise $u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$ (1.16)

denklemleri homojen Fredholm İntegral denklemleri olarak adlandırılır.

Lineer olma özelliğine göre tanım verelim.

1.2.2.1 Lineer fredholm integral denklemleri

İntegral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise lineer fredholm integral denklemleri olarak adlandırılır. Lineer Fredholm integral denklemleri örnek aşağıda verilmiştir.

- $u(x) = -\frac{1}{4} + \sec x \tan x - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} xu(t)dt$. (1.17)

1.2.2.2 Lineer olmayan fredholm integral denklemleri

İntegral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun derecesi “1” den farklı ise lineer olmayan fredholm integral denklemleri olarak adlandırılır. Lineer olmayan Fredholm integral denklemleri örnek aşağıda verilmiştir.

- $u(x) = -\frac{1}{4} + \sec x \tan x - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-t)u^3(t)dt$. (1.18)

1.3 İntegro-Diferansiyel Denklemler

1.3.1 Tanım

Volterra, 1900 yıllarının başında, nüfus büyümesini araştırırken yeni bir tür denklem ortaya çıkarmıştır. Bilinmeyen $u(x)$ denklemi eşitliğin bir tarafında sıradan türevli olarak, diğer tarafında integral işaretinin içinde bulunur. Fizik, mühendislik ve biyolojide pek çok problem ya da olay İntegro-diferansiyel denklemlere yol açar. Bilim adamları ve araştırmacılar ısı transferi, genel difüzyon süreci, nötron difüzyonu ve üreme oranlarının artış ve azalışıyla biyolojik türlerin bir arada varlığı gibi bir çok bilim uygulamaları üzerinde integro-diferansiyel denklemleri araştırdılar.

İntegro-diferansiyel denklemlerde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu veya türevleri integral işaretinin altında, diğer $u(x)$ fonksiyonu türevi ise integral işareti dışında bulunur.

İntegro-diferansiyel denklemleri Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri olarak ikiye ayrılır. Bu ayırım integrasyon limitlerine göre yapılır. Aşağıda bunlara örnekler vardır.

$$\bullet \quad u''(x) = -x + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad (1.19)$$

(Volterra integro-diferansiyel denklemi)

$$\bullet \quad u'(x) = -\sin x - 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad (1.20)$$

(Volterra integro-diferansiyel denklemi)

$$\bullet \quad u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad (1.21)$$

(Fredholm integro-diferansiyel denklemi)

$$\bullet \quad u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu'(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1. \quad (1.22)$$

(Fredholm integro-diferansiyel denklemi)

Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri integral denklemlerde olduğu gibi lineer olma özelliğine göre de ikiye ayrılır. Bu ayırım ise integral işareti altındaki bilinmeyen $u^n(t)$ fonksiyonunun derecesine göre yapılır. İntegral işareti altındaki

bilinmeyen $u^n(t)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi ve lineer Volterra integro-diferansiyel denklemi, $u^n(t)$ fonksiyonunun derecesi $n \geq 2$ ise lineer olmayan Fredholm integro-diferansiyel denklemi ve lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi elde edilir.

(1.19), (1.20), (1.21) ve (1.22) ile verilen denklemler lineer olup, aşağıda lineer olmayan Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemlere örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\bullet \quad u''(x) = -x - \frac{1}{2} + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad (1.23)$$

$$\bullet \quad u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \int_0^1 xtu^3(t)dt, \quad u(0) = 1. \quad (1.24)$$

1.4 İntegral Denklem ve İntegro-Diferansiyel Denklemler Konusunda Yapılmış Nümerik ve Yarı Nümerik Çalışmalar

Lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemler pek çok alanda ortaya çıkmaktadır. Bu alanlara örnek olarak mühendislik, mekanik, fizik, kimya, astronomi, biyoloji, ekonomi, potansiyel teori, elektrostatik [2-7], akışkanlar mekaniği, polimer madde araştırmaları, nüfus dinamikleri, termoelastisite gibi alanlardır. Fiziksel bir sistem diferansiyel anlamda modellendiğinde, oluşan sistem en sonunda bir diferansiyel denklem, integral denklem veya integro-diferansiyel denkleme dönüşmektedir.

İntegral ve integro-diferansiyel denklemlerin hesaplanmasında analitik, yarı analitik veya nümerik olarak çözüm bulan metotlar vardır.

Birinci tipten Volterra integral denklemlerin çözümünde block-pulse fonksiyonları kullanılarak direk çözüm metoduyla çözümlmesine örnek çalışma Babolian ve Mansouri' nin [8] çalışmasıdır.

2.tipten Fredholm integral denklemlerini block-pulse fonksiyonlarından türetilen triangular ortogonal fonksiyon kullanarak çözen Babolian, Marzban ve Salmani' nin [9] çalışmasıdır.

Yaş a bağlı populasyon modelleri teorisinde ve bazı sınırlı ve sınırsız aralıklarda bir çeş it yarı-lineer diferansiyel denklemlerde ortaya çıkan soyut (abstract) integral denklemlerin ç özüm oranlarının artış ve azalış ını araştıran ve yaş a bağlı populasyon modelleri teorisinde asimptotik exponential ç özümünün lineer olmayan integral denklem ve bazı diferansiyel denklemlerde sonuçlarının kullanış ılı olduğunu bulan Györi ve Hartung' un [10] ç alışmasıdır.

Maleknejad ve Kajani [11] lineer İntegro-diferansiyel denklemlere hybrid fonksiyonlarını kullanarak Gallerkin metoduyla ç özüm buldular.

İkinci tipten lineer olmayan Fredholm integral denklemlerinde Haar wavelets metodunu kullanarak nümerik ç özüm bulan Babolian ve Shamsavaran' ın [12] ç alışmasıdır.

Sınırlı aralık sistemlerinde ikinci tipten Fredholm integral denklemlerini projeksiyon metodu ve Nyström-type metodunu kullanarak yaklaşık ç özüm bulan ve hata analizi yapan De Bonis ve Laurita' nın [13] ç alışmasıdır.

Lineer Volterra integral denklem sistemlerinin ç özümünde kuvvet serisi kullanılmasına örnek olarak Tahmasbi ve Fard' ın [14] ç alışmasıda görülebilir. Taylor seri açılım metodunu Volterra integral denklemlere uygulanmasına örnek olarak Sezer' in [15] ç alışması, ikinci tip integral denklemlere uygulanmasına örnek Ren, Zhange ve Qiao' nun [3] ç alışması, lineer olmayan Volterra-Fredholm integral denklemlere uygulanmasına örnek Yalçınbaş' ın [16] ç alışması verilebilir.

Pratik bir matris metodu olan Chebyshev polinomu metodunu lineer olmayan ikinci tip Volterra integral denklemleri için kullanan Maleknejad ve diğerlerinin [17] ç alışmasıdır. Aynı metodu yüksek dereceli lineer Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemini bilinmeyen katsayılı lineer cebir denklem sistemine benzeyen matris denklemine dönüştürerek ç özüm bulan Akyüz ve Sezer' in [18] ç alışması olup bu metodun yaklaşımıyla karış ık şartlar altında verilen integro-diferansiyel denkleme ç özüm bulmak için kullanan Akyüz' ün [19] ç alışmasıdır.

Fredholm integral ve integro-diferansiyel denklemler için pratik bir matris metodu olan Taylor polinomu metodunun kullanılmasına örnek çalışma Sezer ve Gülsu' nun [20] çalışmasıdır.

Taylor polinomu metodunu geliştirerek başlangıç sınır şartları altında sabit katsayılı yüksek dereceli Fredholm integro-diferansiyel denklemlere çözüm bulunmasına örnek Kurt ve Sezer' in [21] çalışmasıdır.

Yüksek dereceli lineer olmayan Volterra-Fredholm integro-diferansiyel denklemleri Taylor açılımına dayanan bir metodla matris denklemine çevirerek nümerik ve analitik yolla çözüm bulunmasına örnek Darania ve Ivaz' ın [22] çalışmasıdır.

Yalçınbaş ve Sezer [23] karışık şartlar altında yüksek dereceli değişken katsayılı Fredholm-Volterra integro-diferansiyel denklemlere yaklaşık çözüm bulmak için Taylor collocation metodunu kullandılar.

Deprem mühendisliği, hasar tespiti ve enerji kaynaklarının belirlenmesinde önemli yere sahip olan ve Lamb' ın araştırmasına dayanan yarım uzayda elastik dalga yayılımı problemlerini genelleştirilmiş Fourier transform metoduyla ve onun integral denklemlere uygulamalarıyla çözen Touhei' nin [24] çalışmasıdır.

Lineer olmayan terimleri lineerleştirmeden başlangıç sınır şartlarında analitik fonksiyon katsayılı Volterra integro-diferansiyel denklemi Tau metodu ile çözen Ebadi ve diğerlerinin [25] çalışmasıdır.

Sınır değer problemleriyle verilen yüksek dereceli integro-diferansiyel denklemlerin Adomian Decomposition Method (ADM) ile çözülmesine örnek Wazwaz' ın [26] çalışmasıdır. Aynı metotla ikinci derece lineer integral denklemlerin çözümüne örnek Golbabai ve Kerameti' nin [27] çalışması verilebilir.

Ayrılabilir çekirdekli volterra integral denklemlerinin çözümünde Diferansiyel Dönüşüm Metodunun (Differential Transform Method) kullanılması örneğine Odibat' ın [28] çalışması verilebilir. Taylor açılımına dayanan bu metodun lineer ya da lineer

olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlere uygulamaları da Arikoglu ve Özkol' un [29] çalışmalarında yer almaktadır.

Lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlere Homotopy perturbation metodunun (HPM) uygulanmasına örnek Biazar ve diğerlerinin [30] çalışmasıdır. Bu metodu değiştirerek lineer olmayan integral denklemlere uygulanmasına örnek Ghorbani ve Saber-Nadjafi' nin [31] çalışması, Fredholm integral denklemlere uygulayan Golbabai ve Kerameti' nin [32] çalışmasıdır.

Bunun yanı sıra tekil integral denklemlerin çözümünün varlığı tekliği konusunda yapılan çalışmalar da vardır [33]. Zayıf tekil çekirdekli lineer integral denklemlerin çözülmesi örneğine Chen ve Lin' in [34] çalışması, Abel integral denklemin Taylor açılımına göre lineer denklem sistemine dönüştürülecek çözülmesi örneğine Huang ve diğerlerinin [35] çalışması verilebilir.

Varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniği olan Varyasyonel iterasyon Metodu (VIM) He [36-42] tarafından önerilmiştir. Bu yöntemle çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklem sistemleri çözülebilmektedir. Sweilam [43] ise bu metodu lineer ve lineer olmayan sınır şartlarında verilen dördüncü dereceden integro-diferansiyel denklemlerin çözümüne uyguladı.

Bu metodu Shakeri ve Denghan [44] biyolojide bir arada yaşayan türlerde ortaya çıkan lineer olmayan ikili integro-diferansiyel denklem sisteminin çözümünde kullandılar.

Viscoelastik akımın matematiksel modellemesi ve fizik, matematik ve mühendisliğin diğer dallarında ortaya çıkan başlangıç-sınır değer problemlerinin ikili integro-diferansiyel denklem sistemine çevirerek çözülmesi ve n. derece için genelleştirilmesi örneğine Hesaaraki ve Jalilian' ın çalışması verilebilir [45].

İkili Volterra integro-diferansiyel denklem sistemlerinin Varyasyonel iterasyon Metoduyla (VIM) ile çözülmesine örnek Saberi-Nadjafi ve Tamamgar' ın [46] çalışmasıdır.

Metodun çeşitli integral denklemlere uygulanmasına örnek Xu' nun [47] çalışmasıdır. Aynı metodun n. dereceden integro-diferansiyel denklemlere uygulanmasına örnek Shang ve Han' ın [48] çalışmasıdır. Metodun çözümünde yakınsaklığının incelenmesine örnek Saadati ve diğerlerinin [49] çalışmasıdır.

1.5 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM) olarak adlandırılan ve son dönemde önerilmiş olan ve pek çok lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem, kısmi türevli denklem ve pek çok uygulama ile ilgili diferansiyel denklem çözümünde başarıyla uygulanmış olan bu yarı analitik yaklaşım metodunu integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin hesaplanmasında kullanmaktır.

BÖLÜM II

TEMEL ANALİTİK METOTLAR

2.1 İntegral Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Temel Analitik Metotlar

2.1.1 Seri çözüm metodu

Seri çözüm metodu Volterra integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur.

Aşağıdaki Volterra integral denkleminde

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad (2.1)$$

$K(x,t)$ integral denklemin çekirdeği, λ parametre olmak üzere; (2.1) denklemini için adi diferansiyel denklemlere sabit nokta etrafında uygulanan seri çözüm metoduna benzer bir metod kullanılır. $u(x)$ in analitik fonksiyon olması koşuluyla $x=0$ noktasında $u(x)$ in Taylor açılımı, a_n daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.2)$$

formundadır. (2.1) in her iki tarafında $u(x)$ yerine (2.2) seri açılımı yerleştirilir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (2.3)$$

eşitliğin her iki tarafında birkaç terime kadar açıldığında,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) a_0 dt + \lambda \int_0^x K(x,t) a_1 t dt + \\ + \lambda \int_0^x K(x,t) a_2 t^2 dt + \lambda \int_0^x K(x,t) a_3 t^3 dt + \dots, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$n \geq 0$, için t^n formunda çok sayıda sıradan belirli integrali toplama indirgenmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun Taylor açılımı yapıldıktan sonra (2.4) teki integraller hesaplanır. Eşitliğin iki tarafında aynı kuvvetli x katsayıları eşitlendiğinde a_0, a_1, a_2, \dots katsayıları bulunur. Elde edilen katsayılar (2.2) nolu eşitlikte yazıldığında; çözüm seri halde elde edilir. Bu seri çözümü, bilinen bir fonksiyona denk geliyorsa; integral denklemin kapalı formda analitik çözümü bulunmuş olur.

$$\text{Örnek 2.1.1 } u(x) = 1 + \int_0^x (t-x)u(t)dt \quad (2.5)$$

İntegral denklemini seri çözüm metoduyla çözelim.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \quad (2.6)$$

(2.6) da verilen $u(x)$ seri açılımı (2.5) te verilen eşitliğin her iki yanında yerleştirilirse;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \int_0^x (t-x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt . \quad (2.7)$$

Seri açılımı yapılır, eşitliğin sağ taraftaki integral hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^{n+1} dt - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right) \right) \\ &= 1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) a_n x^{n+2} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. Buradan seri terim içeren ifadeler açılıp düzenlenir,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = 1 - \frac{1}{2!} a_0 x^2 - \frac{1}{3!} a_1 x^3 - \frac{1}{12} a_2 x^4 + \dots \quad (2.9)$$

ve eşitliğin her iki tarafında aynı dereceden x katsayıları eşitlenir,

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= -\frac{1}{2!}, \\ a_3 &= 0, \\ a_4 &= \frac{1}{4!}, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

ve $n \geq 0$ için genelleme yapılırsa,

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}, \quad (2.11)$$

$$a_{2n+1} = 0,$$

elde edilir. Sonuç olarak elde edilen katsayılar (2.6) ile verilen seri çözümünde yazılırsa,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \quad (2.12)$$

kapalı formda

$$u(x) = \cos x \quad (2.13)$$

çözümü elde edilir.

2.1.2 Ardışık yaklaşımlar metodu

Bu metod Fredholm integral denklem ve Volterra integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Aşağıdaki gibi verilmiş ikinci dereceden Fredholm integral denkleminde

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.14)$$

integral işaretinin altındaki bilinmeyen $u(t)$ fonksiyonunu $a \leq x \leq b$ aralığında seçilen herhangi bir $u_0(x)$ fonksiyonuyla değiştirir ve hesaplamaya başlarız. Dolayısıyla ilk yaklaşım $u_1(x)$,

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \quad (2.15)$$

ikinci yaklaşım olan $u_2(x)$ çözümü ise;

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_1(t)dt, \quad (2.16)$$

(2.15) denkleminde $u_0(x)$ yerine $u_1(x)$ değerinin konmasıyla bulunur.

Bu şekilde ilerlendiğinde

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1 \quad (2.17)$$

n . çözüm bulunur. Dolayısıyla (2.14) de verilen Fredholm integral denkleminin istenilen adımdaki çözümü bulunabilir. Bu işlem adımları formülasyon edilirse;

• $u_0(x)$, başlangıç fonksiyonu,

$$\bullet \quad u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1 \quad (2.18)$$

genel çözüm ise,

$$\bullet \quad u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yeterince büyük n değerlerinde bulunacak $u(x)$ genel çözümü $u_0(x)$ çözümünden bağımsız olacaktır. Burada $u_1(x)$ çözümü $f(x)$, $K(x,t)$ ve $u_0(x)$ fonksiyonlarının sürekli olması durumunda sürekli dir.

$$\textbf{Örnek 2.1.2} \quad u(x) = 1 + x - \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.20)$$

integral denklemini ardışık yaklaşım metoduyla çözelim. Genel iterasyon formülü,

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_{n-1}(t)dt, \quad n \geq 1 \quad (2.21)$$

olmak üzere başlangıç fonksiyonu olarak;

$$u_0(x) = 1 \quad (2.22)$$

alınıp (2.20) de yerleştirilir ve bu şekilde (2.21) de verilen genel iterasyon formülüne göre ilerlenirse;

$$u_1(x) = 1 + x - \int_0^x (x-t)dt = 1 + x - \frac{x^2}{2} \quad (2.23)$$

$$u_2(x) = 1 + x - \int_0^x (x-t)u_1(t)dt = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \quad (2.24)$$

$$u_3(x) = 1 + x - \int_0^x (x-t)u_2(t)dt = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \quad (2.25)$$

elde edilir. Böylece, n . yaklaşım;

$$u_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots, \quad n \geq 1 \quad (2.26)$$

ve $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ formülünü kullanırsak;

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \cos x + \sin x \end{aligned} \quad (2.27)$$

tam çözümü elde edilir.

2.1.3 Ardışık yerine koyma metodu

Bu metot Fredholm integral denklem ve Volterra integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur.

Bu metodu uygularken $x \rightarrow t$ ve $t \rightarrow t_1$ adlandırması yapılır ve integral denklem yeniden yazılır. Aşağıdaki gibi verilmiş ikinci dereceden Fredholm integral denkleminde

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.28)$$

$x \rightarrow t$ ve $t \rightarrow t_1$ adlandırması yapılınc;

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1 \quad (2.29)$$

elde edilir. (2.29) nolu integral denklemde elde edilen $u(t)$ çözümü (2.28) deki integralde yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)(f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \int_a^b K(t,t_1)u(t_1)dt_1dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

elde edilir. Ayrıca (2.28) de $x \rightarrow t_1$ ve $t \rightarrow t_2$ değerleri yerleştirilirse;

$$u(t_1) = f(t_1) + \lambda \int_a^b K(t_1,t_2)u(t_2)dt_2 \quad (2.31)$$

elde edilir. (2.31) den elde edilen $u(t_1)$ değeri (2.30) eşitliğinin sağ tarafına yerleştirilirse;

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,t)K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt \\ &\quad + \lambda^3 \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x,t)K(t,t_1)K(t_1,t_2)u(t_2)dt_2dt_1dt, \end{aligned} \quad (2.32)$$

buradan $u(x)$ çözümünün seri haldeki yazılımı şöyle elde edilir.

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,t)K(t,t_1)f(t_1)dt_1dt$$

$$+\lambda^3 \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x,t)K(t,t_1)K(t_1,t_2)f(t_2)dt_2dt_1dt + \dots \quad (2.33)$$

Bu metot tek katlı olduğu kadar çok katlı integraller yoluyla, integral denklemin çözümünü seri formunda oluşturur. (2.33) ile verilen formülün seri çözümü için, $|K(x,t)| \leq M$ olduğu durumlarda, eğer $\lambda M(b-a) < 1$ ise bu seri çözümü $[a,b]$ aralığında geçerlidir.

Örnek 2.1.3 $u(x) = \frac{7}{12}x + 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 xtu(t)dt$ (2.34)

integral denklemini ardışık yerine koyma metoduyla çözelim. Burada $\lambda = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{7}{12}x + 1$, $K(x,t) = xt$ değerlerini genelleştirilmiş (2.33) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{7}{12}x + 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \left(\frac{7}{12}t + 1 \right) dt + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \int_0^1 \int_0^1 (xt)(tt_1) \left(\frac{7}{12}t_1 + 1 \right) dt_1 dt + \dots \\ &= \frac{7}{12}x \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots \right) + 1 + \frac{1}{4}x \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

sonsuz geometrik serisi elde edilir. (2.35) teki sonsuz geometrik serinin toplamından,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{7}{12}x \frac{1}{5/6} + 1 + \frac{1}{4}x \frac{1}{5/6} \\ &= x + 1 \end{aligned} \quad (2.36)$$

tam çözümü elde edilir.

2.1.4 Direk hesaplama metodu

Bu metot Fredholm integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. İkinci tipten Fredholm integral denkleminde

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad (2.37)$$

integral denklemin çekirdeğinin dejenere (ayrıştırılabilir) olduğunu varsayalım. Böylece

$$K(x,t) = g(x)h(t) \quad (2.38)$$

formundaki çekirdek (2.37) de yerleştirilirse;

$$u(x) = f(x) + \lambda g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt \quad (2.39)$$

elde edilir. Bu durumda (2.39) ün sağ tarafındaki integral sabit bir α nümerik değerine eşit olsun.

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt, \quad (2.40)$$

(2.40) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki integral sadece tek değişkene bağlıdır.

(2.39) denklemi içinde (2.40) yerleştirilirse,

$$u(x) = f(x) + \lambda \alpha g(x) \quad (2.41)$$

elde edilir. α değerinin hesaplanmasıyla (2.41) denklemi tam olarak hesaplanacağından (2.40) içinde (2.41) yerleştirilerek α değeri hesaplanır. Burada not etmek gerekirse, direk metot kapalı formda analitik çözüm verir. (α değerinin bulunmasına bağlı olarak) Buna ek olarak bu metot, çekirdeğin yapısına bağlı olarak cebirsel denklem sistemleri oluşmasına yol açar. Sabit sayı α nın bulunmasında cebirsel denklem 3. veya daha yüksek dereceden olursa, bulunması zorlaşır. Bu tip bir zorluk lineer olmayan integral denklemlerde ortaya çıkabilir.

Örnek 2.1.4 $u(x) = x^2 - \frac{25}{12}x + 1 + \int_0^1 xtu(t)dt$ integral denklemini direkt hesaplama

metoduyla çözelim.

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt \quad (2.42)$$

nümerik değeri alınsın. İntegral denklemde α yazıldığında;

$$u(x) = x^2 - \frac{25}{12}x + 1 + x\alpha \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.43) denklemi (2.42) denkleminde yazıldığında,

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 \left(t^3 - \frac{25}{12}t^2 + t + t^2\alpha \right) dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{25}{12} \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \alpha \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{25}{36} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} \quad (2.44)$$

elde edilir. Bu α değeri (2.43) de yazıldığında;

$$u(x) = x^2 - \frac{25}{12}x + 1 + \frac{x}{12} \quad (2.45)$$

tam çözümü elde edilir.

2.1.5 Volterra integral denklemi başlangıç değer diferansiyel denkleme dönüştürerek çözüme

Bu metot Volterra integral denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Elde edilen başlangıç değer problemlerini çözerken ilerleyen adımlarda bilinmeyen katsayılar bulunarak çözüm tamamlanacaktır.

Bu metodu uygulamak için;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \quad (2.46)$$

Volterra integral denkleminde iki taraftan türev alırız. Bu noktada eşitliğin sağ tarafındaki integralin türevini alırken aşağıda verilen Leibnitz Kuralı uygulanır.

Leibnitz Kuralı 2.1.1

Bir D bölgesi içindeki $R\{a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq t_1\}$ dikdörtgeninde $G(x,t)$ ve $\frac{\partial G}{\partial x}$ sürekli fonksiyonlar ve $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ integrasyon limitleri $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli

türevlenebilir olsunlar. Bu durumda $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt$ integralinin türevi

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)dt = G(x, \beta(x)) \frac{d\beta}{dx} - G(x, \alpha(x)) \frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x} dt \quad (2.47)$$

formülasyonu ile bulunur.

Bu türev alma işlemi (2.46) denkleminde integral işareti kalmayınca kadar, tamamıyla bir diferansiyel denkleme ulaşıncaya kadar sürdürülür. Türev alırken her

adımında, $u(x)$ içinde ve $u(x)$ türevlerinde $x = 0$ yazılarak başlangıç şartları elde edilir. Daha sonra elde edilen diferansiyel denklem klasik yöntemlerle çözülür.

$$\text{Örnek 2.1.5 } u(x) = x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (2.48)$$

Volterra integral denklemini başlangıç değer diferansiyel denklemine dönüştürerek çözelim. (2.48) denkleminde iki taraftan türev alınırsa, (Leibnitz Kuralı uygulanır.)

$$u'(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \int_0^x u(t)dt \quad (2.49)$$

integral işaretinden kurtulmak için (2.49) denkleminde tekrar türev alınıp düzenlenirse,

$$u''(x) = -2 + x - x^2 - u(x), \quad (2.50)$$

$$u''(x) + u(x) = -2 + x - x^2 \quad (2.51)$$

elde edilir. Gerekli başlangıç değerleri (2.49) ve (2.50) eşitliklerinde $x = 0$ değeri konarak bulunur. Buradan

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (2.52)$$

elde edilir. (2.51) ve (2.52) de verilen başlangıç değer diferansiyel problemi

$$u''(x) + u(x) = -2 + x - x^2, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad (2.53)$$

şeklinde dir. Önce homojen kısmı çözelim.

$$u''(x) + u(x) = 0 \quad (2.54)$$

sabit katsayılı diferansiyel denklem için karakteristik denklem yazılırsa;

$$r^2 + 1 = 0 \quad (2.55)$$

olur ki; kökler

$$r_1 = +i, \quad r_2 = -i, \quad (2.56)$$

elde edilir. Bu durumda, homojen kısmın çözümü,

$$u_h(x) = A \cos x + B \sin x. \quad (2.57)$$

Burada A ve B başlangıç değerleri kullanılarak bulunacak sabitlerdir. (2.53) denkleminde (tekil) özel çözüm bulmak için

$$u_p(x) = \alpha + \beta x + \lambda x^2 \quad (2.58)$$

formunda çözümün varlığını kabul edelim. α , β , λ sabit sayılardır. (2.58) özel çözümünü (2.53) de yerleştirir ve benzer x derecesine sahip terimler eşitlenirse;

$$\alpha = 0, \beta = 1, \lambda = -1 \quad (2.59)$$

elde edilir. Bu durumda genel çözüm,

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = A \cos x + B \sin x + x - x^2. \quad (2.60)$$

(2.52) deki başlangıç şartları bulduğumuz genel çözüme yerleştirilirse,

$$A = 0, B = 0 \quad (2.61)$$

elde edilir. Bu durumda (2.48) in çözümü,

$$u(x) = x - x^2 \quad (2.62)$$

elde edilir.

2.2 İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Temel Analitik Metotlar

Bu bölümde verilen metotlar,

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(t) \quad (2.63)$$

sonlu toplamı ile verilen ayrılabilir çekirdekli integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Genel anlamda $K(x, t) = g(x)h(t)$ şeklinde ayrılmayan çekirdekli integro-diferansiyel denklemlerde ise Taylor açılımı yapılarak ayrılabilir çekirdekli integro-diferansiyel denklem elde edilir.

2.2.1 Volterra integral denkleme dönüştürme metodu

Verilen bir Volterra integro-diferansiyel denklem kolayca Volterra integral denkleme dönüştürülerek de çözülebilir. Bunun için Volterra integro-diferansiyel denklemde $K(x, t) = K(x-t)$ şartı aranır. Bundan sonra verilen integro-diferansiyel denklemin her iki tarafından başlangıç şartları kullanılarak 0' dan x' e kadar integral alınır. Bu işlem eşitliğin sol tarafında türevsiz olarak $u(x)$ elde edilinceye kadar sürdürülür. Burada çoklu integrallerle karşılaşılacağı için

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (2.64)$$

(2.64) te verilen başlangıç değer problemini Volterra denklemine dönüştürürken kullanılan tek integrale dönüştürme formülü uygulanır.

Örnek olarak;

$$1) \int_0^x \int_0^x f(t) dt dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt, \quad (2.65)$$

$$2) \int_0^x \int_0^x \int_0^x f(t) dt dt dt = \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt \quad (2.66)$$

verilebilir. Elde edilen Volterra integral denklem Bölüm 2.1 deki volterra integral denklemin çözümünde kullanılan metotlardan biri ile çözülür.

$$\text{Örnek 2.2.1 } u'(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt, \quad u(0) = 0 \quad (2.67)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini integral denkleme dönüştürerek çözelim. Başlangıç şartlarını dikkate alarak 0' dan x' e kadar bir kez her iki tarafın integralini alalım.

$$u(x) = x - \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (2.68)$$

standard volterra integral denklemi elde edilir. Bundan sonra ardışık yaklaşım metodunu kullanarak çözüm yapalım. Başlangıç fonksiyonu olarak,

$$u_0(x) = 0 \quad (2.69)$$

alındığında,

$$u_1(x) = x, \quad (2.70)$$

$$u_2(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad (2.71)$$

$$u_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad (2.72)$$

böylece n. yaklaşım fonksiyonu,

$$u_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad n \geq 1 \quad (2.73)$$

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \quad (2.74)$$

$$u(x) = \sin x \quad (2.75)$$

tam çözümü elde edilir.

2.1.2 Fredholm integral denkleme dönüştürme metodu

Verilen bir Fredholm integro-diferansiyel denklem kolayca Fredholm integral denkleme dönüştürülerek de çözülebilir. Bunun için Fredholm integro-diferansiyel denklemde eşitliğin sağ tarafındaki integral işareti altındaki bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ in sadece $u(x)$ olarak bulunması; yani türevli hali bulunmaması şartı aranır. Bundan sonra verilen integro-diferansiyel denklemin her iki tarafından başlangıç şartları kullanılarak 0' dan x' e kadar integral alınır. Bu işlem eşitliğin sol tarafında türevsiz olarak $u(x)$ elde edilinceye kadar sürdürülür. Böylece Fredholm integral denklemini elde edilir.

Örnek olarak;

$$u''(x) = e^x - x + x \int_0^1 tu(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1 \quad (2.76)$$

integro-diferansiyel denkleminin her iki tarafından 0' dan x' e kadar, başlangıç şartları kullanılarak integral alınır;

$$u(x) = e^x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3!}x^3 \int_0^1 tu(t)dt \quad (2.77)$$

integral denklemini elde edilir. Elde edilen Fredholm integral denkleme ise Bölüm 2.1 de verilen metotlardan biri uygulanarak çözüm elde edilir.

$$\text{Örnek 2.2.2 } u'(x) = -x \sin x + \cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)x + \int_0^x xu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad (2.78)$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemini integral denkleme dönüştürerek çözelim. Başlangıç şartlarını dikkate alarak 0' dan x' e kadar bir kez her iki tarafın integralini alalım.

$$u(x) = x \cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \int_0^x u(t)dt \quad (2.79)$$

standart fredholm integral denklemini elde edildi. Bundan sonra direk hesaplama metodunu kullanarak çözüm yapalım.

$$\alpha = \int_0^x u(t)dt, \quad (2.80)$$

(2.79) denkleminde (2.80) ile verilen α sabiti yazılır.

$$u(x) = x \cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \alpha \quad (2.81)$$

(2.81) denkleminin (2.80) de yazılmasıyla,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (2.82)$$

elde edilen α değeri (2.81) de yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(x) &= x \cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\ &= x \cos x \end{aligned} \quad (2.83)$$

tam çözümü elde edilir.

2.2.2 Direk hesaplama metodu

Bu metot integral denklemlerde bahsedilen direk hesaplama metoduna benzemektedir ve Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur.

$$u^n(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \quad u^k(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (2.84)$$

başlangıç değerleri ile verilen integro-diferansiyel denklemi

$$K(x,t) = g(x)h(t), \quad (2.85)$$

ayrılabilir çekirdekli olduğundan

$$u^n(x) = f(x) + g(x) \int_0^1 h(t)u(t)dt, \quad (2.86)$$

elde edilir. (2.86) denkleminde eşitliğin sağ tarafındaki integral sadece tek değişkene bağlıdır. Bu durumda (2.86) da sağ taraftaki integral sabit bir α nümerik değerine eşit olsun.

$$\alpha = \int_0^1 h(t)u(t)dt \quad (2.87)$$

(2.86) denkleminde (2.87) ile verilen α yazılırsa,

$$u^n(x) = f(x) + g(x)\alpha. \quad (2.88)$$

$u(x)$ i elde etmek için başlangıç değerleri kullanılarak (2.88) nin her iki tarafından 0' dan x' e kadar integral alınır. Buradan

$$u(x) = p(x, \alpha) \quad (2.89)$$

elde edilir. (2.89) daki denklem (2.87) de yerleştirilerek denklem çözüldüğünde α sabitinin değeri bulunur. Bulunan α sabitinin (2.88) de yerleştirilmesiyle tam çözüm bulunur.

Örnek 2.2.3 $u''(x) = \frac{9}{4} - \frac{1}{3}x + \int_0^1 (x-t)u(t)dt, u(0) = 0, u'(0) = 0$ (2.90)

Fredholm integral denklemini direk hesaplama metoduyla çözelim. İntegralli ifadeyi parçalarsak;

$$u''(x) = \frac{9}{4} - \frac{1}{3}x + x \int_0^1 u(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt \quad (2.91)$$

sağ taraftaki integraller, sabit bir α ve β değerine eşit olsun.

$$\alpha = \int_0^1 u(t)dt, \quad (2.92)$$

$$\beta = \int_0^1 tu(t)dt, \quad (2.93)$$

(2.91) de α ve β yerine yazılır ve

$$u''(x) = \frac{9}{4} - \frac{1}{3}x + x\alpha - \beta \quad (2.94)$$

başlangıç şartları kullanılarak 0' dan x' e kadar her iki tarafın iki kez integrali alınırsa;

$$u'(x) = \frac{9}{4}x - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2}\alpha - \beta x, \quad (2.95)$$

$$u(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{x^3}{6}\alpha - \frac{x^2}{2}\beta, \quad (2.96)$$

elde edilir. (2.96) da verilen denklem (2.92) ve (2.93) de yazılırsa,

$$69\alpha = 26 - 12\beta, \quad (2.97)$$

$$1620\beta = 48\alpha + 389. \quad (2.98)$$

(2.97) ve (2.98) denklemlerinin ortak çözümünden;

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{1}{4} \quad (2.99)$$

elde edilen α ve β değerleri (2.100) de yazıldığında,

$$u(x) = x^2 \quad (2.100)$$

tam çözümü elde edilir.

2.2.3 Seri çözüm metodu

Bu metot integral denklemlerde bahsedilen seri çözüm metoduna benzetilmektedir. Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur.

$$u^n(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^k(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.101)$$

başlangıç değerleri ile verilen integro-diferansiyel denklemi ayrılabilir çekirdekli olduğu kabul edilerek,

$$u^n(x) = f(x) + g(x) \int_0^x h(t)u(t)dt \quad (2.102)$$

elde edilir. $u(x)$ in analitik fonksiyon olması koşuluyla $x=0$ noktasında $u(x)$ in Taylor açılımı, a_k daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere;

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (2.103)$$

formundadır. (2.102) nın her iki tarafında $u(x)$ yerine (2.103) seri açılımı yerleştirilirse;

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = f(x) + g(x) \int_0^x h(t) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt, \quad (2.104)$$

$f(x)$ fonksiyonunun Taylor açılımı yapıldıktan sonra $n \geq 0$, t^n formunda integraller hesaplanır. Eşitliğin her iki tarafında birkaç terime kadar açılım yapılır. Eşitliğin iki tarafında aynı kuvvetli x e ait katsayıları eşitlendiğinde a_0, a_1, a_2, \dots katsayıları bulunur. Elde edilen katsayılar (2.103) eşitliğinde yazıldığında; çözüm seri halde elde edilir. Bu seri çözümü, bilinen bir fonksiyona denk geliyorsa; integral denklemin kapalı formda analitik çözümü bulunmuş olur.

$$\text{Örnek 2.2.4 } u'(x) = 1 - 2x \sin x + \int_0^x u(t) dt, \quad u(0) = 0 \quad (2.105)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini seri çözüm metoduyla çözelim.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.106)$$

(2.105) içinde (2.106) da verilen $u(x)$ seri açılımı eşitliğin her iki yanına yerleştirilir ve $\sin x$ ' in Taylor açılımı yapılırsa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 - 2x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (2.107)$$

elde edilir. Başlangıç şartlarına göre,

$$a_0 = 0, \quad (2.108)$$

$n \geq 0$, t^n formunda integral hesaplanıp her iki taraftan birkaç terime kadar açılır.

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots = 1 - 2x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\ + \left(a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} \dots \right). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Her iki tarafta aynı dereceli x katsayıları eşitlenirse,

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{2!},$$

$$a_4 = 0,$$

$$a_5 = \frac{1}{4!},$$

genelleme olarak;

$$a_{2n} = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.110)$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}, \quad (2.111)$$

elde edilir. Bulunan katsayılar (2.106) seri açılımında yazıldığında,

$$u(x) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \dots$$

$$= x \cos x \quad (2.112)$$

kapalı formdaki çözüm elde edilir.

2.2.4 Volterra integro-diferansiyel denklemi başlangıç değer diferansiyel denkleme dönüştürerek çözüme

Bu metot integral denklemlerde bahsedilen Volterra integral denkleminin başlangıç-değer diferansiyel denkleme dönüştürerek çözülmesine benzemektedir. Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metoddur. Çekirdeğin $K(x, t) = K(x - t)$ formunda ayrılabilir çekirdek olduğu Volterra integro-diferansiyel denklemlerde bu metot kolaylıkla uygulanır.

Volterra integro-diferansiyel denklemi diferansiyel denkleme dönüştürürken; Bölüm 2.5 te verilen Leibnitz Kuralına göre türev alınır. Bu türev alma işlemi denkleme integral işareti kalmayınca kadar bir diferansiyel denkleme ulaşıncaya kadar sürdürülür. Türev alırken her adımda, $u(x)$ içinde ve $u(x)$ türevlerinde $x = 0$ yazılarak başlangıç şartları elde edilir.

Daha sonra elde edilen diferansiyel denklem klasik yöntemlerle çözülür.

$$\text{Örnek 2.2.5 } u'(x) = e^x - \int_0^x u(t) dt, \quad u(0) = 1 \quad (2.113)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini başlangıç değer diferansiyel denkleme dönüştürerek çözelim. (2.122) denkleminde iki taraftan Leibnitz Kuralına göre türev alalım.

$$u''(x) = e^x - u(x) \quad (2.114)$$

(2.114) düzenlenir ve $x = 0$ verilerek başlangıç değer şartları

$$u''(x) + u(x) = e^x, \quad u'(0) = 1, \quad u(0) = 1 \quad (2.115)$$

ile verilen başlangıç değer diferansiyel problemi elde edilir. Homojen kısmın çözümünün,

$$u_h(x) = A \cos x + B \sin x \quad (2.116)$$

özel çözümün ise,

$$u_p(x) = \alpha e^x \quad (2.117)$$

formunda olduğunu kabul edelim. (2.117) de verilen özel çözüm (2.115) de yazılarak çözüldüğünde

$$u_p(x) = e^x, \quad (2.118)$$

özel çözümü elde edilir.

(2.116) ve (2.118) birleştirilirse genel çözüm

$$u(x) = A \cos x + B \sin x + e^x \quad (2.119)$$

elde edilir. (2.115) deki başlangıç şartları bulduğumuz genel çözüme uygulanırsa,

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2} \quad (2.120)$$

elde edilir. Bu durumda (2.113) ün çözümü,

$$u(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + e^x \quad (2.121)$$

elde edilir.

BÖLÜM III

VARYASYONEL İTERASYON METODU VE TEMEL ANALİTİK METOTLAR

3.1 VIM Literatürü

Varyasyonel iterasyon yöntemi, varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniği olup, He tarafından önerilmiştir [36-38]. Bu yöntemle çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklem sistemleri çözülebilmektedir. Yöntemin çeşitli matematiksel uygulamaları [43] ve [50-57] arası çalışmalarda yer almaktadır. Metodun yakınsaklığını inceleyerek diferansiyel denkleme çözüm bulan çalışmalar da vardır [58]. Yöntemin bu başarılı uygulamaları, mevcut çalışma için seçilmesinin başlıca nedenleridir.

3.2 Varyasyonel İterasyon Teorisi

3.2.1 Varyasyon hesabında birinci problem

Üç değişkenli bir f fonksiyonumuz olduğunu ve (a, y_0) dan (b, y_1) e giden bir $y(x)$ fonksiyonunu

$$\int_a^b f[x, y(x), y'(x)] dx, \quad (3.1)$$

bir maksimum veya minimum olacak şekilde seçmek istediğimizi varsayalım. Denklem (3.1)' i maksimum veya minimum yapan y fonksiyonuna stasyoner fonksiyon denir. Bu bölümde problemi, ilgili bir diferansiyel denklemi çözmek için stasyoner fonksiyon bulmaya indirgeyecek bir koşul türeteceğiz.

$y = u(x)$, denklem (3.1) için stasyoner fonksiyon olsun. Yani $u(x)$,

$$\int_a^b f[x, y, y'] dx$$

ifadesini maksimize ve minimize eder. u fonksiyonunu bulmak için bir koşul elde etmek isteyelim, böyle bir koşulu geliştirmek için

$$y(x) = u(x) + \varepsilon\mu(x) \quad (3.2)$$

şeklindeki fonksiyonları ele alacağız. Burada ε sabit ve $\mu(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli olan ve şu koşulları sağlayan fonksiyondur.

$$\mu(a) = \mu(b) = 0 \quad (3.3)$$

Böyle bir μ fonksiyonuna kabul edilebilir fonksiyon denir. Denklem (3.2) de yer alan fonksiyon (a, y_0) ve (b, y_1) noktalarından geçer.

Denklem (3.2) denklem (3.1) de yerine koyulursa,

$$\int_a^b f[x, u(x), \varepsilon\mu(x), u'(x), \varepsilon\mu'(x)] dx \quad (3.4)$$

elde edilir. Herhangi bir kabul edilebilir fonksiyon $\mu(x)$ için, $u(x)$ problemin sabit bir çözümü olduğundan bu integral ε ' nun bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

$$I(\varepsilon) = \int_a^b f[x, u(x) + \varepsilon\mu(x), u'(x) + \varepsilon\mu'(x)] dx \quad (3.5)$$

$u(x)$ problemin bir çözümü olduğundan, integral (3.5) $\varepsilon = 0$ iken maksimum veya minimum değere sahiptir. $I(\varepsilon)$ tek değişken olan ε ' nun fonksiyonu olduğundan, $\varepsilon = 0$ iken $I'(\varepsilon) = 0$ olmasını bekleriz.

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.6)$$

$dI/d\varepsilon$ nu hesaplayalım ve $\varepsilon = 0$ değerini yerine koyalım.

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} \right] dx \quad (3.7)$$

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [u(x) + \varepsilon\mu(x)] = \mu(x) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [u'(x) + \varepsilon\mu'(x)] = \mu'(x) \quad (3.10)$$

olduğundan

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \mu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \mu'(x) \right] dx \quad (3.11)$$

$\varepsilon = 0$ yerine koyarsak,

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \mu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \mu'(x) \right] dx \quad (3.12)$$

eşitliğin sağında, ikinci terimin kısmi integrali alırsa

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \mu'(x) dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \mu'(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \mu(x) dx. \quad (3.13)$$

$\mu(a) = \mu(b) = 0$ olduğundan

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \mu'(x) dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \mu(x) dx \right]. \quad (3.14)$$

Denklem (3.14) ün denklem (3.12) de yerine koyulmasıyla

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} \mu(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \mu(x) \right] dx = 0, \quad (3.15)$$

bu integral şu şekilde yazılabilir.

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \mu(x) dx = 0. \quad (3.16)$$

μ $[a,b]$ aralığında türevi sürekli olan ve a ile b de yok olan herhangi bir fonksiyon olduğundan denklem (3.16) da $a \leq x \leq b$ için köşeli parantez içindeki ifade sıfıra eşit olmalıdır.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Bu denkleme Euler denklemi denir ve aranılan koşul bu denklemdir. Denklem (3.1) için stasyoner fonksiyon; denklem (3.17) yi sağlamalıdır.

3.2.2 Fonksiyonel

Denklem (3.1) de görülmekte olan, bağıl değişkenler (fonksiyonlar) ve türevlerine bağlı integral ifadelerine fonksiyonel denir. Bir fonksiyonel I , y vektör uzayından \mathbb{R} reel sayı alanında bir operatördür.

$$I: y \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.18)$$

2.2.3 Fonksiyonelin birinci bileşeni

Denklem (3.2) de görülmekte olan $\varepsilon \mu(x)$ fonksiyonu $u(x)$ konfigürasyonunda bir değişimi ifade eder ve şu şekilde gösterilebilir.

$$\delta u(x) = \varepsilon \mu(x) \quad (3.19)$$

δu ifadesine $u(x)$ fonksiyonunun birinci değişimi denir. Bu durumda denklem (3.1) de görülmekte olan fonksiyonun değişimi denklem (3.19)' un yardımıyla şu şekilde gösterilebilir.

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{df}{dy} \delta u + \frac{df}{dy'} \delta u' \right] dx. \quad (3.20)$$

Bu denklemde yer alan $\delta u'$ ifadesi için

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta u) \quad (3.21)$$

bağıntısı kullanılabilir. Varyasyon (değişimi) gösteren δ operatörü için bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

$$\delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2, \quad (3.22)$$

$$\delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 \pm F_2 \delta F_1, \quad (3.23)$$

$$\delta \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}, \quad (3.24)$$

$$\delta(FI)^n = n(FI)^{n-1} \delta F_1. \quad (3.25)$$

Fonksiyonelin birinci değişimini gösteren (3.20) deki ifade, denklem (3.21) ve kısmi integral tekniğinden yararlanılarak tekrar yazılır ve $\delta I = 0$ bağıntısı uygulanırsa ve $\delta u(a) = \delta u(b) = 0$ sınır koşulu ile

$$\int_a^b \left[\frac{\delta f}{\delta y} \delta u + \frac{\delta f}{\delta y'} \delta u' \right] dx = \int_a^b \delta u \left[\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta f}{\delta y'} \right) \right] dx = 0 \quad (3.26)$$

ifadesi elde edilir ve Euler denklemini aynı şekilde buradan da elde edilebilir.

3.2.4 Varyasyonel iterasyon metodu

Varyasyonel iterasyon yöntemi He [61] tarafından geliştirilmiş olup çeşitli doğrusal olmayan problemlerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabilen ve hassas çözümlere hızlı bir şekilde yakınsayan iteratif bir yöntemdir. Yöntemin detayları He [61], çalışmasında anlatılmaktadır.

1978 yılında İnokuti ve diğerleri [60], doğrusal olmayan problemleri çözmek için (özel olarak kuantum mekaniğindeki problemler) genel bir Lagrange çarpanı yöntemi önermişlerdir.

Lagrange çarpanı ve varyasyon hesabının detayları için Ramos [59] çalışması incelenebilir. Önerilen yöntemin ana özelliği şöyledir: Matematik problemi doğrusallaştırılmış halinin çözümü başlangıç tahmini olarak kullanılarak belirli bir noktada daha yüksek hassasiyetle bir tahmin elde edilebilir.

Aşağıdaki genel doğrusal olmayan bir sistemi ele alalım.

$$LU + NU = g(x). \quad (3.27)$$

Burada L doğrusal olan ve N doğrusal olmayan operatörlerdir.

$u_0(x)$ ' ın $LU = 0$ sisteminin bir çözümü olduğu varsayılarak belirli bir nokta için bu değer aşağıdaki gibi düzeltilebilir.

$$u_{\text{düzeltilmiş}}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda(Lu_0 + Nu_0 - g)dx \quad (3.28)$$

Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir. Denklemin aşağıdaki 2.terim ise düzeltme olarak adlandırılır. He bu yöntemi aşağıdaki şekilde iteratif yonteme dönüştürmüştür. [61]

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lu_n + Nu_n - g\}dx. \quad (3.29)$$

Burada $u_0(x)$ muhtemel değişkenlerle bir başlangıç tahmini ve u_n , $\delta u_n = 0$ koşulunu sağlayan sınırlı varyasyon olarak düşünülebilir. Herhangi bir x_0 için bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda \{Lu_n(\xi) + Nu_n(\xi) - g(\xi)\}d\xi, \quad (3.30)$$

denklem (3.30) bir düzeltme fonksiyonelidir. Varyasyonel iterasyon yönteminin çeşitli doğrusal olmayan problemlerin çözümünde nasıl etkin olarak kullanıldığı [38-42] arası çalışmalarda etkin olarak gösterilmiştir. Doğrusal problemlerde ise Lagrange çarpanı tam olarak tanımlanabildiğinden genel çözüm tek bir iterasyonla elde edilebilir.

$$y'' + w^2 y = f(t), \quad (3.31)$$

$$f(t) = A \sin wt + B \cos wt, \quad (3.32)$$

bunun düzeltme fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau) - f(\tau)\} d\xi, \quad (3.33)$$

$\delta y(0) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bu düzeltme fonksiyoneli stasyoner hale getirirsek,

$$\delta y_{n+1}(t) = \delta y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau) - f(\tau)\} d\xi. \quad (3.34)$$

Aşağıdaki stasyoner koşullar meydana gelir.

$$\delta y_n : \lambda''(t) + w^2 \lambda(\tau) = 0,$$

$$\delta y_n' : \lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0,$$

$$\delta y : 1 - \lambda'(\tau)|_{\tau=t} = 0. \quad (3.35)$$

Burada Lagrange çarpanı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\lambda = \frac{1}{w} \sin w(\tau - 1). \quad (3.36)$$

Sonuç olarak aşağıdaki iterasyon formülü elde edilir.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \frac{1}{w} \int_0^t \sin w(\tau - 1) * \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau) - f(\tau)\} d\xi. \quad (3.37)$$

Eğer denklem (3.31)' in homojen çözümü başlangıç tahmini olarak kullanacak olursak;

$$y_0 = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt. \quad (3.38)$$

Denklem (3.37) deki iterasyon formülünden

$$y_0(t) = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt - \frac{A}{2w} t \cos wt + \frac{B}{w^2 - 1} (\sin t + \sin wt). \quad (3.39)$$

Bu sonuç denklem (3.31) in genel çözümüdür.

Bununla birlikte eğer düzeltme fonksiyoneline sınırlı varyasyon uygulayacak olursak tam çözüm sadece ardışık iterasyonlarla elde edilebilir. Denklem (3.31)' ün homojen olduğunu varsayarak düzeltme fonksiyoneli tekrar yazalım.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t \lambda \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau)\} d\tau, \quad (3.40)$$

burada y_n sınırlı fonksiyon olarak düşünülebilir ve $\delta y_n = 0$ olacak şekilde yukarıdaki düzeltme fonksiyonelinin stasyonere koşulları yoluyla Lagrange çarpanı aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda = \tau - t, \quad (3.41)$$

lagrange çarpanının yerine konmasıyla iterasyon formülü şu formu alır.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \int_0^t (\tau - t) \{y_n''(\tau) + w^2 y_n(\tau)\} d\tau. \quad (3.42)$$

Örneğin $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ve $y_0 = y(0) = 1$ başlangıç tahmini ile başlarsak sırasıyla aşağıdaki yaklaşık çözümleri elde ederiz.

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{2!} w^2 t^2, \quad (3.43)$$

$$y_2(t) = 1 - \frac{1}{2!} w^2 t^2 + \frac{1}{4!} w^4 t^4, \quad (3.44)$$

$$y_n(t) = 1 - \frac{1}{2!} w^2 t^2 + \frac{1}{4!} w^4 t^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} w^{2n} t^{2n}, \quad (3.45)$$

buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \cos wt$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm problemin gerçek çözümüdür.

Yukarıda görüldüğü üzere tahmin çözümleri Lagrange çarpımını yaklaşık tanımlamasından ötürü görece olarak daha yavaş bir şekilde gerçek çözüme yakınsar. Gerçekte denklem (3.41) ün, denklem (3.37) nin 1. mertebeden tahmini olduğunu aşağıdaki bağıntıdan görebiliriz.

$$\lambda = \frac{1}{w} \sin w(\tau - t) \approx \tau - t - \frac{1}{3!} w^2 (\tau - t)^3. \quad (3.46)$$

Doğrusal olmayan problemler için lagrange çarpımını basit bir şekilde elde edebilmek açısından doğrusal olmayan terimler sınırlı varyasyonlar olarak düşünülebilir.

BÖLÜM IV

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL VE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK METOTLAR VE VARYASYONEL İTERASYON METODUYLA ÇÖZÜMLERİ

4.1 İntegral Denklemler

4.1.1 Analitik metotların formülasyonu

4.1.1.1 Ardışık yaklaşım metodu

Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin her ikisine de uygulanabilir. Volterra integral denklemleri için $u_0(x)$ gibi bir başlangıç fonksiyonu alınır. Burada $u_0(x)$ 0, 1, x olarak alınabilir. Ardışık olarak

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1, \quad (4.1)$$

formülasyonunun uygulanmasıyla;

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \quad (4.2)$$

$u(x)$ çözümü elde edilir.

4.1.2 Analitik metotlarla çözümler

Örnek 4.1.1 $u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt$ (4.3)

Volterra integral denklemini göz önüne alalım.

Burada ardışık yerine koyma metodunu uygulayalım. Başlangıç fonksiyonu olarak,

$$u_0(x) = x \quad (4.4)$$

alalım. Başlangıç fonksiyonun

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1, \quad (4.5)$$

ardışık olarak (4.5) te verilen formülasyona göre $u(x)$ te yerleştirilirse;

$$u_1(x) = x + \int_0^x (t-x)t dt = x - \frac{1}{6}x^3, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= x + \int_0^x (t-x)\left(t - \frac{t^3}{6}\right) dt \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} u_3(x) &= x + \int_0^x (t-x)\left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5\right) dt \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7, \end{aligned} \quad (4.8)$$

genelleme yapılırsa;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad n \geq 0 \quad (4.9)$$

tam çözümü elde edilir. Dikkat edilirse (4.3) denkleminde elde edilen analitik çözüm Xu [47], çalışması tam çözüm ile aynıdır.

4.1.3 VIM formülasyonu

Varyasyonel İterasyon yöntemine (VIM) göre lineer olmayan bir diferansiyel denklem aşağıda belirtildiği gibi düşünülebilir.

$$Lu + Nu = g(x). \quad (4.10)$$

Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ ise homojen olmayan bir terimdir. $u_0(x)$ ' in $Lu = 0$ sisteminin bir çözümü olduğu varsayılarak belirli bir nokta için bu değer aşağıdaki gibi düzeltilebilir.

$$u_{\text{düzeltilmiş}}(1) = u_0(1) + \int_0^1 \lambda (Lu_0 + Nu_0 - g) dx. \quad (4.11)$$

Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir. Denklemin sağındaki 2. terim ise düzeltme olarak adlandırılır. Bu yöntem aşağıdaki şekilde bir iteratif yöntemle dönüştürülebilir.

$$u_{n+1}(x_0) = u_n(x_0) + \int_0^{x_0} \lambda (Lu_0 + Nu_0 - g) dx. \quad (4.12)$$

Burada $u_0(x)$ muhtemel değişkenlerle bir başlangıç tahmini ve u_n , $\delta u_n = 0$ koşulunu sağlayan sınırlı varyasyon olarak düşünülebilir. Herhangi bir x_0 için bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda (Lu_n(\xi) + Nu_n(\xi) - g(\xi)) d\xi. \quad (4.13)$$

Bu denklem bir düzeltme fonksiyonelidir. İntegral denklemlerde ise λ Lagrange çarpanının sorunun içinde verildiğini kabul edip, uygun bir başlangıç yaklaşımı ile başlanır. Ardışık iterasyonlarda önceki iterasyon yazılarak tam çözüme ulaşılır.

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_n(t) dt, \quad n \geq 0, \quad (4.14)$$

formülasyonu uygulanır. Sonuç olarak integral denklemlerdeki VIM formülasyonu ardışık yaklaşım metoduyla benzerlik göstermektedir.

4.1.4 VIM çözümleri

$$\text{Örnek 4.1.2 } u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt \quad (4.15)$$

Volterra integral denklemini göz önüne alalım. Burada diferansiyellenebilir bir $v(x)$ fonksiyonu yardımıyla diferansiyel denklemler için VIM formülasyonundan integral denklemde kullanılan VIM formülasyonu (ardışık yaklaşım metoduna benzeyen) elde edildi.

Burada başlangıç şartları olmadığından her iki taraftan Leibnitz Kuralına göre x' e göre iki kez türev alınırsa;

$$u'(x) = 1 + (t-x)u(t) \Big|_{t=x} + \int_0^x -u(t)dt = 1 - \int_0^x u(t)dt, \quad (4.16)$$

$$u''(x) = (u'(x))' = \left(1 - \int_0^x u(t) dt \right)' = -u(x), \quad (4.17)$$

bu denklem düzenlenirse;

$$u''(x) + u(x) = 0. \quad (4.18)$$

Buradan Varyasyonel iterasyon formülü

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (t-x)(u_n''(t) + u_n(t)) dt \quad (4.19)$$

şeklinde yazılır. İterasyona geçiş adımı için $v(x)$ tanımlayalım.

$$v(x) = \int_0^x (t-x)u(t) dt, \quad (4.20)$$

$$v'(x) = (t-x)v(t) \Big|_{t=x} + \int_0^x -u(t) dt = -\int_0^x u(t) dt, \quad (4.21)$$

$$v''(x) = (v'(x))' = \left(-\int_0^x u(t) dt \right)' = -u(x), \quad (4.22)$$

buradan

$$v''(x) + u(x) = 0, \quad (4.23)$$

elde edilen (4.23) denklem $v(x)$ ' in (4.18) denkleminin özel bir çözümü olduğu anlamına gelir. Burada u_0 başlangıç ve sınır şartlarını sağlayan başlangıç çözümü olmak üzere, basit bir şekilde iterasyon formüle edilirse;

$$u_{n+1}(x) = u_0(x) + v_n(x) \quad (4.24)$$

elde edilir.

$$u_0(x) = u(0) + u'(0)x = x \quad (4.25)$$

başlangıç yaklaşımı alınır. Buradan iterasyon

$$u_{n+1}(x) = u_0(x) + v_n(x) = x + \int_0^x (t-x)u_n(t) dt \quad (4.26)$$

formüle edilir. Ardışık sonuçlar,

$$u_1(x) = x + \int_0^x (t-x)u_0(t) dt = x + \int_0^x (t-x)t dt = x - \frac{1}{6}x^3, \quad (4.27)$$

$$u_2(x) = x + \int_0^x (t-x)u_1(t) dt = x + \int_0^x (t-x) \left(t - \frac{1}{6}t^3 \right) dt$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5, \quad (4.28)$$

$$u_3(x) = x + \int_0^x (t-x)u_2(t)dt = x + \int_0^x (t-x) \left(t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 \right) dt$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7, \quad (4.29)$$

•
•
•

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (4.30)$$

kapalı formda elde edilen çözümdür. İntegral denklemlerde VIM formülasyonu, temel analitik metotlarda verilen ardışık yaklaşım metoduna benzemektedir.

Bu sebeple integro-diferansiyel denklemlerde Varyasyonel iterasyon metodunu (VIM) kullanarak çözüm bulmak etkin ve farklı bir yoldur.

Çizelge 4.1 (4.15) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri $u_n(x), n=3$	Gerçek Çözümler $u_{ex}(x)$	Hata Analizi $ u_{ex}(x) - u_n(x) $
1.1	0.8912009331150794	0.8912073600614354	0.0000006427
1.2	0.9320250514285715	0.9320390859672263	0.0000140345
1.3	0.9635294064087302	0.963558185417193	0.000028779
1.4	0.9853937955555556	0.9854497299884601	0.0000559344
1.5	0.9973911830357143	0.9974949866040544	0.000103804
1.6	0.9993885663492064	0.9995736030415051	0.000185037
1.7	0.9913464429960318	0.9916648104524686	0.000318367
1.8	0.9913464429960318	0.9738476308781951	0.000530854
1.9	0.9454393662896826	0.9463000876874145	0.000860721
2	0.9079365079365079	0.9092974268256817	0.00136092

4.2 İntegro-Diferansiyel Denklemler

4.2.1 Analitik metotların formülasyonu

Burada bir sonraki bölümde yer alan örneklerin çözümlerinde kullanılan analitik metotların formülasyonuna yer vereceğiz.

4.2.1.1 Volterra integral denkleme dönüştürme metodu

Verilen bir Volterra integro-diferansiyel denklem kolayca Volterra integral denkleme dönüştürülerek de çözülebilir. Bunun için Volterra integro-diferansiyel denklemde $K(x, t) = K(x - t)$ şartı aranır. Bundan sonra verilen integro-diferansiyel denklemin her iki tarafından başlangıç şartları kullanılarak 0' dan x' e kadar integral alınır. Burada çoklu integrallerle karşılaşılacağı için Bölüm 2 (2.6) da verilen çoklu integrali tek integrale dönüştürme formülü uygulanır.

4.2.1.2 Fredholm integral denkleme dönüştürme metodu

Verilen bir Fredholm integro-diferansiyel denklem kolayca Fredholm integral denkleme dönüştürülerek de çözülebilir. Bunun için Fredholm integro-diferansiyel denklemde eşitliğin sağ tarafındaki integral işareti altındaki bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ in sadece $u(x)$ olarak bulunması; yani türevli hali bulunmaması şartı aranır. Bundan sonra verilen integro-diferansiyel denklemin her iki tarafından başlangıç şartları kullanılarak 0' dan x' e kadar integral alınır. Böylece Fredholm integral denklemini elde edilir.

4.2.1.3 Seri yoluyla çözüm metodu

Bu metotta Volterra integro-diferansiyel denkleme ya direk seri çözümünü uygulanır ya da Volterra integral denkleme dönüştürdükten sonra seri çözümüne uygulanır.

- Standard Formda bir Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u^n(x) = f(x) + g(x) \int_0^x h(t)u(t) dt, \quad u^{(n)} = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1), \quad (4.31)$$

$u(x)$ in analitik bir fonksiyon olduğu kabul edilerek;

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots \quad (4.32)$$

a_k daha sonra belirlenecek bilinmeyen katsayılar olmak üzere $u(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında seriye açılır. $u(x)$ seri halde verilen İntegro-diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = f(x) + g(x) \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (4.33)$$

elde edilir. Buradan Taylor açılımı yapıp, sağ tarafta verilen integral hesaplanır. Daha sonra eşitliğin her iki tarafında aynı kuvvetli x katsayıları eşitlenir. Verilen başlangıç şartlarından;

$$a_0 = u(0), \quad a_1 = u'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} u''(0), \quad a_3, \dots, a_k \quad (4.34)$$

katsayıları belirlenerek $u(x)$ çözümü elde edilir.

- Volterra integral denkleme dönüştürerek Seri çözüm metodunda;

Volterra integral denkleme dönüştürerek elde edilen Volterra integral denklemini

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u(t) dt \quad (4.35)$$

formundadır. Burada $u(x)$ in analitik bir fonksiyon olduğu kabul edilerek;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.36)$$

a_n daha sonra belirlenecek bilinmeyen katsayılar olmak üzere $u(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında seriye açılır. $u(x)$ seri halde verilen (4.36) da yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \quad n \geq 0 \quad (4.37)$$

elde edilir. Buradan Taylor açılımı yapıp, sağ tarafta verilen integral hesaplanır.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) a_0 dt + \lambda \int_0^x K(x,t) a_1 t dt + \lambda \int_0^x K(x,t) a_1 t^2 dt + \dots \quad (4.38)$$

Daha sonra eşitliğin her iki tarafında aynı dereceli x katsayıları eşitlenir. Bilinmeyen a_n katsayıları belirlenerek $u(x)$ çözümü elde edilir.

4.2.1.4 Ardışık yaklaşım metodu

İntegro-diferansiyel denklemlerde ardışık yaklaşım metodu integral denkleme dönüştürme yaptıktan sonra uygulanır. Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin her ikisine de uygulanabilir. (4.35) teki Volterra integral denklemi için $u_0(x)$ gibi bir başlangıç fonksiyonu alınır. Burada $u_0(x)$ 0, 1, x olarak alınabilir. Ardışık olarak,

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t) dt, \quad n \geq 1, \quad (4.39)$$

formülasyonunun uygulanmasıyla,

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \quad (4.40)$$

$u(x)$ tam çözümü elde edilir.

4.2.1.5 Direk çözüm metodu

Fredholm İntegro-diferansiyel denklemine direk çözüm metodu integral denkleme dönüştürme yaptıktan sonra uygulanır.

$$K(x,t) = g(x)h(t) \quad (4.41)$$

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t) dt, \quad (4.42)$$

şeklinde ayrılabilir çekirdek ve α nümerik bir değer olmak üzere;

$$u(x) = f(x) + \lambda g(x) \int_a^b h(t)u(t) dt, \quad (4.43)$$

fredholm integral denkleminde α yazılırsa;

$$u(x) = f(x) + \lambda \alpha g(x) \quad (4.44)$$

elde edilir. Burada α yı bulmak için (4.42) denkleminde (4.44) denkleminin yazılır. Elde edilen α nümerik değerinin (4.44) te yerleştirilmesiyle $u(x)$ çözümü elde edilir.

4.2.2 Analitik metotlarla çözümler

Örnek 4.2.3 $u''(x) = -8 - \frac{1}{3}(x^3 - x^4) + \int_0^x (x-t)u(t)dt$; $u(0) = 0$, $u'(0) = 2$ (4.45)

Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Birinci adım olarak verilen integro-diferansiyel denklemini Standard Volterra İntegral denklemine dönüştürelim. Başlangıç değerlerini ve Bölüm 2 deki (2.64) tek integrale indirme formülünü kullanarak 0' dan x' e her iki taraftan iki kez integral alalım.

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2 - 8x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) + \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t) dt dt \\ &= 2 - 8x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) + \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt, \end{aligned} \quad (4.46)$$

tekrar integral alırsak;

$$\begin{aligned} u(x) &= 2 - 8x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) + \int_0^x \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t) dt dt dt \\ &= 2x - 4x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^6}{30} \right) + \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 u(t) dt, \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilen denklem Standard Volterra İntegral denkemi olup; şimdi seri yoluyla çözüm metodunu kullanalım.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.48)$$

serisi (4.47) nin her iki tarafında yerleştirilir,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 2x - 4x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^6}{30} \right) + \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &= 2x - 4x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^6}{30} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \int_0^x \left(x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+3} \right) dt, \end{aligned} \quad (4.49)$$

ve sağ taraftaki integral hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 2x - 4x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^6}{30} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right) a_n x^{n+4} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir. Buradan seri terim içeren ifadeler açılıp düzenlenir,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = 2x - 4x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^6}{30} \right) + \frac{1}{4!} a_0x^4 + \frac{1}{120} a_1x^5 + \frac{1}{360} a_2x^6 + \frac{1}{840} a_3x^6 + \dots \quad (4.51)$$

eşitliğin her iki tarafında aynı dereceli x katsayıları eşitlenir,

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 2,$$

$$a_2 = -4,$$

$$a_3 = 0,$$

$$a_4 = \frac{a_0}{24} = 0,$$

$$a_5 = \frac{a_5}{120} - \frac{1}{60} = 0, \dots$$

ve genelleme yapılırsa,

$$a_n = 0, \quad n > 2 \text{ ve } n \neq 0 \text{ için}, \quad (4.52)$$

sonuç olarak; elde edilen katsayılar (4.48) seri çözümünde yazıldığında,

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = 2x - 4x^2 \quad (4.53)$$

çözüm olarak elde edilir. (4.45) denklemi Wazwaz [62], alıştırmalardan alınmıştır. Bu denklemden elde edilen analitik çözüm Wazwaz [62], alıştırma cevapları kısmındaki gerçek çözümle aynıdır.

Örnek 4.2.4 $u^{(4)}(x) = -x + \frac{1}{2!}x^2 - \int_0^x (x-t)u(t)dt,$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 1 \quad (4.54)$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Birinci adım olarak verilen integro-diferansiyel denklemi Standard Volterra İntegral Denklemine dönüştürelim. Başlangıç değerlerini ve Bölüm 2 (2.68) de verilen tek integrale indirme formülünü kullanarak 0' dan x' e her iki taraftan iki kez integral alalım.

$$u'''(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (4.55)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt,$$

$$\begin{aligned}
u''(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24}x^4 - \int_0^x \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t)dt dt dt \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 u(t) dt, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'(x) &= -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} - \int_0^x \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t)dt dt dt dt \\
&= -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{24} \int_0^x (x-t)^4 u(t) dt, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (x-t)u(t)dt dt dt dt dt \\
&= 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{1}{120} \int_0^x (x-t)^5 u(t) dt, \tag{4.58}
\end{aligned}$$

standard Volterra integral denklemleri elde edilir. Şimdi Ardışık Yaklaşım Metodunu kullanarak çözüm yapalım Başlangıç fonksiyonu olarak,

$$u_0(x) = 0 \tag{4.59}$$

alınır. Başlangıç fonksiyonunu formülasyona göre $u(x)$ te yerine yazarak ardışık ilerlenirse;

$$u_1(x) = 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}, \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{1}{120} \int_0^x (x-t)^5 u_1(t) dt \\
&= 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} - \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{x^{12}}{479001600}, \tag{4.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{1}{120} \int_0^x (x-t)^5 u_2(t) dt \\
&= 1 - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} - \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{x^{13}}{6227020800} \\
&\quad + \frac{x^{15}}{1307674368000} - \frac{x^{17}}{355687428096000} + \frac{x^{18}}{\dots}, \tag{4.62}
\end{aligned}$$

ve genelleme yapılırsa;

$$u_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad n \geq 0, \tag{4.63}$$

elde edilir. Sonuç olarak; verilen $u(x)$ denkleminin çözümü için $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{k=0}^n (-1)^{2k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \\ &= 1 - \sin x \end{aligned} \quad (4.64)$$

çözümü elde edilir. (4.54) denklemi Wazwaz [62], alıştırılardan alınmıştır. Bu denklemden elde edilen analitik çözüm Wazwaz [62], alıştırma cevapları kısmındaki gerçek çözümle aynıdır.

Örnek 4.2.5 $u''(x) = e^x - \frac{4}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$, (4.65)

fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Birinci adım olarak verilen integro-diferansiyel denklemi standard fredholm integral denkleme dönüştürelim. Başlangıç değerlerini kullanarak x ' e göre iki kez integral alalım.

$$u'(x) = 1 + e^x - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^2}{2} \int_0^1 tu(t)dt, \quad (4.66)$$

$$u(x) = x + e^x - \frac{2x^3}{9} + \frac{x^3}{6} \int_0^1 tu(t)dt, \quad (4.67)$$

standard fredholm integral denklemi elde edilir. Şimdi direk hesaplama yöntemini kullanarak çözüm yapalım. $u(x)$ içinde α gibi bir sabiti

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt, \quad (4.68)$$

olsun. (4.67) içindeki integralli ifade içinde (4.68) de verilen α yazılırsa,

$$u(x) = x + e^x - \frac{2x^3}{9} + \frac{x^3}{6} \alpha \quad (4.69)$$

elde edilir. (4.69) un (4.68) de verilen α içinde yazılmasıyla,

$$\alpha = \int_0^1 t \left(t + e^t - \frac{2t^3}{9} + \frac{t^3}{6} \alpha \right) dt \quad (4.70)$$

elde edilir. (4.70) de verilen integral hesaplandığında $\alpha = \frac{4}{3}$ bulunur. Bu değer (4.69) da

verilen $u(x)$ içindeki α nın değeri yerine yazılırsa,

$$u(x) = x + e^x \quad (4.71)$$

çözümü elde edilir. (4.65) denklemi Xu [47] çalışmasından alınmıştır. Bu denklemden elde edilen analitik çözüm; varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak çözüm bulan Xu [47], çalışması çözümü ile aynıdır.

$$\textbf{Örnek 4.2.6} \quad u''(x) = -\sin x + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \quad (4.72)$$

fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Birinci adım olarak verilen integro-diferansiyel denklemi standard fredholm integral denklemine dönüştürelim. Başlangıç değerlerini kullanarak 0' dan x' e kadar her iki taraftan iki kez integral alalım.

$$u'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \int_0^{\pi/2} tu(t)dt \quad (4.73)$$

$$u(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} \int_0^{\pi/2} tu(t)dt \quad (4.74)$$

standard fredholm integral denklemi elde edilir. Şimdi ardışık yaklaşım metodunu kullanarak çözüm yapalım. Başlangıç fonksiyonunu

$$u_0(x) = 0 \quad (4.75)$$

alalım. Başlangıç fonksiyonunu, formülasyona göre $u(x)$ te yerine yazarak ardışık ilerlerirse;

$$u_1(x) = \sin x + \frac{x^3}{6}, \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \sin x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} \int_0^{\pi/2} t(\sin t + \frac{t^3}{6})dt \\ &= \sin x - \left(\frac{x^3}{6}\right) \frac{\pi}{30.2^5}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} u_3(x) &= \sin x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} \int_0^{\pi/2} t(\sin t - \left(\frac{t^3}{6}\right) \frac{\pi^5}{30.2^5})dt \\ &= \sin x - \frac{x^3}{6} \left(\frac{\pi^5}{30.2^5}\right)^2, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$u_4(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} \int_0^{\pi/2} t(\sin t + \frac{t^3 \pi^{10}}{6.30^2.2^{10}})dt$$

$$= \sin x + \left(\frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{\pi^5}{30.2^5}\right)^3, \quad (4.79)$$

bu şekilde ilerlenirse, n. yaklaşım;

$$u_n(x) = \sin x + \left(\frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{\pi^5}{30.2^5}\right)^{n-1} \quad (4.80)$$

elde edilir. Buradan limit alınırsa;

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin x + \left(\frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{\pi^5}{30.2^5}\right)^{n-1} \right) \\ &= \sin x \end{aligned} \quad (4.81)$$

çözümü bulunur. (4.72) denklemi Wazwaz [62], alıştırılardan alınmıştır. Bu denklemden elde edilen analitik çözüm Wazwaz [62], alıştırma cevapları kısmındaki gerçek çözümle aynıdır.

Örnek 4.2.7

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(g'(x))^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t)^2 + (g(t))^2) dt; f(0) = 1, f'(0) = 2, \quad (4.82)$$

$$g''(x) = -1 + x^2 - xf'(x) + \frac{1}{4} \int_0^x (f(t)^2 - (g(t))^2) dt; g(0) = -1, g'(0) = 0, \quad (4.83)$$

kuple lineer olmayan integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bunun için verilen integro-diferansiyel denklemlere ayrı ayrı seri çözüm metodunu uygulayalım.

(4.82) de verilen $f''(x)$ i seri formda elde etmek için seri açılım üzerinden türev alınırsa;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (4.84)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \quad (4.85)$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots \quad (4.86)$$

elde edilir. (4.83) de verilen $g''(x)$ i seri formda elde etmek için seri açılım üzerinden türev alınırsa;

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots \quad (4.87)$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots \quad (4.88)$$

$$g''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} = 2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2 + \dots \quad (4.89)$$

elde edilir. Şimdi (4.82) ile verilen $f''(x)$ integro-diferansiyel denkleminin seri haldeki eşitlerini yazalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} &= 1 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \left((a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)^2 + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots)^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots &= 1 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} (b_1^2 + 4b_1 b_2 x + (6b_1 b_3 x + 4b_2^2) x^2 + \dots) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x (a_0^2 + 2a_0 a_1 t + \dots b_0^2 + 2b_0 b_1 t + \dots)^2 dt \\ &= 1 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} b_1^2 - 2b_1 b_2 x - (3b_1 b_3 + 2b_2^2) x^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{2} (a_0^2 + b_0^2) x + (a_0 a_1 + b_0 b_1) \frac{x^2}{2} + (2a_0 a_2 + a_1^2 \dots) \frac{x^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (4.91)$$

Başlangıç şartlarından;

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad b_0 = -1, \quad b_1 = 0$$

elde edilir. Buradan eşitliğin her iki tarafında aynı dereceli olan x katsayıları eşitlenirse;

$$2a_2 = 1 - \frac{1}{2} b_1^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!},$$

$$6a_3 = -2b_1 b_2 + \frac{1}{2} (a_0^2 + b_0^2) \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!},$$

$$12a_4 = (3b_1 b_3 + 2b_2^2 + a_0 a_1 + b_0 b_1) \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4!},$$

genelleme olarak,

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n \geq 2, \quad (4.92)$$

elde edilir. Katsayılar (4.84) te verilen $f(x)$ seri açılımında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \\ &= 1 + 2x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \dots \end{aligned}$$

$$= e^x + x \quad (4.93)$$

çözümü elde edilir. Şimdi (4.83) ile verilen $g''(x)$ integro-diferansiyel denkleminin seri haldeki eşitlerini yazalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} = -1 + x^2 - x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) + \frac{1}{4} \int_0^x (a_0^2 - b_0^2 + 2(a_0a_1 - b_0b_1)t^2 + (2a_0a_2 + a_1^2 - 2b_0b_2 - b_1^2)t^2 + \dots) dt, \quad (4.94)$$

$$2b_2 + 6b_3x + 12b_4x^2 + \dots = -1 - x - x^2 - a_2x^3 - \dots + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}(a_2 + b_2 + 2)x^3, \quad (4.95)$$

elde edilir. Buradan eşitliğin her iki tarafında aynı dereceli olan x katsayıları eşitlenirse,

$$2b_2 = -1 \Rightarrow b_2 = -\frac{1}{2!},$$

$$6b_3 = -1 \Rightarrow b_3 = -\frac{1}{3!},$$

$$12b_4 = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow b_4 = -\frac{1}{4!},$$

genelleme olarak,

$$b_n = -\frac{1}{n!}, \quad n \geq 2, \quad (4.96)$$

elde edilir. Katsayılar (4.87) de verilen $g(x)$ seri açılımında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots \\ &= -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \dots \\ &= x - e^x \end{aligned} \quad (4.97)$$

çözümü elde edilir. (4.82) ve (4.83) kuple denklemini Biazar, Ghazvini, Eslami [30], çalışmasından alınmıştır. Bu kuple denklemden elde edilen analitik çözüm; homotopy perturbation metodunu (HPM) kullanarak çözüm bulan Biazar, Ghazvini, Eslami [30], çalışması çözümü ile aynıdır.

4.2.3 VIM formülasyonu

Diferansiyel denklemlerde VIM formülasyonuna göre,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda (Lu_n(\xi) + Nu_n(\xi) - g(\xi)) d\xi. \quad (4.98)$$

Burada $u_0(x)$ muhtemel değişkenlerle bir başlangıç tahmini ve $u_n, \delta u_n = 0$ koşulunu sağlayan sınırlı varyasyon idi. λ Lagrange çarpanı varyasyonel teori yardımıyla bulunuyor ve denklemin derecesine göre değişiyordu. Elimizde bulunan integro-diferansiyel denklem ikinci dereceden bir denklem ise λ Lagrange çarpanı

$$\lambda = (\xi - x) \quad (4.99)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (4.98) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (\xi - x) (Lu_n(\xi) + Nu_n(\xi) - g(\xi)) d\xi, \quad (4.100)$$

formülasyonu uygulanır.

4.2.4 VIM çözümleri

Burada Bölüm 4.2.2 de analitik yollarla çözülen soruların VIM çözümlerini yapalım.

Örnek 4.2.8 $u''(x) = -8 - \frac{1}{3}(x^3 - x^4) + \int_0^x (x-t)u(t)dt; u(0) = 0, u'(0) = 2 \quad (4.101)$

voltterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$\lambda(s) = s - x, \quad (4.102)$$

Lagrange çarpanı verilsin. a ve b daha sonradan belirlenecek bilinmeyen sabitler olmak üzere başlangıç yaklaşımı,

$$u_0(x) = a + bx \quad (4.103)$$

alınsın. Buradan

$$F(u_n(x)) = -8 - \frac{1}{3}(x^3 - x^4) + \int_0^x (x-t)u_n(t)dt \quad (4.104)$$

olmak üzere, VIM iterasyon formülünden;

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x (s-x)(u''_n(s) - F(u_n(s))) ds \\ &= u_n(x) + \int_0^x (s-x)(u''_n(s) + 8 + \frac{1}{3}(s^3 - s^4) - \int_0^s (s-t)u_n(t)dt) ds, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.105)$$

iterasyon formülü elde edilir. n=0 için 1. iterasyon;

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= u_0(x) + \int_0^x (s-x)(u''_0(s) - F[u_0(s)])ds \\
&= u_0(x) + \int_0^x (s-x)(u''_0(s) + 8 + \frac{1}{3}(s^3 - s^4) - \int_0^s (s-t)(a+bt)dt)ds \\
&= a + bx - 4x^2 + \frac{ax^4}{24} - \frac{x^5}{60} + \frac{bx^5}{120} + \frac{x^6}{90}
\end{aligned} \tag{4.106}$$

elde edilir. Başlangıç şartları (4.106) da verilen $u_1(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
u_1(0) &= a = 0, \\
u_1'(0) &= b = 2,
\end{aligned} \tag{4.107a,b}$$

bilinmeyen sabitler $a = 0$, $b = 2$ elde edilir.

Aynı şekilde $n=1$ için 2. iterasyondan

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= u_1(x) + \int_0^x (s-x)(u''_1(s) - F[u_1(s)])ds \\
&= u_0(x) + \int_0^x (s-x)(u''_0(s) + 8 + \frac{1}{3}(s^3 - s^4) \\
&\quad - \int_0^s (s-t)(a+bt - 4t^2 + \frac{at^4}{24} - \frac{t^5}{60} + \frac{bt^5}{120} + \frac{t^6}{90})dt)ds \\
&= a + bx - 4x^2 + \frac{ax^4}{24} - \frac{x^5}{60} + \frac{bx^5}{120} + \frac{ax^8}{40320} - \frac{x^9}{181440} + \frac{bx^9}{362880} + \frac{x^{10}}{453600}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

elde edilir. Başlangıç şartları (4.108) de verilen $u_2(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
u_2(0) &= a = 0, \\
u_2'(0) &= 2 = b,
\end{aligned} \tag{4.109a, b}$$

bilinmeyen sabitler $a = 0$, $b = 2$ elde edilir. 1. ve 2. iterasyondan elde ettiğimiz sabitler

$u_1(x)$ ve $u_2(x)$ te yerine yazıldığında;

$$u_1(x) = 2x - 4x^2, \tag{4.110}$$

$$u_2(x) = 2x - 4x^2, \tag{4.111}$$

çözümlerinin elde edildiği görülür.

Çizelge 4.2 (4.101) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri $u_n(x), n=2$	Gerçek Çözümler $u_{ex}(x)$	Hata Analizi $ u_{ex}(x) - u_n(x) $
1.1	-2.6203159888888896	-2.64	0.019684011111110955
1.2	-3.3268223999999997	-3.36	0.03317760000000014
1.3	-4.1063687888888889	-4.16	0.05363121111111102
1.4	-4.9563384888888888	-5.04	0.08366151111111098
1.5	-5.8734375	-6	0.12656250000000036
1.6	-6.853586488888889	-7.04	0.1864135111111116
1.7	-7.891804788888887	-8.16	0.2681952111111112
1.8	-8.982086400000002	-9.36	0.3779135999999994
1.9	-10.117267988888889	-10.64	0.5227320111111116
2	-11.288888888888889	-12	0.7111111111111104

Örnek 4.2.9 $u^{(4)}(x) = -x + \frac{1}{2!}x^2 - \int_0^x (x-t)u(t)dt,$

$u(0) = 1, u'(0) = -1, u''(0) = 0, u'''(0) = 1,$ (4.112)

Volterra integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$\lambda(s) = \frac{(s-x)^3}{6},$ (4.113)

Lagrange çarpanı verilsin. a, b, c ve d daha sonradan belirlenecek bilinmeyen sabitler olmak üzere başlangıç yaklaşımı,

$u_0(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ (4.114)

olarak alınsın. Buradan

$F(u_n(x)) = -x + \frac{1}{2!}x^2 - \int_0^x (x-t)u_n(t)dt$ (4.115)

olmak üzere, VIM iterasyon formülünden;

$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \frac{(s-x)^3}{6} (u_n^{(4)}(s) - F(u_n(s))) ds$ (4.116)

$= u_n(x) + \int_0^x \frac{(s-x)^3}{6} (u_n^{(4)}(s) + s - \frac{1}{2!}s^2 + \int_0^s (s-t)u_n(t)dt) ds, n = 0,1,\dots,$ (4.117)

iterasyon formülü elde edilir. n=0 için 1. iterasyondan;

$u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x \frac{(s-x)^3}{6} (u_0^{(4)}(s) - F[u_0(s)]) ds$

$$\begin{aligned}
&= u_0(x) + \int_0^x \frac{(s-x)^3}{6} (u_0^{(4)}(s) + s - \frac{1}{2!} s^2 + \int_0^s (s-t)u_0(t)dt) ds \\
&= a + bx + cx^2 + dx^3 - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{ax^6}{720} - \frac{bx^7}{5040} - \frac{cx^8}{20160} - \frac{dx^9}{60480}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

elde edilir. Başlangıç şartları $u_1(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
u_1(0) &= a = 1, \\
u_1'(0) &= b = -1, \\
u_1''(0) &= 2c = 0, \\
u_1'''(0) &= 6d = 1,
\end{aligned} \tag{4.119a, b, c, d}$$

bilinmeyen sabitler $a = 1, b = -1, c = 0, d = 0,166667$ elde edilir. 1. iterasyondan elde ettiğimiz sabitler $u_1(x)$ te yerine yazıldığında;

$$u_1(x) = 1 - x + 0.166667x^3 - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} - 2.75573x10^{-6}x^9 \tag{4.120}$$

elde edilir. 2. iterasyon;

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= u_1(x) + \int_0^x \frac{(s-x)^3}{6} (u_1^{(4)}(s) + s - \frac{1}{2!} s^2 + \int_0^s (s-t)u_1(t)dt) ds \\
&= a + bx + cx^2 + dx^3 - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{ax^6}{720} - \frac{bx^7}{5040} - \frac{cx^8}{20160} - \frac{dx^9}{60480} \\
&\quad + \frac{x^{11}}{39916800} - \frac{x^{12}}{479001600} + \frac{ax^{12}}{479001600} + \frac{bx^{13}}{6227020800} + \frac{cx^{14}}{43589145600} \\
&\quad + \frac{ax^{15}}{217945728000}
\end{aligned} \tag{4.121}$$

elde edilir. Başlangıç şartları $u_2(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
u_2(0) &= a = 1, \\
u_2'(0) &= b = -1, \\
u_2''(0) &= 2c = 0, \\
u_2'''(0) &= 6d = 1,
\end{aligned} \tag{4.122a, b, c, d}$$

bilinmeyen sabitler $a = 1, b = -1, c = 0, d = 0,166667$ elde edilir. 2. iterasyondan elde ettiğimiz sabitler $u_2(x)$ te yerine yazıldığında,

$$u_2(x) = 1 - x + 0.166667x^3 - \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} - 2.75573x10^{-6}x^9$$

$$+\frac{x^{11}}{39916800}-\frac{x^{13}}{6227020800}+7.64716x10^{-13}x^{15}, \quad (4.123)$$

1. ve 2. iterasyondan elde edilen çözümlerin $(1 - \sin x)$ seri açılımı olduğu görülür.

$$u(x) = 1 - \sin x \quad (4.124)$$

çözümü elde edilir.

Çizelge 4.3 (4.112) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri $u_n(x), n=2$	Gerçek Çözümler $u_{ex}(x)$	Hata Analizi $ u_{ex}(x) - u_3(x) $
1.1	0.10879263993857878	0.10879263993856458	1.4197×10^{-14}
1.2	0.06796091403283575	0.06796091403277371	6.20337×10^{-14}
1.3	0.036441814583048966	0.03644181458280704	2.41925×10^{-13}
1.4	0.014550270012392152	0.014550270011539856	8.52296×10^{-13}
1.5	0.0025050133986974686	0.0025050133959455545	2.75191×10^{-12}
1.6	0.00042639696673104103	0.0004263969584948901	8.23615×10^{-12}
1.7	0.008335189570593614	0.00833518954753143	2.30622×10^{-11}
1.8	0.026152369182683065	0.026152369121804853	6.08782×10^{-11}
1.9	0.053699912465051666	0.05369991231258553	1.52466×10^{-10}
2	0.0907025735385523	0.09070257317435904	3.64193×10^{-10}

Örnek 4.2.10 $u''(x) = e^x - \frac{4}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt; u(0) = 1, u'(0) = 2$ (4.125)

Fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$\lambda(s) = (s - x) \quad (4.126)$$

lagrange çarpanı verilsin. a, b ve c daha sonradan belirlenecek bilinmeyen sabitler olmak üzere başlangıç yaklaşımı;

$$u_0(x) = a + bx + ce^x \quad (4.127)$$

olarak alınsın. Buradan

$$F(u_n(x)) = e^x - \frac{4}{3}x + \int_0^1 xtu_n(t)dt, \quad (4.128)$$

VIM iterasyon formülünden;

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x (s-x)(u_n''(s) - F(u_n(s))) ds \\ &= u_n(x) + \int_0^x (s-x)(u_n''(s) - e^s + \frac{4}{3}s - \int_0^1 st u_n(t)dt) ds, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.129)$$

iterasyon formülü elde edilir. $n=0$ için 1. iterasyon;

$$u_1(x) = u_0(x) + \int_0^x (s-x)(u_0''(s) - e^s + \frac{4}{3}s - \int_0^1 stu_0(t)dt)ds$$

$$= -1 + a + c + e^x + (-1+b)x + cx + \frac{ax^3}{12} + \frac{1}{18}(-4+b+3c)x^3 \quad (4.130)$$

elde edilir. Başlangıç şartları $u_1(x)$ te yerine yazılırsa;

$$u_1(0) = a + c = 1,$$

$$u_1'(0) = b + c = 2, \quad (4.131a, b, c)$$

$$u_0''(0) = c = 1,$$

bilinmeyen sabitler $a=0$, $b=1$, $c=1$ elde edilir. 1. ve 2. iterasyondan elde ettiğimiz sabitler $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ te yerine yazıldığında;

$$u_0(x) = x + e^x, \quad u_1(x) = x + e^x \quad (4.132)$$

elde edilir. Buradan tam çözümün $u(x) = x + e^x$ olduğu görülür.

Çizelge 4.4 (4.125) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri $u_n(x), n=1$	Gerçek Çözümler $u_{ex}(x)$	Hata Analizi $ u_{ex}(x) - u_n(x) $
0.1	1.2051709180756478	1.2051709180756478	0
0.2	1.4214027581601698	1.4214027581601698	0
0.3	1.6498588075760032	1.6498588075760032	0
0.4	1.8918246976412703	1.8918246976412703	0
0.5	2.148721270700128	2.148721270700128	0
0.6	2.4221188003905088	2.4221188003905088	0
0.7	2.7137527074704764	2.7137527074704764	0
0.8	3.025540928492468	3.025540928492468	0
0.9	3.3596031111569498	3.3596031111569498	0
1	3.718281828459045	3.718281828459045	0

Örnek 4.2.11 $u''(x) = -\sin x + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt$; $u(0) = 0, u'(0) = 1$ (4.133)

fredholm integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$\lambda(s) = (s - x), \quad (4.134)$$

lagrange çarpanı verilsin. a ve b daha sonradan belirlenecek bilinmeyen sabitler olmak üzere başlangıç yaklaşımı;

$$u_0(x) = a + b \sin x \quad (4.135)$$

olarak alınsın. Buradan

$$F(u_n(x)) = -\sin x + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu_n(t)dt \quad (4.136)$$

olmak üzere, VIM iterasyon formülünden;

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= u_n(x) + \int_0^x (s-x)(u_n''(s) - F(u_n(s))) ds \\ &= u_n(x) + \int_0^x (s-x)(u_n''(s) + \sin s - s + \int_0^{\frac{\pi}{2}} st u_n(t) dt) ds, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.137)$$

elde edilir. n=0 için 1. iterasyon;

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0(x) + \int_0^x (s-x)((s) + \sin s - s + \int_0^{\frac{\pi}{2}} st u_0(t) dt) ds \\ &= a + (-1+b)x - \frac{1}{48}(-8+8b+a\pi^2)x^3 + \sin x \end{aligned} \quad (4.138)$$

elde edilir. Başlangıç şartları $u_1(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_1(0) &= a = 0, \\ u_1'(0) &= b = 1, \end{aligned} \quad (4.139a, b)$$

bilinmeyen sabitler $a = 0$, $b = 1$ elde edilir. 2. iterasyondan

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) + \int_0^x (s-x)(u_1''(s) + \sin s - s + \int_0^{\frac{\pi}{2}} st u_1(t) dt) ds \\ &= a + (-1+b)x - \frac{1}{48}(-8+8b+a\pi^2)x^3 \\ &\quad + \left(7680(-1+b) - 320(-1+b)\pi^3 + 8(-1+b)\pi^5 + a\pi^7\right)x^3 / 46080 + \sin x \end{aligned} \quad (4.140)$$

elde edilir. Başlangıç şartları $u_2(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_2(0) &= a = 0, \\ u_2'(0) &= b = 1, \end{aligned} \quad (4.141a, b)$$

bilinmeyen sabitler $a = 0$, $b = 1$ elde edilir. 3. iterasyondan,

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= u_2(x) + \int_0^x (s-x)(u_2''(s) + \sin s - s + \int_0^{\frac{\pi}{2}} stu_2(t)dt)ds \\
&= a + (-1+b)x - \frac{1}{48}(-8+8b+a\pi^2)x^3 \\
&\quad + \frac{(7680(-1+b) - 320(-1+b)\pi^3 + 8(-1+b)\pi^5 + a\pi^7)x^3}{46080} \\
&\quad + \frac{\pi^5(7680(-1+b) - 320(-1+b)\pi^3 + 8(-1+b)\pi^5 + a\pi^7)x^3}{44236800} + \sin x \quad (4.142)
\end{aligned}$$

elde edilir. Başlangıç şartları $u_3(x)$ te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
u_3(0) &= a = 0, \\
u_3'(0) &= b = 1,
\end{aligned} \quad (4.143a, b)$$

bilinmeyen sabitler $a = 0$, $b = 1$ elde edilir. 1. , 2. ve 3. iterasyondan elde ettiğimiz sabitler $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ $u_3(x)$ te yerine yazıldığında;

$$u_1(x) = \sin x, \quad u_2(x) = \sin x, \quad u_3(x) = \sin x \quad (4.144)$$

çözümleri elde edilir. Buradan tam çözümün $u(x) = \sin x$ olduğu görülür.

Çizelge 4.5 (4.133) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri $u_n(x), n=3$	Gerçek Çözümler $u_{ex}(x)$	Hata Analizi $ u_{ex}(x) - u_n(x) $
0.1	0.09983341664682815	0.09983341664682815	0
0.2	0.19866933079506122	0.19866933079506122	0
0.3	0.29552020666133955	0.29552020666133955	0
0.4	0.3894183423086505	0.3894183423086505	0
0.5	0.479425538604203	0.479425538604203	0
0.6	0.5646424733950354	0.5646424733950354	0
0.7	0.644217687237691	0.644217687237691	0
0.8	0.7173560908995228	0.7173560908995228	0
0.9	0.7833269096274834	0.7833269096274834	0
1	0.8414709848078965	0.8414709848078965	0

Örnek3.1.12

$$f''(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(g'(x))^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t)^2 + (g(t))^2) dt; f(0) = 1, f'(0) = 2 \quad (4.145)$$

$$g''(x) = -1 + x^2 - xf'(x) + \frac{1}{4} \int_0^x (f(t)^2 - (g(t))^2) dt; g(0) = -1, g'(0) = 0 \quad (4.146)$$

kuple lineer olmayan integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada kuple sistem olduğu için VIM hesaplamaları f ve g için ayrı ayrı yapılsın.

$$\lambda(s) = (s - x), \quad (4.147)$$

lagrange çarpanı verilsin. $f_0(x)$ ve $g_0(x)$ için başlangıç yaklaşımı olarak referans olarak alınan Biazar, Ghazvini ve Eslami [30] çalışması Örnek 2 de verilen başlangıç yaklaşımı aşağıdaki gibi

$$f_0(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2, \quad g_0(x) = -1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (4.148)$$

alınsın. Buradan

$$F(f_n(x)) = 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(g'_n(x))^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t)^2 + (g_n(t))^2) dt, \quad (4.149)$$

$$F(g_n(x)) = -1 + x^2 - xf'_n(x) + \frac{1}{4} \int_0^x (f_n(t)^2 - (g_n(t))^2) dt, \quad (4.150)$$

elde edilir. VIM iterasyon formülünden $n = 0, 1, \dots$, için $f_{n+1}(x)$ ve $g_{n+1}(x)$;

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f_n(x) + \int_0^x (s-x)(f_n''(s) - F(f_n(s))) ds \\ &= f_n(x) + \int_0^x (s-x)(f_n''(s) - 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}(g'_n(s))^2 - \frac{1}{2} \int_0^s (f_n(t)^2 + (g_n(t))^2) dt) ds \end{aligned} \quad (4.151)$$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= g_n(x) + \int_0^x (s-x)(g_n''(s) - F(g_n(s))) ds \\ &= g_n(x) + \int_0^x (s-x)(g_n''(s) + 1 - s^2 - sf'_n(s) - \frac{1}{4} \int_0^s (f_n(t)^2 - (g_n(t))^2) dt) ds \end{aligned} \quad (4.152)$$

iterasyon formülü elde edilir.

n=0 için 1. iterasyon;

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f_0(x) + \int_0^x (s-x)(f_0''(s) - F(f_0(s))) ds \\
&= f_0(x) + \int_0^x (s-x)(f_0''(s) - 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}(g_0'(s))^2 - \frac{1}{2} \int_0^s (f_0(t)^2 + (g_0(t))^2) dt) ds \\
&= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{120} + \frac{x^7}{840}
\end{aligned} \tag{4.153}$$

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= g_0(x) + \int_0^x (s-x)(g_0''(s) - F(g_0(s))) ds \\
&= g_n(x) + \int_0^x (s-x)(g_n''(s) + 1 - s^2 - sf_n(s) - \frac{1}{4} \int_0^s (f_n(t)^2 - (g_n(t))^2) dt) ds \\
&= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{240}
\end{aligned} \tag{4.154}$$

n=1 için 2. iterasyon;

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= f_1(x) + \int_0^x (s-x)(f_1''(s) - F(f_1(s))) ds \\
&= f_1(x) + \int_0^x (s-x)(f_1''(s) - 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}(g_1'(s))^2 - \frac{1}{2} \int_0^s (f_1(t)^2 + (g_1(t))^2) dt) ds \\
&= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{1440} + \frac{x^9}{120960} \\
&\quad + \frac{x^{10}}{1814400} + \dots + \frac{s^{17}}{5757696000},
\end{aligned} \tag{4.155}$$

$$\begin{aligned}
g_2(x) &= g_1(x) + \int_0^x (s-x)(g_1''(s) - F(g_1(s))) ds \\
&= g_1(x) + \int_0^x (s-x)(g_1''(s) + 1 - s^2 - sf_1(s) - \frac{1}{4} \int_0^s (f_1(t)^2 - (g_1(t))^2) dt) ds \\
&= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^8}{2304} - \frac{x^9}{26880} \\
&\quad + \frac{19x^{10}}{2419200} + \frac{43x^{11}}{6652800} + \frac{x^{12}}{709632} + \dots + \frac{x^{17}}{11515392000},
\end{aligned} \tag{4.156}$$

elde edilir. Bu şekilde 4. iterasyona kadar ilerlendiğinde;

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= f_3(x) + \int_0^x (s-x)(f_3''(s) - 1 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}(g_3'(s))^2 - \frac{1}{2} \int_0^s (f_3(t)^2 + (g_3(t)^2) dt) ds \\
&= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} \\
&\quad + \frac{x^{10}}{3628800} + \dots + \frac{109x^{77}}{536753\dots}
\end{aligned} \tag{4.157}$$

$$\begin{aligned}
g_4(x) &= g_3(x) + \int_0^x (s-x)(g_3''(s) + 1 - s^2 - sf_3(s) - \frac{1}{4} \int_0^s (f_3(t)^2 - (g_3(t))^2) dt) ds \\
&= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^8}{40320} - \frac{x^9}{362880} \\
&\quad - \frac{x^{10}}{3628800} - \frac{x^{11}}{39916800} - \dots + \frac{13x^{77}}{153358\dots}
\end{aligned} \tag{4.158}$$

iterasyon çözümleri elde edilir. Bu çözümler kapalı formda,

$$f(x) = e^x + x, \quad g(x) = x - e^x \tag{4.159}$$

elde edilir. Bu kuple denklemin Biazar, Ghazvini, Eslami [30], çalışması Örnek 2' de verilen başlangıç yaklaşımı alınarak elde edilen VIM çözümü, homotopy perturbation metodunu (HPM) kullanarak çözüm bulan çalışma ile aynı sonucu vermiştir.

Çizelge 4.6 (4.145) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri (f)	Gerçek Çözümler(f)	Hata Analizi
	$f_n(x), n=4$	$f(x)$	$ f_n(x) - f(x) $
1.1	4.104162250308633	4.1041660239464335	3.77364×10^{-6}
1.2	4.5201042111716525	4.520116922736547	0.0000127116
1.3	4.9692575682815034	4.969296667619244	0.0000390993
1.4	5.455088677564064	5.455199966844674	0.000111289
1.5	5.981392848227635	5.9816890703380645	0.000296222
1.6	6.552288849650242	6.553032424395115	0.000743575
1.7	7.172175041373082	7.1739473917272	0.00177235
1.8	7.845613506669211	7.849647464412946	0.00403396
1.9	8.577086351320967	8.585894442279269	0.00880809
2	9.370535184582199	9.38905609893065	0.0185209

Çizelge 4.7 (4.146) denkleminin VIM ve gerçek çözümlerinin karşılaştırılması

x Değerleri	VIM Çözümleri (g) $g_n(x), n = 4$	Gerçek Çözümler(g) $g_{ex}(x)$	Hata Analizi $ g_{ex}(x) - g_n(x) $
1.1	-1.904165006913149	-1.9041660239464333	1.01703×10^{-6}
1.2	-2.1201137265838095	-2.120116922736547	3.19615×10^{-6}
1.3	-2.3692875242561353	-2.3692966676192446	9.14336×10^{-6}
1.4	-2.6551758472824	-2.6551999668446746	0.0000241196
1.5	-2.9816298109643147	-2.9816890703380645	0.0000592594
1.6	-3.3528957632095633	-3.353032424395115	0.000136661
1.7	-3.773649785212588	-3.7739473917271997	0.000297607
1.8	-4.249032695058069	-4.249647464412947	0.000614769
1.9	-4.784685970846444	-4.785894442279268	0.00120847
2	-5.386791340260246	-5.38905609893065	0.00226476

BÖLÜM V

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Temel olarak lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlere çözüm bulurken temel analitik metotların ve yarı analitik Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) kolaylıkla kullanılabilceğini göstermiş olduk. Farklı kaynaklardan alınan soruların gerçek çözümleri temel analitik metotlardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında yaklaşık ya da aynı sonuçların elde edildiği görülmektedir.

Varyasyonel iterasyon metodu (VIM) kullanılarak bulunan sonuçlar, gerçek çözümler ve hata analizi tablolar halinde verilerek daha kolay karşılaştırma yapılması sağlanmıştır. Tablolar incelendiğinde birbirine çok yakın hatta çoğunlukla aynı sonuçlar elde edildiğini görülmektedir.

Temel analitik metotlar ve VIM in lineer ve lineer olmayan integral ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde hangisinin daha etkin olduğu konusunda; integro-diferansiyel denklemlerde VIM in zaman ve daha kolay uygulanabilme açısından daha etkin olduğunu söyleyebiliriz. İntegral denklemlerde ise VIM, temel analitik metotlarda geçen ardışık yaklaşım metoduyla çok benzerlik gösterdiğinden VIM' in temel analitik metotlara göre bir üstünlüğü yoktur. Temel analitik metotlar integral ve integro-diferansiyel denklemin lineer ve $K(x,t)$ çekirdeğinin ayrılabilir olduğu durumlar gibi kısıtlı şartlarda daha kolay çözüm vermektedir. VIM metotunun ise çekirdeğe ya da lineerliğe bakılmaksızın genel olarak uygulanabilirliğinin daha fazla olduğu sonucuna varabiliriz.

KAYNAKLAR

- [1] Krasnov, M., Kiselev, A. ve Makefonko, G., (Çeviren: C. CERİT), İntegral Denklemler, İstanbul, 1976.
- [2] Yalcinbas, S., and Sezer, M., The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integrodifferential equations in terms of Taylor polynomials, Appl. Math. Comput. 112, 291–308, 2000.
- [3] Ren, Y., Zhang, B. and Qiao, H., A simple Taylor-series expansion method for a class of second kind integral equations, J. Comp. Appl. Math. 110, 15–24, 1999.
- [4] Maleknejad, K. and Mahmoudi, Y., Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions, Appl. Math. Comput. 149, 799–806, 2004.
- [5] Rashed, M.T., Numerical solution of functional differential, integral and integro-differential equations, Appl. Numer. Math. 156, 485–492, 2004.
- [6] Wang, W. and Lin, C., A new algorithm for integral of trigonometric functions with mechanization, Appl. Math. Comput. 164 (1), 71–82, 2005.
- [7] Wang, W., An algorithm for solving the higher-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation with mechanization, Appl. Math. Comput. 172, 1–23, 2006.
- [8] Babolian E. and Mansouri, Z., Direct method to solve Volterra integral equation of the first kind using operational matrix with blok-pulse functions , J. Compu. Appl. Math. 220, 51-57, 2008.
- [9] Babolian, E. and Marzban, H.R., Salmani, M., Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind, Appl. Math. Comput. 201, 452–464, 2008.

- [10] Györi, İ. and Hartung, F., Asymptotically exponential solutions in nonlinear integral and differential equations, *J. Differential Equations* 249, 1322-1352, 2010.
- [11] Maleknejad K. and Kajani, M. T., Solving linear intero-differential equation system by Galerkin methods with hybrid funcions , *Appld. Math. And Compt.*, 159, 603-612, 2004.
- [12] Babolian, E. and Shamsavaran, A., Numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using Haar wavelets, *J. Comp. Appl. Math.*, 225, 87-95, 2009.
- [13] De Bonis, M.C. and Laurita, C., Numerical treatment of second kind Fredholm integral equations system on bounded intervals, *J. Comp. Appl. Math.* 217, 64–87, 2008.
- [14] Tahmasbi, A. and Fard, O.S., Numerical solution of lineer Volterra integal equations system of second kind , *Appl.Math.Comput* 201, 547-552, 2008.
- [15] Sezer, M., Taylor polynomial solution of Volterra integral equations, *Int. J. Math. Edu. Sci. Technol.* 25 (5), 625, 1994.
- [16] Yalcinbas, S., Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations, *Appl. Math. Comput.* 127, 195–206. 2002.
- [17] Maleknejad, K., Sohrabi, S. and Rostami, Y., Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by using Chebyshev polynomials, *Appl. Math. Comput.* 188, 123–128, 2007.
- [18] Akyüz-Daşcıoğlu, A. and Sezer, M., Chebyshev polynomial solutions of systems of higher-order linear Fredholm-Volterra integro-differential equations, *Journal of the Franklin İnstitute* 342, 688–701, 2005.

- [19] Akyüz-Daşcıoğlu, A., A Chebyshev polynomial approach for linear Fredholm-Volterra integro-differential equations in the most general form, *Appl. Math. Comput.* 181, 103-112, 2006.
- [20] Sezer, M. and Gulsu, M., Polynomial solution of the most general linear Fredholm integro differential-difference equation by means of Taylor matrix method, *Int. J. Complex Variables* 50 (5), 367–382, 2005.
- [21] Kurt, N. and Sezer, M., Polynomial solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, *Journal of the Franklin Institute*, 345, 839-850, 2008.
- [22] Darania, P. and Ivaz, K., Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Comp. Math. Appl.*, 56, 2197-2209, 2008.
- [23] Yalçınbaş, S. and Sezer, M., A Taylor collocation method for the approximate solution of general linear Fredholm-Volterra integro-difference equations with mixed argument, *Appl. Math. Comput.* 175, 675-690, 2006.
- [24] Touhei T., Generalized fourier transform and its application to the volume integral equation for elastic wave propagation in a half space, 46, 52-73, 2009.
- [25] Ebadi, G., Rahimi-Ardabili, M.Y. and Shahmorad, S., Numerical solution of the nonlinear volterra integro-differential equations by He Tau method, *Appl. Math. Comput.* 188, 1580-1586, 2007.
- [26] Wazwaz, A. , A reliable algorithm for solving boundary value problems for higher-order integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* 118, 327-342, 2001.
- [27] Golbabai, A. and Kerameti, B., Easy computational approach to solution of system of linear Fredholm integral equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 38, 568-574, 2008.
- [28] Odibat, Z.M., Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels, *Mathematical and Computer Modelling* 48, 1144-1149, 2008.

- [29] Arikoglu, A. and Özkol, İ., Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method, *Computers and Mathematics with Applications*. 56, 2411-2417, 2008.
- [30] Biazar J., Ghazvini H. and Eslami, M., He's homotopy perturbation method for system of integro-differential equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 1253-1258, 2009.
- [31] Ghorbani, A. and Saberi-Nadjafi, J., Exact Solutions for non-linear integral equations by a modified homotopy perturbation method, *Computers and Mathematics with Applications* 56, 1032-1039, 2008.
- [32] Golbabai, A. and Kerameti, B., Modified homotopy perturbation method for solving Fredholm integral equations, *Chaos, Solitons and fractals* 37, 1528-1537, 2008.
- [33] O'Regan D., Singular integral equations arising in draining and coating flows, *Appl. Math. Comput.*, (2008), doi:10.1016/j.acm.2008.08.026.
- [34] Chen, Z. and Lin, Y., The exact solution of a linear integral equation with weakly singular kernel, *J. Math. Anal. Appl.* 344, 726-734, 2008.
- [35] Huang L., Huang Y. and Li Xian-Fang, Approximate solution of abel integral equation, *Computers and Mathematics with Applications* 56, 1748-1757, 2008.
- [36] He, J.H., A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques, *International Journal of Nonlinear Science Numerical Simulation*, 1(1), 51-70, 2000.
- [37] He, J.H., Variational iteration method-some recent results and new interpretations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1), 3-17, 2007.
- [38] He, J.H., Variational iteration method- A kind of nonlinear analytical technique: some examples, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 34(4), 699-708, 1999.

- [39] He, J.H., A new approach to non-linear partial differential, *Common, Nonlinear Sci.Numer.Simul.*, 2,230-235, 1997.
- [40] He, J.H., Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Int.J. Modern Phys.*, 20, 1141-1199, 2006.
- [41] He, J.H., Variational approach to the Lane-Emden equation, *Appl.Math.Comput.*, 143, 539-541, 2003.
- [42] He, J.H., Variational approach to the Sixth-order boundary value problems., *Appl. Math. Comput.*143, 537-538, 2003.
- [43] Sweilam, N.H., Fourth order integro-differential equations using variational iteration method, *Computers and Mathematics with Applications*, 54, 1086-1091, 2007.
- [44] Shakeri, F. and Denghan, M., Solution of a model describing biological species living together using the variational iteration method, *Mathematical and Computer Modelling*, 48, 685-699, 2008.
- [45] Hesaaraki, M. and Jalilan, Y., A numerical method for solving nth-order boundary-value problems, *Appl. Math. Comput.* 196, 889-897, 2008.
- [46] Saberi-Nadjafi, J. and Tamamgar, M., The variational iteration method: A highly promising method for solving the system of integro-diffrential equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 346-351, 2008.
- [47] Xu, L., Variational iteration method for solving integral equations, *Comp. Math. Appl.* 54, 1071-1078, 2007.
- [48] Shang, X. and Han, D., Application of the variational iteration method for solving nth-order integro-differential equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234, 1442-1447, 2010.

- [49] Saadati, R., Denghan, M., Vaezpour, S.M. and Saravi, M., The convergence of He's variational iteration method for solving integral equations, *Comp. Math. Appl.*, 58, 2167-2171, 2009.
- [50] Momani, S. and Abuasad, S., Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 27(5), 1119-23, 2006.
- [51] Abulwafa, E.M., Abdou, M.A. and Mahmoud, A.A., Nonlinear fluid flows in pipe-like domain problem using variational iteration method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(4), 1384-97, 2007.
- [52] Sweliam, N.H. and Khader, M.M., Variational Method for one dimensional nonlinear thermoelasticity, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(1),145-149, 2007.
- [53] He, J.H., Wazwaz, A.M. and Xu, L., The variational iteration method reliable, efficient and promising, *Computers and Mathematics with Applications*, 54(7-8), 879-880, 2007.
- [54] Xu, L., He, J.H. and Wazwaz, A.M., The variational iteration method-reality, potential and challenges, *Computers and Mathematics with Applied Mathematics*, 207(1), 1-2, 2007.
- [55] Hemeda, A.A., Variational iteration method for solving wave equation, *Computers and Mathematics with Applied Mathematics*, 56, 1948-1953, 2008.
- [56] Biazar, J. and Ghazvini, H., An analytical approximation to the solution of a wave equation by a variational iteration method, *Applied Mathematic Letters*, 21, 780-785, 2008.
- [57] Biazar, J. and Ghazvini, H., He's variational iteration method for solving linear and non-linear systems of ordinary differential equations, *Appl. Math. Comput.* 191, 287-297, 2007.

- [58] Salkuyeh, D.K., Convergence of the variational iteration method for solving linear systems of ODE with constant coefficients, *Computers and Mathematics with Applied Mathematics*, 56, 2027-2033, 2008.
- [59] Ramos, J.I., On the variational iteration method and other iterative techniques for Non-linear differential equations, *Appl.Math.* 199, 36-39, 2008.
- [60] Inokuti, M., Sekine, H., and Mura, T., General use of the Lagrange multiplier in nonlinear Mathematical physic, S.Nemat-Nosser (Ed.). *Variational Methods in the Mechanics of solids*, Pergamon Press, New york, pp.156-162, 1978.
- [61] He, J.H., An elementary introduction to recently developed asymptotic methods and nano mechanics in textile engineering, *Int. J. Mod. Phys. B*, 22, 3487-3578, 2008.
- [62] Wazwaz, A.M., *A First Course In Integral Equations*, Saint Xavier University Press, London, 1997.