



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE OSTROWSKI VE
OSTROWSKI-GRÜSS TİPİ EŞİTSİZLİKLER

HÜSEYİN RÜZGAR

Ağustos 2012

T. C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE OSTROWSKI VE OSTROWSKI-GRÜSS TİPİ
EŞİTSİZLİKLER

HÜSEYİN RÜZGAR

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Adnan TUNA

Ağustos 2012

Hüseyin RÜZGAR tarafından **Yrd. Doç. Dr. Adnan TUNA** danışmanlığında hazırlanan “**Zaman skalası üzerinde Ostrowski ve Ostrowski-Grüss tipi eşitsizlikler**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN, Niğde Üniversitesi



Üye: Yrd. Doç .Dr. Dağıstan ŞİMŞEK, Selçuk Üniversitesi



Üye: Yrd. Doç. Dr. Adnan TUNA, Niğde Üniversitesi



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../2012 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../2012 tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../2012

Doç. Dr. Osman SİVRİKAYA

MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Hüseyin RÜZGAR

ÖZET

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE OSTROWSKI VE OSTROWSKI-GRÜSS TİPİ EŞİTSİZLİKLER

RÜZGAR, Hüseyin
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Adnan TUNA

Ağustos 2012, 50 Sayfa

Bu tezde, zaman skalasının tanımı ve temel özellikleri, dinamik eşitsizlikler ve zaman skalasında Ostrowski ve ağırlıklı Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri incelendi. Ayrıca zaman skalasında ağırlıklı Δ integral ifadesi birleşimini içeren ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizliklerin bazı genelleştirmeleri elde edildi. Bundan başka bu sonuçların sürekli, ayrık ve quantum analiz durumlarına uygulamaları verildi.

Anahtar Sözcükler: Zaman Skalası, Ostrowski Eşitsizliği, Ağırlıklı Ostrowski-Grüss Eşitsizlikler, Ağırlıklı Ostrowski Tipi Eşitsizlikler.

SUMMARY

OSTROWSKI AND OSTROWSKI-GRÜSS TYPE INEQUALITIES ON TIME SCALES

RÜZGAR, Hüseyin

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor : Assistant Professor Dr. Adnan TUNA

August 2012, 50 Pages

In this thesis we consider definition and fundamental properties of the time scales, dynamic inequalities and Ostrowski and Ostrowski-Grüss inequalities on time scales. Furthermore, we obtain some weighted generalizations of Ostrowski type inequalities on time scales involving weighted Δ -integral means. We also give some applications of these results to the continuous, discrete and quantum calculus cases.

Keywords: Time Scales, Ostrowski Inequality, Weighted Ostrowski-Grüss Inequalities, Weighted Ostrowski Type Inequalities.

ÖN SÖZ

Bu tez kapsamında zaman skalasının tanımı ve temel özellikleri, zaman skalasında Ostrowski ve ağırlıklı Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri incelendi. Ayrıca zaman skalasında Δ integral ifadesi birleşimini içeren ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizliklerin bazı genelleştirilmesi yapılmıştır. Zaman skalasında bulunan bu eşitsizlikler özel durumlar olarak sürekli, ayrık ve quantum analiz durumları alınarak sonuçlar verilmiştir ve bu sonuçlar literatürde bulunan eşitsizlikler ile karşılaştırılmıştır.

Tez çalışması boyunca araştırmalarımın her aşamasında ilgi, bilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Adnan TUNA' ya teşekkür ederim. Çalışmalarım esnasında tecrübelerini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN' a ve hayatım boyunca her türlü desteği ve sabrı gösteren kıymetli arkadaşlarıma ve canım aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR.....	x
BÖLÜM I GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II ZAMAN SKALASI ANALİZİ.....	2
2.1 Zaman Skalasında Temel Kavramlar.....	2
2.2 Zaman Skalasında Delta Türev.....	4
2.3 Zaman Skalasında İntegral.....	8
2.4 Zaman Skalasında Polinomlar.....	11
2.5 Zaman Skalasında Dinamik Eşitsizlikler.....	13
BÖLÜM III OSTROWSKI VE AĞIRLIKLİ OSTROWSKI-GRÜSS EŞİTSİZLİKLERİ.....	15
3.1 Ostrowski Eşitsizliği.....	15
3.2 Ağırlıklı Ostrowski Eşitsizliği.....	17
3.3 L^∞ Norm Üzerinde Ağırlıklı Ostrowski–Grüss Eşitsizliği.....	19
3.4 L^p Norm Üzerinde Ağırlıklı Ostrowski–Grüss Eşitsizliği.....	21
BÖLÜM IV AĞIRLIKLİ Δ İNTEGRAL İFADESİ BİRLEŞİMİNİ İÇEREN AĞIRLIKLİ OSTROWSKI TİPİ EŞİTSİZLİKLERİ.....	25
4.1 Ağırlıklı Ostrowski Tipi Eşitsizlikler.....	27
4.2 İki Fonksiyon İçin Ağırlıklı Ostrowski Tipi Eşitsizlikler.....	31
4.3 Ağırlıklı Perturbe Edilmiş Ostrowski Tipi Eşitsizlikler.....	36
BÖLÜM V SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZ GEÇMİŞ.....	49
TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER.....	50

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Noktaların sınıflandırılması.....	3
Çizelge 2.2 Graininess fonksiyonu ve sıçrama operatörlerinin özel halleri.....	7

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Noktaların gösterimi.....	3
--------------------------------------	---

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{N}_0$	Doğal Sayılar
T	Zaman Skalası
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	İleri sıçrama fonksiyonu
ν	Geri sıçrama fonksiyonu
f^Δ	Hilger(Delta) türev
Δf	İleri fark operatörü
T	Türev tanım kümesi
C_{rd}	Sağda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Ostrowski tipi eşitsizlikler bir fonksiyonun değerine yaklaşımda fonksiyonun ortalama değerinin yardımı ile keskin hata tahminlerinin bulunmasını sağlar. Ostrowski tipi eşitsizlikler farklı Riemann toplamaları yardımı ile Riemann integraline yaklaşımda farklı quadratik kurallar için öncelikli hata sınırları elde etmek için kullanılır. Genelde orta nokta kuralı, belirli bir bölümün iç noktalarında örneklenmiş tüm Riemann toplamaları sınıfında en iyi yaklaşımı sağlar. Ostrowski tipi eşitsizlikler üzerine çok sayıda, sürekli ve ayırık durumlarda genellemeler yapılmıştır. Ayrıca n kez türevlenebilir fonksiyonlar, vektör değerli fonsiyonlar, çok katlı integraller ve zaman skalasında daha genel versiyonlar çalışılmıştır. Nümerik analiz, olasılık teorisi ve diğer alanlarda çok sayıda uygulamaları vardır[14].

Son yıllarda üzerinde birçok çalışmalar yapılan zaman skalası teorisi 1988 tarihinde Stefan Hilger [16] tarafından sürekli ve ayırık analizi birleştirmek amacıyla kurulmuştur. Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılması, diferansiyel denklemlerden ve fark denklemlerinden iki ayrı sonuç elde edilmesini engeller[5].

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, zaman skalasının tanımı ve temel özellikleri, Hilger'in delta türevi, zaman skalasında türevin önemli özellikleri, zaman skalasında süreklilik, zaman skalasında integral ve zaman skalasında polinomlarla ilgili tanım ve teoremler, zaman skalasında dinamik eşitsizliklerden Hölder, Cauchy-Schwarz ve Minkowski eşitsizlikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, zaman skalasında Ostrowski, zaman skalasında L^p ve L^∞ normları üzerinde Ostrowski ve ağırlıklı Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümünde, zaman skalasında ağırlıklı Δ integral ifadesi birleşimini içeren ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizlik, zaman skalasında iki fonksiyon için ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizlikler, zaman skalasında perturbe edilmiş Ostrowski tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçların sürekli, ayırık ve quantum analiz durumlarına uygulamaları verilmiştir.

BÖLÜM II

ZAMAN SKALASI ANALİZİ

Bu bölümde zaman skalası analizi ve zaman skalasının önemli temel özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Zaman skalası teorisi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [1], [5], [6], [16], [21] kaynaklarına bakılabilir.

2.1 Zaman Skalasında Temel Kavramlar

Tanım 2.1 Bir zaman skalası, keyfi boş olmayan kapalı bir gerçel sayılar kümesidir. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $[0,1] \cup [2,3]$ ve $[0,1] \cup \mathbb{N}_0$ kapalı aralıkları zaman skalasına birer örnektir. Ama $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ açık aralığı ise birer zaman skalası değildir. Bu teori boyunca zaman skalası $\mathbb{T}$ ile gösterilecektir. $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun delta türevi f^Δ ile gösterilecektir. Farklı zaman skalaları üzerinde tanımlı fonksiyonların delta türevini anlayabilmek için aşağıdaki iki özel duruma bakılabilir.

- i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise bu taktirde $f^\Delta = f'$ alışılmış türev
- ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise bu taktirde $f^\Delta = \Delta f$ ileri fark operatörü

Genel teoride daha değişik zaman skalaları alınabilir [5].

Tanım 2.2 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

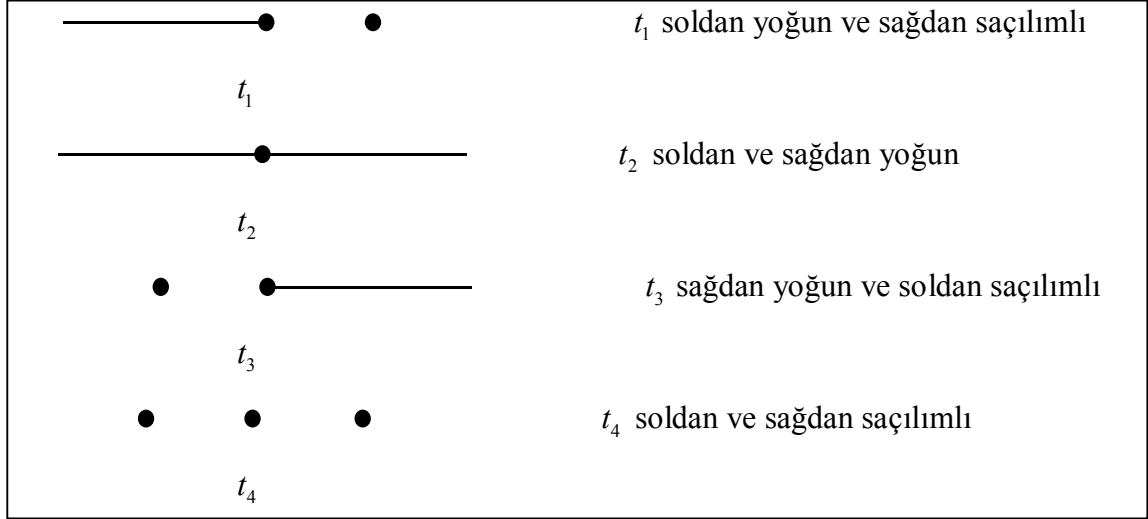
ve $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatör

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımda $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ (eğer $\mathbb{T}$ bir $\max t$ ye sahip ise $\sigma(t) = t$) ve $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (eğer $\mathbb{T}$ bir $\min t$ ye sahip ise $\rho(t) = t$) olur [5].

Tanım 2.3 Graininess fonksiyonu $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $\mu(t) = \sigma(t) - t$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4 Eğer $\sigma(t) > t$ ise t sağdan saçılımlı, $\rho(t) < t$ ise t soldan saçılımlıdır. Hem sağdan saçılımlı hem soldan saçılımlı noktalara izole nokta denir. Ayrıca, $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağda yoğun, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t solda yoğun denir. Hem solda hem de sağda yoğun olan noktalara yoğundur denir. Şekil 2.1 de noktaların gösterimi ve Çizelge 2.1 de noktaların sınıflandırılması gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Noktaların Gösterimi

Çizelge 2.1 Noktaların Sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$t < \sigma(t)$
t sağdan yoğun	$t = \sigma(t)$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

$\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ için Tanım 2.2 düşünüldüğünde, $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ $\mathbb{T}$ zaman skolasının elemanı olur. Çünkü $\mathbb{T}$ zaman skolası, $\mathbb{R}$ nin kapalı bir alt kümesidir. $\mathbb{T}$ zaman skolasından türetilmiş bir $\mathbb{T}^k$ kümesi; eğer $\mathbb{T}$ soldan saçılımlı bir m maksimumuna sahip ise, $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - m$ diğer durumlarda $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır [5].

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f^\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ şeklinde tanımlanır [5].

Örnek 2.1 Zaman skalasının $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ olduğu durumları inceleyelim.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\exists t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

ve

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

olur. Burada $\forall t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Aynı zamanda μ graininess fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \equiv 0$ dır.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\exists t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

ve

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t-1, t-2, t-3, \dots\} = t-1$$

bulunur. Burada $\forall t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır ve μ graininess fonksiyonu da $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \equiv 1$ dir.

Yukarıdaki iki örnekte μ graininess fonksiyonu sabittir. Zaman skalasında μ graininess fonksiyonu analiz için önemli bir rol oynar [5].

2.2 Zaman Skalasında Delta Türev

Tanım 2.5 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ için t nin bir U komşuluğu (yani $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$) için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U$$

eşitsizliği sağlanırsa $f^\Delta(t)$ ifadesine f fonksiyonunun delta türevi denir [5].

Örnek 2.2 i) Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ ise $f^\Delta(t) \equiv 0$ olur.

Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabittir ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - 0[\sigma(t) - s] \right| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in \mathbb{T}$$

olması sebebi ile doğrudur.

ii) Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise $f^\Delta(t) \equiv 1$ olur ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - 1[\sigma(t) - s] \right| = |\sigma(t) - s - [\sigma(t) - s]| = 0 \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in \mathbb{T}.$$

Örnek 2.3 $t \in \mathbb{T}^k$ ($t \neq \min \mathbb{T}$) ve $\rho(t) = t < \sigma(t)$ ise σ ileri sıçrama operatörünün t noktasında f^Δ türevinin olmadığı Tanım 2.5 kullanılarak gösterilebilir [5].

Teorem 2.1 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda

i) Eğer f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu t noktasında sürekli dir.

ii) Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağdan saçılımlı ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}.$$

iii) Eğer t noktası sağdan yoğun ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

iv) Eğer f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$$

dir [5].

Örnek 2.4 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını inceleyeceğiz.

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Teorem 2.1 (iii) den, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonun delta türevi $t \in \mathbb{R}$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

dır.

ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. Teorem 2.1 (ii) den, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonun delta türevi $t \in \mathbb{Z}$ için

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

biçimindedir. Δ zaman skalasında fark operatörüdür ve $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$ şeklinde tanımlanır [5].

Teorem 2.2 $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu taktirde

i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplam fonksiyonu da t noktasında türevlenebilir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

ii) Her sabit α için $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$$

iii) $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$$

iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

v) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.6 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f^Δ fonksiyonu $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ üzerinde türevlenebilir ise, f fonksiyonunun ikinci türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$ olup, n yinci mertebeden türev $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ biçimindedir. Bu durumda $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ ve

$\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$. Ayrıca $\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t$, $f^{\Delta^0} = f$, $\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(t) = t + nh$, $\rho^n(t) = t - nh$ dır [3].

Bazı zaman skalaları için hesaplanan μ graininess fonksiyonunun, σ ileri sıçrama operatörünün ve ρ geri sıçrama operatörünün farklı durumları aşağıda Çizelge 2.2 de verilmiştir [5].

Çizelge 2.2 Graininess Fonksiyonu ve Sıçrama Operatörlerinin Özel Halleri

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t + 1$	$t - 1$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	$\frac{t}{q}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t} + 1$	$(\sqrt{t} + 1)^2$	$(\sqrt{t} - 1)^2$

Tanım 2.7 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerinde sağdan yoğun olan bütün noktalarda sağdan limitleri ve soldan yoğun olan bütün noktalarda soldan limitleri var ise, f fonksiyonuna düzenli fonksiyon denir [5].

Tanım 2.8 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde sağdan yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerinde soldan yoğun olan noktalarda soldan limiti var ise, f fonksiyona *rd* sürekli fonksiyon denir. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı *rd* sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

biçiminde gösterilir. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir ve türevleri *rd* sürekli olan fonksiyonların kümesi

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde gösterilir [5].

Teorem 2.3 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

i) Eğer f fonksiyonu sürekli ise, f fonksiyonu *rd* süreklidir.

- ii) Eğer f fonksiyonu rd sürekli ise, f fonksiyonu düzenlidir.
- iii) σ ileri sıçrama operatörü rd süreklidir.
- iv) Eğer f fonksiyonu düzenli veya rd sürekli ise, f^σ fonksiyonu da düzenli veya rd süreklidir.
- v) f sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı düzenli veya rd sürekli bir fonksiyon ise, $f \circ g$ fonksiyonu da düzenli veya rd süreklidir [5].

Tanım 2.9 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı sürekli bir fonksiyonu olsun. $D \subset \mathbb{T}^k$ ve $\mathbb{T}^k \setminus D$ bölgesi sayılabilir ve $\mathbb{T}$ nin sağdan saçılımlı elemanlarını içermeyen ve her bir $t \in D$ noktasında f fonksiyonu türevlenebilir ise, f fonksiyonu D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilirdir denir [5].

Teorem 2.4 Kompakt bir aralıkta her düzenli fonksiyon sınırlıdır [5].

Teorem 2.5 f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan reel değerli fonksiyonlar ve her iki fonksiyonda D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir olsun. Bu taktirde $\forall t \in D$ için

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$$

eşitsizliği sağlanırsa, $r \leq s$ olmak üzere $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

dir [5].

Teorem 2.6 f düzenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall t \in D$ için D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir bir $F^\Delta(t) = f(t)$ olacak biçimde bir F fonksiyonu vardır [5].

2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.10 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ düzenli bir fonksiyon ve f fonksiyonunun ön anti türevi F olsun. Bu durumda f fonksiyonun belirsiz integrali

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. Burada C keyfî bir sabittir. Cauchy integrali $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

dır. Eğer $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

şartı sağlanıyor ise, $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi denir [5].

Teorem 2.7 Her rd sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır. $t_0 \in \mathbb{T}$ ise f fonksiyonunun anti türevi F fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau$$

şeklinde tanımlanır [5].

Teorem 2.8 $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

dir [5].

Teorem 2.9 Eğer $f^\Delta(t) \geq 0$ ise, f fonksiyonu azalan değildir [5].

Teorem 2.10 Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise,

- i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t,$
- ii) $\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t,$
- iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t,$
- iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t,$
- v) $\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t,$
- vi) $\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t,$

vii) Eğer $[a, b]$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise, $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$,

viii) Eğer bütün $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$

dır [5].

Teorem 2.11 $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun. Bu durumda

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$ olup, eşitliğin sağ tarafındaki integral Riemann anlamında integraldir.

ii) Eğer $[a, b]$ sadece izole noktaları içeriyor ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ - \sum_{t \in [b, a)} \mu(t) f(t), & a > b \end{cases}$$

iii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$, $h > 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a < b \\ 0, & a = b \\ - \sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & a > b \end{cases}$$

iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ - \sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \end{cases}$$

şeklindedir [5].

2.4 Zaman Skalasında Polinomlar

Burada genel bir zaman skalasında fonksiyonlar için Taylor formülü verilmektedir.

Genelleştirilmiş polinomlar $g_k, h_k : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$ fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar

i) g_0 ve h_0 $\forall s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_0(t, s) = h_0(t, s) = 1$$

ii) $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere g_k ve h_k verilmiş ise, g_{k+1} ve h_{k+1} $\forall s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_{k+1}(t, s) = \int_s^t g_k(\sigma(\tau), s) \Delta\tau \text{ ve } h_{k+1}(t, s) = \int_s^t h_k(\tau, s) \Delta\tau$$

şeklinde tanımlanır. $h_k(t, s)$ fonksiyonunun s sabit olmak üzere t ye bağlı delta türevi

$h_k^\Delta(t, s)$ olup, $k \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$h_k^\Delta(t, s) = h_{k-1}(t, s)$$

şeklindedir. Benzer olarak $k \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$g_k^\Delta(t, s) = g_{k-1}(\sigma(t), s)$$

biçimindedir. Yukarıdaki tanımlamalardan $\forall s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_1(t, s) = h_1(t, s) = t - s$$

elde edilir. Ancak $k > 1$ olduğu durumlarda g_k ve h_k fonksiyonları için böyle bir ifade bulmak kolay değildir [5].

Örnek 2.5 Zaman skalasının $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ olduğu durumlarda g_k ve h_k fonksiyonları verilecektir.

i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = t$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ için $g_k = h_k$ dır. $k = 2$ için $g_2(t, s) = h_2(t, s)$. Bu durumda

$$g_2(t, s) = h_2(t, s) = \int_s^t (\tau - s) d\tau = \frac{(\tau - s)^2}{2} \Big|_{\tau=s}^{\tau=t} = \frac{(t - s)^2}{2}$$

olarak bulunur. $k \in \mathbb{N}_0$ olduğunda $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için,

$$g_k(t, s) = h_k(t, s) = \frac{(t - s)^k}{k!}$$

dır.

$\alpha \in \mathbb{R}$ için n kez türevlenebilen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu aşağıdaki bilinen Taylor formülünü sağlar. $\forall t \in \mathbb{R}$ için bu formülün gösterimi

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-\alpha)^k}{k!} f^{(k)}(\alpha) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} h_k(t, \alpha) f^{(k)}(\alpha) + \int_{\alpha}^t h_{n-1}(t, \sigma(\tau)) f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k g_k(\alpha, t) f^{(k)}(\alpha) + \int_{\alpha}^t (-1)^{n-1} g_{n-1}(\sigma(\tau), t) f^{(n)}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

şeklindedir. $f^{(k)}$, burada da f fonksiyonunun k . türevidir [5].

ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = t+1$. $\forall t, s \in \mathbb{Z}$ için,

$$h_2(t, s) = \int_s^t h_1(\tau, s) \Delta s = \left[\frac{(\tau-s)^2}{2} \right]_{\tau=s}^{\tau=t} = \binom{t-s}{2}$$

bulunur. $k \in \mathbb{N}_0$ olduğunda $\forall t, s \in \mathbb{Z}$ için,

$$h_k(t, s) = \frac{(t-s)^{(k)}}{k!} = \binom{t-s}{k}$$

elde edilir.

$\alpha \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonunun Taylor formülünün ayrık analizdeki karşılığı aşağıdaki gibidir. $\forall t \in \mathbb{Z}$ ve $t > \alpha + n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-\alpha)^{(k)}}{k!} \Delta^k f(\alpha) + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\tau=\alpha}^{t-n} (t-\tau-1)^{(n-1)} \Delta^n f(\tau) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} h_k(t, \alpha) \Delta^k f(\alpha) + \sum_{\tau=\alpha}^{t-n} h_{n-1}(t, \sigma(\tau)) \Delta^n f(\tau) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k g_k(\alpha, t) \Delta^k f(\alpha) + \sum_{\tau=\alpha}^{t-n} (-1)^{n-1} g_{n-1}(\sigma(\tau), t) \Delta^n f(\tau) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada Δ^k , k . kez ileri fark operatörüdür [5].

Örnek 2.6 $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ olsun. $q > 1$ olmak üzere $q^{\mathbb{Z}} = \{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ ve $\overline{q^{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $\forall t, s \in \mathbb{T}$ için,

$$h_k(t, s) = \prod_{v=0}^{k-1} \frac{t - q^v s}{\sum_{\mu=0}^v q^\mu}$$

dır. Özel halde $q = 2$ durumunda $\forall t, s \in \mathbb{T}$ için,

$$h_k(t, s) = \prod_{v=0}^{k-1} \frac{t - 2^v s}{2^{v+1} - 1}$$

olur. Buradan $k = 2$, $k = 3$ ve $k = 4$ durumları hesaplanırsa,

i) $k = 2$ için,

$$h_2(t, s) = \frac{(t-s)(t-2s)}{3}.$$

ii) $k = 3$ için,

$$h_3(t, s) = \frac{(t-s)(t-2s)(t-4s)}{21}.$$

iii) $k = 4$ için,

$$h_4(t, s) = \frac{(t-s)(t-2s)(t-4s)(t-8s)}{315}$$

elde edilir [5].

2.5 Zaman Skalasında Dinamik Eşitsizlikler

Bu alt bölümde, ileride çeşitli ispatlarda kullanılacak olan ve çok iyi bilinen zaman skalasında Hölder, Cauchy-Schwarz ve Minkowski eşitsizlikleri verilecektir.

Teorem 2.12 (Hölder Eşitsizliği) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı rd sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \Delta t \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b |g(t)|^q \Delta t \right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır. Burada $p > 1$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ dır [5].

Teorem 2.13 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı rd sürekli fonksiyonlar olsun. Böylece

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \Delta t \leq \sqrt{\left\{ \int_a^b |f(t)|^2 \Delta t \right\} \left\{ \int_a^b |g(t)|^2 \Delta t \right\}}$$

eşitsizliği elde edilir [5].

Teorem 2.14 (Minkowski Eşitsizliği) $a, b \in \mathbb{T}$, $p > 1$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı rd sürekli fonksiyonlar ise,

$$\left\{ \int_a^b |(f+g)(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right\}^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır [5].

BÖLÜM III

OSTROWSKI VE AĞIRLIKLI OSTROWSKI-GRÜSS EŞİTSİZLİKLERİ

1988 tarihinde Ostrowski [31], diferensiyellenebilir bir fonksiyonun mutlak sapmasına, aynı fonksiyonun ortalama integralini kullanarak yaklaşımını veren bir eşitsizlik elde etmiştir. Bu eşitsizliğe Ostrowski eşitsizliği denir ve

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds \right| \leq \sup_{a < t < b} |f'(t)| (b-a) \left[\frac{\left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} + \frac{1}{4} \right]$$

şeklinde dir.

Bu çalışmada Bohner ve Matthews [3], zaman skalasında Montgomery eşitliğini kullanarak, zaman skalasında Ostrowski eşitsizliğini ispatlamıştır. Ayrıca sonuçların sürekli, ayrık ve quantum analiz durumlarına uygulamaları ve ağırlıklı Ostrowski eşitsizliğinin birkaç versiyonları verilmiştir.

Bu çalışmanın incelenmesi sonraki bölümde yapılacak zaman skalasında Ostrowski eşitsizliğinin ağırlıklı versiyonu için temel bilgi oluşturacaktır. Zaman skalasında Ostrowski eşitsizliği ve genelleştirmeleri (Ostrowski-Grüss, Ostrowski-Çebyşev tipi ve Trapezoid eşitsizlikleri) oldukça yaygın olarak çalışılmıştır [4,16,19,21,23,24,25,26,27,28,30,33,39,40,41,42,43,44,45].

3.1 Ostrowski Eşitsizliği

Lemma 3.1 (Montgomery Eşitliği) $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı

fonksiyon olsun. $p(t, s) = \begin{cases} s-a, & a \leq s < t \\ s-b, & t \leq s \leq b \end{cases}$ olmak üzere

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t, s) f^\Delta(s) \Delta s$$

eşitliği elde edilir [3].

Sonuç 3.1 (Ayrık Durum) Lemma 3.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = n$, $s = j$, $t = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa,

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} p(i, j) \Delta x_j$$

eşitliği vardır. Burada $1 \leq j \leq n-1$ için $p(1, j) = j - n$, $0 \leq j \leq n-1$ için $p(n, j) = j$,

$$p(i, j) = \begin{cases} j, & 0 \leq j < i \\ j - n, & i \leq j \leq n-1 \end{cases} \text{ ve } p(i, 0) = 0$$

dır [3, 12].

Sonuç 3.2 (Sürekli Durum) Lemma 3.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t, s) f'(s) ds$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik Montgomery eşitliği olarak bilinir [3, 30].

Sonuç 3.3 (Quantum Analiz Durumu) Lemma 3.1 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$, $q > 1$, $a = q^m$, $b = q^n$ ve $m < n$ olsun. Bu taktirde

$$f(t) = \frac{\sum_{k=m}^{n-1} q^k f(q^{k+1})}{\sum_{k=m}^{n-1} q^k} + \frac{1}{q^n - q^m} \sum_{k=m}^{n-1} [f(q^{k+1}) - f(q^k)] p(t, q^k)$$

eşitliği vardır. Burada $p(t, q^k) = \begin{cases} q^k - q^m, & q^m \leq q^k < t \\ q^k - q^n, & t \leq q^k \leq q^n \end{cases}$ dir [3].

Teorem 3.1 (Ostrowski Eşitsizliği) $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \frac{M}{b-a} (h_2(t, a) + h_2(t, b))$$

eşitsizliği vardır. $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ dir [3].

Sonuç 3.4 (Ayrık Durum) Teorem 3.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = n$, $s = j$, $t = i$ ve $f(k) = x_k$ olsun. $M = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\Delta x_i|$ olmak üzere

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{M}{n} \left[\left| i - \frac{n+1}{2} \right|^2 + \frac{n^2 + 1}{4} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ayrık Ostrowski eşitsizliğidir [3,12].

Sonuç 3.5 (Sürekli Durum) Teorem 3.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınır,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds \right| \leq M(b-a) \left[\frac{\left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} + \frac{1}{4} \right]$$

eşitsizliği bulunur. $M = \sup_{a < t < b} |f'(t)|$ dir. Bu eşitsizlik Ostrowski [3,31].

Sonuç 3.6 (Quantum Analiz Durumu) Teorem 3.1 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$, $q > 1$, $a = q^m$, $b = q^n$ ve

$m < n$ olsun. $M = \sup_{q^m < t < q^n} \left| \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} \right|$ ve

$$A = \left[\frac{2}{1+q} \left(\left(t - \frac{\frac{1+q}{2}(q^n + q^m)}{2} \right) \right)^2 - \frac{\left(\frac{1+q}{2} \right)^2 (q^n + q^m)^2 + (2(1+q) - 2)(q^{2n} + q^{2m})}{4} \right]$$

olmak üzere,

$$\left| f(t) - \frac{1}{q^n - q^m} \int_{q^m}^{q^n} f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \frac{MA}{q^n - q^m}$$

eşitsizliği elde edilir [3].

3.2 Ağırlıklı Ostrowski Eşitsizliği

Teorem 3.2 $a, b, s, t, \tau \in \mathbb{T}$, $a < b$, $q \in C_{rd}$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| f(t) - \int_a^b q^\sigma(s) f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \int_a^b q^\sigma(s) |\sigma(s) - t| M \Delta s$$

$$\leq M \begin{cases} \left(\int_a^b |\sigma(s) - t|^p \Delta s \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (q^\sigma(s))^q \Delta s \right)^{\frac{1}{q}}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad q > 1 \\ \sup_{a \leq s < b} q^\sigma(s) [g_2(a, t) + g_2(b, t)], \\ \frac{b - \sigma(a)}{2} + \left| t - \frac{b + \sigma(a)}{2} \right|, \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. $M = \sup_{\sigma(a) \leq \tau < b} |f^\Delta(\tau)|$ ve $q(s) \geq 0$ için $\int_a^b q^\sigma(s) \Delta s = 1$ dir [3].

Sonuç 3.7 (Ayrık Durum) Teorem 3.2 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = n$, $s = j$, $t = i$, $\tau = k$,

$f(k) = x_k$ ve $M = \max_{k=1, \dots, n-1} |\Delta x_k|$ olsun. Bu durumda $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ ve $q_i \leq 0$ olduğunda,

$$\left| x_i - \sum_{j=1}^n q_j x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n q_j |j - i| M$$

$$\leq M \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |j - i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n q_j^q \right)^{\frac{1}{q}}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad q > 1 \\ \left[\frac{n^2 - 1}{4} + \left(i - \frac{n+1}{2} \right)^2 \right] \max_{j=1, \dots, n} q(j), \\ \frac{n-1}{2} + \left| i - \frac{n+1}{2} \right|, \end{cases}$$

eşitsizliği bulunur [3,12].

Sonuç 3.8 (Sürekli Durum) Teorem 3.2 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $\int_a^b q(s) ds = 1$ ve $q(s) \geq 0$ için,

$$\left| f(t) - \int_a^b q(s) f(s) ds \right| \leq \int_a^b q(s) |s - t| M ds$$

$$\leq M \begin{cases} \left(\int_a^b |s - t|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (q(s))^q ds \right)^{\frac{1}{q}}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad q > 1 \\ \sup_{a \leq s < b} q(s) (b-a)^2 \left[\frac{\left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} + \frac{1}{4} \right], \\ \frac{b-a}{2} + \left| t - \frac{b+a}{2} \right|, \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir. $M = \sup_{a \leq \tau < b} |f'(\tau)|$ dur [3].

Sonuç 3.9 $a, b, s, t \in \mathbb{T}$ ve f türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $M = \sup_{\sigma(a) \leq t < b} |f^\Delta(t)|$ olmak üzere

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \frac{M}{b-a} (h_2(t, a) + h_2(t, b))$$

eşitsizliği sağlanır [3].

2007 de, Pachpatte [36] türevleri L^p uzayında olan iki fonksiyonu içeren Ostrowski tipi eşitsizliklerin genelleştirmelerini aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 3.3 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı mutlak sürekli bir fonksiyon ve $p > 1$ olmak üzere türevleri $f', g' \in L_p[a, b]$ olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x)g(x) - \frac{1}{2(b-a)} \left[g(x) \int_a^b f(t) dt + f(x) \int_a^b g(t) dt \right] \right| \leq \frac{1}{2(b-a)} \left[\|g(x)\| \|f'\|_p + \|f(x)\| \|g'\|_p \right] (B(x))^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır. $\forall x \in [a, b]$ için $B(x) = \frac{1}{q+1} [(x-a)^{q+1} + (b-x)^{q+1}]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [9].

3.3 L^∞ Norm Üzerinde Ağırlıklı Ostrowski–Grüss Eşitsizliği

Bu kısımda literatürde bulunan Ostrowski, Ostrowski-Grüss eşitsizlikleri ve Teorem 3.3'ün zaman skalasında genelleştirmeleri verilmiştir.

Teorem 3.4 $f, g \in C_{rd}^1([a, b], \mathbb{R})$ ve $f^\Delta, g^\Delta \in L^\infty((a, b))$ olmak üzere, $\forall t \in [a, b]$ için

$$\|f^\Delta\|_\infty = \sup_{s \in (a, b)} |f^\Delta(s)| < \infty \text{ ve } \|g^\Delta\|_\infty = \sup_{s \in (a, b)} |g^\Delta(s)| < \infty \text{ ise,}$$

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2m(a, b)} \left[g(t) \int_a^b w(s) f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b w(s) g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right| \leq \left(\frac{1}{m(a, b)} \int_a^b (\sigma(s) - t) w(s) s n g(s - t) \Delta s \right) \frac{\|g(t)\| \|f^\Delta\|_\infty + \|f(t)\| \|g^\Delta\|_\infty}{2}$$

ve

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{m(a, b)} \left[g(t) \int_a^b w(s) f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b w(s) g(\sigma(s)) \Delta s \right] + \left(\frac{1}{m(a, b)} \int_a^b w(s) f(\sigma(s)) \Delta s \right) \left(\frac{1}{m(a, b)} \int_a^b w(s) g(\sigma(s)) \Delta s \right) \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{m(a,b)} \int_a^b (\sigma(s)-t) w(s) sng(s-t) \Delta s \right)^2 \|f^\Delta\|_\infty \|g^\Delta\|_\infty$$

eşitsizlikleri elde edilir [9].

Sonuç 3.10 Teorem 3.3' ün şartları altında $\forall t \in [a, b]$ için $w(t) = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| f(t)g(t) - \frac{1}{2(b-a)} \left[g(t) \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right| \\ & \leq \frac{(h_2(t, a) + g_2(b, t)) (\|f(t)\| \|g^\Delta\|_\infty + \|g(t)\| \|f^\Delta\|_\infty)}{2(b-a)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(t)g(t) - \frac{1}{b-a} \left[g(t) \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(\sigma(s)) \Delta s \right) \right| \\ & \leq \left(\frac{h_2(t, a) + g_2(b, t)}{b-a} \right)^2 \|f^\Delta\|_\infty \|g^\Delta\|_\infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitsizlikleri bulunur [9].

Örnek 3.1 Sonuç 3.10 da elde edilen (3.1) eşitsizliğinde $\forall t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınırsa,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s \right| \leq \frac{h_2(t, a) + g_2(b, t)}{b-a} \|f^\Delta\|_\infty \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Ostrowski eşitsizliği olarak bilinir [9,3]. Eğer (3.1)

eşitsizliği için $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, Ostrowski eşitsizliği bulunur. (3.2) eşitsizliği için

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$ ve $b = n \in \mathbb{N}$ alınırsa,

$$\left| f(t) - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n f(s) \right| \leq \frac{1}{n} \left[\frac{n^2-1}{4} + \left(t - \frac{n+1}{2} \right)^2 \right] \|\Delta f\|_\infty$$

eşitsizliği elde edilir [9,12].

Örnek 3.2 Sonuç 3.10 da $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2(b-a)} \left[g(t) \int_a^b f(s) ds + f(t) \int_a^b g(s) ds \right] \right|$$

$$\leq (b-a) \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{t - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] \left(\frac{|g(t)| \|f'\|_\infty + |f(t)| \|g'\|_\infty}{2} \right)$$

ve

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{b-a} \left[g(t) \int_a^b f(s) ds + f(t) \int_a^b g(s) ds \right] + \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(s) ds \right) \right|$$

$$\leq \left((b-a) \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{t - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] \right)^2 \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty$$

şeklindedir [9].

Örnek 3.3 Sonuç 3.10 da $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$ ve $b = n \in \mathbb{N}$ alınırsa, (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2n} \left[g(t) \sum_{s=1}^n f(s) + f(t) \sum_{s=1}^n g(s) \right] \right|$$

$$\leq \frac{1}{n} \left[\frac{n^2-1}{4} + \left(t - \frac{n+1}{2} \right)^2 \right] \frac{|g(t)| \|\Delta f\|_\infty + |f(t)| \|\Delta g\|_\infty}{2}$$

ve

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{n} \left[g(t) \sum_{s=1}^n f(s) + f(t) \sum_{s=1}^n g(s) \right] + \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n f(s) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n g(s) \right) \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{n} \left[\frac{n^2-1}{4} + \left(t - \frac{n+1}{2} \right)^2 \right] \right)^2 \|\Delta f\|_\infty \|\Delta g\|_\infty$$

biçimindedir. Bu eşitsizlikler ayrık Ostrowski-Grüss eşitsizlikleridir [9, 35].

3.4 L^p Norm Üzerinde Ağırlıklı Ostrowski-Grüss Eşitsizliği

Teorem 3.5 $p > 1$ için $q = \frac{p}{p-1}$ olsun. $f, g \in C_{rd}^1([a, b], \mathbb{R})$ ve $f^\Delta, g^\Delta \in L^p(\llbracket (a, b) \rrbracket)$

olmak üzere $\forall t \in [a, b]$ için $\|f^\Delta\|_p = \left(\int_a^b |f^\Delta(s)|^p \Delta s \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ ve $\|g^\Delta\|_p = \left(\int_a^b |g^\Delta(s)|^p \Delta s \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

ise,

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2m(a, b)} \left[g(t) \int_a^b w(s) f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b w(s) g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right|$$

$$\leq \left\| \frac{p_w(t, t_0)}{m(a, b)} \right\|_q \frac{\|g(t)\|_p \|f^\Delta\|_p + \|f(t)\|_p \|g^\Delta\|_p}{2} \quad (3.4)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(t)g(t) - \frac{1}{m(a, b)} \left[g(t) \int_a^b w(s) f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b w(s) g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{m(a, b)} \int_a^b w(s) f(\sigma(s)) \Delta s \right) \left(\frac{1}{m(a, b)} \int_a^b w(s) g(\sigma(s)) \Delta s \right) \right| \\ & \leq \left\| \frac{p_w(t, t_0)}{m(a, b)} \right\|_q^2 \|f^\Delta\|_p \|g^\Delta\|_p \end{aligned} \quad (3.5)$$

eşitsizlikleri bulunur [9].

Sonuç 3.11 Teorem 3.4'ün şartları altında $\forall t \in [a, b]$ için $w(t) = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| f(t)g(t) - \frac{1}{2(b-a)} \left[g(t) \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right| \\ & \leq \left(\int_a^t \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^q \Delta s + \int_t^b \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^q \Delta s \right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|g(t)\|_p \|f^\Delta\|_p + \|f(t)\|_p \|g^\Delta\|_p}{2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(t)g(t) - \frac{1}{b-a} \left[g(t) \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s + f(t) \int_a^b g(\sigma(s)) \Delta s \right] \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(\sigma(s)) \Delta s \right) \right| \\ & \leq \left(\int_a^t \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^q \Delta s + \int_t^b \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^q \Delta s \right)^{\frac{2}{q}} \|f^\Delta\|_p \|g^\Delta\|_p \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

Örnek 3.4 Sonuç 3.1 de elde edilen (3.6) eşitsizliğinde $\forall t \in [a, b]$ için $g(t) = 1$ alınırsa,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\sigma(s)) \Delta s \right| \leq \left(\int_a^t \left(\frac{s-a}{b-a} \right)^q \Delta s + \int_t^b \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^q \Delta s \right)^{\frac{1}{q}} \|f^\Delta\|_p \quad (3.8)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik yeni Ostrowski eşitsizliğidir. (3.8) eşitsizliği için $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds \right| \leq \left(\frac{b-a}{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{t-a}{b-a} \right)^{q+1} + \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{q+1} \right]^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p$$

eşitsizliği elde edilir [9,11,13]. (3.8) eşitsizliğinde $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$ ve $b = n \in \mathbb{N}$ alınırsa,

$$\left| f(t) - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n f(s) \right| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{s=1}^{t-1} s^q + \sum_{s=1}^{n-t} s^q \right)^{\frac{1}{q}} \|\Delta f\|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak $p = q = 2$ durumunda

$$\left| f(t) - \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n f(s) \right| \leq \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(t-1)(2t-1) + (n-t)(n-t+1)(2n-2t+1)}{6}} \|\Delta f\|_2$$

şeklinde dir [9].

Örnek 3.5 Teorem 3.4 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, (3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2m(a,b)} \left[g(t) \int_a^b w(s)f(s)ds + f(t) \int_a^b w(s)g(s)ds \right] \right| \leq \left\| \frac{p_w(t, t_0)}{m(a,b)} \right\|_q \frac{|g(t)|\|f'\|_p + |f(t)|\|g'\|_p}{2}$$

ve

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{m(a,b)} \left[g(t) \int_a^b w(s)f(s)ds + f(t) \int_a^b w(s)g(s)ds \right] \right| + \left(\frac{1}{m(a,b)} \int_a^b w(s)f(s)ds \right) \left(\frac{1}{m(a,b)} \int_a^b w(s)g(s)ds \right) \leq \left\| \frac{p_w(t, t_0)}{m(a,b)} \right\|_q^2 \|f'\|_p \|g'\|_p$$

olur. Bu eşitsizlikler kaynak [36] da Teorem 1 ve Teorem 2 ile verilmiştir. Ayrıca, bu eşitsizliklerde $t = (a+b)/2$ seçilirse [7] de Uyarı 2 elde edilir [9].

Örnek 3.6 Teorem 3.4 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$ ve $b = n$ alınırsa, (3.6) ve (3.7) eşitsizlikleri

$$\left| f(t)g(t) - \frac{1}{2n} \left[g(t) \sum_{s=1}^n f(s) + f(t) \sum_{s=1}^n g(s) \right] \right| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{s=1}^{t-1} s^q + \sum_{s=1}^{n-t} s^q \right)^{\frac{1}{q}} \frac{|g(t)|\|\Delta f\|_p + |f(t)|\|\Delta g\|_p}{2}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left| f(t)g(t) - \frac{1}{n} \left[g(t) \sum_{s=1}^n f(s) + f(t) \sum_{s=1}^n g(s) \right] + \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n f(s) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^n g(s) \right) \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{s=1}^{t-1} s^q + \sum_{s=1}^{n-t} s^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^2 \|\Delta f\|_p \|\Delta g\|_p
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur. Bu eşitsizlikler yeni ayrık Ostrowski-Grüss eşitsizlikleridir [9].

BÖLÜM IV

AĞIRLIKLİ Δ İNTEGRAL İFADESİ BİRLEŞİMİNİ İÇEREN AĞIRLIKLİ OSTROWSKI TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bohner ve Matthews [3] zaman skalasında Montgomery eşitliğini kullanarak aşağıdaki Ostrowski eşitsizliğini elde etmiştir.

Teorem 4.1 $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \frac{M}{b-a} (h_2(t, a) + h_2(t, b))$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ şeklindedir.

Lemma 4.1 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı kesinlikle sürekli bir fonksiyonu olsun.

$P(x, t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ çekirdeği

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{t-a}{x-a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{b-t}{b-x} \right) & x \leq t \leq b \end{cases} \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlanmıştır. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ile negatif ve sıfır olmasın. Bu durumda

$$\int_a^b P(x, t) f'(t) dt = f(x) - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x f(t) dt + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b f(t) dt \right]$$

eşitliği elde edilir [10].

Yakın zamanda Jiang ve diğerleri [18] de (4.1) çekirdeği göz önüne alınarak zaman skalasında bazı yeni Ostrowski tipi eşitsizliklerin genelleştirmesi elde edilmiştir.

2004 de, Pachpatte [37] de aşağıdaki Ostrowski ve Grüss tipi ayrık eşitsizlikleri elde etmiştir.

Teorem 4.2 $f(n)$ ve $g(n)$ $N_{a,b}$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\Delta f(n)$, $\Delta g(n)$ tanımlı olmak üzere $N_{a,b}$ de $|\Delta f(n)| \leq A$, $|\Delta g(n)| \leq B$ olsun. $\forall n, s \in N_{a,b}$, A, B negatif olmayan sabitler için $r(n, s) = \begin{cases} s-a, & s \in [a, n-1] \\ s-b, & s \in [n, b] \end{cases}$ ve $H(n) = \sum_{s=a}^{b-1} |r(n, s)|$ olmak üzere

$$\left| f(n)g(n) - \frac{1}{2(b-a)} \left[g(n) \sum_{s=a}^{b-1} f(s+1) + f(n) \sum_{s=a}^{b-1} g(s+1) \right] \right| \leq \frac{1}{2(b-a)} [A|g(n)| + B|f(n)|] H(n),$$

ve

$$\left| f(n) - \frac{1}{b-a} \sum_{s=a}^{b-1} f(s+1) \right| \leq \frac{A}{b-a} H(n)$$

eşitsizlikleri bulunur.

Teorem 4.3 $f(n)$ ve $g(n)$ $N_{a,b}$ de tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\Delta f(n)$, $\Delta g(n)$ tanımlı olmak üzere $N_{a,b}$ de $|\Delta f(n)| \leq A$, $|\Delta g(n)| \leq B$ olsun. $\forall n \in N_{a,b}$ için

$$\left| \frac{1}{b-a} \sum_{n=a}^{b-1} f(n)g(n) - \frac{1}{2(b-a)^2} \left[\left(\sum_{n=a}^{b-1} g(n) \right) \left(\sum_{n=a}^{b-1} f(n+1) \right) + \left(\sum_{n=a}^{b-1} f(n) \right) \left(\sum_{n=a}^{b-1} g(n+1) \right) \right] \right| \leq \frac{1}{2(b-a)^2} \sum_{n=a}^{b-1} [A|g(n)| + B|f(n)|] H(n),$$

ve

$$\left| \frac{1}{b-a} \sum_{n=a}^{b-1} f(n)g(n) - \frac{1}{(b-a)^2} \left[\left(\sum_{n=a}^{b-1} g(n) \right) \left(\sum_{n=a}^{b-1} f(n+1) \right) + \left(\sum_{n=a}^{b-1} f(n) \right) \left(\sum_{n=a}^{b-1} g(n+1) \right) \right] \right| + \frac{1}{(b-a)^2} \left| \left(\sum_{n=a}^{b-1} f(n+1) \right) \left(\sum_{n=a}^{b-1} g(n+1) \right) \right| \leq \frac{AB}{(b-a)^3} \sum_{n=a}^{b-1} (H(n))^2$$

eşitsizlikleri sağlanır. $\forall n, s \in N_{a,b}$ ve A, B negatif olmayan sabitler için

$$r(n, s) = \begin{cases} s-a, & s \in [a, n-1] \\ s-b, & s \in [n, b] \end{cases}$$

olmak üzere $H(n) = \sum_{s=a}^{b-1} |r(n, s)|$ dir.

4.1 Ağırlıklı Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Şimdiye kadar yapılan çalışmalar Ostrowski eşitsizliği ve bunun genelleştirilmeleri üzerinedir. Bu kısımda

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t \leq b \end{cases}$$

çekirdeği göz önüne alınarak zaman skalasında Ostrowski eşitsizliğinin ağırlıklı durumu, Lemma 4.1, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin zaman skalasında genelleştirmesi, iki fonksiyon için ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizlikler ve ağırlıklı perturbe edilmiş Ostrowski tipi eşitsizlikleri elde edilecektir. Ayrıca sonuçların sürekli, ayrık ve quantum durumlarına uygulamaları çalışılmıştır. Bundan başka elde edilen sonuçlar literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Lemma 4.2 $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar

$$\text{ve } P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases} \quad \text{olsun. } \forall x \in [a, b] \text{ için,}$$

$$\int_a^b P(x, t) f^\Delta(t) \Delta t = \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir.

İspat Teorem 2.10 (vi) dan

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right) f^\Delta(t) \Delta t \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(x) - h(a)}{x - a} \right) f(x) - \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)(x - a)} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \end{aligned} \quad (4.3)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_x^b \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right) f^\Delta(t) \Delta t \\
&= \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right) f(x) - \frac{\beta}{(\alpha + \beta)(b - x)} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \quad (4.4)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.3) ve (4.4) eşitlikleri toplanırsa, (4.2) eşitliği elde edilir.

Uyarı 4.1 Eğer $h(t) = t$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, [10] da Lemma 1 eşitliğine ulaşılır [40].

Sonuç 4.1 (Sürekli Durum) Lemma 4.2 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b P(x, t) f'(t) dt &= \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) f(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) f(t) dt \right]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$$

şeklindedir [40].

Sonuç 4.2 (Ayrık Durum) Lemma 4.2 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x - 1 \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b - 1 \end{cases} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=a}^{b-1} P(x, t) \Delta f(t) &= \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} f(t+1) \Delta h(t) \right]
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir [40].

Sonuç 4.3 (Quantum Analiz Durumu) Lemma 4.2 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ ve $q > 1$ alınırsa,

$$\int_a^b P(x, t) D_q f(t) d_q t = \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right]$$

$$-\frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha}{x-a}\int_a^x f(qt)D_q h(t)d_q t + \frac{\beta}{b-x}\int_x^b f(qt)D_q h(t)d_q t\right]$$

şeklinde olur. Burada $P(x,t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{h(t)-h(a)}{x-a}\right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{h(b)-h(t)}{b-x}\right), & x \leq t < b \end{cases}$ ve $s, t \in q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$,

$$t \geq s \text{ ise, } (D_q f)(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} \text{ ve } \int_s^t f(\eta)d_q \eta = (q-1) \sum_{l=\log_q(s)}^{\log_q\left(\frac{t}{q}\right)} f(q^l)q^l \text{ dır [19].}$$

Teorem 4.4 $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar

ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$, $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)| < \infty$ ve $P(x,t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{h(t)-h(a)}{x-a}\right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{h(b)-h(t)}{b-x}\right), & x \leq t < b \end{cases}$

olsun. $\forall x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha+\beta} \left[\alpha \frac{h(x)-h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b)-h(x)}{b-x} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha+\beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right| \\ & \leq \frac{M}{\alpha+\beta} \int_a^b |P(x,t)| \Delta t \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat Teorem 4.4, Lemma 4.2, $h_2(\dots)$ ve mutlak değer özellikleri kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir [40].

Uyarı 4.2 Teorem 4.4 de $\alpha = x-a$ ve $\beta = b-x$ olması durumunda

$$\left| \frac{h(b)-h(a)}{b-a} f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\int_a^x |h(t)-h(a)| \Delta t + \int_x^b |h(b)-h(t)| \Delta t \right]$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik zaman skalasında Ostrowski eşitsizliğinin ağırlıklı durumudur [40].

Sonuç 4.4 (Sürekli Durum) Teorem 4.4 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) f(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) f(t) dt \right] \right| \\ & \leq \frac{M}{\alpha + \beta} \int_a^b |P(x, t)| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $M = \sup_{a < t < b} |f'(t)| < \infty$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$$

şeklindedir [40].

Sonuç 4.5 (Ayrık Durum) Teorem 4.4 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $M = \sup_{a < t < b} |\Delta f(t)| < \infty$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x - 1 \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b - 1 \end{cases} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} f(t+1) \Delta h(t) \right] \right| \\ & \leq \frac{M}{\alpha + \beta} \sum_{t=a}^{b-1} |P(x, t)| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [40].

Sonuç 4.6 (Quantum Analiz Durumu) Teorem 4.4 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ ve $q > 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x f(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b f(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{\alpha + \beta} \int_a^b |P(x, t)| d_q t$$

eşitsizliği bulunur. Burada

$$M = \sup_{a < t < b} \left| (D_q f)(t) \right| < \infty \text{ ve } P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$$

biçimindedir [40].

4.2 İki Fonksiyon İçin Ağırlıklı Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Bu kısımda skalasında iki fonksiyon için ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 4.5 $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir birer

$$\text{fonksiyon ve } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0, P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$$

ve $M_1 = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)| < \infty$, $M_2 = \sup_{a < t < b} |g^\Delta(t)| < \infty$ olsun. $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left\{ g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right] \right\} \right| \\ & \leq \frac{M_1 |g(x)| + M_2 |f(x)|}{2(\alpha + \beta)} \left[\int_a^b |P(x, t)| \Delta t \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(x)g(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right]^2 - \left\{ f(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right] \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(x) \left[\alpha \frac{h(x)-h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b)-h(x)}{b-x} \right] \\
& \times \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \Bigg\} \\
& + \left(\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right) \\
& \times \left(\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right) \Bigg| \\
& \leq (\alpha + \beta)^2 \left(\int_a^b |P(x, t)| \Delta t \right)^2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır [40].

İspat Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x)-h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b)-h(x)}{b-x} \right] \\
& - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \\
& = \int_a^b P(x, t) f^\Delta(t) \Delta t
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x)-h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b)-h(x)}{b-x} \right] \\
& - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right] \\
& = \int_a^b P(x, t) g^\Delta(t) \Delta t
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.7) eşitliği $g(x)$ ve (4.8) eşitliği $f(x)$ ile çarpılır taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x)g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x)-h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b)-h(x)}{b-x} \right] \\
& - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left\{ g(x) \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right. \\
& \left. + f(x) \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[g(x) \int_a^b P(x,t) f^\Delta(t) \Delta t + f(x) \int_a^b P(x,t) g^\Delta(t) \Delta t \right]$$

eşitliği elde edilir. Burada da her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left\{ g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right. \\ & \quad \left. + f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right] \right\} \Bigg| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[|g(x)| \int_a^b |P(x,t)| |f^\Delta(t)| \Delta t + |f(x)| \int_a^b |P(x,t)| |g^\Delta(t)| \Delta t \right] \\ & \leq \frac{M_1 |g(x)| + M_2 |f(x)|}{2(\alpha + \beta)} \left[\int_a^b |P(x,t)| \Delta t \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.5) eşitsizliği bulunur. (4.7) ve (4.8) eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right]^2 - \left\{ f(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \times \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right] \\ & \quad \left. + g(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \times \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \Bigg\} \\ & \quad + \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right) \\ & \quad \times \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right) \\ & = (\alpha + \beta)^2 \left(\int_a^b |P(x,t)| f^\Delta(t) \Delta t \right) \left(\int_a^b |P(x,t)| g^\Delta(t) \Delta t \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Mutlak değer özellikleri kullanılarak (4.6) eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.7 (Sürekli Durum) Teorem 4.5 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $M_1 = \sup_{a < t < b} |f'(t)| < \infty$,

$M_2 = \sup_{a < t < b} |g'(t)| < \infty$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left\{ g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) f(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) f(t) dt \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) g(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) g(t) dt \right] \right\} \right| \\ & \leq \frac{M_1 |g(x)| + M_2 |f(x)|}{2(\alpha + \beta)} \left[\int_a^b |P(x, t)| dt \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(x)g(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right|^2 \\ & - \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \left\{ f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) g(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) g(t) dt \right] \right. \\ & \quad \left. + g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) f(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) f(t) dt \right] \right\} \\ & + \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right) \\ & \times \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right) \\ & \leq (\alpha + \beta)^2 \left(\int_a^b |P(x, t)| dt \right)^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur [40].

Uyarı 4.3 Sonuç 4.7 de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ alınır, kaynak [33] de $h = 0$ ve [34] de $n = 1$ durumu elde edilir [40].

Sonuç 4.8 (Ayrık Durum) Teorem 4.5 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x)g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left\{ g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} g(t+1) \Delta h(t) \right] \right. \\
& \quad \left. + f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} g(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} g(t+1) \Delta h(t) \right] \right\} \Bigg| \\
& \leq \frac{M_1 |g(x)| + M_2 |f(x)|}{2(\alpha + \beta)} \left[\sum_{t=a}^{b-1} |P(x, t)| \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left| f(x)g(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right]^2 - \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\
& \quad \times \left\{ f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} g(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} g(t+1) \Delta h(t) \right] \right. \\
& \quad \left. + g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} f(t+1) \Delta h(t) \right] \right\} \\
& \quad + \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right) \\
& \quad \times \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right) \Bigg| \\
& \leq (\alpha + \beta)^2 \left(\sum_{t=a}^{b-1} |P(x, t)| \right)^2
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada $P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x - 1 \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b - 1 \end{cases}$

ve $M_1 = \sup_{a < t < b} |\Delta f(t)| < \infty$, $M_2 = \sup_{a < t < b} |\Delta g(t)| < \infty$ şeklindedir [40].

Uyarı 4.4 Sonuç 4.8 de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ alınırsa, kaynak [37] de Teorem 1 ve Teorem 2 bulunur [40].

Sonuç 4.9 (Quantum Analiz Durumu) Teorem 4.5 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$,

$M_1 = \sup_{a < t < b} |(D_q f)(t)| < \infty$, $M_2 = \sup_{a < t < b} |(D_q g)(t)| < \infty$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases} \quad \text{olsun. Bu durumda}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)g(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \left\{ g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x f(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b f(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right. \\ & \quad \left. \left. + f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x g(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b g(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right\} \right| \\ & \leq \frac{M_1 |g(x)| + M_2 |f(x)|}{2(\alpha + \beta)} \left[\int_a^b |P(x, t)| d_q t \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| f(x)g(x) \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right]^2 - \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \right. \\ & \quad \times \left\{ f(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x g(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b g(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right. \\ & \quad \left. + g(x) \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x f(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b f(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right\} \\ & \quad + \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right) \\ & \quad \times \left(\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t \right) \Bigg| \\ & \leq (\alpha + \beta)^2 \left(\int_a^b |P(x, t)| d_q t \right)^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur [40].

Son olarak zaman skalasında ağırlıklı perturbe edilmiş Ostrowski tipi eşitsizlikler verilecektir.

4.3 Ağırlıklı Perturbe Edilmiş Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Teorem 4.6 $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar

olsun. $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) \Delta t \right) (f(b) - f(a)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right| \\
& \leq (b - a) \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P^2(x, t) \Delta t - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) \Delta t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b (f^\Delta(t))^2 \Delta t - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f^\Delta \in L^2[a, b] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) \Delta t \right) (f(b) - f(a)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right| \\
& \leq (b - a) \left[\frac{1}{b - a} \int_a^b P^2(x, t) \Delta t - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) \Delta t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma - \lambda}{2}, \quad \lambda \leq f^\Delta(x) \leq \Gamma \quad \text{ve } x \in [a, b] \quad (4.10)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$$

dır [40].

İspat Genelde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) f^\Delta(t) \Delta t - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) \Delta t \right) \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b f^\Delta(t) \Delta t \right) \\
& = \frac{1}{2(b - a)^2} \int_a^b \int_a^b (P(x, t) - P(x, s)) (f^\Delta(t) - f^\Delta(s)) \Delta t \Delta s \quad (4.11)
\end{aligned}$$

ve (4.2) den

$$\int_a^b P(x, t) f^\Delta(t) \Delta t = \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right]$$

$$-\frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha}{x-a}\int_a^x h^\Delta(t)f(\sigma(t))\Delta t+\frac{\beta}{b-x}\int_x^b h^\Delta(t)f(\sigma(t))\Delta t\right] \quad (4.12)$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^\Delta(t)\Delta t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (4.13)$$

ifadesi vardır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (P(x,t)-P(x,s))(f^\Delta(t)-f^\Delta(s))\Delta t \Delta s \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (P(x,t)-P(x,s))^2 \Delta t \Delta s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f^\Delta(t)-f^\Delta(s))^2 \Delta t \Delta s \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (P(x,t)-P(x,s))^2 \Delta t \Delta s \\ & = \frac{1}{b-a} \int_a^b P^2(x,t) \Delta t - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x,t) \Delta t \right)^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitliği ve [30] dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f^\Delta(t)-f^\Delta(s))^2 \Delta t \Delta s & = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f^\Delta(t))^2 \Delta t - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^\Delta(t) \Delta t \right)^2 \\ & = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f^\Delta(t))^2 \Delta t - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)^2 \\ & \leq \left(\frac{\Gamma-\lambda}{2} \right)^2, \quad \lambda \leq f^\Delta(t) \leq \Gamma \text{ ve } t \in [a,b] \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.11)-(4.16) ifadeleri kullanılarak (4.9) ve (4.10) eşitsizlikleri bulunur [40].

Sonuç 4.10 (Sürekli Durum) Teorem 4.6 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha+\beta} \left[\alpha \frac{h(x)-h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b)-h(x)}{b-x} \right] - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x,t) dt \right) (f(b)-f(a)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha+\beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h'(t)f(t) dt + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h'(t)f(t) dt \right] \right| \end{aligned}$$

$$\leq (b-a) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b P^2(x,t) dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x,t) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b (f'(t))^2 dt - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f'(t) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f' \in L^2[a,b]$$

ve

$$\left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b-x} \right] - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x,t) dt \right) (f(b) - f(a)) \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \int_a^x h'(t) f(t) dt + \frac{\beta}{b-x} \int_x^b h'(t) f(t) dt \right] \right| \\ \leq (b-a) \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b P^2(x,t) \Delta t - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b P(x,t) \Delta t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma - \lambda}{2}, \quad \lambda \leq f'(x) \leq \Gamma \text{ ve } x \in [a,b]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $P(x,t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x-a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b-x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$

şeklinde dir [40].

Sonuç 4.11 (Ayrık Durum) Teorem 4.6 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve

$$P(x,t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x-a} \right), & a \leq t < x-1 \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b-x} \right), & x \leq t < b-1 \end{cases} \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$\left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x-a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b-x} \right] - \left(\frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b-1} P(x,t) \right) (f(b) - f(a)) \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x-a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b-x} \sum_{t=x}^{b-1} f(t+1) \Delta h(t) \right] \right| \\ \leq (b-a) \left(\frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b-1} P^2(x,t) - \left(\frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b-1} P(x,t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left(\frac{1}{b-a} \sum_{t=a}^{b-1} (\Delta f(t))^2 - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta f \in L^2[a,b]$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \left(\frac{1}{b - a} \sum_{t=a}^{b-1} P(x, t) \right) (f(b) - f(a)) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} f(t+1) \Delta h(t) \right] \right| \\ & \leq (b - a) \left[\frac{1}{b - a} \sum_{t=a}^{b-1} P^2(x, t) - \left(\frac{1}{b - a} \sum_{t=a}^{b-1} P(x, t) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma - \lambda}{2}, \quad \lambda \leq \Delta f(t) \leq \Gamma \text{ ve } t \in [a, b] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [40].

Sonuç 4.12 (Quantum Analiz Durumu) Teorem 4.6 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$, $q > 1$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) d_q t \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x f(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b f(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right| \\ & \leq (b - a) \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P^2(x, t) d_q t - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) d_q t \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b (D_q f(t))^2 d_q t - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad D_q f(t) \in L^2[a, b] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) d_q t \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x f(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b f(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right| \\ & \leq (b - a) \left[\frac{1}{b - a} \int_a^b P^2(x, t) d_q t - \left(\frac{1}{b - a} \int_a^b P(x, t) d_q t \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma - \lambda}{2}, \quad \lambda \leq D_q f(t) \leq \Gamma \text{ ve } t \in [a, b] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri bulunur [40].

Teorem 4.7 $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı türevlenebilir fonksiyonlar, $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$,

$\varsigma, \Gamma \in \mathbb{R}$ ve $\varsigma \leq f^\Delta(x) \leq \Gamma$ olsun. Bu durumda $\forall x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{\varsigma + \Gamma}{2} \left(\int_a^b P(x, t) \Delta t \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] \right| \\ & \leq \frac{\Gamma - \varsigma}{2} \left(\int_a^b |P(x, t)| \Delta t \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \neq 0$ ve

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$$

şeklinde [40].

İspat Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \\ & = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] + \int_a^b P(x, t) f^\Delta(t) \Delta t \end{aligned} \quad (4.18)$$

eşitliği yazılabilir. (4.18) de, $C = \frac{\Gamma + \varsigma}{2}$ alınır,

$$\begin{aligned} & \int_a^b P(x, t) \left(f^\Delta(t) - \frac{\Gamma + \varsigma}{2} \right) \Delta t = \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] \\ & - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h^\Delta(t) f(\sigma(t)) \Delta t \right] - \frac{\Gamma + \varsigma}{2} \left(\int_a^b P(x, t) \Delta t \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitliği bulunur. Mutlak değer özelliği kullanılırsa,

$$\left| \int_a^b P(x, t) \left(f^\Delta(t) - \frac{\Gamma + \varsigma}{2} \right) \Delta t \right| \leq \frac{\Gamma - \varsigma}{2} \left(\int_a^b |P(x, t)| \Delta t \right) \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.18)-(4.20) ifadeleri kullanılırsa, (4.17) eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.13 (Sürekli Durum) Teorem 4.7 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{\varsigma + \Gamma}{2} \left(\int_a^b P(x, t) dt \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^x h'(t) f(t) dt + \frac{\beta}{b - x} \int_x^b h'(t) f(t) dt \right] \right| \\ & \leq \frac{\Gamma - \varsigma}{2} \left(\int_a^b |P(x, t)| dt \right) \\ & \text{eşitsizliği sağlanır. } P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases} \text{ dir [40].} \end{aligned}$$

Uyarı 4.5 Sonuç 4.13 de $h(t) = t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ alınırsa, [44] de Sonuç 1 elde edilir [40].

Sonuç 4.14 (Ayrık Durum) Teorem 4.7 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun.

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x - 1 \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b - 1 \end{cases} \text{ olmak üzere} \\ & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{\varsigma + \Gamma}{2} \left(\sum_{t=a}^{b-1} P(x, t) \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \sum_{t=a}^{x-1} f(t+1) \Delta h(t) + \frac{\beta}{b - x} \sum_{t=x}^{b-1} f(t+1) \Delta h(t) \right] \right| \\ & \leq \frac{\Gamma - \varsigma}{2} \left(\sum_{t=a}^{b-1} |P(x, t)| \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [40].

Sonuç 4.15 (Quantum Analiz Durumu) Teorem 4.7 de $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ ve $q > 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x)}{\alpha + \beta} \left[\alpha \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \beta \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \right] - \frac{\varsigma + \Gamma}{2} \left(\int_a^b P(x, t) d_q t \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\frac{\alpha}{x - a} \int_a^b f(qt) D_q h(t) d_q t + \frac{\beta}{b - x} \int_a^b f(qt) D_q h(t) d_q t \right] \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\Gamma - \varsigma}{2} \left(\int_a^b |P(x, t)| d_q t \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases}$

şeklindedir [40].

BÖLÜM V

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bohner ve Matthews [3] Montgomery eşitliği kullanarak, Ostrowski eşitsizliğini zaman skalasında çalışmıştır. Bu tez kapsamında

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(t) - h(a)}{x - a} \right), & a \leq t < x \\ \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \left(\frac{h(b) - h(t)}{b - x} \right), & x \leq t < b \end{cases} \quad (4.21)$$

çekirdeği göz önüne alınarak ağırlıklı Δ integral ifadesi birleşimini içeren ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizliklerin bazı genelleştirilmesi yapılmıştır.

(4.21) çekirdeğinde $h(t) = t$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınarak, [10] da Lemma 1 ile verilen eşitlik elde edilmiştir.

Benzer şekilde $\alpha = x - a$ ve $\beta = b - x$ alınarak, [3] de verilen zaman skalasında Ostrowski eşitsizliğinin ağırlık durumuna varılmıştır.

Son olarak (4.21) de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ alınarak, [37] de Teorem 1 ve Teorem 2 ile verilen eşitsizliklere ulaşılmıştır.

Dolayısıyla (4.21) çekirdeğinde bazı özel seçimler yapılarak [3,10,37] verilen eşitsizliklerin genellemeleri yapılmıştır.

Bu genellemelerin yanı sıra, (4.21) çekirdeğini kullanarak zaman skalasında iki fonksiyon için ağırlıklı Ostrowski tipi eşitsizlikler ve ağırlıklı perturbe edilmiş Ostrowski tipi eşitsizlikler elde edilmiştir.

Zaman skalasında bulunan bu eşitsizlikler özel durumlar olarak sürekli, ayrık ve quantum analiz durumları alınarak sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar literatürde bulunan eşitsizliklerle karşılaştırılmıştır.

(4.21) ile verilen çekirdek fonksiyonundan daha genel bir çekirdek fonksiyon alınarak, bu tip eşitsizlikler daha da genelleştirilebilir. Ayrıca sürekli, ayrık ve quantum analiz durumları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Agarwal, R., Bohner, M. and Peterson, A., Inequalities on time scales: a survey, Math. Inequal. Appl. 4, no. 4, 535-557, 2001.
- [2] Agarwal, R. and Bohner, M., Basic calculus on time scales and some of its applications, Results Math., 35(1-2):3-22, 1999.
- [3] Bohner, M. and Matthews, T., Ostrowski inequalities on time scales, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9, no. 1, Article 6, 8 pp, 2008.
- [4] Bohner, M., Matthews, T. and Tuna, A., Diamond-alpha Grüss type inequality on time scales. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ., 3(1/2):234–247, 2011.
- [5] Bohner, M. and Peterson, A., Dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [6] Bohner, M. And Peterson, A., Advances in dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [7] Bohner, M. and Matthews, T., The Grüss inequality on time scales, Commun. Math. Anal. 3, no. 1, 1-8 (electronic), 2007.
- [8] Bohner, M. and Matthews, T., Ostrowski inequalities on time scales, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9, no. 1, Article 6, 8 pp, 2008.
- [9] Bohner, M., Matthews, T. and Tuna, A., Weighted Ostrowski-Grüss inequalities on time scales, Afr. Diaspora Journal Mathematics, Volume. 12, Number 1, pp 89-99, 2011
- [10] Cerone, P., A new Ostrowski type inequality involving integral means over end intervals, Tamkang J. Math. 33, no. 2, 109–118, 2002.
- [11] Dragomir, S.S., A generalization of the Ostrowski integral inequality for mappings whose derivatives belong to $L_p[a,b]$ and applications in numerical integration. J. Math. Anal. Appl., 255(2):605–626, 2001.
- [12] Dragomir, S.S., The discrete version of Ostrowski's inequality in normed linear spaces, J. Inequal. Pure Appl. Math., 3(1), Art. 2, 2002.

- [13] Dragomir, S.S and Wang, S., A new inequality of Ostrowski's type in L_p -norm. Indian J. Math., 40(3):299–304, 1998.
- [14] Dragomir, S.S., Ostrowski type inequalities for continuous functions of selfadjoint operators on Hilbert spaces: A survey of recent results, Ann. Funct. Anal. 2, no. 1, 139–205, 2011.
- [15] Dinu, C., Ostrowski type inequalities on time scales, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 34, 43-58, 2007.
- [16] Hilger, S., Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Univ. Würzburg, 1988.
- [17] Hussain, S., Latif, M.A. and Alomari, M., Generalized double-integral Ostrowski type inequalities on time scales, Appl. Math. Lett. 24, no. 8, 1461–1467, 2011.
- [18] Jiang, Y., Rüzgar, H., Liu W.J. and Tuna, A., Some new generalizations of Ostrowski type inequalities on time scales involving combination of Δ -integral means, *ön baskı*.
- [19] Kac, V. and Cheung P., Quantum Calculus, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [20] Karpuz, B. and Özkan, U. M., Generalized Ostrowski's inequality on time scales, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9, no. 4, Article 112, 7 pp, 2009.
- [21] Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S. and Kaymakçalan, B., Dynamic systems on measure chains, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [22] Liu, W. J. and Ngô, Q.-A., An Ostrowski-Grüss type inequality on time scales, Comput. Math. Appl. 58, no. 6, 1207-1210, 2009.
- [23] Liu, W. J. and Ngô, Q.-A., A generalization of Ostrowski inequality on time scales for k points, Appl. Math. Comput. 203, no. 2, 754-760, 2008.
- [24] Liu, W. J., Ngô, Q.-A. and Chen, W. B., A perturbed Ostrowski-type inequality on time scales for k points for functions whose second derivatives are bounded, J. Inequal. Appl., Art. ID 597241, 12 pp, 2008.
- [25] Liu, W. J., Ngô, Q.-A. and Chen, W. B., Ostrowski type inequalities on time scales for double integrals, Acta Appl. Math. 110, no. 1, 477-497, 2010.

- [26] Liu, W. J., Ngô, Q.-A. and Chen, W. B., A new generalization of Ostrowski type inequality on time scales, *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.* 17, no. 2, 101-114, 2009.
- [27] Liu, W. J. And Ngô, Q.-A., A sharp Grüss type inequality on time scales and application to the sharp Ostrowski-Grüss inequality, *Commun. Math. Anal.* 6, no. 2, 33-41, 2009.
- [28] Liu, W. and Ngo, Q.A., A sharp Grüss type inequality on time scales and application to the sharp Ostrowski-Grüss inequality. *Commun. Math. Anal.*, 6(2):33–41, 2009.
- [29] Matić M., Pecarić J. and Ujević N., On new estimation of the remainder in generalized Taylor's formula, *Math. Inequal. Appl.* 2, no. 3, 343–361, 1999.
- [30] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink A.M., Inequalities involving functions and their integrals and derivatives, vol. 53 of *Mathematics and its Applications (East European Series)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher Group, p. 565, 1991.
- [31] Ostrowski, A., Über die Absolutabweichung einer differentiierten Funktion von ihrem Integralmittelwert. *Comment. Math. Helv.*, 10(1):226–227, 1937.
- [32] Ozkan, U. M. and Yildirim, H., Ostrowski type inequality for double integrals on time scales, *Acta Appl. Math.* **110**, no.1, 283-288, 2010.
- [33] Pachpatte, B.G., New integral inequalities for differentiable functions, *Tamkang J. Math.* 34, no. 3, 249–253, 2003.
- [34] Pachpatte, B.G., New Ostrowski type inequalities involving the product of two functions, *Inequal. Pure Appl. Math.* 7, no. 3, Article 104, 5 pp. (electronic), 2007.
- [35] Pachpatte, B.G., New discrete Ostrowski-Grüss like inequalities. *Facta Univ.Ser. Math. Inform.*, 22(1):15–20, 2007.
- [36] Pachpatte, B.G., On a new generalization of Ostrowski type inequality. *Tamkang J. Math.*, 38(4):335–339, 2007.
- [37] Pachpatte, B.G, A note on Ostrowski and Grüss type discrete inequalities, *Tamkang J. Math.* 35, no. 1, 61–65, 2004.
- [38] Sarikaya, M.Z., New weighted Ostrowski and Čebyšev type inequalities on time

- scales. *Comput. Math. Appl.*, 60(5):1510–1514, 2010.
- [39] Tuna, A. and Daghan, D., Generalization of Ostrowski and Ostrowski-Grüss type inequalities on time scales. *Comput. Math. Appl.*, 60(3):803–811, 2010.
- [40] Tuna, A., Liu, W. And Rüzgar, H., Some weighted ostrowski type inequalities on time scales involving combination of weighted Δ -integral means, gönderildi.
- [41] Tuna, A., Jiang, Y. And Liu, W., weighted Ostrowski, Ostrowski-Grüss and Ostrowski-Čebyšev type inequalities on time scales, *Publ. Math. Debrecen*, 81/1-2,81-102, 2012.
- [42] Tuna, A. and Liu, W., Weighted Ostrowski, Trapezoid and Grüss Type inequalities on time scales, *Journal of Mathematical Inequalities*, kabul edildi.
- [43] Tuna, A., Jiang, Y. And Liu, W., New Weighted Ostrowski and Ostrowski-Grüss Type Inequalities On Time Scales, *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, kabul edildi.
- [44] Ujević, N., A generalization of Ostrowski's inequality and applications in numerical integration, *Appl. Math. Lett.* 17, no. 2, 133–137, 2004.
- [45] Yeh, C.-C., Ostrowski's inequality on time scales, *Appl. Math. Lett.* 21, no. 4, 404-409, 2008.

ÖZ GEÇMİŞ

Hüseyin RÜZGAR, 01.10.1988 tarihinde Mersin’de doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini Mersin’de tamamladı. 2004 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden Haziran 2009’da bölüm ikincisi olarak mezun oldu ve aynı yıl Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Ağustos 2012’de yüksek lisans öğrenimini ve aynı yılda girdiği Nevşehir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Pedagojik Formasyon Sertifikası Programı’nı başarı ile tamamladı. Bilim dalındaki ilgi alanı zaman skalası üzerinde eşitsizliklerdir.

Bu tez çalışmasından, 1 (bir) adet ulusal bildiri üretilmiştir ve 1 (bir) adette uluslararası makale elde edilmiş olup değerlendirme aşamasındadır. Bu üretilen çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

Tuna, A., Liu, W. And Rüzgar, H., “Some weighted ostrowski type inequalities on time scales involving combination of weighted Δ -integral means”, **XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu**, Niğde, 5-8 Eylül, 2012.

Tuna, A., Liu, W. And Rüzgar, H., “Some weighted ostrowski type inequalities on time scales involving combination of weighted Δ -integral means”, **değerlendirme aşamasında**.

