



T.C.

NIĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

KÜBRA AKDOĞAN

Ağustos 2018



T.C.  
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN  
POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

KÜBRA AKDOĞAN

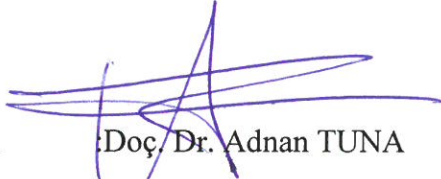
Yüksek Lisans Tezi

Danışman

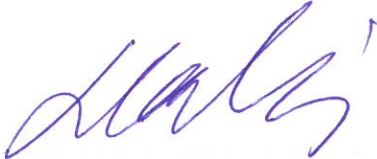
Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN

Ağustos 2018

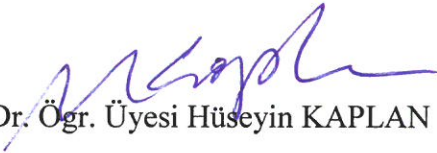
**Kübra AKDOĞAN** tarafından Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN danışmanlığında hazırlanan “**Birinci Mertebeden Nötral Diferansiyel Denklemlerin Pozitif Periyodik Çözümlerinin Varlığı**” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan  :Doç. Dr. Adnan TUNA

(Niğde Ömer Halisdemir Üni., Fen Edebiyat Fak, Matematik Bölümü)

Üye  :Doç. Dr. Halis BİLGİL

(Aksaray Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik Bölümü)

Üye  :Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN

(Niğde Ömer Halisdemir Üni., Fen Edebiyat Fak, Matematik Bölümü)

**ONAY :**

Bu tez Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ...../...../..... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun ...../...../..... tarih ve ...../..... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20....

**Doç. Dr. Murat BARUT**

**MÜDÜR V.**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kübra AKDOĞAN



## ÖZET

### BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

AKDOĞAN Kübra

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman

:Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN

Ağustos 2018, 65 sayfa

Bu tezde birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemler için pozitif  $\omega$ - periyodik çözümlerinin varlığını veren üç farklı makale incelenmiştir.

*Anahtar Sözcükler: Nötral denklemler, sabit nokta, birinci mertebe, pozitif periyodik çözüm*

## SUMMARY

### EXISTENCE OF POSITIVE PERIODIC SOLUTIONS OF FIRST ORDER NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

AKDOĞAN Kübra

Niğde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor

:Assistant Professor. Dr. Hüseyin KAPLAN

August 2018, 65 pages

In this thesis, three different papers which give the existence of positive  $\omega$  - periodic solutions for the first order neutral differential equations are investigated.

*Keywords: Neutral equations, fixed point, first – order, positive periodic solution*

## ÖN SÖZ

Ders dönemim boyunca ve tez çalışmalarım esnasında yardım ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Tuncay CANDAN'a ve tezimin yazım esnasında danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin KAPLAN'a teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
SUMMARY .....	v
ÖN SÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ .....	vii
SİMGE VE KISALTMALAR .....	ix
BÖLÜM I GİRİŞ .....	1
BÖLÜM II TEMEL KAVRAMLAR .....	2
BÖLÜM III BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI .....	20
3.1 Ana Sonuçlar .....	21
BÖLÜM IV NÖTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İKİ ÇEŞİDİ İÇİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI .....	31
4.1 Ana Sonuçlar .....	33
4.2 Bazı Uygulamalar .....	41
BÖLÜM V PERİYODİK GECİKMELERLE BİRİKTE BİRİNCİ DERECEDEN BELİRSİZ FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLER .....	44
5.1 Ana Sonuçlar .....	47
KAYNAKLAR .....	61
ÖZ GEÇMİŞ .....	65

## SİMGELER VE KISALTMALAR

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\tau$	$X$ bir Banach uzayı, $X$ 'in konveks bir alt kümesi
$\omega$	Periyodik fonksiyonlar
$S_1$	Düzenli sürekli
$S_2$	Daralma operatörü
$R$	Reel sayılar
$C$	Sürekli fonksiyonlar
$c_1, c_2, G_1, G_2$	Sabitler
$\Sigma$	Toplam
$\ \cdot\ $	Norm

<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
Exp	Üstel Fonksiyon
$d$	Metrik
$X$	Bütün Sayıların Kümesi
$F$	Reel veya Kompleks
$(X, d)$	Metrik Uzay

## BÖLÜM I

### GİRİŞ

Fen ve mühendislik gibi farklı disiplinlerde birçok problem lineer olmayan diferansiyel denklemler aracılığıyla modellenmekte ve çözülmeye çalışılmaktadır. Model denklemlerin lineer olmaması çözümü oldukça karmaşık ve zor hale getirmektedir. Bu durum bilim insanlarını yeni teknikler bulmaya ve kullanmaya yöneltmektedir. Bütün bunları göz önünde bulundurarak kurulan modeller adi diferansiyel denklemlerden ayrı olarak gecikmeli (delay), nötral, karma (mixed), ileri (advance) denklemler şeklinde adlandırılırlar.

Tezin ikinci bölümünde temel tanım ve teoremler verildi. Tezin üçüncü bölümünde (Candan, 2016) yapmış olduğu birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemler için pozitif  $\omega$ -periyodik çözümlerinin varlığı adlı çalışması, tezin dördüncü bölümünde (Luo vd., 2008) yapmış oldukları nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin iki çeşidi için pozitif periyodik çözümlerin varlığı ve son olarak tezin beşinci bölümünde (Liu vd., 2012) yapmış oldukları periyodik gecikmelerle birlikte birinci mertebeden nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler için pozitif periyodik çözümler adlı çalışma incelenmiştir.

Bu üç makalede de ortak olarak verilen ana teoremlerin ispatlarında Krasnoselkii'nin sabit nokta teoremi kullanılmıştır ve verilen teoremleri desteklemek için örnekler verilmiştir.

## BÖLÜM II

### TEMEL KAVRAMLAR

#### **Tanım 2.1: (Küme)**

İyi tanımlanmış nesnelere topluluğuna küme denir. Kümeler genelde  $A, B, C, \dots$  gibi büyük harflerle; kümenin elemanları da  $a, b, c, \dots$  gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir  $x$  elemanı bir  $A$  kümesine aitse bunu  $x \in A$ ; aksi halde  $x \notin A$  şeklinde gösteririz.

#### **Tanım 2.2: (Açık Küme)**

$X$  boş olmayan bir küme  $\tau = P(X)$  kuvvet kümesinin herhangi bir alt ailesi olsun. Eğer  $\tau \subset P(X)$  ailesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa,  $\tau$  ailesinin her elemanına,  $X$  kümesinde bir açık küme ve aşağıdaki özelliklere de açıklar aksiyomu denir.

- a)  $X$  ve  $\emptyset$  kümeleri,  $\tau$  ailesine aittir.
  - b)  $\tau$  ailesine ait sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanların bileşimi  $\tau$  ailesine aittir.
  - c)  $\tau$  ailesine ait sonlu çokluktaki elemanların kesişimi  $\tau$  ailesine aittir.
- a, b, c şartları sağlanıyorsa  $(X, \tau)$  ikilisine topoloji denir (Yüksel, 2008).

#### **Tanım 2.3: (Kapalı Küme)**

$(X, \tau)$  topolojik uzayı ve bir  $F \subset X$  alt kümesi verilsin.  $F$  kümesinin tümleyeni açık bir küme ise  $F$  kümesine,  $\tau$  topolojisine göre kapalı küme denir (Yüksel, 2008).

#### **Tanım 2.4: (Sınırlı Küme)**

$(X, \|\cdot\|)$  bir normlu vektör uzay ve  $A$ ,  $X$ 'in boştan farklı bir alt kümesi olsun.  $A$  sınırlıdır ancak ve ancak  $\forall x \in A$  için

$$\|x\| \leq k$$

olacak şekilde bir  $k > 0$  vardır. Eğer  $A$  sınırlı değilse,  $A$  ya sınırsızdır (veya sınırlı değildir) denir (Yüksel, 2012).

#### **Tanım 2.5: (Fonksiyon)**

$X$  ve  $Y$  iki küme olsun.  $X$  kümesine ait her bir  $x$  elemanını,  $Y$  kümesine ait bir tek  $y$  elemanına eşleyen kurala,  $X$  kümesinden  $Y$  kümesine bir **fonksiyon** denir ve  $f: X \rightarrow Y$  simgesiyle gösterilir.  $X$  kümesine  $f$  fonksiyonunun **tanım kümesi**,  $Y$  kümesine de  $f$  fonksiyonunun **değer kümesi** denir.  $f$  fonksiyonu  $x \in X$  elemanını,  $y \in Y$  elemanına eşliyorsa,  $y$  noktasına  $x$  noktasının  $f$  fonksiyonu altındaki görüntüsü denir ve kısaca  $y = f(x)$  ya da  $f: x \rightarrow y$  ile gösterilir.

#### **Tanım 2.6: (Periyodik Fonksiyon)**

$f$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ 'nin tanım kümesinin her  $x$  elemanı için,  $f(x) = f(x+T)$  olacak şekilde  $T$  pozitif sayısı varsa bu  $f$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir.  $f(x) = f(x+T)$  koşulunu sağlayan en küçük pozitif  $T$  sayısına ise fonksiyonun periyodu denir.

**Tanım 2.7: (Süreklilik)**

$A \subset \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.  $f$  fonksiyonunun  $a$  noktasında sürekli olabilmesi için  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır öyle ki  $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$  (Balcı, 2003).

**Teorem 2.1:**  $X$  sonlu boyutlu bir normlu uzay ve  $A$ ,  $X$  in bir alt kümesi olsun.  $A$  nın kompakt olması için gerek ve yeter şart  $A$  nın kapalı ve sınırlı olmasıdır (Bayraktar, 1998).

**Örnek:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

**Çözüm:** Rastgele bir pozitif  $\varepsilon$  sayısı olsun.  $x \in A$  için  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  sağlanması için  $x$ 'in  $a$ 'ya ne kadar yakın olması gerektiğini araştıralım.

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < |x-a|(1+2|a|) < \delta(1+2|a|) \leq \varepsilon$$

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < \delta(1+2|a|) < \delta(1+2|a|) \leq \frac{\varepsilon}{1+2|a|}(1+2|a|) = \varepsilon \text{ olur.}$$

**Tanım 2.8: (Düzgün Süreklilik)**

$A \subset \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olsun.  $f$  fonksiyonunun  $A$  üzerinde düzgün sürekli olabilmesi için  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  vardır öyle ki  $|x-t| < \delta$  eşitsizliğini sağlayan  $\forall x, t \in A$  için  $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$  (Balcı, 2003).

**Tanım 2.9: (Türev)**

$f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki türevi  $f'(x)$  ile gösterilir ve limitin var olması koşulu ile,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olarak tanımlanır (Kalkülüs, 2011).

**Tanım 2.10: (Kısmi Türev)**

$A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z = f(x, y)$  bir fonksiyon ve  $(a, b) \in A$  olsun. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

limiti varsa bu limite  $f$  nin  $x$  değişkenine göre  $(a, b)$  noktasındaki kısmi türevi denir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), f_x(a, b)$$

sembollerinden biri ile gösterilir (Balci, 2003).

**Tanım 2.11: (İntegral)**

$s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyonu,  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  bölünüşü ve  $x \in (x_{k-1}, x_k)$  için  $s(x) = s_k$  olsun.

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n s_k \Delta x_k = s_1(x_1 - x_0) + \dots + s_n(x_n - x_{n-1})$$

sağlanıyorsa  $s$ 'nin  $[a, b]$  aralığı üzerindeki belirli integrali ve  $\sum_{k=1}^n s_k \Delta x_k$  Riemann toplamlarının limitidir (Balcı, 2003).

**Tanım 2.12: (Dizi)**

Boş olmayan bir  $A$  kümesi verildiğinde,  $N$  doğal sayılar kümesinden  $A$ 'ya herhangi bir fonksiyona  $A$  da bir dizi denir.  $x$  böyle bir fonksiyon ise,

$$x: N \rightarrow A$$

$$n \rightarrow x(n) \in A$$

görüntüsü olan  $x(n) = x_n$  olmak üzere  $x = (x_n) = \{x_1, x_2, \dots\}$  gösterimi çok sık kullanılır. Burada  $x_n$  ye dizinin genel terimi denir (Kızmaz, 1993).

**Tanım 2.13: (İnfimum)**

Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir (Balcı, 2003).

**Tanım 2.14: (Supremum)**

Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir (Balcı, 2003).

**Tanım 2.15: (Yakınsama)**

$(s_n)$  bir reel sayı dizisi ve  $s \in \mathbb{R}$  olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,  $n > n_0$  olduğunda  $|s_n - s| < \varepsilon$  kalacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı bir  $n_0$  sayısı bulunabiliyorsa  $(s_n)$  dizisi  $s$ 'ye **yakınsaktır** denir ve  $\lim s_n = s$  veya  $(s_n) \rightarrow s$  şeklinde gösterilir (Balcı, 2003).

**Örnek:**  $(a_n) > 0$  ve  $a > 0$  olsun.  $(a_n) \rightarrow a$  olduğundan  $\log(a_n) \rightarrow \log a$  dir.

**Çözüm:**  $(a_n) \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$  vardır. Öyle ki  $n > n_0$  için  $|a_n - a| < \varepsilon$  dur.

$$|\log a_n - \log a| < |\log(a + \varepsilon) - \log a| = \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right) = \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, n > n_0, |\log a_n - \log a| < \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow (\log a_n) \rightarrow (\log a)$$

**Tanım 2.16: (Cauchy Dizisi)**

$(s_n)$  bir reel terimli dizi olsun.  $(s_n)$  bir Cauchy dizisidir  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$  için  $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni m, n \geq n_0$  için  $|s_m - s_n| < \varepsilon$  dir (Balcı, 2003).

**Örnek:**  $\mathbb{C}[0,1]$  içinde

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \quad x \in [0,1]$$

ile tanımlı  $f_1, f_2, f_3, \dots$  dizisini göz önüne alalım. Buna göre  $\{f_n\}$  dizisi Cauchy'dir.

**Çözüm:** Dizinin elemanları  $[0,1]$  üzerinde sürekli olduklarından,  $m \geq n$  için

$$f_m(x) - f_n(x) = \frac{mx}{m+x} - \frac{nx}{n+x} = \frac{(m-n)x^2}{(m+x)(n+x)}$$

fonksiyonu bazı  $x_0 \in [0,1]$  noktasında maksimuma sahiptir. Bu nedenle büyük  $m$  ve  $n$  ler için

$$\begin{aligned} d(f_m - f_n) &= \sup\{|f_m(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\} \\ &= \frac{(m-n)x_0^2}{(m+x_0)(n+x_0)} \leq \frac{x_0^2}{(n+x_0)} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olup  $\{f_n\}$  dizisi Cauchy'dir.

**Örnek:**  $x_n = \frac{n+3}{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Burada  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $m, n \geq \mathbb{N}$  için

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{n+3}{2n+1} - \frac{m+3}{2m+1} \right| < \varepsilon$$

Eşitsizliğini sağlayacak şekilde var olduğudur. Herhangi,  $m, n \geq N$  pozitif tamsayıları göz önüne alınsın. Buna göre,

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_m| &= \left| \frac{n+3}{2n+1} - \frac{m+3}{2m+1} \right| = \left| \frac{(2mn+n+6m+3) - (2mn+m+6n+3)}{(2n+1)(2m+1)} \right| \\
 &= \frac{5|m-n|}{4mn+2n+2m+1} < \frac{5|m-n|}{4mn} \leq \frac{5}{4} \frac{m+n}{mn} \\
 &< \frac{5}{4} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) < \frac{5}{4} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \right) = \frac{5}{2N}
 \end{aligned}$$

olduğundan eğer  $N$  tamsayısı  $\frac{5}{2\varepsilon}$ 'den büyük olacak şekilde seçilirse  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  elde edilir. Buna göre verilen dizi bir Cauchy dizisidir.

**Tanım 2.17: (Sınırlılık)**

$D \subseteq \mathbb{R}$  olmak üzere,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve  $S \subseteq D$  kümesi verilmiş olsun.

i)  $\forall x \in S$  için  $f(x) \leq M$  olacak şekilde bir  $M$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde üstten sınırlıdır denir.

ii)  $\forall x \in S$  için  $m \leq f(x)$  olacak biçimde bir  $m$  reel sayısı varsa,  $f$  fonksiyonu  $S$  kümesinde alttan sınırlıdır denir (Aydın, 1994).

**Örnek:**  $x, y \in X$  olmak üzere

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ile tanımlı  $d'$  metriğine göre  $X$  kümesi sınırlıdır.

**Çözüm:**  $d'$  nin  $X$  üzerinde bir metrik olduğunu biliyoruz.  $\forall x, y \in X$  için

$$d(x, y) \geq 0 \text{ olduğundan } d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} = \frac{1+d(x, y)+(-1)}{1+d(x, y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x, y)} < 1$$

olur ve bu nedenle  $d'$  metriğine göre  $X$  kümesi sınırlıdır.

### Tanım 2.18: (Sabit Nokta)

$X$  boş olmayan bir küme ve  $T: X \rightarrow X$  bir fonksiyon olsun.  $T_x = x$  eşitliğini sağlayan  $x \in X$  elemanına  $T$  nin bir sabit noktası denir (Soykan, 2012).

**Örnek:**  $f(x) = x^2$  ile tanımlı  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; fonksiyonunun sabit noktaları  $f(x) = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$  olur (Soykan, 2012).

### Tanım 2.19: (Metrik Uzay)

$X$  boştan farklı bir küme olsun.  $X$  üzerinde tanımlı bir metrik, her  $x, y \in X$  için

(M1)  $d(x, y) \geq 0$

(M2)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3)  $d(x, y) = d(y, x)$

ve her  $x, y, z \in X$  için

$$(M4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerini sağlayan bir  $d : X \times X \rightarrow R$  fonksiyonudur. Eğer  $d$ ,  $X$  üzerinde bir metrik ise o zaman  $(X, d)$  ikilisine de bir metrik uzay denir (Soykan, 2012).

**Örnek:**  $X \neq \emptyset$ ,  $d : R \times R \rightarrow R$

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

$d$ ,  $X$  üzerinde bir metriktir.

**Çözüm:** İlk olarak  $d$  nin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz.  $X$  içindeki  $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}$  için

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} < 1$$

olduğundan

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

olup sağ tarafı yakınsak olduğundan  $d(x, y)$  iyi tanımlıdır. Şimdi  $d$  nin metrik olma koşullarının sağlandığını inceleyelim.

(a)  $\forall x, y \in X$  için  $d(x, y) \geq 0$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = 0$$

(b)  $\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$

$$\Leftrightarrow |x_n - y_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

(c) 
$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(-1)(y_n - x_n)|}{1 + |(-1)(y_n - x_n)|}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|y_n - x_n|}{1 + |y_n - x_n|} = d(y, x)$$

(d) 
$$d(x, z) = \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} \leq \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n| + |y_n - z_n|}{1 + |x_n - y_n| + |y_n - z_n|} \leq \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \frac{1}{2^n} \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|}$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} < \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \frac{1}{2^n} \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|}$$

$$= d(x, y) + d(y, z)$$

olup  $d$ ,  $X$  üzerinde bir metriktir.

### Tanım 2.20: (Daralma Dönüşümü)

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $\forall x, y \in X$  için  $d(T_x, T_y) \leq \alpha d(x, y)$  olacak şekilde bir  $0 < \alpha < 1$  varsa  $T$ 'ye bir daralma (ya da büzülme) fonksiyonu denir (Soykan, 2012).

**Tanım 2.21: (Açık ve Kapalı Yuvar)**

$(X, d)$  metrik uzay ve  $a \in X$  noktası ve  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  sayısı verilsin.

i)  $B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$  alt kümesine,  $a$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı açık yuvar ya da açık top denir.

ii)  $(X, d)$  metrik uzay ve  $a \in X$  noktası ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.

$B[a, \varepsilon] = \{x \in X \mid d(a, x) \leq \varepsilon\}$  alt kümesine  $a$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı kapalı yuvar ya da kapalı top denir.

iii)  $(X, d)$  metrik uzay ve  $a \in X$  noktası ve  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin.

$B(a, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(a, x) = \varepsilon\}$  alt kümesine  $a$  merkezli  $\varepsilon$  yarıçaplı küre denir (Yüksel, 2008).

**Tanım 2.22: (Tam Metrik Uzay)**

$(X, d)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bir  $x \in X$  noktasına yakınsar ise  $d$  metriğine  $(X, d)$  uzayı üzerinde tamdır denir. Eğer  $d$  metriği  $(X, d)$  uzayı üzerinde bir tam metrik ise  $(X, d)$  uzayına tam metrik uzay denir (Yüksel, 2008).

**Tanım 2.23: (Kompaktlık)**

$(M, d)$  bir metrik uzay olsun. Bir  $A \subset M$  kümesindeki her  $\{x_n\}$  dizisi  $A$ 'nın bir elemanına yakınsayan bir alt diziye sahipse  $A$ 'ya bir kompakt küme denir (Soykan, 2008).

**Tanım 2.24: (Lineer Uzay (Vektör Uzay))**

Boş olmayan bir  $X$  kümesi verilsin.  $(K, +, \cdot)$  kümesi  $\mathbb{R}$  ya da  $\mathbb{C}$  olsun.  $(X, \oplus)$  değişmeli grup olmak üzere  $\otimes: K \times X \rightarrow X$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa,  $X$  kümesine lineer (vektör) uzay denir.

$$i) \forall a \in K \text{ ve } \forall x \in X \text{ için, } a \otimes x \in X$$

$$ii) \forall a \in K \text{ ve } \forall x, y \in X \text{ için, } a \otimes (x \oplus y) = (a \otimes x) \oplus (a \otimes y)$$

$$iii) \forall a, b \in K \text{ ve } \forall x \in X \text{ için, } (a \oplus b) \otimes x = (a \otimes x) \oplus (b \otimes x)$$

$$iv) \forall a, b \in K \text{ ve } \forall x \in X \text{ için, } (a \cdot b) \otimes x = a \otimes (b \otimes x)$$

$$v) e \in K \text{ bir elemanı ise } \forall x \in X \text{ için, } e \otimes x = x \text{ (Yüksel, 2008).}$$

**Tanım 2.25: (Konveks Küme)**

$\mathbb{R}^n$  Öklid uzayının bir  $A$  alt kümesi verilsin.

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1] \Leftrightarrow (1-t)x + ty \in A$$

oluyorsa  $A$  kümesine  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayında konveks küme denir. Başka bir deyişle,  $\forall x, y \in A$  noktaları için, bu iki noktayı birleştiren  $\overline{xy}$  kapalı doğru parçası  $A$  kümesi tarafından kapanıyorsa,  $A$  kümesine konveks (dış bükey) küme denir (Yüksel, 2008).

**Tanım 2.26: (Normlu (Vektör) Uzay)**

$N$ , bir lineer uzay olsun.  $\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $x$  deki değerini  $\|x\|$  ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$$(N2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\forall \alpha \in F) \text{ ve}$$

$$(N4) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

şartlarını sağlıyorsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $N$  üzerinde norm denir. Normlu uzaylar genellikle  $(N, \|\cdot\|)$  ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

**Örnek:**  $x, y \in F$  (yani  $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$ ) olmak üzere

$$\|x\| = |x|$$

ile tanımlı  $\|\cdot\|: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $F$  üzerinde bir normdur. Bu norma  $F$  için doğal norm ya da mutlak değer normu adını vereceğiz. Bu norm  $d(x, y) = |x - y|$  doğal metriğini üretir.

$$(a) \|x\| = |x| \geq 0$$

$$(b) \|x\| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(c) \|\alpha x\| = |\alpha x| = |\alpha| |x| = |\alpha| \|x\|$$

$$(d) x, y \in F \text{ için } |x + y| \leq |x| + |y| \text{ olduğundan}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

üçgen eşitsizliği elde edilir. O halde  $\|\bullet\|$  fonksiyonu  $F$  üzerinde bir normdur ve  $(F, \|\bullet\|)$  bir normlu vektör uzayıdır.

**Örnek:**  $C([a, b], R)$  sürekli fonksiyonların kümesini alalım.

$\forall f, g \in C([a, b], R)$  ve  $\forall \alpha \in R$  için  $f + g, \alpha f(x) : [a, b] \rightarrow R$  fonksiyonları sırasıyla;

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

olarak tanımlanırsa;

**(a)**  $C([a, b], R)$  sürekli fonksiyonlar kümesinin  $R$  üzerinde bir lineer uzayıdır.

**(b)**  $\forall f \in C([a, b], R)$  için

$$\|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

olarak tanımlanırsa

$$\|\bullet\|_{\infty} : C([a, b], R) \rightarrow R$$

fonksiyonu bir normdur.

**Teorem 2.2:** Her normlu uzay bir metrik uzayıdır (Bayraktar, 1998).

### Tanım 2.27: (Banach Uzayı)

Bir  $(X, \|\bullet\|)$  normlu uzaydaki her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise,  $(X, \|\bullet\|)$  normlu uzayına tam normlu uzay veya **Banach uzayı** adı verilir.

**Örnek:**  $R^n$  uzayı  $\|x\|_2 := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$  normuna göre bir reel Banach uzayıdır.

**Teorem 2.3: (Banach Sabit Nokta Teoremi)**  $X$  bir Banach uzayı,  $A$ ,  $X$  in boş olmayan herhangi bir kompakt, konveks alt kümesi ve  $f: A \rightarrow A$  sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda,  $f$  en az bir sabit noktaya sahiptir (Zeidler, 1986).

### Tanım 2.28: (Fonksiyonel Diferansiyel Denklemler)

Yalnızca  $t$  anında adi diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini hesaplamak mümkündür. Meydana gelen olaylar hem şimdiki zamanla hem de geçmiş ve gelecek zamanla ilgilidir. Böyle denklemlerde  $t$  ile birlikte  $t + \tau$  ya da  $t - \tau$ ,  $\tau > 0$  olarak hesaplanır. Böyle denklemler fonksiyonel diferansiyel denklemler adını alır (Ladde., vd 1987).

#### Tanım 2.28.1: (Gecikmeli (Delay, Retarded) fonksiyonel diferansiyel denklemler)

$$x'(t) + a(t)x(t - \tau) = 0, \quad \tau > 0$$

Denklemine gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemlerde  $t$  anında en yüksek mertebeden türev hesaplanırken  $t$  ya da  $t'$ den önceki zamanlarda diğer türevler hesaplanır (Ladde., vd 1987).

**Örnek:**  $x'(t) = x(t-7) + tx(3t) + 3$  denklemi delay fonksiyonel denkleme bir örnektir.

**Tanım 2.28.2: (İleri (Advanced) fonksiyonel diferansiyel denklemler)**

$$x'(t) + a(t)x(t+\tau) = 0, \quad \tau > 0$$

Denklemine ileri fonksiyonel diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemlerde  $t$  anında en yüksek mertebeden türev hesaplanırken  $t$  ya da  $t$ 'den sonraki zamanlarda diğer türevler hesaplanır (Ladde., vd 1987).

**Örnek:**  $x'(t) = -x(t+9) + x(t+\sqrt[3]{t}) - 5t + 3$  denklemi advanced fonksiyonel denkleme bir örnektir.

**Tanım 2.28.3: (Karma (Mixed) fonksiyonel diferansiyel denklemler)**

Gecikmeli ve ileri kavramlarını için de barındıran diferansiyel denklemler karma fonksiyonel diferansiyel denklemlerdir (Ladde., vd 1987).

**Örnek:**  $x'(t) = 3x(t-1) - 8x(t+1) + 2$  ve  $x'(t) = -x(t-1)x(t) - tx(t+1)$  denklemleri mixed fonksiyonel diferansiyel denklemlere birer örnektir.

**Tanım 2.28.4: (Neutral fonksiyonel diferansiyel denklemler)**

Bu tür denklemlerde en yüksek mertebeden türev  $t$ 'ye bağlı olmakla birlikte gecikmeli ve ileri kavramlarıyla da ilgilidir (Ladde., vd 1987).

**Örnek:**  $x'(t) = -\frac{1}{2t+1}x'(t-4) + x(t-2) + 3\cos t$  denklemini neutral tipli fonksiyonel diferansiyel denklemlere bir örnektir.

**Tanım 2.29: (Salınım (Oscillation))**

$x(t)$  aşık olmayan bir çözüm sayılırsa ve eğer  $t > t_0$  için  $x(t)$  keyfi büyüklükte sıfıra sahipse  $x(t)$  salınımlıdır. Buna göre  $\{t_n\}$  dizisi vardır,  $x(t_n) = 0$  ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} t_n = \infty$  salınım yapmayan çözüm için bir  $t_1$  sayısı vardır ki  $t > t_1$  iken  $x(t) \neq 0$  olur. Gecikmeli ya da ileri fonksiyonel denklemlerde salın yapma ve salınım yapmama terimlerine rastlarız.  $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$  ve  $x'(t) - x(t - \pi) = 0$  denklemlerinin çözümleri  $x(t) = \sin t$  ve  $x(t) = \cos t$  şeklinde salınımlı iken  $x'(t) + x(t) = 0$  ve  $x''(t) - x(t) = 0$  denklemlerinin çözümleri  $x(t) = e^{-t}$  ve  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$  olup salınımlı değildir (Ladde., vd 1987).

**Örnek:**  $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$  ve  $x'(t) - x(t - \pi) = 0$  denklemlerinin çözümleri  $x(t) = \sin t$  ve  $x(t) = \cos t$  salınımlıdır.

## BÖLÜM III

### BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Burada (Candan, 2016) makalesi incelenmiştir. Birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemler için pozitif  $\omega$ -periyodik çözümlerinin varlığı araştırılacaktır. Sonuçlar, Krasnoselskii'nin sabit nokta teoremini kullanılarak bulunacaktır. Teoriyi desteklemek için bir örnek verilmiştir. Mevcut çalışmada, birinci mertebeden nötral diferansiyel

$$[x(t) - p(t)x(t-\tau)]' = -Q_1(t)x(t) + f(t, x(t-\tau)), \quad (3.1)$$

denklemler için pozitif  $\omega$ -periyodik çözümünün varlığı için yeni, yeterli koşullar verilecektir.  $Q \in C(R, (0, \infty))$ ,  $P \in C^1(R, R)$ ,  $f \in C(R \times R, R)$ ,  $\tau > 0$  ve  $P, Q$   $\omega$ -periyodik fonksiyonlar ve  $f$  birinci değişkene göre  $\omega$ -periyodiktir. Son yıllarda birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemlerin pozitif periyodik çözümlerinin varlığına önemli bir ilgi vardır. Bu denklemler kan hücresi üretim modellerinde, nüfus modellerinde ve kontrol modellerinde görülür. Luo vd. 2008 çalışmalarında  $0 \leq c < 1$  ve  $-1 < c < 0$  için nötral diferansiyel

$$\frac{d}{dt}[x(t) - cx(t-\tau(t))] = -a(t)x(t) + f(t, x(t-\tau(t))) \quad (3.2)$$

denkleminin pozitif periyodik çözümünün varlığı incelenmiştir.

Bu makale literatürde bulunan mevcut sonuçlara iki temel katkıda bulunmuştur. İlk olarak, sabit  $c$  yerine değişken  $P(t)$  katsayısı alınmıştır. İkincisi ise  $0 \leq P(t) < 1$  ve  $-1 < P(t) \leq 0$  durumuna ek olarak, literatürde yeni olan  $1 < P(t) < \infty$  ve  $-\infty < P(t) < -1$  durumları da incelenmiştir. Ayrıca nötral diferansiyel denklemlerin pozitif çözümleriyle ilgili bazı çalışmalar da vardır, bkz, (Liu vd., 2012; Olach vd., 2013; Graef vd., 2011;

Candan vd., 2010; Candan, 2013) ve oradaki referanslar, konuyla ilgili kitaplar için okuyucuya (Ladde vd., 1987; Györi vd., 1991; Erbe vd., 1995; Agarwal vd., 2000; Ravi vd., 2004) kaynakları önerilmektedir.

Aşağıdaki sabit nokta teoremi ispatlarda kullanılacaktır.

**Lemma 3.1** (Krasnoselkii'nin sabit nokta teoremi) (Agarwal vd., 2000)

$X$  Banach uzayı olsun,  $\Omega$  sınırlı kapalı,  $X$ 'in konveks alt kümesi olsun ve  $S_1, S_2$   $\Omega$ 'dan  $X$ 'in içine  $\forall x, y \in \Omega$  çifti için  $S_1x + S_2y \in \Omega$  olacak şekilde olsun. Eğer  $S_1$  daralma ve  $S_2$  düzgün sürekli ise

$$S_1x + S_2x = x$$

denkleminin  $\Omega$ 'da bir tek çözüme sahiptir.

### 3.1 Ana Sonuçlar

$\Phi = \{ x(t) : x(t) \in C(R, R), x(t) = x(t+w), t \in R \}$  ve sup norm  $\|x\| = \sup_{t \in [0, w]} |x(t)|$  olsun. Burada  $\Phi$ 'in Banach uzayı olduğu açıktır.

**Teorem 3.1:** Farz edelim ki  $1 < p_0 \leq P(t) \leq p_1 < \infty$  ve öyle  $m$  ve  $M$  sabitleri mevcut olsun ki;

$$(p_1 - 1)m \leq P(t)x - \frac{f(t, x)}{Q(t)} \leq (p_0 - 1)M, \quad \forall (t, x) \in [0, w] \times [m, M], \quad m > 0. \quad (3.3)$$

Bu takdirde (3.1) in en az bir pozitif  $\omega$ -periyodik  $x(t) \in [m, M]$  çözümü vardır.

**İspat:** Çok iyi bilinir ki (3.1) in  $\omega$ -periyodik çözümünü bulmak ile

$$x(t) = \frac{1}{P(t+\tau)} \left[ x(t+\tau) + \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) [P(s)Q(s)x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau))] ds \right]$$

burada  $G(t, s) = \frac{\exp\left(\int_t^s Q(u) du\right)}{\exp\left(\int_0^w Q(u) du\right) - 1}$ , integral denkleminin çözümünü bulmak denktir.

$$\Omega = \{x \in \Phi : m \leq x(t) \leq M, t \in [0, w], 0 < m < M\}$$

olsun.  $\Omega, \Phi$ 'nin sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.  $S_1, S_2 : \Omega \rightarrow \Phi$  olan iki dönüşüm

$$(S_1 x)(t) = \frac{1}{P(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) [P(s)Q(s)x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau))] ds, \quad (3.4)$$

$$(S_2 x)(t) = \frac{x(t+\tau)}{P(t+\tau)} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlansın.  $\forall x \in \Omega$  ve  $t \in R$  için, (3.4) ve (3.5)'ten

ve

$$(S_2 x)(t+w) = \frac{x(t+\tau+w)}{P(t+\tau+w)} = \frac{x(t+\tau)}{P(t+\tau)} = (S_2 x)(t) \text{ bulunur.}$$

Bu ise  $(S_1 x)(t)$  ve  $(S_2 x)(t)$ 'nin  $\omega$ -periyodik olduğunu gösterir, yani  $S_1(\Omega) \subset \Phi$  ve  $S_2(\Omega) \subset \Phi$ .  $\forall x, y \in \Omega$  ve  $t \in R$  için (3.3)'ten,

$$\begin{aligned}
(S_1x)(t) + (S_2y)(t) &= \frac{1}{P(t+\tau)} \left[ \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau)) \right] ds \right. \\
&\quad \left. + y(t+\tau) \right] \\
&\leq \frac{1}{p_0} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) \left[ P(s) x(s-\tau) - \frac{f(s, x(s-\tau))}{Q(s)} \right] ds + \frac{1}{p_0} M \\
&\leq \frac{1}{p_0} (p_0 - 1) M \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) ds + \frac{1}{p_0} M = M
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(S_1x)(t) + (S_2y)(t) &= \frac{1}{P(t+\tau)} \left[ \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau)) \right] ds \right. \\
&\quad \left. + y(t+\tau) \right] \\
&\geq \frac{1}{p_1} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) \left[ P(s) x(s-\tau) - \frac{f(s, x(s-\tau))}{Q(s)} \right] ds + \frac{1}{p_1} m \\
&\geq \frac{1}{p_1} (p_1 - 1) m \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) ds + \frac{1}{p_1} m = m.
\end{aligned}$$

Buradan,  $\forall x, y \in \Omega$  ve  $t \in R$  için  $m \leq (S_1x)(t) + (S_2y)(t) \leq M$  yani  $(S_1x)(t) + (S_2y)(t) \in \Omega$  olur.  $\forall x, y \in \Omega$  için

$$\left| (S_2x)(t) - (S_2y)(t) \right| = \left| \frac{x(t+\tau)}{P(t+\tau)} - \frac{y(t+\tau)}{P(t+\tau)} \right| \leq \frac{1}{p_0} |x(t+\tau) - y(t+\tau)|$$

elde edilir.

Her iki tarafın sup normu alınırsa

$$\|S_2x - S_2y\| \leq \frac{1}{p_0} \|x - y\|$$

olur ve burada  $S_2$  bir daralma dönüşümüdür.

Şimdi ise,  $S_1$ 'in düzgün sürekli olduğu gösterilecektir. İlk olarak,  $S_1$ 'in sürekli olduğu gösterilecektir.  $\{x_k\} \in \Omega$ ,  $k \rightarrow \infty$  iken  $x_k(t) \rightarrow x(t)$  olacak şekilde fonksiyonların yakınsak bir dizisi olsun.  $\Omega$  kapalı olduğundan,  $x \in \Omega$  olur.  $t \in [0, w]$  için;

$$\begin{aligned} |(S_1x_k)(t) - (S_1x)(t)| &= \left| \frac{1}{P(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x_k(s-\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(s, x_k(s-\tau)) \right] ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{P(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s-\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(s, x(s-\tau)) \right] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{p_0} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) |f(s, x_k(s-\tau)) - f(s, x(s-\tau))| ds \\ &\quad + \frac{1}{p_0} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) P(s) Q(s) |x_k(s-\tau) - x(s-\tau)| ds. \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$  iken  $|f(t, x_k(t)) - f(t, x(t))| \rightarrow 0$  ve  $|x_k(t) - x(t)| \rightarrow 0$  olduğundan Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(S_1x_k)(t) - (S_1x)(t)\| = 0 \text{ ve dolayısıyla } S_1 \text{ sürekli dir.}$$

İkinci olarak  $S_1\Omega$ 'ın göreceli kompakt olduğunu ispatlayacağız. Bunun için  $\{S_1x : x \in \Omega\}$  fonksiyon ailesinin,  $[0, w]$  üzerinde düzgün sınırlı ve eşsüreklili olduğunu göstermek yeterlidir. (3.4)'den;

$$\begin{aligned} |(S_1x)(t)| &= \left| \frac{1}{P(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau)) \right] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{p_0} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) \left[ P(s) x(s-\tau) - \frac{f(s, x(s-\tau))}{Q(s)} \right] ds \leq \frac{(p_0-1)M}{p_0} \end{aligned}$$

ve buradan da;

$$\|S_1x\| \leq \frac{(p_0-1)M}{p_0}.$$

bulunur. Yukarıdaki yapılanlardan,  $\{S_1x : x \in \Omega\}$ 'in,  $[0, w]$  üzerinde düzgün sınırlı ve eşsüreklili olduğu görüldü. Dolayısıyla  $S_1\Omega$  göreceli kompakttır. Lemma 3.1 e göre,  $S_1x + S_2x = x$  olacak şekilde bir  $x \in \Omega$  vardır. Kolayca görülebilir ki  $x(t)$ , (3.1)'in pozitif bir  $\omega$ -periyodik çözümdür. Bu, ispatı tamamlar.

**Teorem 3.2:** Farz edelim ki  $-\infty < p_0 \leq P(t) \leq p_1 < -1$  ve öyle  $m$  ve  $M$  sabitleri mevcut olsun ki;

$$M - p_0m \leq \frac{f(t, x)}{Q(t)} - P(t)x \leq m - p_1M, \quad \forall (t, x) \in [0, w] \times [m, M], \quad m > 0. \quad (3.6)$$

Bu takdirde (3.1)'in en az bir pozitif  $\omega$ -periyodik  $x(t) \in [m, M]$  çözümü vardır.

**İspat:** Teorem 3.1'in ispatında olduğu gibi  $\Omega$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $G(t, s)$  tanımlansın.  $(S_1x)(t)$  ve  $(S_2x)(t)$ 'nin  $\omega$ -periyodik olduğu kolayca görebilir.  $\forall x, y \in \Omega$  ve  $t \in R$  için, (3.6)'dan

$$\begin{aligned} (S_1x)(t) + (S_2y)(t) &= \frac{-1}{P(t+\tau)} \left[ - \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau)) \right] ds \right. \\ &\quad \left. - y(t+\tau) \right] \\ &\leq \frac{-1}{P(t+\tau)} \left[ \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) \left[ \frac{f(s, x(s-\tau))}{Q(s)} - P(s) x(s-\tau) \right] ds - m \right] \\ &\leq \frac{-1}{P(t+\tau)} \left[ (m - p_1 M) \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) ds - m \right] \leq \frac{-p_1 M}{-p_1} = M \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (S_1x)(t) + (S_2y)(t) &= \frac{-1}{P(t+\tau)} \left[ - \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s-\tau) - f(s, x(s-\tau)) \right] ds \right. \\ &\quad \left. - y(t+\tau) \right] \\ &\geq \frac{-1}{P(t+\tau)} \left[ \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) \left[ \frac{f(s, x(s-\tau))}{Q(s)} - P(s) x(s-\tau) \right] ds - M \right] \\ &\geq \frac{-1}{P(t+\tau)} \left[ (M - p_0 m) \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) ds - M \right] \geq \frac{-p_0 m}{-p_0} = m \end{aligned}$$

Buradan,  $\forall x, y \in \Omega$  ve  $t \in R$  için  $m \leq (S_1x)(t) + (S_2y)(t) \leq M$  yani  $(S_1x)(t) + (S_2y)(t) \in \Omega$  bulunur.  $\forall x, y \in \Omega$  için

$$|(S_2x)(t) - (S_2y)(t)| = \left| \frac{x(t+\tau)}{P(t+\tau)} - \frac{y(t+\tau)}{P(t+\tau)} \right| \leq \frac{-1}{p_1} |x(t+\tau) - y(t+\tau)|$$

elde edilir. Her iki tarafın sup normunu alınırsa

$$\| S_2 x - S_2 y \| \leq \frac{-1}{p_1} | x(t + \tau) - y(t + \tau) |$$

olur ve burada  $S_2$  bir daralma dönüşümüdür. Şimdi ise,  $S_1$ 'in düzgün sürekli olduğu gösterilecektir. İlk olarak,  $S_1$ 'in sürekli olduğu gösterilecektir.  $\{x_k\} \in \Omega$ ,  $k \rightarrow \infty$  iken  $x_k(t) \rightarrow x(t)$  olacak şekilde fonksiyonların yakınsak bir dizisi olsun.  $\Omega$  kapalı olduğundan,  $x \in \Omega$  olur.  $t \in [0, w]$  için;

$$\begin{aligned} | (S_1 x_k)(t) - (S_1 x)(t) | &= \left| \frac{1}{P(t + \tau)} \int_{t + \tau}^{t + \tau + w} G(t + \tau, s) \left[ P(s) Q(s) x_k(s - \tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(s, x_k(s - \tau)) \right] ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{P(t + \tau)} \int_{t + \tau}^{t + \tau + w} G(t + \tau, s) \left[ P(s) Q(s) x(s - \tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f(s, x(s - \tau)) \right] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{p_1} \int_{t + \tau}^{t + \tau + w} G(t + \tau, s) | f(s, x_k(s - \tau)) - f(s, x(s - \tau)) | ds \\ &\quad - \frac{1}{p_1} \int_{t + \tau}^{t + \tau + w} G(t + \tau, s) | P(s) | Q(s) | x_k(s - \tau) - x(s - \tau) | ds \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$  iken  $| f(t, x_k(t)) - f(t, x(t)) | \rightarrow 0$  ve  $| x_k(t) - x(t) | \rightarrow 0$  olduğundan Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| (S_1 x_k)(t) - (S_1 x)(t) \| = 0$$

ve dolayısıyla  $S_1$  süreklidir.

İkinci olarak  $S_1\Omega$ 'ın göreceli kompakt olduğu ispatlanacaktır.

$\{S_1x : x \in \Omega\}$  fonksiyon ailesinin  $[0, w]$  üzerinde düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğunu göstermek yeterlidir. (3.6)'dan

$$\begin{aligned}
 |(S_1x)(t)| &= \left| -\frac{1}{P(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) \left[ f(s, x(s-\tau)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - P(s)Q(s)x(s-\tau) \right] ds \right| \\
 &\leq -\frac{1}{p_1} \int_{t+\tau}^{t+\tau+w} G(t+\tau, s) Q(s) \left[ \frac{f(s, x(s-\tau))}{Q(s)} - P(s)x(s-\tau) \right] ds \\
 &\leq \frac{m - p_1M}{-p_1}
 \end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan da

$$\|S_1x\| \leq \frac{m - p_1M}{-p_1}$$

olur. Diğer taraftan, (3.6) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left| (S_1 x)'(t) \right| &= \left| \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{P(t+\tau)} \right] P(t+\tau) (S_1 x)(t) - \frac{1}{P(t+\tau)} \left[ f(t+\tau, x(t)) - Q(t+\tau) x(t+\tau) \right] \right| \\
&= \frac{-1}{P(t+\tau)} \left| P'(t+\tau) (S_1 x)(t) + Q(t+\tau) \left[ \frac{f(t+\tau, x(t))}{Q(t+\tau)} - P(t+\tau) x(t+\tau) \right] \right. \\
&\quad \left. - x(t+\tau) + P(t+\tau) x(t+\tau) \right| \\
&\leq \frac{-1}{p_1} \left[ \|P'\| \|S_1 x\| + \|Q\| [m - p_1 M + M - p_0 M] \right] \\
&\leq \frac{-1}{p_1} \left[ \|P'\| \frac{m - p_1 M}{-p_1} + \|Q\| [m - p_1 M + M - p_0 M] \right] \\
&\leq -\frac{m - p_1 M}{p_1} \left[ \frac{\|P'\|}{-p_1} + \|Q\| \right] - \frac{\|Q\| M (1 - p_0)}{p_1}.
\end{aligned}$$

Yukarıda yapılanlardan,  $\{S_1 x : x \in \Omega\}$ ,  $[0, w]$  üzerinde düzgün sınırlı ve eşsürekli. Dolayısıyla  $S_1 \Omega$  göreceli kompakttır. Lemma 3.1'e göre,  $S_1 x + S_2 x = x$  olacak şekilde bir  $x \in \Omega$  vardır. Kolayca görülebilir ki  $x(t)$ , (3.1)'in pozitif bir  $\omega$ -periyodik çözümüdür. Bu, ispatı tamamlar. Sonraki iki teoremin ispatları (Luo vd., 2008) de ki teorem 2.1'e benzer olduğu için ihmal edilmiştir.

**Teorem 3.3:** Farz edelim ki  $0 \leq P(t) < p_1 < 1$  ve öyle  $m$  ve  $M$  sabitleri mevcut olsun ki;

$$m \leq \frac{f(t, x)}{Q(t)} - P(t) x \leq (1 - p_1) M, \quad \forall (t, x) \in [0, w] \times [m, M], \quad m > 0.$$

Bu takdirde (3.1) in en az bir pozitif  $\omega$ -periyodik  $x(t) \in [m, M]$  çözümü vardır.

**Teorem 3.4:** Farz edelim ki  $-1 < p_0 \leq P(t) \leq 0$  ve öyle  $m$  ve  $M$  sabitleri mevcut olsun ki;

$$m - p_0 M \leq \frac{f(t, x)}{Q(t)} - P(t)x \leq M, \quad \forall (t, x) \in [0, w] \times [m, M], \quad m > 0.$$

Bu takdirde (3.1) in en az bir pozitif  $\omega$  – periyodik  $x(t) \in [m, M]$  çözümü vardır.

**Örnek 3.1:** Birinci mertebeden nötral diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$\left[ x(t) - \frac{\exp(\sin t)}{100} x(t - 4\pi) \right]' = - \left( \left( 1 + \frac{\sin t}{10} \right) x(t) + 30 + \exp(\cos t) + \cos(x^3(t - 4\pi)) \right) \quad (3.7)$$

$$\omega = 2\pi, \quad P(t) = \frac{\exp(\sin t)}{100}, \quad Q(t) = 1 + \frac{\sin t}{10}, \quad f(t, x) = 30 + \exp(\cos t) + \cos(x^3)$$

ve  $\tau = 4\pi$  olmak üzere (3.1), (3.7) formundadır. Teorem 3.3 ün koşullarının  $m = 10$  ve  $M = 40$  olmak üzere sağlandığını görmek kolaydır. Buradan (3.7), en az bir pozitif  $\omega$  – periyodik çözüme sahiptir.

## BÖLÜM IV

### NÖTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İKİ ÇEŞİDİ İÇİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Burada, (Luo vd., 2008) çalıştığı makale incelenmiştir. Krasnoselkii'nin sabit nokta teoremi kullanılarak nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin iki çeşidi için pozitif periyodik çözümlerin varlığı çalışıldı. Sonuçlar çeşitli matematiksel modellere uygulandığında önceki sonuçlardan daha iyi sonuçlar bulundu. Bu kısımda nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin iki çeşidi

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - cx(t - \tau(t)) \right] = -a(t)x(t) + f(t, x(t - \tau(t))) \quad (4.1)$$

ve

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - c \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+r)dr \right] = -a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^0 Q(r)f(t, x(t+r))dr \quad (4.2)$$

için pozitif periyodik çözümlerinin varlığı incelenecektir.

Denklemlerde  $a(t), b(t) \in C(R, (0, \infty))$ ,  $\tau(t) \in C(R, R)$ ,  $f \in C(R \times R, R)$  ve  $a(t), b(t), \tau(t)$  ve  $f(t, x)$   $\omega$  periyodik fonksiyonlardır  $\omega > 0$  ve  $|c| < 1$  sabittir,

$Q(r) \in C((-\infty, 0], [0, \infty))$ ,  $\int_{-\infty}^0 Q(r)dr = 1$ . (4.1) ve (4.2) fonksiyonel diferansiyel

denklemlerin birçok matematiksel ekolojik modelleri ve popülasyon modelleri içerdiği çok iyi bilinir.

Örneğin;

(1) Hematopoiesis Modeller (Luo vd., 1998; Weng vd., 1995; Wan vd., 2002)

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - cx(t - \tau(t)) \right] = -a(t)x(t) + b(t)e^{-\beta(t)x(t - \tau(t))} \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - c \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+r)dr \right] = -a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^0 Q(r)e^{-\beta(t)x(t+r)}dr \quad (4.4)$$

(2) Nicholson's blowflies Modeller (Gurney vd., 1980; Joseph vd., 1994; Weng, 1996)

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - cx(t - \tau(t)) \right] = -a(t)x(t) + b(t)x(t - \tau(t))e^{-\beta(t)x(t - \tau(t))}, \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - c \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+r)dr \right] = -a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+r)e^{-\beta(t)x(t+r)}dr, \quad (4.6)$$

(3) Kan hücresi üretimi için modeller (Gopalsamy, 1992; Jiang vd., 2002; Li, 1998)

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - cx(t - \tau(t)) \right] = -a(t)x(t) + b(t) \frac{x(t - \tau(t))}{1 + x^n(t - \tau(t))}, \quad n > 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ x(t) - c \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+r)dr \right] = -a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^0 Q(r) \frac{x(t+r)}{1 + x^n(t+r)}dr, \quad n > 0. \quad (4.8)$$

Bu esnada, bireysel türe bağlı olmak şartıyla artan nüfusun tükettiği yiyecek, olgunlaşan yiyecekte fazla olduğundan dolayı bu nötral diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Dahası, diferansiyel denklemlerin periyodik çözümleri, sistemlerin önemli yöntemini tanımladığı bilinmektedir. Bu sebeple (4.1) ve (4.2) için pozitif periyodik çözümlerinin varlığı üzerinde çalışmak önemlidir.

Bu çalışmada (4.1) ve (4.2) denklemleri için pozitif periyodik çözümlerinin varlığı için yeterli koşulları elde edildi. (Wan vd., 2002; Wan vd., 2004)'de çalışılan (4.1) denkleminin özel durumu olan  $c=0$  hali ile bulunan sonuçlar bu çalışmada iyileştirildi ve genelleştirildi. (Li vd., 2006)'da  $c \in [0,1)$  olmak üzere (4.1) ve (4.2) denklemini

tartıştılar. (4.1) ve (4.2)'de  $c \in (-1, 0)$  alındığı için sonuçlar yenidir ve (4.1) ve (4.2) denklemleri için pozitif periyodik çözümlerinin varlığının ispatında kullanılan metot (Li vd., 2006)'da kullanılanı farklıdır.

Bu çalışmanın ana sonuçlarının ispatında Krasnoselskii'nin sabit nokta teoremi temel alınmıştır. Anahtar adımlardan bir tanesi anılan sabit nokta teoreminin şartlarını sağlayan  $T$  ve  $S$  operatörlerini bulmaktır. Ana çözümleri sonuçlandırmak için ilk olarak Krasnoselskii'nin sabit nokta teoremi ifade edilecektir.

**Lemma 4.1** (You, 1982)

$X$  Banach uzayı olsun.  $K$ ,  $X$ 'in kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olduğu varsayalım.

$T, S: K \rightarrow X$  aşağıdaki şartları sağlasın.

(i)  $Tx + Sy \in K, \forall x, y \in K$

(ii)  $S$  bir daralma operatördür,

(iii)  $T, K$ 'de tamamen sürekli operatördür.

Bu takdirde  $T + S, K$ 'da sabit noktaya sahiptir.

Bu çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir. İkinci bölümde ana sonuçlar verildi ve ispatlandı. Son bölümde uygulama olması açısından bazı modeller için ana sonuçlar kullanıldı. Ayrıca yeni sonuçlar elde edildi.

#### 4.1 Ana Sonuçlar

$\|x\| = \sup_{t \in [0, \omega]} |x(t)|$  olmak üzere

$X = \{x(t) : x(t) \in C(R, R), x(t) = x(t + \omega), t \in R\}$  olsun. Buradan  $X, \|\cdot\|$

normuyla Banach uzayıdır.

$$F(t, x) = \frac{f(t, x)}{a(t)} - cx,$$

$$H(t, x) = \frac{b(t)}{a(t)} f(t, x) - cx.$$

**Teorem 4.1:** Farz edelim ki  $c \in [0, 1)$  ve  $m < M$  olmak üzere negatif olmayan  $m, M$  sayıları olsun. Öyle ki;  $\forall t \in [0, \omega], x \in [m, M]$  için

$$(1-c)m \leq F(t, x) \leq (1-c)M$$

ve  $\forall x \in [m, M]$  için  $F(t_0, x) > (1-c)$  olacak şekilde bir  $t_0 \in [0, \omega]$  olsun. Bu takdirde (4.1)'in  $x(t) \in (m, M]$  olacak şekilde en az bir pozitif  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

**Yorum 4.1.1:** Teorem 4.1 (Wan vd., 2004)'de karşılık gelen sonuçları iyileştirir ve genelleştirir.

**Yorum 4.1.2:** Gecikmeler sabit alındığında (Gil, 2001)'deki perturbed Hill yöntemi, Teorem 4.1'deki sonuçlardan daha genel sonuçlar vermektedir ancak Krasnoselskii teoremi değişken gecikme içeren denklemlerle çalışmamızı sağlar.

**İspat:** İlk olarak

$$x(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) - ca(s)x(s-\tau(s)) \right] ds + cx(t-\tau(t)), \quad (4.9)$$

burada,

$$G(t, s) = \frac{\exp\left(\int_t^s a(r) dr\right)}{\left(\int_0^\omega a(r) dr\right)^{-1}} \quad (4.10)$$

integral denklemini ele alınsın. Burada  $\varphi(t)$ , (4.9)'un  $\omega$ -periyodik çözümüdür ancak ve ancak  $\varphi(t)$  (4.1)'in  $\omega$ -periyodik çözümüdür.  $\varphi(t)$ , (4.1)'in  $\omega$ -periyodik çözümü olsun.

Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\varphi(t) - c\varphi(t - \tau(t))] &= -a(t) [\varphi(t) - c\varphi(t - \tau(t))] \\ &\quad + f(t, \varphi(t - \tau(t))) - ca(t)\varphi(t - \tau(t)) \end{aligned}$$

$y(t) = \varphi(t) - c\varphi(t - \tau(t))$  olsun. Bu takdirde  $y(t)$ ,  $\omega$ -periyodik fonksiyondur ve

$$\frac{d}{dt} y(t) = -a(t)y(t) + f(t, \varphi(t - \tau(t))) - ca(t)\varphi(t - \tau(t)).$$

Bunun sonucu olarak;

$$y(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s) [f(s, \varphi(s - \tau(s))) - ca(s)\varphi(s - \tau(s))] ds,$$

yani

$$\varphi(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) \left[ f(s, \varphi(s-\tau(s))) - ca(s)\varphi(s-\tau(s)) \right] ds + c\varphi(t-\tau(t)).$$

Bu da  $\varphi(t)$ 'nin (4.9)'un  $\omega$ -periyodik çözümü olduğu anlamına gelir. Başka bir deyişle  $\varphi(t)$ 'nin (4.9)'un  $\omega$ -periyodik çözümü olduğunu farz edelim. Bu takdirde

$$\varphi(t) - c\varphi(t-\tau(t)) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) \left[ f(s, \varphi(s-\tau(s))) - ca(s)\varphi(s-\tau(s)) \right] ds.$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevi alındığında

$$\frac{d}{dt} \left[ \varphi(t) - c\varphi(t-\tau(t)) \right] = -a(t)\varphi(t) + f(t, \varphi(t-\tau(t)))$$

elde edilir. Bu da  $\varphi(t)$ 'nin (4.1)'in  $\omega$ -periyodik çözümü olduğu anlamına gelir.

$K = \{x \in X : m \leq x(t) \leq M\}$  olsun.  $K$ 'nin sınırlı kapalı ve konveks küme olduğu açıktır.

$K$  üzerinde  $T$  ve  $S$  operatörleri

$$(Tx)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) - ca(s)x(s-\tau(s)) \right] ds \quad (4.11)$$

$$(Sx)(t) = cx(t-\tau(t)) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlansın.  $\forall x \in K$  için

$$\begin{aligned}
(Tx)(t+\omega) &= \int_{t+\omega}^{t+2\omega} G(t+\omega, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) - ca(s)x(s-\tau(s)) \right] ds \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t+\omega, u+\omega) \left[ f(u, x(u-\tau(u))) - ca(u)x(u-\tau(u)) \right] du \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t, u) \left[ f(u, x(u-\tau(u))) - ca(u)x(u-\tau(u)) \right] du \\
&= (Tx)(t)
\end{aligned}$$

ve

$$(Sx)(t+\omega) = cx(t+\omega-\tau(t+\omega)) = cx(t-\tau(t)) = (Sx)(t) \quad (4.13)$$

Böylece,

$$T(K) \subset X, \quad S(K) \subset X.$$

Şimdi  $\forall x, y \in K$  için  $Tx + Sy \in K$  olduğu gösterilecek.  $\forall x, y \in K$ ,

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) + (Sy)(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) \right. \\
&\quad \left. - ca(s)x(s-\tau(s)) \right] ds + cy(t-\tau(t)) \\
&\leq \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ (cx(s-\tau(s)) + (1-c)M)a(s) \right. \\
&\quad \left. - ca(s)x(s-\tau(s)) \right] ds + cM \\
&= (1-c)M \int_t^{t+\omega} G(t, s) a(s) ds + cM \\
&= M.
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) + (Sy)(t) &\geq \int_t^{t+\omega} G(t,s) \left[ (cx(s-\tau(s)) + (1-c)m)a(s) \right. \\
&\quad \left. - ca(s)x(s-\tau(s)) \right] ds + cm \\
&= (1-c)m \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s) ds + cm \\
&= m.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Böylece  $\forall x, y \in K$  için (4.14) ve (4.15)'ten  $Tx + Sy \in K$  olduğu görülür.

$S$ 'nin  $X$  üzerinde daralma operatörü olduğu açıktır.  $T$ 'nin  $K$  üzerinde düzgün sürekli operatör olduğu gösterilecek.  $T(K)$ 'nin düzgün sınırlı küme olduğu ve  $T$ 'nin  $K$  üzerinde sürekli olduğunu görmek zor değildir. Böylece Ascoli – Arzela teoremine göre  $T(K)$ 'nin eşsürekli olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. (4.11)'den  $\forall x \in K$  için

$$\begin{aligned}
\left| (Tx)'(t) \right| &\leq |a(t)| |x(t)| + |f(t, x(t-\tau(t)))| \\
&\leq \|a\| M + [(1-c)M + cM] \|a\| \\
&= 2M \|a\|.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Bu da  $T(K)$ 'nin eşsürekli olduğu anlamına gelir. Böylece  $T, K$  üzerinde düzgün sürekli bir operatördür. Böylece Lemma (4.1)'e göre  $x \in K$  olduğundan  $T + S$  sabit bir noktaya sahiptir. Ayrıca,  $m \leq x(t) \leq M$ , bunun anlamı  $x(t)$  (4.1)'in negatif olmayan  $\omega$ -periyodik çözümüdür.

$x(t)$ 'nin (4.1)'in pozitif  $\omega$ -periyodik çözümü olduğu ispatlanacaktır. Sadece  $\forall t \in [0, \omega]$  için  $x(t) > m$  olduğunu ispatlamak yeterlidir. Aksi takdirde  $x(t^*) = m$ 'i sağlayan  $t^* \in [0, \omega]$  vardır. (4.9)'dan

$$\begin{aligned}
m &= \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) - c a(s) x(s-\tau(s)) \right] ds + c x(t^* - \tau(t^*)) \\
&\geq \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) a(s) \left[ \frac{f(s, x(s-\tau(s)))}{a(s)} - c x(s-\tau(s)) \right] ds + c m.
\end{aligned}$$

$$\int_t^{t+\omega} G(t, s) a(s) ds = 1$$

olduğundan dolayı,

$$\int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) a(s) \left[ F(s, x) - (1-c)m \right] ds \leq 0 \tag{4.17}$$

denkleme ulaşılır ve  $F(s, x) \geq (1-c)m$  ve  $F(t_0, x) > (1-c)m$ ,  $t_0 \in [0, \omega]$  olduğu dikkate alınır,

$$\int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) a(s) \left[ F(s, x) - (1-c)m \right] ds > 0$$

çelişkisi elde edilmiş olur. Böylece  $\forall t \in [0, \omega]$  için  $0 \leq m \leq x(t) < M$ , yani  $x(t)$  (4.1)'in pozitif  $\omega$ -periyodik bir çözümüdür.

**Teorem 4.2:** Farz edelim ki  $c \in [0, 1)$  ve  $m < M$  olmak üzere negatif olmayan  $m, M$  sayıları olsun öyle ki;  $\forall t \in [0, \omega], x \in [m, M]$  için

$$(1-c) \leq H(t, x) \leq (1-c)M$$

ve  $\forall x \in [m, M]$  için  $H(t_0, x) > (1-c)m$  olacak şekilde bir  $t_0 \in [0, \omega]$  olsun. Bu takdirde (4.2)'in  $x(t) \in (m, M]$  olacak şekilde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

**İspat:** İlk olarak, Teorem 4.1'in ispatı gibi (4.2)'nin  $\omega$ -periyodik çözümünü bulmanın integral denkleminin çözümünü bulmaya denk olduğunun altını çizelim.

$$x(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ b(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) f(s, x(s+r)) dr - ca(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) x(s+r) dr \right] ds + c \int_{-\infty}^0 Q(r) x(t+r) dr \quad (4.18)$$

$T$  ve  $S$  operatörlerini  $K$  üzerinde

$$(Tx)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ b(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) f(s, x(s+r)) dr - ca(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) x(s+r) dr \right] ds$$

ve

$$(Sx)(t) = c \int_{-\infty}^0 Q(r) x(t+r) dr$$

şeklinde tanımlansın.

Burada  $K$  Teorem (4.1)'de tanımlandığı gibidir. İspatın geri kalanı Teorem 4.1'dekine benzerdir. İspat tamamlanmıştır.

**Teorem 4.3:** Farz edelim ki  $c \in (-1, 0)$  ve  $m < M$  olmak üzere negatif olmayan  $m, M$  sayıları olsun öyle ki;  $\forall t \in [0, \omega], x \in [m, M]$  için

$$m - cM \leq F(t, x) \leq M - cm$$

ve  $\forall x \in [m, M]$  için  $F(t_0, x) > m - cM$  olacak şekilde bir  $t_0 \in [0, \omega]$  olsun. Bu takdirde (4.1)'in  $x(t) \in (m, M]$  olacak şekilde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

**Teorem 4.4:** Farz edelim ki  $c \in (-1, 0)$  ve  $m < M$  olmak üzere negatif olmayan  $m, M$  sayıları olsun öyle ki;  $\forall t \in [0, \omega], x \in [m, M]$  için

$$m - cM \leq H(t, x) \leq M - cm$$

ve  $\forall x \in [m, M]$  için  $H(t_0, x) > m - cM$  olacak şekilde bir  $t_0 \in [0, \omega]$  olsun. Bu takdirde (4.2)'nin  $x(t) \in (m, M]$  olacak şekilde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

Teorem 4.3 ve Teorem 4.4'ün ispatları sırasıyla Teorem 4.1 ve 4.2 ile benzerdir. Bu nedenle ispatı verilmeyecektir.

## 4.2 Bazı Uygulamalar

Bu bölümde önceki bölümden elde edilen sonuçlar (4.3) – (4.8) denklemlerine uygulanacaktır. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

### Sonuç 4.2.1

(i)  $a(t), b(t) \in C(R, (0, \infty))$ ,  $\tau(t) \in C(R, R)$  ve  $a(t), b(t), \tau(t), \beta(t)$  ler  $\omega$ -periyodik fonksiyonlar,  $\omega > 0$  ve  $c \in [0, 1)$  iki sabit olsun.

(ii)  $\forall (t, x) \in [0, \omega] \times [m, M]$  için  $(1-c)m < \frac{b(t)e^{-\beta(t)x}}{a(t)} - cx \leq (1-c)M$  olduğunu

farz edelim. Bu takdirde (4.3)'ün  $x(t) \in (m, M]$  şeklinde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

#### Sonuç 4.2.2

Sonuç 4.3.1'deki (i) ve

(ii)  $\forall (t, x) \in [0, \omega] \times [m, M]$  için  $(1-c)m < \frac{b(t)xe^{-\beta(t)x}}{a(t)} - cx \leq (1-c)M$ 'nin

sağlansın. Bu takdirde (4.5)'in  $x(t) \in (m, M]$  şeklinde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

#### Sonuç 4.2.3

(i)  $a(t), b(t) \in C(R, (0, \infty))$ ,  $\tau(t) \in C(R, R)$  ve  $a(t), b(t), \tau(t)$   $\omega$ -periyodik fonksiyonlar,  $\omega > 0$  ve  $c \in [0, 1)$  iki sabit olsun.

(ii)  $\forall (t, x) \in [0, \omega] \times [m, M]$  için  $(1-c)m < \frac{b(t)x}{a(t)(1+x^n)} - cx \leq (1-c)M$  olduğu

farz edilsin. Bu takdirde (4.7)'nin  $x(t) \in (m, M]$  şeklinde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

#### Sonuç 4.2.4

(i)  $a(t), b(t) \in C(R, (0, \infty))$  ve  $a(t), b(t), \beta(t)$   $\omega$ -periyodik fonksiyonlar,  $\omega > 0$  ve  $c \in [0, 1)$  iki sabit olsun.

Bununla birlikte  $Q(r) \in C((-\infty, 0], [0, \infty))$ ,  $\int_{-\infty}^0 Q(r) dr = 1$  olsun. Bu takdirde

(4.4)'ün  $x(t) \in (m, M]$  şeklinde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.

#### **Sonuç 4.2.5**

Sonuç 4.3.4'deki (i) ve sonuç 4.3.2'deki (ii)'nin sağlandığını farz edelim. Bu takdirde (4.6)'nın  $x(t) \in (m, M]$  şeklinde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır

#### **Sonuç 4.2.6**

(i)  $a(t), b(t) \in C(\mathbb{R}, (0, \infty))$  ve  $a(t), b(t)$   $\omega$ -periyodik fonksiyonlar,  $\omega > 0$  ve  $c \in [0, 1)$  iki sabit olsun. Bununla birlikte  $Q(r) \in C((-\infty, 0], [0, \infty))$ ,  $\int_{-\infty}^0 Q(r) dr = 1$  olsun. Bu takdirde (4.8)'in  $x(t) \in (m, M]$  şeklinde en az bir  $\omega$ -periyodik çözümü vardır.  $c \in (-1, 0)$  olduğunda, benzer sonuçlar bulunur. Bu yüzden ispat verilmeyecektir.

## BÖLÜM V

### PERİYODİK GECİKMELERLE BİRLİKTE BİRİNCİ MERTEBEDEN NÖTRAL FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN POZİTİF PERİYODİK ÇÖZÜMLER

Burada, (Liu vd., 2012) yaptıkları çalışma incelenmiştir. Gecikmeleri periyodik olan birinci mertebeden nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin iki sınıfı dikkate alınmıştır. Denklemler için pozitif periyodik çözümlerin varlığı ile ilgili bazı sonuçlar Krasnoselskii sabit nokta teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Sonuçlar 4 örnekle desteklenmiştir.

Son yıllarda periyodik çözümlerin varlığı, aşikar olmayan periyodik çözümler, maksimum ve minimum periyodik çözümler ve pozitif çözümler periyodik gecikmelerle fonksiyonel diferansiyel denklemlerin birkaç sınıfı için pozitif periyodik çözümler; matematiksel ekolojik modeller, ekonomik ve kontrol modelleri, fizyolojik ve nüfus modelleri ve diğer modeller üzerine yazılmış birkaç bilimsel çalışma bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak (Kang vd., 2010; Kang vd., 2005; Luo vd., 2008; Serra, 1991; Wan vd., 2004) ve referanstakiler verilebilir.

2004'te Wan et al (Wan vd., 2004) periyodik gecikmelerle birinci dereceden fonksiyonel diferansiyel denklemleri incelemiştir,

$$x'(t) = -a(t)x(t) + f(t, x(t-\tau(t))), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

burada  $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ ,  $\tau(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$   $\omega$  periyodiktir ve birinci değişkene göre  $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$   $\omega$  periyodiktir.

Konilerdeki sabit nokta teoremini kullanarak, belli koşullar altında sırasıyla (5.1)'in pozitif periyodik ve periyodik çözümlerinin varlığını ispatladılar. 2005'te Kang ve Zhang (Kang vd., 2005) (5.1)'in aşikar olmayan çözümünün varlığı için kısmi sıralı ve topolojik derece teorisini kullandılar. 2010'da Kang et al (Kang vd., 2010) alt ve üst

çözümler metodunu kullanarak maksimum ve minimum çözümlerinin varlığını verdi. Uygunluk derecesi prensibinin süreklilik teoremi ile Serra (Serra, 1991),

$$\frac{d}{dt} [x(t) + cx(t-\tau)] = f(t, x(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

burada  $|c| \leq 1$  ve  $\tau > 0$  sabitlerdir, nötral diferansiyel denklem için periyodik çözümlerinin varlığını araştırdı.

2008'de Luo et al (Luo vd., 2008) periyodik gecikmelerle iki farklı

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x(t) - cx(t-\tau(t))] &= -a(t)x(t) + f(t, x(t-\tau(t))), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dt} \left[ x(t) - c \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+r)dr \right] &= -a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^0 Q(r)f(t, x(t+r))dr, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

burada birinci değişkene göre,  $\omega \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  ve  $|c| < 1$  sabitler olmak üzere,  $\tau \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $a, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $\tau$ ,  $a$  ve  $b$   $\omega$  periyodik ve  $f$  birinci değişkene göre  $\omega$  periyodiktir ve

$$Q \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^+), \quad \int_{-\infty}^0 Q(r)dr = 1$$

şeklindedir. Burada nötral fonksiyonel diferansiyel denklemler için pozitif periyodik çözümlerin varlığını kanıtlamak amacıyla Krasnoselskii sabit nokta teoremini kullandı.

(Kang vd., 2010; Kang vd., 2005; Luo vd., 2008; Serra, 1991; Wan vd., 2004) makaleleri ve buradaki referanslardan hareketle, periyodik gecikmeli birinci mertebeden nötral fonksiyonel diferansiyel denklemlerin iki çeşidi

$$\frac{d}{dt} [g(t)x(t) - c(t)x(t-\tau(t))] = -a(t)x(t) + f(t, x(t-\tau(t))), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ g(t) \left( x(t) + c(t) \int_{-\infty}^0 Q(r)x(t+h(r))dr \right) \right] \\ = -a(t)x(t) + b(t) \int_{-\infty}^0 Q(r)f(t, x(t+h(r)))dr, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

burada,  $\omega \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  sabiti ve  $\tau, a, b, c \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $h \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ ,  $\tau, a, b, c$  ve  $g$ ,  $\omega$ -periyodik fonksiyondur ve  $f$  birinci değişkene göre  $\omega$ -periyodiktir.  $Q \in C(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^+)$ ,  $\int_{-\infty}^0 Q(r)dr = 1$  ele alınacaktır. (5.1) ve (5.3) sırasıyla (5.4) ve (5.5)'in özel halidir. Bilindięi kadarıyla (5.4) ve (5.5)'in periyodik çözümlerin varlığı şimdiye kadar araştırılmamıştır. Bu makalenin amacı, Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve bazı yeni teknikler uygulayarak, (5.4) ve (5.5)'in pozitif periyodik çözümlerinin varlığını garanti eden yeterli koşullar oluşturmaktır. Sonuçların etkinliği ve uygulamalarını göstermek amacıyla 4 örnek verilmiştir.

Bu makale boyunca;  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ ,  $\mathbb{N}$ 'in tüm pozitif tam sayıların kümesi ve  $P = \min_{t \in [0, \omega]} g(t)$  olduğu varsayılır.

$$G(t, s) = \frac{\exp\left(\int_t^s ((g'(r) + a(r))/g(r))dr\right)}{g(s) \left[ \exp\left(\int_0^\omega ((g'(r) + a(r))/g(r))dr\right) - 1 \right]}, \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.6)$$

$$X = \{ x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t) = x(t + \omega), \forall t \in \mathbb{R} \}.$$

$$\| x \| = \sup_{t \in [0, \omega]} |x(t)|, \quad \forall x \in X. \quad (5.7)$$

$X$ 'in bir Banach uzayı olduğu bilinmektedir.

$$A(N, M) = \{ x \in X : N \leq x(t) \leq M, \forall t \in [0, \omega] \}, \quad \forall M, N > 0. \quad (5.8)$$

$A(N, M)$ 'nin Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks alt kümesi olduğunu görmek kolaydır.

**Lemma 5.1** (Krasnoselskii Sabit Nokta Teoremi):  $Y, Z$ , Banach uzayı'nın boş olmayan kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi olsun ve  $f, g \forall x, y \in Y$  için  $fx + gy \in Y$  olacak şekilde  $Y$ 'den  $Z$ 'ye dönüşüm olsun. Eğer  $f$  bir daralma dönüşümü ve  $g$  tamamen sürekli ise  $fx + gx = x$  denkleminin  $Y$ 'de en az bir çözümü vardır.

## 5.1 Ana Sonuçlar

Şimdi, (5.4) ve (5.5) için pozitif çözümlerinin varlığını göstermek amacıyla Krasnoselskii sabit nokta teoremini kullanacağız.

### Teorem 5.1

$$0 < N < M, \quad c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_1 + c_2 < 1, \quad -c_1 \leq c(t) \leq c_2, \quad \forall t \in [0, \omega], \quad (5.9)$$

$$0 < G_1 \leq g'(t) + a(t) \leq G_2, \quad \forall t \in [0, \omega], \quad (5.10)$$

$$(N + c_2 M) G_2 \leq f(t, s) + a(t) c(t) s \leq (1 - c_1) M G_1, \quad \forall (t, s) \in [0, \omega] \times [N, M], \quad (5.11)$$

sağlayan  $N, M, G_1, G_2, c_1$  ve  $c_2$  sabitlerinin olduğu varsayalım. Bu takdirde (5.5),  $A(N, M)$ 'de en az bir pozitif  $\omega$  periyodik çözüme sahiptir.

**İspat:**  $x(t)$ , (5.4) denkleminin çözümüdür ancak ve ancak  $x(t)$

$$x(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, x(s - \tau(s))) + a(s) c(s) x(s - \tau(s)) \right] ds - c(t) x(t - \tau(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

integral denkleminin çözümüdür.  $\forall x \in A(N, M)$  için  $S: A(N, M) \rightarrow X$  dönüşümleri

$$(Tx)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, x(s - \tau(s))) + a(s) c(s) x(s - \tau(s)) \right] ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

$$(Sx)(t) = -c(t) x(t - \tau(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

şeklinde tanımlansın. (5.13)'den  $\forall x \in A(N, M)$  ve  $t \in \mathbb{R}$  için,

$$\begin{aligned}
(Tx)(t+\omega) &= \int_{t+\omega}^{t+2\omega} G(t+\omega, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) \right] ds \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t+\omega, u+\omega) \left[ f(u+\omega, x(u+\omega-\tau(u+\omega))) \right. \\
&\quad \left. + a(u+\omega)c(u+\omega)x(u+\omega-\tau(u+\omega)) \right] du \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t, u) \left[ f(u, x(u-\tau(u))) + a(u)c(u)x(u-\tau(u)) \right] du \\
&= (Tx)(t),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$(Sx)(t+\omega) = -c(t+\omega)x(t+\omega-\tau(t+\omega)) = -c(t)x(t-\tau(t)) = (Sx)(t),$$

bulunur. Bunun anlamı ise,

$$T(A(N, M)) \subseteq X, \quad S(A(N, M)) \subseteq X. \tag{5.15}$$

(5.9) – (5.11) ve (5.13)'ü kullanılarak  $\forall x, y \in A(N, M)$  ve  $\forall t \in \mathbb{R}$  için

$$\begin{aligned}
(Tx)(t) + (Sy)(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) \right] ds \\
&\quad - c(t)y(t-\tau(t)) \\
&\leq (1-c_1)M G_1 \int_t^{t+\omega} G(t, s) ds + c_1 M \\
&\leq (1-c_1)M \int_t^{t+\omega} G(t, s) [g'(s) + a(s)] ds + c_1 M \\
&= \frac{(1-c_1)M}{\left[ \exp \left( \int_0^\omega ((g'(r) + a(r)) / g(r)) dr \right) - 1 \right]} \\
&\quad \times \int_t^{t+\omega} \exp \left( \int_t^s \left( \frac{g'(r) + a(r)}{g(r)} \right) dr \right) \left( \frac{g'(s) + a(s)}{g(s)} \right) ds + c_1 M \\
&= \frac{(1-c_1)M}{\left[ \exp \left( \int_0^\omega ((g'(r) + a(r)) / g(r)) dr \right) - 1 \right]} \\
&\quad \times \left[ \exp \left( \int_t^{t+\omega} \left( \frac{g'(r) + a(r)}{g(r)} \right) dr \right) - 1 \right] + c_1 M \\
&= (1-c_1)M + c_1 M = M,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

sonucuna varılır.

$$(Tx)(t) + (Sy)(t) \geq (N + c_2M)G_2 \int_t^{t+\omega} G(t,s) ds - c_2M \geq N + c_2M - c_2M = N, \quad (5.17)$$

$$|(Sx)(t) - (Sy)(t)| = |c(t)| |x(t - \tau(t)) - y(t - \tau(t))| \leq (c_1 + c_2) \|x - y\|, \quad (5.18)$$

bunun anlamı ise,

$$Tx + Ty \in A(N, M), \quad \|Sx - Sy\| \leq (c_1 + c_2) \|x - y\|, \quad \forall x, y \in A(N, M). \quad (5.19)$$

Şimdi  $T$ 'nin  $A(N, M)$ 'de düzgün sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilecektir. İlk olarak  $T$ 'nin  $A(N, M)$ 'de sürekli olduğunu varsayalım.  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$  ile birlikte  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A(N, M)$  ve  $y \in A(N, M)$  olsun.  $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  olduğu hatırlanırsa, verilen  $\varepsilon > 0$  için  $[0, \omega] \times [N, M]$  de  $f$ 'nin düzgün sürekliliğinden

$$|f(t_1, s_1) - f(t_2, s_2)| < \frac{G_1 \varepsilon}{2}, \quad \forall (t_1, s_1, t_2, s_2) \in [0, \omega]^2 \times [N, M]^2, \quad (5.20)$$

$$\max\{|t_1 - t_2|, |s_1 - s_2|\} < \delta.$$

sağlayan  $\delta > 0$  vardır.  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$  olduğundan

$$\|y_k - y\| < \frac{G_1 \min\{\varepsilon, \delta\}}{2(1 + G_2)(1 + \|a\|)}, \quad \forall k \geq N_1. \quad (5.21)$$

sağlayan  $N_1 \in N$  vardır. (5.9), (5.10), (5.13), (5.20) ve (5.21) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\|Ty_k - Ty\| &= \sup_{t \in [0, \omega]} \left| \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, y_k(s-\tau(s))) + a(s)c(s)y_k(s-\tau(s)) \right] ds \right. \\
&\quad \left. - \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, y(s-\tau(s))) + a(s)c(s)y(s-\tau(s)) \right] ds \right| \\
&\leq \sup_{t \in [0, \omega]} \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ \left| f(s, y_k(s-\tau(s))) - f(s, y(s-\tau(s))) \right| \right. \\
&\quad \left. + |a(s)c(s)| \left| y_k(s-\tau(s)) - y(s-\tau(s)) \right| \right] ds \\
&< G_1 \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|a\| (c_1 + c_2) \min\{\varepsilon, \delta\}}{2(1+G_2)(1+\|a\|)} \right] \sup_{t \in [0, \omega]} \int_t^{t+\omega} G(t, s) ds < \varepsilon, \quad \forall k \geq N_1,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

elde edilir. Bunun anlamı ise  $\lim_{k \rightarrow \infty} Ty_k = Ty$ , yani  $T, A(N, M)$ 'de süreklidir.

İkinci olarak  $T(A(N, M))$ 'nin göreceli kompakt olduğunu iddia edelim.  $[0, \omega]$ 'da  $T(A(N, M))$ 'nin eşsüreklili ve düzgün sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

(5.9) – (5.11) ve (5.13) ten

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \sup_{t \in [0, \omega]} \left| \int_t^{t+\omega} G(t, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) \right] ds \right| \\
&\leq (1-c_1)M G_1 \sup_{t \in [0, \omega]} \int_t^{t+\omega} G(t, s) ds \leq (1-c_1)M, \quad \forall x \in A(N, M).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(Tx)'(t)| &= \left| -\frac{g'(t)+a(t)}{g(t)}(Tx)(t)+G(t,t+\omega) \right. \\
&\quad \times \left[ f(t+\omega, x(t+\omega-\tau(t+\omega))) + a(t+\omega)c(t+\omega)x(t+\omega-\tau(t+\omega)) \right] \\
&\leq -\frac{g'(t)+a(t)}{g(t)}|(Tx)(t)| + |G(t,t+\omega)-G(t,t)| |f(t, x(t-\tau(t)))| \\
&\quad + a(t)c(t)x(t-\tau(t)) \\
&\leq \frac{G_2}{P}(1-c_1)M + \frac{\exp\left(\int_0^\omega ((g'(r)+a(r))/g(r))dr\right)-1}{g(t)\left[\exp\left(\int_0^\omega ((g'(r)+a(r))/g(r))dr\right)-1\right]}(1-c_1)MG_1 \\
&\leq \frac{(1-c_1)M(G_1+G_2)}{P}, \quad \forall (x,t) \in A(N,M) \times [0,\omega],
\end{aligned} \tag{5.23}$$

bulunur. Bu ise,  $T(A(N,M))$ 'nin  $[0,\omega]$  de düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğunu verir. Bunlarla birlikte (5.15), (5.19) ve Lemma 5.1 den  $Tx_0 + Sx_0 = x_0$  olacak şekilde  $x_0 \in A(N,M)$  vardır.  $x_0$ 'ın (5.12) ve (5.13) den (5.4)'ün pozitif  $\omega$  periyodik çözümü olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 5.2:** (5.10) ve (5.11) şartlarını sağlayan  $N, M, G_1, G_2, c_1, c_2$  sabitlerinin olduğunu varsayalım:

$$0 \leq N < M, \quad c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_1 + c_2 < 1, \quad -c_1 \leq c(t) \leq c_2, \quad \forall t \in [0,\omega], \tag{5.24}$$

ya;

$$f(t_0, s) + a(t_0)c(t_0)s > (N + c_2 M)G_2, \quad \forall s \in [N, M], \quad (5.25)$$

ya da;

$$g'(t_0) + a(t_0) < G_2. \quad (5.26)$$

Bu takdirde; (5.4)  $\forall t \in [0, \omega]$  için  $N < x(t) \leq M$  olacak şekilde en az bir  $x \in A(N, M)$  pozitif  $\omega$  periyodik çözüme sahiptir.

**İspat:** Teorem 5.1'in ispatında olduğu gibi (5.4),  $N < x(t) \leq M$  olacak şekilde  $\omega$  periyodik  $x \in A(N, M)$  çözümüne sahiptir. Şimdi  $\forall t \in [0, \omega]$  için  $x(t) > N$  olduğunu iddia ediyoruz. Aksi takdirde  $x(t^*) = N$ 'i sağlayan  $t^* \in [0, \omega]$  vardır. (5.12), (5.13) ve (5.24)'den dolayı

$$\begin{aligned} N &= \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) \right] ds - c(t^*)x(t^*-\tau(t^*)) \\ &\geq \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) \right] ds - c_2 M, \end{aligned} \quad (5.27)$$

Bu ise,

$$0 \geq \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) \right] ds - (N - c_2 M) \quad (5.28)$$

$$= \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) - (N + c_2 M)(g'(s) + a(s)) \right] ds.$$

olduğunu gösterir. Farz edelim ki (5.25) sağlansın. (5.10), (5.11), (5.25) göz önüne alındığında  $G$ ,  $f$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $g$ ,  $g'$ ,  $\tau$  ve  $x$ 'lerin sürekliliğinden

$$\int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) - (N + c_2 M)(g'(s) + a(s)) \right] ds \quad (5.29)$$

$$\geq \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) - (N + c_2 M)G_2 \right] ds > 0,$$

bulunur. Farz edelim ki (5.26) sağlansın. (5.10), (5.11), (5.26) göz önüne alındığında  $G$ ,  $f$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $g$ ,  $g'$ ,  $\tau$  ve  $x$  lerin sürekliliğinden

$$\int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) - (N + c_2 M)(g'(s) + a(s)) \right] ds \quad (5.30)$$

$$> \int_{t^*}^{t^*+\omega} G(t^*, s) \left[ f(s, x(s-\tau(s))) + a(s)c(s)x(s-\tau(s)) - (N + c_2 M)G_2 \right] ds \geq 0,$$

bulunur. Bu da (5.28) ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 5.3:** (5.9) ve (5.10) sağlayan  $N$ ,  $M$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  sabitlerinin olduğunu varsayalım,

$$(N+c_2 M)G_2 \leq b(t)f(t,s)+a(t)c(t)s \leq (1-c_1)MG_1, \quad \forall (t,s) \in [0,\omega] \times [N,M]. \quad (5.31)$$

Bu takdirde (5.5),  $A(N, M)$ 'de en az bir pozitif  $\omega$  periyodik çözüme sahiptir.

**İspat:**  $x(t)$ , (5.5) denkleminin çözümüdür ancak ve ancak  $x(t)$ ,

$$x(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) \left[ b(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) f(s, x(s+h(r))) dr + a(s) + c(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) x(s+h(r)) dr \right] ds - c(t) \int_{-\infty}^0 Q(r) x(t+h(r)) dr, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (5.32)$$

integral denkleminin çözümüdür.  $\forall (x,t) \in A(N, M) \times \mathbb{R}$  için,  $T$  ve  $S: A(N, M) \rightarrow X$  dönüşümleri

$$(Tx)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) \left[ b(s) \int_{-\infty}^0 Q(r) f(s, x(s+h(r))) dr + a(s) + c(s) \int_{-\infty}^0 a(r) x(s+h(r)) dr \right] ds, \quad (5.33)$$

$$(Sx)(t) = -c(t) \int_{-\infty}^0 a(r) x(s+h(r)) dr.$$

şeklinde tanımlansın. İspatın geri kalan kısmı Teorem 5.1'in ispatı ile benzerdir ve ihmal edilmiştir. Bu da ispatı tamamlar.

$$\textbf{Teorem 5.4:} \quad b(t_0)f(t_0,s)+a(t_0)c(t_0)s > (N+c_2 M)G_2, \quad \forall s \in [N, M] \quad (5.34)$$

sağlayan  $N, M, G_1, G_2, c_1, c_2$  sabitlerinin olduğunu varsayalım.

Bu takdirde; (5.5)'in  $\forall t \in [0, \omega]$  için  $N < x(t) \leq M$  olacak şekilde en az bir  $x \in A(N, M)$  pozitif  $\omega$  periyodik çözüme sahiptir.

Teorem 5.4'ün ispatı teorem 5.2 ve 5.3'ün ispatı ile benzer olduğundan ihmal edilmiştir.

**Açıklamalar 5.5:** Eğer  $g(t) \equiv 1$ ,  $c(t) \equiv c$  ve  $\forall r \in \mathbb{R}$  için  $h(r) \equiv r$  olsa bile bu makaledeki teorem 5.2 ve 5.4'ün şartlarını sırasıyla (Luo vd., 2008)'de teorem 5.1 – 5.4'ün şartlarından farklıdır.

## Örnekler

Şimdi bölüm 5.2'de elde edilen sonuçları gösteren 4 örnek oluşturulacaktır. Bilinen sonuçlardan hiçbirinin örneklere uygulanamayacağına dikkat ediniz.

### Örnek 1 Periyodik gecikmeli birinci mertebeden nötral diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + \frac{\cos t}{100} \right) \left( x(t) + \frac{1+2\sin t}{100} \right) x(t-3\sin t-2\cos t) \right]' \\ & = - \left( 1 + \frac{\sin t}{50} \right) x(t) + 20 + \cos^2 t + \sin^2 t \left( x^5(t-3\sin t-2\cos t) \cos t \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

ele alınsın.

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi, \quad M=100, \quad N=1, \quad c_1 = \frac{1}{100}, \quad c_2 = \frac{3}{100}, \quad G_1 = \frac{99}{100}, \quad G_2 = \frac{101}{100} \quad \text{ve} \\ g(t) &= 1 + \frac{\cos t}{100}, \quad c(t) = \frac{1+2\sin t}{100}, \quad a(t) = 1 + \frac{\sin t}{50}, \quad \tau(t) = 3\sin t + 2\cos t, \\ f(t, s) &= 20 + \cos^2 t + \sin^2 t \left( s^5 \cos t \right), \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

(5.9) ve (5.10)'un sağlandığını görmek kolaydır. Öyleyse;

$$\begin{aligned}
(N+c_2 M)G_2 &= 4.04 < 20 + \left(1 + \frac{1}{50}\right) \frac{1-2}{100} \cdot 100 \leq f(t,s) + a(t)c(t)s \\
&\leq 22 + \left(1 + \frac{1}{50}\right) \frac{1+2}{100} \cdot 100 < 98.01 = (1-c_1)MG_1, \quad \forall (t,s) \in [0, \omega] \times [N, M].
\end{aligned} \tag{5.37}$$

(5.11) sağlanır. Böylece teorem 5.1, (5.34)'ün  $A(N, M)$ 'de en az bir pozitif  $\omega$  periyodik çözümü olduğunu söyler.

**Örnek 2** Periyodik gecikmeli birinci mertebeden nötral diferansiyel denklem

$$\begin{aligned}
&\left[ \left( \frac{3+2\cos t + \sin t}{100} \right) \left( x(t) + \frac{2+2\sin t + \cos t}{20} \right) x(t - \sin^3 t) \right]' \\
&= - \left( \frac{100+2s\sin t + 3\cos t}{100} \right) x(t) + 60 + \frac{x(t - \sin^3 t) \sin \sqrt{|t+x^8(t - \sin^3 t)|} + 1}{50+10\cos(t-x^5(t - \sin^3 t))}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

ele alınsın.

$$\begin{aligned}
\omega &= 2\pi, \quad M = 100, \quad N = 0, \quad c_1 = \frac{1}{20}, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad G_1 = \frac{24}{25}, \quad G_2 = \frac{26}{25}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \\
g(t) &= \frac{3+\cos t + \sin t}{100}, \quad c(t) = \frac{2+2\sin t + \cos t}{20}, \quad a(t) = \left( \frac{100+2s\sin t + 3\cos t}{100} \right), \quad \tau(t) = \sin^3 t, \\
f(t,s) &= 60 + \frac{s \sin \sqrt{|t+s^8|} + 1}{50+10\cos(t-s^5)}, \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

(5.10), (5.24) ve (5.26) sağlandığını görmek kolaydır. Öyleyse;

$$\begin{aligned}
(N+c_2M)G_2 &= 26 < 60 + \frac{100(-1)}{50-10} + \frac{105}{100} \cdot \frac{-1}{20} \cdot 100 \leq f(t,s) + a(t)c(t)s \\
&\leq 60 + \frac{100}{50-10} + 26.25 < 91.2 = (1-c_1)MG_1, \quad \forall (t,s) \in [0,\omega] \times [N,M].
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Bu da (5.11)'i sağlar. Açıkça yukarıdaki eşitsizliklerden dolayı (5.25) sağlanır. Dolayısıyla teorem 5.2, (5.38)'in  $\forall t \in [0,\omega]$  için  $N < x(t) \leq M$  olacak şekilde  $x \in A(N,M)$  pozitif periyodik çözümünün olmasını sağlar.

**Örnek 3** Periyodik gecikmeli birinci mertebeden nötral diferansiyel denklem

$$\begin{aligned}
&\left[ \left( \frac{5 + \cos t + 3 \sin t}{50 + \sin t} \right) \left( x(t) + \frac{2 + 3 \sin t}{6(50 - \sin t)^2} \int_{-\infty}^0 \exp(r) x(t - r \cos r) dr \right) \right]' \\
&= \frac{151 + 50 \sin t}{(50 + \sin t)^2} x(t) + \frac{1}{3 + 2 \sin t} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 \exp(r) \left[ 4.53 + 3 \sin t + \frac{3 + 2 \sin t}{10000 + \cos t} \left[ x(t - r \cos r) \cos^2 t + \cos(t + x^{100}(t - r \cos r)) \right] \right] dr, \quad \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

ele alınsın.

$$\omega = 2\pi, \quad M = 1440.6, \quad N = 1, \quad c_1 = \frac{1}{14406}, \quad c_2 = \frac{5}{14406}, \quad G_1 = \frac{5}{2601}, \quad G_2 = \frac{295}{2401} \quad \text{ve}$$

$$g(t) = \frac{5 + \cos t + 3 \sin t}{50 + \sin t}, \quad c(t) = \frac{2 + 3 \sin t}{6(50 - \sin t)^2}, \quad a(t) = \frac{151 + 50 \sin t}{(50 + \sin t)^2}, \quad b(t) = \frac{1}{3 + 2 \sin t},$$

$$f(t, s) = 4.53 + 3 \sin t + \frac{(3 + 2 \sin t) [s \cos^2 t + \cos(t + s^{100})]}{10000 + \cos t}, \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.42)$$

$$Q(r) = \exp(r), \quad h(r) = -r \cos r, \quad \forall r \in \mathbb{R}_-.$$

(5.9) ve (5.10) sağlandığı açıktır. Öyleyse;

$$\begin{aligned} (N + c_2 M) G_2 &= \frac{885}{4802} < \frac{4.53 + 3}{3 + 2} + \frac{-1}{10000 - 1} + \frac{302 - 553}{37470006} \cdot 1440 \cdot 6 \leq b(t) f(t, s) + a(t) c(t) s \\ &\leq \frac{4.53 - 3}{3 - 2} + \frac{1441.6}{10000 - 1} + \frac{1005}{37470006} \cdot 1440 \cdot 6 < \frac{14404}{5282} \\ &= (1 - c_1) M G_1, \quad \forall (t, s) \in [0, \omega] \times [N, M]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Bu da (5.31)'in sağlandığını gösterir. Böylece teorem 5.3, (5.41)'in  $A(N, M)$ 'de en az bir pozitif  $\omega$  periyodik çözümü olduğunu söyler.

**Örnek 4** Periyodik gecikmeli birinci mertebeden nötral diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} &\left[ \ln(100 + 2 \sin t) \left( x(t) + \frac{2 + 3 \sin t}{100 - 2 \sin t} \int_{-\infty}^0 \exp(r) x(t+r) dr \right) \right]' \\ &= - \left( \frac{3}{100 + 2 \sin t} \right) x(t) \\ &+ \left( 1 + \frac{\cos t + \sin t}{100} \right) \int_{-\infty}^0 \exp(r) \left[ 4 + \frac{2x(t+r) \sin t + \cos^2 t}{5000 + 5 \sin^2 [t - \ln(1 + x^2(t+r))]} \right] dr, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

ele alınsın.

$$\omega = 2\pi, M = 1000, N = 1, c_1 = \frac{1}{98}, c_2 = \frac{5}{98}, G_1 = \frac{1}{102}, G_2 = \frac{5}{98}, t_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ve}$$

$$g(t) = \ln(100 + 2\sin t), c(t) = \frac{2 + 3\sin t}{100 - 2\sin t}, a(t) = \frac{3}{100 + 2\sin t}, b(t) = 1 + \frac{\cos t + \sin t}{100},$$

$$f(t, s) = 4 + \frac{2s \sin t + \cos^2 t}{5000 + 5\sin^2 [t - \ln(1 + s^2)]}, \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.45)$$

$$Q(r) = \exp(r), \quad h(r) = r, \quad \forall r \in \mathbb{R}_-.$$

Açıkça (5.10), (5.24) ve (5.26) sağlanır. Basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} (N + c_2 M) G_2 &= \frac{12745}{4802} < \frac{336103}{104125} = \left(1 + \frac{-1-1}{100}\right) + \left(4 + \frac{-2000+0}{5000}\right) + \left(\frac{6-9}{10000-4}\right) \cdot 1000 \\ &\leq b(t)f(t, s) + a(t)c(t)s \leq \left(1 + \frac{1+1}{100}\right) \left(4 + \frac{2000+1}{5000}\right) + \frac{6+9}{10000-4} \cdot 1000 = \frac{623563}{104125} \quad (5.46) \\ &< \frac{24250}{2499} = (1 - c_1) M G_1, \quad \forall (t, s) \in [0, \omega] \times [N, M]. \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yani (5.31) sağlanır. Açıkça (5.34)'nın sağlandığı yukarıdaki eşitsizliklerden görülür. Böylece teorem 5.4  $\forall t \in [0, \omega]$  için  $x \in A(N, M)$  ve  $N < x(t) \leq M$  olduğunda (5.10)'un en az bir pozitif  $\omega$  periyodik çözüme sahip olmasını sağlar.

## KAYNAKLAR

Agarwal, R.P, Bohner, M. and Li, W., Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential Equations, *Marcel Dekker, Inc.*, New York, 2004.

Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'Regan and D., Oscillation, Theory for Functional Differential Equations, *Kluwer Academic*, Florida, 2000.

Aydın S., Analize Giriş, Birinci Cilt, *Beta Basın Yayım Dağıtım A.Ş.*, İstanbul, 1994.

Balcı, M., Çözümlü Matematik Analiz Problemleri, *Balcı Yayınları*, Ankara, 2003.

Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi*, Bursa, 1998.

Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi*, Ankara, 2006.

Candan, T. and Dahiya, R.S., “Existence of nonoscillatory solutions of first and second order neutral differential equations with distributed deviating arguments”, *J. Franklin Inst.* 347, 1309-1316, 2010.

Candan, T., “Existence of positive solutions of higher-order nonlinear neutral equations”, *J. Inequal. Appl.* 573, 2013.

Candan, T., “Existence of positive solutions of first order neutral differential equations with variable coefficients”, *App. Math. Letters* 52, 142-148, 2016.

Erbe, L.H., Kong, Q.K. and Zhang, B.G., Oscillation Theory for Functional Differential Equations, *Marcel Dekker, Inc.*, New York, 1995.

Gill, M.I., “Existence and stability of periodic solutions of semilinear neutral type systems”, *Dyn. Discrete Contin. Syts.* 7, 809-820, 2001.

Gopalsamy, K., Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics, *Kluwer Academic Press*, Boston, 1992.

Graef, J.R. and Kong, L., “Periodic solutions for first order functional differential equations”, *Appl. Math. Lett.* 24, 2011.

Gurney, W.S.C., “Blythe, S.P. and Nisbet, R.M., Nicholson’s blowflies revisited”, *Nature* 287, 17-20, 1980.

Györi, I. and Ladas G., Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, *Clarendon Press*, Oxford, 1991.

Jiang, D. and Wei, J., “Existence of positive periodic solutions for Volterra integro-Differential Equations”, *Acta Math. Sci.* 21B4, 553-560, 2002.

Joseph, W., So, H. and Yu, J. “Global attractivity and uniform persistence in Nicholson’s blowflies”, *Differential Equations Dynam. Systems* 1, 11-18, 1994.

Kalkülüs, T., George B. and Thomas, Jr., Thomas' Calculus , *Massachusetts Institute of Technology*, Cambridge, 2011.

Kang, S., Shi, B. and Wang, G. Q. “Existence of maximal and minimal periodic solutions for first-order functional differential equations”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, no. 1, 22-25, 2010.

Kang S. and Zhang, G. “Existence of nontrivial periodic solutions for first-order functional differential equations”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 18, no. 1, 101-107, 2005.

Kızmaz, H., Fonksiyonel Analize Giriş, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi*, Trabzon, 1993.

Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. and Zhang, B.G. Oscillation Theory for Functional Differential Equations with Deviating Arguments, *Marcel Dekker, Inc.*, New York, 1987.

Li, Y. “Existence and Global attractivity of a positive periodic solutions of a class of delay differential equations”, *Sci. China* 41A3, 273-284, 1998.

Li, Z. and Wang, X. “Existence of positive periodic solutions for neutral functional differential equations, Electron”. *J. Differential Equations* 34, 1-8, 2006.

Liu, Z., Li, X., Kang, S.M. and Kwun, Y.C., “Positive periodic solutions for first-order neutral functional differential equations with periodic delays”, *Abstr. Appl. Anal.*, 185692. 12, 2012.

Luo, J. and Yu, J. “Global asymptotic stability of nonautonomous mathematical ecological equations with distributed deviating arguments”, *Acta Math. Sinica*, 41, 1273-1282, 1998.

Luo, Y., Wang, W. and Shen, J., “Existence of positive periodic solutions for two kinds of neutral functional differential equations”, *Appl. Math. Lett.* 21, 581-587, 2008.

Olach, R., “Positive periodic solutions of delay differential equations”, *Appl. Math. Lett.* 26, 1141-1145, 2013.

Serra, E. “Periodic solutions for some nonlinear differential equations of neutral type,” *Nonlinear Analysis*, vol. 17, no. 2, 139-151, 1991.

Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, *Nobel Yayınları*, Ankara, 2012.

Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, *Nobel Yayınları*, Ankara, 2008.

Wan, A., Jiang, D. Q. and Xu, X. J. “A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equations”, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 47, no. 8-9, 1257-1262, 2004.

Yüksel, Ş., Genel Topoloji, *Eğitim Kitabevi*, Konya, 2008.

Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Applications I: Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, 1986.

## ÖZ GEÇMİŞ

Kübra AKDOĞAN 1991 yılında Niğde’de doğdu. İlk ve ortaokulu 23 Nisan Havacılar İlköğretim okulunda okudu. Lise eğitimini 2005 – 2009 yılları arasında Yavuz Sultan Selim Anadolu Lisesinde okuduktan sonra 2009 yılında Selçuk Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2013 yılında mezun olduktan sonra 2014 yılında ODTÜ Gv. Özel Niğde Ortaokulunda göreve başladı. Halen orada çalışmaya devam etmektedir.



