



T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE KUDRYASHOV METODU ve
HOMOJEN DENGE METODUNUN UYGULANMASI

ÇİĞDEM TÜRKMEN

Haziran 2019

T.C.
NİĞDE ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERE KUDRYASHOV METODU ve
HOMOJEN DENGE METODUNUN UYGULANMASI

Çiğdem TÜRKMEN

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Güldem YILDIZ

Haziran 2019

Çiğdem Türkmen tarafından **Dr. Öğr. Üyesi Güldem Yıldız** danışmanlığında hazırlanan “Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlere Kudryashov Metodunun Uygulanması” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

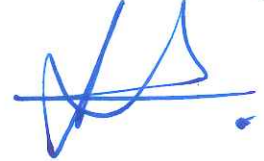
Başkan : **Doç. Dr. Ali Deliceoğlu**



Üye : **Doç. Dr. Durmuş Dağhan**



Üye : **Dr. Öğr. Üyesi Güldem Yıldız**



ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından/...../20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu’nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

...../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Çiğdem TÜRKMEN



ÖZET

LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE KUDRYASHOV METODU ve HOMOJEN DENGE METODUNUN UYGULANMASI

TÜRKMEN Çiğdem

Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Güldem YILDIZ

Haziran 2019, 68 sayfa

Bu tez çalışmasında, Kudryashov metot, Homojen Denge metodu ve bu metotlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Fizik bilim alanı ve mühendislik uygulamalarında kullanılan lineer olmayan kısmi türevli Fisher denklemi, Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi, Schamel-KdV (S-KdV) denklemi, Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) denklemi, Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklemi, Gardner denklemi, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi ve Sawada-Kotera (SK) denkleminin tam çözümleri bu iki metot kullanılarak elde edilmiştir. Bulunan tam çözümler hem kendi aralarında hemde literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve bu çözümler literatürde bulunan çözümlerle aynı ve farklı tipten hiperbolik, trigonometrik, rasyonel fonksiyonlardır.

Anahtar Sözcükler: Kudryashov metodu, Homojen Denge metodu, Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi, Fisher denklemi, Schamel-KdV denklemi, Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) denklemi Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denklem, Gardner denklemi, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), Sawada-Kotera (SK).

SUMMARY

THE EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING KUDRYASHOV METHOD and HOMOGENEOUS BALANCE METHOD

TÜRKMEN Çiğdem

Niğde Ömer Halisdemir University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asist. Prof. Dr. Güldem YILDIZ

June 2019, 68 pages

In this thesis, Kudryashov method, Homogeneous Balance method and the relations between these methods are studied. The exact solutions of Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation, Fisher equation, Schamel-KdV (S-KdV) equation, Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) equation, Boito-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) equation, Gardner equation, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) equation and Sawada-Kotera (SK) equation, which are nonlinear partial differential equations used in the physics science field and engineering applications, are obtained by using these two methods. The obtained exact solutions are compared both with each other and with the results in the literature. They are the same and different types of hyperbolic, trigonometric, rational functions from the solutions found in the literature.

Keywords: Kudryashov method, Homogeneous Balance method, Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation, Schamel-KdV(S-KdV), Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) equation, Boito-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) equation, Gardner equation, Caudrey-Dodd-Gibbon(CDG) and Sawada-Kotera(SK)

ÖN SÖZ

Bu tez konusunu bana öneren ve çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgilerinden faydalanma imkanını sağlayan danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Güldem YILDIZ' a ve hiçbir zaman yardımını benden esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Durmuş DAĞHAN' a ve ayrıca bu zamana kadar maddi manevi destekleriyle, her zaman yanımda olan başta annem Cennet ALTAN ve eşim Adem Türkmen olmak üzere bütün aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
ÖN SÖZ	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGE VE KISALTMALAR	x
BÖLÜM I GİRİŞ	1
BÖLÜM II GENEL KAVRAMLAR	3
BÖLÜM III KULLANILAN METOTLAR	9
3.1 Homojen Denge Metodu	9
3.2 Kudryashov Metodu	11
3.3 Homojen Denge Metodunun ile Kudryashov Metodunun Karşılaştırılması	13
BÖLÜM IV KULLANILAN METOTLARIN UYGULAMALARI	14
4.1 Kudryashov Metodu ile Çözülen Denklemler	14
4.1.1 Fisher denkleminin çözümleri	14
4.1.2 Caudrey- Dodd-Gibbon (CDG) denkleminin çözümleri	16
4.1.3 Sawada-Kotera (SK) denkleminin çözümleri	19
4.2 Homojen Denge Metodu ile Çözülen Denklemler	22
4.2.1 Benjamin-Bona-Mahoney denkleminin çözümleri	22
4.2.2 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) denkleminin çözümleri	26
4.3 Kudryashov Metodu ve Homojen Denge Metodu ile Çözülen Denklemler	31
4.3.1 Boiti-Leon-Manna Pempinelli (BLMP) denkleminin tam çözümleri	31
4.3.1.1 BLMP denkleminin Kudryashov metodu ile çözümleri	32
4.3.1.2 BLMP denkleminin Homojen Denge metodu ile çözümleri	34
4.3.2 Gardner denkleminin tam çözümleri	39
4.3.2.1 Gardner denkleminin Kudryasov metodu ile çözümleri	40
4.3.2.2 Gardner denkleminin Homojen Denge metodu ile çözümleri	43
4.3.3 Schamel-KdV (S-KdV) denkleminin tam çözümleri	49
4.3.3.1 S-KdV denkleminin Kudryasov metodu ile çözümleri	50
4.3.3.2 S-KdV denkleminin Homojen Denge metodu ile çözümleri	53

BÖLÜM V SONUÇLAR	56
KAYNAKLAR	59
ÖZ GEÇMİŞ	67
TEZ ÇALIŞMASINDA ÜRETİLEN ESERLER	68



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. CDG denkleminin (4.15) ile verilen çözümü ($k = 1$)	19
Şekil 4.2. SK denkleminin (4.21) ile verilen çözümü ($k = 1$)	21
Şekil 4.3. CBS denkleminin (4.44), (4.47) ve (4.49) çözümleri ($m = 1, \lambda = -1$)	31
Şekil 4.4. BLMP denkleminin (4.56) ile verilen çözümü ($k = 1, V_p = 1$)	34
Şekil 4.5. Gardner denkleminin(4.72) ile verilen çözümü ($a = 0.1, b = 1, p = -1$)	43
Şekil 4.6. S-KdV denkleminin (4.92) ile verilen çözümü ($b = -1, p = 1$)	52
Şekil 4.7. S- KdV denkleminin (4.94) ve (4.95) çözümleri ($k = -1, p = 1, a = 1$)	55

SİMGE VE KISALTMALAR

Simgeler

c_i	İntegrasyon sabitleri
λ	Keyfi sabit
μ	Geçiş değişkeni
η	Geçiş değişkeni
U'	$\frac{\partial U}{\partial \eta}$
V'	$\frac{\partial V}{\partial \eta}$
V_p	Açısal hız

Kısaltmalar

BLMP	Boiton-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi
BBM	Benjamin-Bona-Mahony Denklemi
CBS	Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi
CDG	Caudrey-Dodd-Gibbon Denklemi
S-KdV	Schamel Korteweg-de Vries Denklemi
SK	Sawada-Kotera Denklem Sistemi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler günlük hayatta bir çok problemin matematiksel modellenmesi olarak karşımıza çıkmaktadır. İlk olarak Leibniz tarafından 1676 yılında kullanılmıştır (Bozdağ, 2014). Birçok bilimsel alanda kullanılan problemlerin matematiksel model olarak ifade edilmesi ve bu matematiksel modellerin analitik çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak çok önemlidir. Çünkü bu çözümler modellenen problemlerin karakteri hakkında bilgi vermektedir. Bilimsel alanlarda kullanılan bu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri birçok farklı bilim dallarına ışık tutmakta ve yol göstermektedir. Mesela fiziksel bir olayda, kimyasal hesaplamalarda ya da biyolojide birçok çalışmada kısmi diferansiyel denklemlere ihtiyaç duyulur. Ayrıca benzer şekilde dalga ifadesi de fizikte önemli bir yere sahiptir. Örneğin ses dalgası, su dalgası, radyo ve televizyon dalgaları gibi dalgalar da matematiksel modeli kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Matematiksel model olarak ele alınan bu kısmi diferansiyel denklemler çözüldüğünde problem hakkında bir yoruma gidilebilir. Fakat bu denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi o kadar kolay değildir. Hatta bu çözümleri elde etmek diferansiyel denklemin elde edilmesinden daha zordur. Mesela bu diferansiyel denklemlerin bazılarını birkaç integral alarak çözebilirken bazılarını da bu şekilde çözmek mümkün değildir. Bu yüzden bu diferansiyel denklemleri çözmek için birçok bilim insanı tarafından farklı metotlar kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise Kudrashov metodu (Fan ve Zhang, 1998; Kudryashov, 2004; Pavel, 2010; Kabir vd., 2010; Ryabov vd., 2011; Pandir vd., 2012; Kudryashov, 2012; Mirzazadeh vd., 2014; Cüvelek, 2016) ve Homojen Denge metodu (Wang vd., 1996; Fan ve Zhang, 1998; Fan, 2000; Senthilvelan, 2001; Zhao ve Tang, 2002; Zhao vd., 2006; Jie Ji vd., 2010; Zayed ve Alurffi, 2014; Yi Wei vd., 2016) kullanılarak lineer olmayan kısmi türevli KdV denklemlerinden oluşan Fisher Denklemi (Kudryashov, 2012), Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi (Wazwaz, 2006; Wazwaz, 2008; Xu vd., 2008; Jiang ve Bi, 2010; Naher vd., 2011; Yang vd., 2014 ; Tu vd., 2016; Karaağaç, 2019), Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera Denklemi (Salas vd., 2008; Wazwaz, 2011; Shakeel ve Mohyud-Din, 2014; Akbari, 2017), Benjamin-Bona-Mahony

Denklemleri (Benjamin vd., 1972; Aslan, 2009; Abdel Rady vd., 2010; Yıldız, 2011), Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (Başkonuş vd., 2014; Kaplan vd., 2016; Tahami ve Najafi, 2017), Boito-Leon-Manna-Pempinelli (Gilson vd., 1993; Bai ve Zhao, 2006; Darvishi vd., 2012; Li Ying ve Li Desheng, 2012; Zamiri, 2013; Arbabi ve Najafi, 2016; Esen, 2018; Kumar ve Tiwari, 2018), Gardner denklemi (Wazwaz, 2007; Biswas, 2008; Pan vd., 2011; Vassilev vd., 2011; Kamchatnov vd., 2012; Betchewe vd., 2013; Alam ve Akbar, 2014; Zuntao vd., 2014; Zhang ve Wang, 2016; Kumar, 2016; Dağhan ve Dönmez 2016; Demiray ve Bulut, 2017), Schamel-KdV (Wafaa vd., 2013; Dönmez ve Dağhan, 2017) gibi kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir ve bu sonuçlar hem kendi aralarında hem de literatür de karşılaştırması yapılmıştır ve elde edilen bu sonuçların bazılarının grafikleri iki boyutta gösterilmiştir.

Tez kapsamında yapılan bu çalışma beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde konu hakkında kısaca bilgi verilmiş, ikinci bölümde temel kavramlar yazılmış ve çözülecek denklemlerin ifadelerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Kudryashov ve Homojen Denge metotları açıklanarak bu metodların nasıl kullanıldığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde de bu iki metot yardımıyla lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaşılmıştır. Elde edilen bu çözümler karşılaştırılmıştır. Son bölümde ise yapılan çalışmalar değerlendirilmiştir.

Bu tür metotların uygulanması zor olduğu için bir takım hesap programlardan faydalanılmıştır. Bu programlar REDUCE, MATHEMATICA, programlarıdır. Elde edilen çözümler için REDUCE, bu çözümlerin sağlanması ve çözümlerin grafikleri için MATHEMATICA programı kullanılmıştır.

BÖLÜM II

GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: Bir bilinmeyenli fonksiyon ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemlere diferansiyel denklemler denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev varsa o değişkene bağımsız değişken, denklemde türevi bulunan değişkene ise bağımlı değişken denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem denir. x bağımsız değişken, $y = U(x)$ bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevleri $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ olmak üzere adi türevli diferansiyel denklem kapalı formda,

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. İki veya daha fazla bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir ve n . mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem,

$$F(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilir (Koca, 2001; Bozdağ, 2014).

Tanım 2.2: Bir diferansiyel denklem lineer ve lineer olmayan denklem olmak üzere iki şekilde incelenir. Bir kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri parantezinde yazıldığında katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonlarından oluşuyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Eğer diferansiyel denklemde bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyorsa veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi birden farklı veya bağımlı değişken kendisi ile veya türevleriyle çarpım ya da bölüm halinde ise bu tür diferansiyel denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir (Koca, 2001; Bozdağ, 2014).

Tanım 2.3: Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir U fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0 \quad (2.3)$$

ise ϕ fonksiyonuna (2.3) denkleminin çözümüdür denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü denklemin mertebesi kadar sabit içerir ve çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir. (Koca, 2001; Bozdağ, 2014).

Tanım 2.4: Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\mu^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terimi $u^p \left(\frac{d^r u}{d\mu^r}\right)^s$ ile verilsin. Bu durumda M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mq + s(M + r)$ eşitliği ile yazılabilir (Uğurlu, 2010; Başkonuş, 2011).

Tanım 2.5: Kortevge-de Vries Denklemi (KdV)

KdV denklemi, ilk olarak 1834 yılında İskoçyalı mühendis J. Scott Russell tarafından fark edilen soliton dalgaları ortaya çıkmıştır. Kortevge-de Vries denklemi su dalgası yüzeyi, plazmadaki ses dalgası iyonları gibi önemli fiziksel sistemlerde ele alınan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Günümüzde KdV denklemi olarak bilinen denklemin en basit formu,

$$U_t + \alpha U U_x + U_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

şeklindeki üçüncü mertebeden lineer olmayan bir denklemdir. KdV denkleminde alt simgeler kısmi türevi belirtir. α bir parametredir ve yaygın olarak $\alpha = \pm 1$ veya $\alpha = \pm 6$ değerleri ile kullanılır. U_t bir boyutlu yayılan dalganın zaman değişimini niteler, lineer olmayan terim $U U_x$ dalganın yükselişini, U_{xxx} lineer terimi dalganın yayılma veya dağılmasını ifade eder (Özdemir, 2009; Çuha, 2014).

Tanım 2.7: Fisher Denklemi

Fisher denklemi lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Burada U bağımlı değişken ve x, t bağımsız değişkenler olmak üzere;

$$U_t = \delta U_{xx} + U(1-U) \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada δ sabit olmak üzere, $U = U(x, t)$, $x \in R$, $t \geq 0$ şeklinde tanımlıdır. (2.4) ile verilen lineer olmayan Fisher denklemi çok sayıda biyolojik ve kimyasal sistemde dalga yayılımını incelemek için model olarak kullanılır (Kudryashov, 2012).

Tanım 2.12: Genelleştirilmiş Beşinci Mertebeden KdV Denklemleri

Genelleştirilmiş beşinci mertebeden KdV denklemi, lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olup, U bağımlı değişken, x, t bağımsız değişkenler ve α, γ, β, w keyfi sıfırda farklı parametreler olmak üzere,

$$U_t + wU_{xxxxx} + \gamma UU_{xxx} + \beta U_x U_{xx} + \alpha U^2 U_x = 0 \quad (2.5)$$

şeklindedir. Lineer olmayan bu denklem uzun dalgaların hareketlerini yer çekimi altında, sığ sularda ve kuantum mekaniği gibi geniş uygulamaları olan önemli bir matematiksel modeldir. Örneğin katı hal fiziği, plazma fiziği ve kuantum alan teorisi gibi çeşitli alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır (Salas vd., 2008; Wazwaz, 2011).

Genelleştirilmiş beşinci mertebeden KdV denkleminin bazı özel durumları için aşağıdaki gibi Caudrey- Dodd-Gibbon Denklemi (CDG) ve Sawada-Kotera (SK) elde edilmiştir (Salas vd., 2008; Wazwaz, 2011).

Tanım 2.13: Caudrey- Dodd-Gibbon Denklemi (CDG)

Caudrey- Dodd-Gibbon Denklemi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi, Genelleştirilmiş beşinci mertebeden KdV denkleminde, $w=1$, $\alpha=180$, $\beta=\gamma=30$ olarak alındığında ve U bağımlı değişken x, t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$U_t + U_x^{(5)} + 30UU_{xxx} + 30U_xU_{xx} + 180U^2U_x = 0 \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilir. (Wazwaz, 2006; Wazwaz, 2008; Xu vd., 2008; Salas vd., 2008; Jiang ve Qinsheng Bi, 2010; Naher vd., 2011; Wazwaz, 2011; Yang vd., 2014; Tu vd., 2016; Karaağaç, 2019).

Tanım 2.14: Sawada-Kotera Denklemi (SK)

Sawada-Koteradenklemi lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemi, Genelleştirilmiş beşinci mertebeden KdV denkleminde, $w=1$, $\beta=\gamma$, $\alpha=\frac{1}{5}\gamma^2$ olarak alındığında ve U bağımlı değişken x, t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$U_t + U_x^{(5)} + 5(UU_{xxx} + U_xU_{xx} + U^2U_x) = 0 \quad (2.7)$$

şeklinde elde edilir (Salas vd., 2008; Wazwaz, 2011; Shakeel ve Mohyud-Dın, 2014).

Tanım 2.6: Benjamin-Bona-Mahony Denklemi (BBM)

Benjamin-Bona-Mahony denklemi Benjamin, Bona ve Mahony tarafından verilmiştir. Bu denklem lineer olmayan Korteweg de Vries (KdV) denkleminin bir alternatif modelidir ve $U = U(x, t)$ $x \in R$, $t \geq 0$ tanımlı olmak üzere,

$$U_t + U_x + UU_x - U_{xxt} = 0 \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir (Benjamin vd., 1972; Abdel Rady vd., 2010).

Tanım 2.9: Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff Denklemi (CBS)

Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemi lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Burada U bağımlı değişken ve x, y, t bağımsız değişkenler olmak üzere;

$$U_{xt} + 2U_y U_{xx} + 4U_x U_{xy} + U_{xxx} = 0 \quad (2.9)$$

şeklindedir (Kaplan vd., 2016; Başkonuş vd., 2017).

Tanım 2.10: Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Denklemi (BLMP)

Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi (2+1) boyutta lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Boiti-Leon-Manna-Pempinelli denklemi, U bağımlı değişken ve x, y, t bağımsız değişkenler olmak üzere;

$$U_{yt} + U_{xxx} - 3U_{xx} U_y - 3U_x U_{xy} = 0 \quad (2.10)$$

şeklindedir (Bai ve Zhao, 2006; Darvishi vd., 2012; Li Ying ve Li Desheng, 2012; Arbabi ve Najafi, 2016; Asadi ve Nadjafikhah, 2016; Esen, 2018).

Tanım 2.11: Gardner Denklemi

Gardner denklemi, plazma fiziği, akışkan fiziği, kuantum alan teorisi gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olan Gardner denklemi iç dalgaları açıklamakta ve KdV ve mKdV denklemlerinin birleşimi olarak bilinmektedir (Wazwaz, 2007; Biswas, 2008; Pan vd., 2011; Vassilev vd., 2011; Kamchatnov vd., 2012; Betchewe vd., 2013; Alam ve Akbar, 2014; Zuntao vd., 2014; Zhang ve Wang, 2016; Kumar, 2016; Demiray ve Bulut, 2017).

Gardner denklemi lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olup, U bağımlı değişken, x, t bağımsız değişkenler ve a, b, p keyfi sabitler olmak üzere;

$$U_t + aUU_x + bU^2U_x + pU_{xxx} = 0 \quad (2.11)$$

şeklindedir (Dağhan ve Dönmez 2016).

Tanım 2.8: Schamel-KdV Denklemi (S-KdV)

Schamel-KdV denklemi lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olup, U bağımlı değişken, x, t bağımsız değişkenler ve a, b, p keyfi sabit katsayılar olmak üzere;

$$U_t + aU^{\frac{1}{2}}U_x + bUU_x + pU_{xxx} = 0 \quad (2.12)$$

şeklindedir (Wahaa, vd., 2013; Kangangil, 2016; Dönmez ve Dağhan, 2017). Uzay plazmasının içerisinde pozitif ve negatif yüklü tozların yanında, dağılmış izotermal olmayan elektronlar barındıran dalganın özellikleri Schamel-KdV denklemlerinin tam çözümleri kullanılarak incelenmiştir (Dönmez ve Dağhan, 2017).

BÖLÜM III

KULLANILAN METOTLAR

3.1 Homojen Denge Metodu

Lineer olmayan denklemlerde dalga çözümlerini bulmak için kullanılan Homojen Denge metodu gereği (Wang vd., 1996; Fan vd., 1998) lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümünü,

$$U(\mu) = \sum_{i=0}^M \alpha_i \varphi^i(\mu) \quad (3.1)$$

formunda aranır. Burada α_i ' ler sabitler olup, φ 'lerde

$$\varphi' = a\varphi^2 + b\varphi + c \quad \text{ya da} \quad \varphi' = k(1 - \varphi^2)$$

denklemlerinin çözümleridir. O halde Homojen Denge metodu :

İlk adım: Lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklemi

$$F(U, U_t, U_x, U_{tt}, U_{xt}, U_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. $U = U(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon ve P de, $U = U(x, t)$ ' nin bir polinomu olmak üzere (3.2) denkleminde

$$U(\mu) = U(x, t), \quad \mu = rx + lt + d \quad (3.3)$$

dönüşümü uygulanırsa kapalı formda bir adi diferansiyel denklem,

$$P(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \quad (3.4)$$

şekline dönüşür.

İkinci adım: (3.2) nolu denklemin çözümünü, (3.1) formunda bulabilmek için M dengeleme terimine ihtiyaç vardır çünkü bu metodun işleyişi “dengeleme terimi” olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeli lineer terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terim karşılaştırılmasına dayanır. Bu M dengeleme terimi tanım 2.4 de olduğu gibi lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\mu^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\mu^r} \right)^s$ ve M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mq + s(M + r)$ eşitliği şeklinde elde edilir (Uğurlu, 2010; Başkonuş, 2014).

Üçüncü adım: Dengeleme terimi M değeri bulunduktan sonra (3.1) de yerine yazılarak (3.2) nolu denklemin çözümü:

$$U(\eta) = \alpha_M (\varphi)^M + \alpha_{M-1} (\varphi)^{M-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

formunda aranır. Burada φ ,

$$\varphi' = a\varphi^2 + b\varphi + c \quad \text{ya da} \quad \varphi' = k(1 - \varphi^2)$$

ile verilen Ricatti denklemlerinin çözümüdür ve a, b, c ve k sabitler olmak üzere U ve türevleri alınarak sembolik hesap programları yardımıyla elde edilen sabitler (3.4) nolu denklemde yerlerine yazılır.

Dördüncü adım: U ve türevleri (3.4) ile verilen denklemde yerlerine yazıldığında katsayıları α_i 'lerden oluşan φ 'li cebirsel denklemler elde edilir. Bu cebirsel denklemlerde φ 'nin katsayıları düzenlenerek elde edilen denklem,

$$P_n(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, k, w, \dots) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, m)$$

şeklinindedir. Burada elde edilen cebirsel denklem sistemleri bir takım hesap programları yardımıyla sıfıra eşitlenerek çözümlenir.

Beşinci adım: Bulunan bu çözümler (3.1) çözüm önerisinde yerine yazılarak (3.4) nolu denklemin tam çözümüne ulaşılır. (3.4) nolu denklem (3.2) nolu denklemin dönüşümü

olduğu için (3.2) nolu denklemin çözümü elde edilmiş olur (Fan, 2000; Senthilvelan, 2001; Zhao ve Tang, 2002; Zhao vd., 2006; Jie Ji vd., 2010; Zayed ve Alurfi, 2014; Yi Wei vd., 2016;).

3.2 Kudryashov Metodu

Bu metot, ilk defa Nikolay A. Kudryashov (Kudryashov, 2004) tarafından ortaya atılmış, nonlinear denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasında kullanılmıştır (3.2) numaralı denklem ile kapalı formda verilen kısmi diferansiyel denklemde η, μ keyfi sabitler olmak üzere,

$$U(\eta) = U(x, t), \quad \eta = kx + wt \quad (3.5)$$

değişken dönüşümü uygulanırsa,

$$P(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde adi diferansiyel denklem elde edilir. Metot gereği (3.6) formundaki denklemin çözümü,

$$U(\mu) = \sum_{i=0}^M \alpha_i \varphi^i(\mu) \quad (3.7)$$

formunda aranır. Burada $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ilerde hesaplanacak sabitlerdir ve

$$\varphi = \varphi(\eta) = \frac{1}{1 \pm e^\eta} \text{ 'de } \varphi'(\eta) = \varphi^2(\eta) - \varphi(\eta) \text{ denklemini sağlayan fonksiyondur. (3.6)}$$

nolu denklemin çözümünü, (3.7) formunda bulabilmek için m değerine ihtiyaç vardır.

Bu m değeri, en yüksek mertebeli lineer terimle en yüksek dereceli lineer olmayan terim arasında karşılaştırma yapılarak bulunan değerdir. Bu dengeleme terimi

tanım 2. 4' de olduğu gibi lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en

yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\eta^q}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim

$u^p \left(\frac{d^r u}{d\eta^r} \right)^s$ ve m dengeleme terimi olmak üzere $m + q = mq + s(m + r)$ eşitliği ile elde edilir. Burada m değeri bulunduktan sonra (3.7) denkleminde yerine yazılır. (3.7) denklemindeki φ ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen Bernoulli

$$\varphi'(\eta) = \varphi^2(\eta) - \varphi(\eta) \quad (3.8)$$

denkleminin tam çözümlerinden faydalanarak (3.7) denklemi ve türevleri,

$$U = \sum_{n=0}^m \alpha_n \varphi^n \text{ çözüm önerisinden}$$

$$U' = \sum_{n=0}^m \alpha_n n \varphi^{n-1} \varphi' = \sum_{n=0}^m \alpha_n n \varphi^{n+1} (\varphi^2 - \varphi)$$

$$U'' = \sum_{n=0}^m \alpha_n n \left[(n+1) \varphi^{n+2} - (2n+1) \varphi^{n+1} + n \varphi^n \right]$$

.

.

.

şeklinde alınarak (3.6) denkleminde yerlerine yazılır ve bir takım hesap programları yardımıyla,

$$P_n(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, k, w, \dots) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, m)$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklemler φ ve φ' 'nin kuvvetlerinin katsayıları $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0$ 'lar oluşan denklemlerdir. Bu denklem sistemi bir takım hesap programları yardımıyla elde edilir. Bu denklemler yine hesap programları yardımı ile sıfıra eşitlenerek bilinmeyen $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0$ katsayıları bulunur ve varsa ekstra şartlar hesaplanır. Burada, (3.8) ile verilen Bernoulli denklemin çözümü olan φ ,

$$\varphi = \frac{1}{1 \pm e^{\eta}} \quad (3.9)$$

olmak üzere elde edilen katsayılar (3.7)' de yerine yazılarak (3.6) denklemin tam çözümler elde edilir. (3.6) denklemi (3.2) denklemin dönüşümü olduğu için (3.2) denklemin çözümleri elde edilir (Fan ve Zhang, 1998; Pavel, 2010; Kabir vd., 2010; Ryabov vd., 2011; Pandir vd., 2012; Mirzazadeh vd., 2014; Cüvelek, 2016).

3.3 Homojen Denge Metodunun ve Kudryashov Metodunun Karşılaştırılması

Kudryashov ve Homojen Denge metotları fizik ve mühendislikte kullanılan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmaktadır. Bu iki metodunda dengeleme terimi esasına dayanması, kolay bir algoritmaya sahip olması ve yapılan hesaplamaların bilgisayar ile rahatça elde edilebiliyor olması ve birçok konuyu aydınlığa kavuşturması bu metotların bu tür lineer olmayan diferansiyel denklemler için önemli metotlar olduğunu göstermektedir.

Bu metotların birbirinden farkı ise Kudryashov metodu Homojen Denge metoduna göre daha kısa ve kolay bir metoddur. Problem hakkında hızlı bir şekilde çözüme gidilip yorum yapılmak istendiğinde Kudryashov metodunu kullanmak Homojen Denge metoduna göre daha uygundur. Fakat Kudryashov metodu Homojen Denge metodunun özel bir formudur. Homojen Denge metodunda alınan $\varphi' = a\varphi^2 + b\varphi + c$ Riccati denkleminde $a = 1, b = -1, c = 0$ alınırsa Homojen Denge metodu Kudryashov metoduna indirgenir. Bu nedenle Homojen Denge metodu, Kudryashov metoduna göre daha genel bir metot olduğu için Kudryashov metodundan daha çok çözüm sunmaktadır. Bu yüzden Kudryashov metodu ile çözülen her lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem aynı zamanda Homejen Denge metodu ile de çözüldüğü için Homojen Denge Metodu Kudryashov metoduna göre daha geniş ve güçlü bir metottur.

BÖLÜM IV

KULLANILAN METOTLARIN UYGULAMALARI

4.1 Kudryashov Metodu ile Çözülen Denklemler

4.1.1 Fisher denkleminin çözümleri

(2.4) ile verilen Fisher denklemine k, w sabitler, U bağımlı ve x, t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$U(x, t) = U(\eta), \quad \eta = kx + wt \quad (4.1)$$

dönüşümü yapılırsa, (2.4) denklemi,

$$\delta k^2 U'' - wU' + U(1-U) = 0 \quad (4.2)$$

denklemi elde edilir. (4.2) denkleminde lineer en yüksek mertebeden terim U'' ile lineer olmayan en yüksek dereceden U^2 terimler arasında dengeleme hesabı yapılırsa, dengeleme terimi $m + 2 = 2m$, $m = 2$ elde edilir.

O halde (4.2) denkleminin çözüm önerisi,

$$U(\eta) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \quad (4.3)$$

şeklindedir. Burada a_0, a_1, a_2 sabitler ve $\varphi' = \varphi^2 - \varphi$ denkleminin çözümü olan

$$\varphi = \frac{1}{1 + e^\eta}, \quad (4.3) \text{ denklemini sağlar. (4.3) denklemini ve bu denklemin türevleri}$$

alınarak (4.2) denkleminde yerlerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& -a_2^2\varphi^4 - 2a_2a_1\varphi^3 - 2a_2a_0\varphi^2 + 6a_2k^2\delta\varphi^4 - 10a_2k^2\delta\varphi^3 + 4a_2k^2\delta\varphi^2 + 2a_2w\varphi^3 - \\
& 2a_2\varphi^2w + a_2\varphi^2 - a_1^2\varphi^2 - 2a_2a_1\varphi + 2a_1k^2\delta\varphi^3 - 3a_1k^2\delta\varphi^2 + a_1k^2\delta\varphi + a_1k^2 \\
& -a_1\varphi w + a_1\varphi + a_0^2 + a_0 = 0
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlenirse $k_1\varphi^4 + k_2\varphi^3 + k_3\varphi^2 + k_4\varphi^1 + k_5\varphi^0 = 0$ şeklinde bir cebirsel denkleme dönüşür. Burada k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$k_1 : a_2(-a_2 + 6k^2\delta) = 0,$$

$$k_2 : 2(-a_2a_1 - 5a_2k^2\delta + a_2w + a_1k^2\delta) = 0,$$

$$k_3 : -2a_2a_0 + 4a_2k^2\delta + 2a_2w + a_2 - a_1^2 - 3a_1k^2\delta + a_1w = 0,$$

$$k_4 : a_1(-2a_0 + k^2\delta - w + 1) = 0,$$

$$k_5 : a_0(-a_0 + 1) = 0.$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlürse,

$$a_2 = 6\delta k^2, a_1 = \frac{6(-5k^2\delta + w)}{5}, w_{(1)} = 5k^2\delta, w_{(2)} = -5k^2\delta,$$

$$k_{(1)} = \sqrt{\frac{1}{6\delta}}, k_{(2)} = -\sqrt{\frac{1}{6\delta}},$$

$$k, w \text{ 'da yerlerine yazılırsa, } w_{(1)} = \frac{5}{6}, w_{(2)} = -\frac{5}{6} \text{ ve} \quad (4.4)$$

sonuçları elde edilir. (4.4) denklemleri (4.3) denklemde yerlerine yazılırsa,

$$U_{(1,2)}(\eta) = \left(\frac{e^\eta}{1+e^\eta} \right)^2, \quad \eta = k_{(1,2)} x + w_1 t, \quad (4.5)$$

$$U_{(3,4)}(\eta) = 1 - \left(\frac{1}{1+e^\eta} \right)^2, \quad \eta = k_{(3,4)} x + w_1 t, \quad (4.6)$$

$$U_{(5,6)}(\eta) = \left(\frac{1}{1+e^\eta} \right)^2, \quad \eta = k_{(1,2)} x + w_2 t, \quad (4.7)$$

$$U_{(3,4)}(\eta) = \left(\frac{1}{1+e^\eta} \right) \left(2 - \frac{1}{1+e^\eta} \right), \quad \eta = k_{(3,4)} x + w_2 t \quad (4.8)$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler (Kudryashov, N.A., 2012)' deki çözümlerle aynıdır.

4.1.2 Caudrey- Dodd-Gibbon (CDG) denkleminin çözümleri

(2.6) ile verilen CDG denklemine Kudryashov metodu uygulamak için, k, w sabitler, U bağımlı ve x, t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$U(x, t) = U(\eta), \quad \eta = kx + wt$$

dönüşümü altında (2.6) denklemini,

$$wU' + k^5 U^{(5)} + 30k^3 U U^{(3)} + 30k^3 U' U'' + 180k U^2 U' = 0 \quad (4.9)$$

adi diferansiyel denkleme dönüşür. (4.9) denklemini düzenlendiğinde,

$$wU' + k^5 U^{(5)} + 30k^3 (U'' U)' + 60k (U^3)' = 0 \quad (4.10)$$

denklemini elde edilir ve (4.10) denklemini bir kere integrallenirse, c integral sabiti olmak üzere,

$$wU' + k^5U^{(4)} + 30k^3U''U + 60kU^3 + c = 0 \quad (4.11)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir (Jiang ve Qinsheng Bi, 2010).

(4.11) denkleminde Kudryashov metodu gereği en yüksek dereceli lineer olmayan terimle en yüksek mertebeli lineer terim arasında dengeleme terim hesabı ile U^3 ve $U^{(4)}$ terimleri arasında karşılaştırma yapılırsa dengeleme terimin değeri $m+4=3m$, $m=2$ şeklinde elde edilir. m değeri 2 olduğu için çözüm önerisi,

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \quad (4.12)$$

şeklindedir. Burada $\varphi' = (\varphi^2 - \varphi)$ Bernoulli denkleminin çözümü, $\varphi = \frac{1}{1+e^\eta}$ biçimindedir. Burada φ , (4.12) denkleminin çözümünü sağlar. Metot gereği Bernoulli denkleminden faydalanarak (4.12) denklemi ve (4.12) denkleminin türevleri alınır ve (4.11) denkleminde yerlerine yazılarak düzenlenirse aşağıdaki,

$$\varphi^6 : 60a_2k(a_2^2 + 3a_2k^2 + 2k^4) = 0,$$

$$\varphi^5 : 12k(15a_2^2a_1 - 25a_2^2k^2 + 20a_2a_1k^2 - 28a_2k^4 + 2a_1k^4) = 0,$$

$$\varphi^4 : 30k(6a_2^2a_0 + 4a_2^2k^2 + 6a_2a_1^2 - 13a_2a_1k^2 + 6a_2a_0k^2 + 11a_2k^4 + 2a_1k^2 - 2a_1k^4) = 0,$$

$$\varphi^3 : 10k \begin{pmatrix} 36a_2a_1a_0 + 15a_2a_1k^2 - 30a_2a_0k^2 - 13a_2k^4 + 6a_1^3 - 9a_1^2k^2 \\ + 6a_1a_0k^2 + 5a_1k^4 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\varphi^2 : 180a_2a_0^2k + 120a_2a_0k^3 + 16a_2k^5 + a_2w + 180a_1^2a_0k + 30a_1^2k^3 - 90a_1a_0k^3 - 15a_1k^5 = 0,$$

$$\varphi^1 : a_1(180a_0^2k + 30a_0k^3 + k^5 + w) = 0,$$

$$\varphi^0 : 60a_0^3k + 30a_0w + c = 0.$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler bir takım hesap programları yardımıyla çözümlürse,

$$a_2 = -2k^2, a_1 = 2k^2, a_0 = \frac{-k^2}{6}, w = \frac{18c - 5k^7}{3k^2}, c = \frac{k^7}{9} \quad (4.13)$$

sonuçlarına ulaşılır. Buradan (4.13) denklemleri (4.12) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$U(\eta) = \frac{k^2(-12\varphi^2 + 12\varphi - 1)}{6}$$

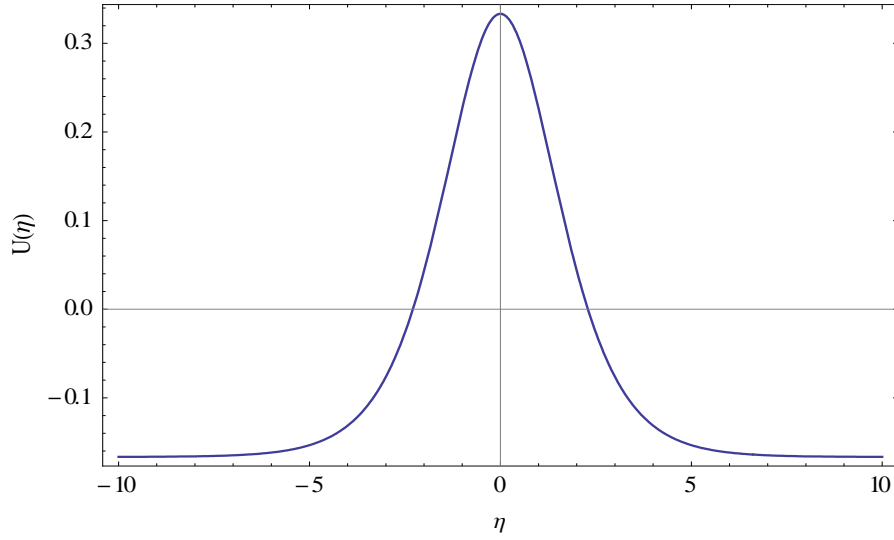
denklemini elde edilir. Burada Kudryashov metodu gereği $\varphi = \frac{1}{1 + e^\eta}$, $\eta = kx + wt$ olduğundan çözüm,

$$U(\eta) = \frac{k^2(-e^{2\eta} + 10e^\eta - 1)}{6(e^\eta + 2e^\eta + 1)} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) düzenlenirse,

$$U(\eta) = \frac{-k^2(-5 + \cosh \eta)}{6(1 + \cosh \eta)} \quad (4.15)$$

çözümü elde edilir. Bu çalışmada integral sabiti sıfırdan farklı alınmıştır. CDG denkleminin (4.15) numaralı çözümü literatürde bulunan (Wazwaz, 2008)'deki 26 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip bir çözümdür. Bu çözümün grafiği şekil 4.1. ile verilmiştir.



Şekil 4.1. CDG denkleminin (4.15) ile verilen çözümü ($k = 1$)

4.1.3 Sawada-Kotera (SK) denkleminin çözümleri

Bu bölümde SK denkleminin Kudryashov metodu ile çözümü gösterilmiştir.

(2.7) ile verilen SK denkleminde kudryashov metodu uygulamak için, k, w sabitler, U bağımlı ve x, t bağımsız değişkenler olmak üzere ,

$$U(x, t) = U(\eta), \quad \eta = kx + wt$$

dönüşümü ile (2.7) denklemini,

$$wU' + k^5U^{(5)} + 5k^3UU^{(3)} + 5k^3U'U'' + 5kU^2U' = 0 \quad (4.16)$$

denklemin halini alır. (4.16) denklemini bir kez integrallenir ve düzenlenirse, c keyfi integral sabiti olmak üzere,

$$wU' + k^5U^{(4)} + 5k^3U''U + \frac{5k}{3}U^3 + c = 0 \quad (4.17)$$

adi diferansiyel denkleme dönüşür (Shakeel ve Mohyud-Din, 2014).

(4.17) denkleminde Kudryashov metodu gereği en yüksek dereceli lineer olmayan terimle en yüksek mertebeli lineer terim arasında dengeleme terimi hesabı yapılırsa, U^3 ve $U^{(4)}$ terimlerinden dolayı dengeleme terim değeri $m+4=3m$, $m=2$ elde edilir. Bu değeri 2 olduğu için çözüm önerisi,

$$U = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \quad (4.18)$$

şeklinde dir. Burada (4.18) denkle mi ve bu denkleminin türevleri alınır ve (4.17) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\varphi^6 : \frac{5a_2k(a_2^2 + 18a_2k^2 + 72k^4)}{3} = 0,$$

$$\varphi^5 : k(5a_2^2a_1 - 50a_2^2k^2 + 40a_2a_1k^2 - 336a_2k^4 + 24a_1k^4) = 0,$$

$$\varphi^4 : 5k(a_2^2a_0 + 4a_2^2k^2 + a_2a_1^2 - 13a_2a_1k^2 + 6a_2a_0k^2 + 66a_2k^4 + 2a_1^2k^2 - 12a_1k^4) = 0,$$

$$\varphi^3 : 5k(6a_2a_1a_0 + 15a_2a_1k^2 - 30a_2a_0k^2 - 78a_2k^4 + a_1^3 - 9a_1^2k^2 + 6a_1a_0k^2 + 30a_1k^4) / 3 = 0,$$

$$\varphi^2 : 5a_2a_0^2k + 20a_2a_0k^3 + 16a_2k^5 + a_2w + 5a_0a_1^2k + 5a_0^2k^3 - 15a_1a_0k^3 - 15a_1k^5 = 0,$$

$$\varphi^1 : a_1(50a_0^2k + 5a_0k^3 + k^5 + w) = 0,$$

$$\varphi^0 : \frac{5a_0^3k + 3a_0w + 3c}{3} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde,

$$a_2 = -12k^2, a_1 = 12k^2, a_0 = -k^2, w = -k^5, c = \frac{2k^7}{3} \quad (4.19)$$

sonuçlarına ulaşılır. (4.19)'deki sonuçlar (4.18) denkleminde yerleştirilirse ve

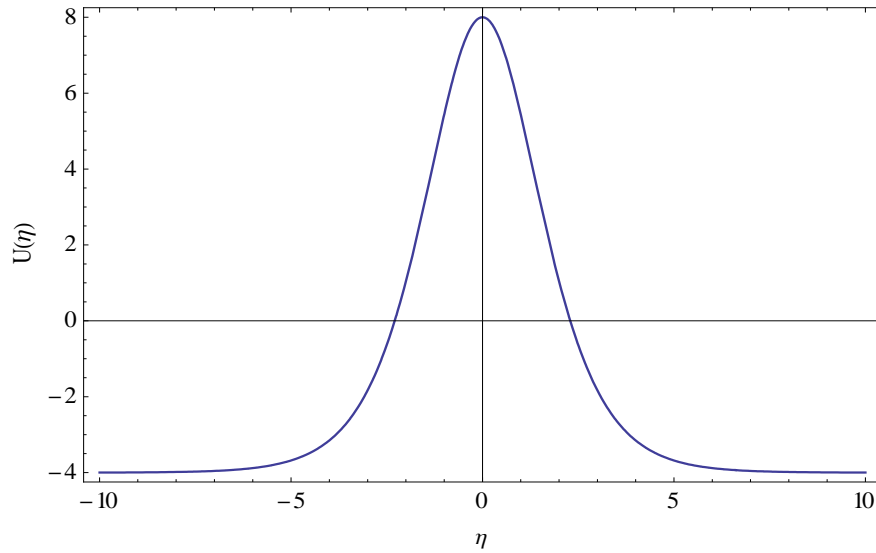
$$\varphi = \frac{1}{1+e^\eta} \text{ olduğundan,}$$

$$U(\eta) = \frac{k^2(-e^{2\eta} + 10e^\eta - 1)}{e^{2\eta} + 2e^\eta + 1} \quad (4.20)$$

çözümü elde edilir. (4.20) çözümü düzenlenirse,

$$U(\eta) = -\frac{k^2(-5 + \cosh \eta)}{1 + \cosh \eta} \quad (4.21)$$

çözümü elde edilir ve grafiği şekil 4.6 ile verilmiştir. Bu çalışmada integral sabiti sıfırdan farklı alınmıştır. SK denkleminde elde edilen (4.21) çözümü de literatürde bulunan (Shakeel ve Mohyud-dın, 2014)'deki 32 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip bir çözümdür. Bu çözümün grafiği şekil 4.2. ile verilmiştir. Bu soliton dalga çözümleri ise fiziksel açıdan analiz etmek için önemlidir.



Şekil 4.2. SK denkleminin (4.21) ile verilen çözümü ($k = 1$)

4.2 Homojen Denge Metodu ile Çözülen Denklemler

4.2.1 Benjamin-Bona-Mahoney (BBM) denkleminin çözümleri

(2.8) ile verilen BBM denklemine k, l, d sabitler, U bağımlı ve x, t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$U(x, y, t) = U(\eta), \quad \eta = kx + lt + d \quad (4.22)$$

dönüşümü yapılırsa, (2.8) denklemi,

$$k^2 IU''' - kU' - kUU' - IU' = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir (Abdel Rady vd., 2010). (4.23) denkleminde metot gereği U''' ile UU' terimleri arasında dengeleme hesabı yapılırsa, $m + 3 = m + 1 + m$, $m = 2$ bulunur. Dengeleme terimi olarak bilinen m değeri 2 olduğu için çözüm önerisi,

$$U(\eta) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \quad (4.24)$$

şeklinde olur. Burada,

$$\varphi' = a\varphi^2 + b\varphi + c \quad (4.25)$$

Riccatti denklemi ve a, b, c sabitler olmak üzere U ve türevleri alınır ve (4.23) denkleminde yerlerine yazılırsa, $k_1\varphi^5 + k_2\varphi^4 + k_3\varphi^3 + k_4\varphi^2 + k_5\varphi^1 + k_6\varphi^0 = 0$ şeklinde bir cebirsel denkleme dönüşür. Burada $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$k_1 : 2a_2ak(-a_2 + 12a^2kl) = 0,$$

$$k_2 : k(-2a_2^2b - 3a_2a_1a + 54a_2a^2bkl + 6a_1a^3kl) = 0,$$

$$k_3: -2a_2^2ck - 3a_2a_1bk - 2a_2a_0ak + 40a_2a^2ck^2l + 38a_2ab^2k^2l - 2a_2ak - 2a_2al - a_1^2ak + 12a_1a^2bk^2l = 0,$$

$$k_4: -3a_2a_0ck - 2a_2a_0bk + 52a_2abck^2l + 8a_2b^3k^2l - 2a_2bk - 2a_2bl - a_1^2bk - a_1a_0ak + 8a_1a^2ck^2l + 7a_1ab^2k^2l - a_1ak - a_1al = 0,$$

$$k_5: -2a_2a_0ck + 16a_2ac^2k^2l + 14a_2b^2ck^2l - 2a_2ck - 2a_2cl - a_1^2ck - a_1a_0bk + 8a_1abck^2l + a_1b^3k^2l - a_1bk - a_1bl = 0,$$

$$k_6: c(6a_2bck^2l - a_1a_0k + 2a_1ack^2l + a_1b^2k^2l - a_1k - a_1l) = 0.$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse,

$$a_2 = 12a^2kl, a_1 = 12abkl, a_0 = \frac{8ack^2l + b^2k^2l - k - l}{k} \quad (4.26)$$

şeklinde bilinmeyen sabitler elde edilir. (4.26) denklemleri (4.24)' de yerlerine yazılırsa;

$$U(\eta) = \frac{8ack^2l + b^2k^2l - k - l}{k} + 12abkl \tanh \eta + 12a^2kl \tanh^2 \eta \quad (4.27)$$

elde edilir. Burada $a = 1, b = -1, c = 0$ için (4.27) çözümü Kudryashov metodu ile aynıdır (Abdel Rady vd., 2010).

Durum 1: (4.25) ricatti denklemi için φ' ve φ^2 arasında dengeleme terimi hesaplanırsa, $m + 1 = 2m, m = 1$ şeklinde dengeleme terimi elde edilir. Buradan

dengeleme terimi kullanılarak ricatti denkleminin özel çözümü olan $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \eta$

denkleminde (4.25) denklemin çözüm önerisi,

$$\varphi = b_0 + b_1 \tanh(\eta) \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) denklemini yine bir takım hesap programları yardımıyla (4.25)' de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -b_1 \tanh(\eta)^2 k - 2b_1 b_0 \tanh(\eta) k - b_1 \tanh(\eta)^2 - b_1 \tanh(\eta) l + b_1 \\ -b_0^2 k - b_0 l - m = 0 \end{aligned}$$

şeklinde denklem elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$-b_1 (b_1 k + l) [\tanh(\eta)]^2 = 0,$$

$$b_1 (-2b_0 k - l) \tanh(\eta) = 0,$$

$$b_1 - b_0^2 k - b_0 l - m = 0.$$

denklem sistemi oluşur ve bu denklemlerin çözümleri,

$$b_1 = \frac{-1}{k}, \quad b_0 = \frac{-l}{2k}, \quad km = \frac{l^2 - 4}{4} \quad (4.29)$$

şeklinde elde edilir. (4.29) ve (4.26) denklemleri (4.24) ve (4.22) denklemlerinin içine yazılıp düzenlenirse çözüm,

$$U_1(\eta) = \frac{8ack^2 l - 2b^2 k^2 - k - l}{2k} + 6kl \tanh^2 \eta, \quad (4.30)$$

çözümü elde edilir (Abdel Rady, vd., 2010).

Benzer şekilde aynı işlemler $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \coth^i \eta$ denklemini içinde uygulanırsa,

$$U_2(\eta) = \frac{8ack^2 l - 2b^2 k^2 - k - l}{2k} + 6kl \coth^2 \eta \quad (4.31)$$

çözümü elde edilir. (4.30), (4.31) çözümleri (Abdel Rady vd., 2010) ile aynı çözümlerdir,

Durum 2: (4.25) Riccati denkleminde $a=1$, $b=0$ için $\varphi' = \varphi^2 + c$ olur. Buradan da,

$$\varphi = \begin{cases} -\sqrt{-c} \tanh(\sqrt{-c}\eta), & c < 0 \\ -\frac{1}{\eta}, & c = 0 \\ \sqrt{c} \tan(\sqrt{c}\eta), & c > 0 \end{cases}$$

çözümleri elde edilir. Buradan da $c < 0$ için,

$$U_3(\eta) = \frac{b^2k^2l + 8ack^2 - k - l}{2k} - 6abkl\sqrt{-c} \tanh(\sqrt{-c}\eta) - 6a^2klc \tanh^2(\sqrt{-c}\eta), \quad (4.32)$$

$c = 0$ için,

$$U_4(\eta) = \frac{b^2k^2l + 8ack^2 - k - l}{2k} - \frac{6abkl}{\eta} + \frac{6a^2kl}{\eta}, \quad (4.33)$$

ve $c > 0$ için,

$$U_5(\eta) = \frac{b^2k^2l + 8ack^2 - k - l}{2k} + 6abkl\sqrt{c} \tan(\sqrt{c}\eta) + 6a^2klc \tan^2(\sqrt{c}\eta). \quad (4.34)$$

çözümleri elde edilir (Abdel Rady, vd., 2010).

(4.30), (4.31), (4.32) çözümleri hiperbolik, (4.34) çözümü trigonometrik ve (4.33) çözümünde rasyonel tipten çözümdür. Bu çözümler (Abdel Rady vd., 2010)'deki çözümlerle aynıdır.

4.2.2 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) denkleminin çözümleri

(2.9) ile verilen (2+1) boyutlu denklemin çözümü daha önce Genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile elde edilmiştir (Kaplan vd., 2016). (2.9) ile verilen denklemin çözümü Genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile elde edildiği için burada Homojen Denge metodu ile çözümü gösterilmiştir. (2.9) ile verilen denklemin çözümü Homojen Denge metodu çözümleri ile ilk kez bu çalışmada elde edilmiştir.

(2.9) ile verilen Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff denklemine, λ sabit, U bağımlı ve x, y, t bağımsız değişkenler olmak üzere, $U(x, y, t) = U(\eta)$, $\eta = x + y + \lambda t$ dönüşümü yapılırsa (2.9) denkleminde,

$$U''' + 3(U')^2 + \lambda U'' = 0 \quad (4.35)$$

denklemini elde edilir. (4.35) denklemini bir kez integralenirse, c integral sabiti olmak üzere,

$$U'' + 3(U')^2 + \lambda U' + c = 0 \quad (4.36)$$

denklemini elde edilir. (4.36) denkleminde $U' = V$ alınır, (2.9) denklemini,

$$V'' + 3V^2 + \lambda V + c = 0 \quad (4.37)$$

diferansiyel denkleme dönüşür. (4.37) denkleminde metot gereği V'' ile V^2 terimleri arasında dengeleme hesabı yapılırsa, $m + 2 = 2m$, $m = 2$ bulunur. Dengeleme terimi 2 olduğu için çözüm önerisi,

$$V(\eta) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \quad (4.38)$$

şeklindedir. Burada,

$$\varphi' = k\varphi^2 + l\varphi + m \quad (4.39)$$

Riccatti denklemi ve k, l, m sabitler olmak üzere aşağıdaki,

$$V' = a_1\varphi' = a_1(k\varphi^2 + l\varphi + am)$$

$$V'' = 2a_1k\varphi\varphi' + a_1l\varphi' = 2a_1k\varphi(k\varphi^2 + l\varphi + am) + a_1l(k\varphi^2 + l\varphi + am)$$

$$= 2a_1k^2\varphi^3 + 2a_1kl\varphi^2 + 2a_1km\varphi + a_1kl\varphi^2 + a_1l^2\varphi + a_1lm$$

$$= 2a_1k^2\varphi^3 + 3a_1kl\varphi^2 + 2a_1km\varphi + a_1l^2\varphi + a_1lm$$

.

.

.

ve türevleri (4.37) denklemine yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & 3a_2^2\varphi^4 + 6a_2a_1\varphi^3 + 6a_2a_0\varphi^2 + 6a_2k^2\varphi^4 + 10a_2kl\varphi^3 + 8a_2km\varphi^2 + 4a_2l^2\varphi^2 + 6a_2lm\varphi + 2a_2m^2 \\ & + a_2\varphi^2\lambda + 3a_1^2\varphi^2 + 6a_1a_0\varphi + 2a_2k^2\varphi^3 + 3a_1kl\varphi^2 + 2a_1km\varphi + a_1l^2\varphi \\ & + a_1lm + a_1\varphi\lambda + 3a_0^2 + a_0\lambda + c = 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada φ ve kuvvetleri sıfır olmayacağından φ ve kuvvetlerinin katsayılarından oluşan,

$$\varphi^4 : 3a_2(a_2 + 2k^2) = 0,$$

$$\varphi^3 : 2(3a_2a_1 + 5a_2kl + a_1k^2) = 0,$$

$$\varphi^2 : 6a_2a_0 + 8a_2km + 4a_2l^2 + a_2\lambda + 3a_1^2 + 3a_1kl = 0,$$

$$\varphi^1 : 6a_2lm + 6a_1a_0 + 2a_1km + a_1l^2 + a_1\lambda = 0,$$

$$\varphi^0 : 2a_2m^2 + a_1lm + 3a_0^2 + a_0\lambda + c = 0,$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler bir takım hesap programları yardımıyla çözümlendikten sonra,

$$a_2 = -2k^2, a_1 = \frac{12k^2lm}{6a_0 + 2km + l^2 + \lambda}, a_0 = \frac{-8km - l^2 - \lambda}{6},$$

$$c = \frac{-16k^2m^2 + 8kl^2m - l^4 + \lambda^2}{12}. \quad (4.40)$$

denklemleri elde edilir.

Durum 1: (4.39) Riccati denklemi için tanım 2.4 den dolayı φ' ve φ^2 arasında dengeleme terimi hesaplanırsa dengeleme terimin değeri $m+1=2m$, $m=1$ elde edilir.

Buradan Riccati denkleminin özel çözümü olan $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \eta$ denkleminde (4.39) denklemin çözüm önerisi,

$$\varphi = b_0 + b_1 \tanh(\eta) \quad (4.41)$$

elde edilir. (4.41) denklemini (4.39)' de yerine yazılırsa,

$$-b_1 \tanh(\eta)^2 k - 2b_0 b_1 \tanh(\eta) k - b_1 \tanh(\eta)^2 - b_1 \tanh(\eta) l + b_1 - b_0^2 k - b_0 l - m = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde,

$$-b_1 (b_1 k + l) [\tanh(\eta)]^2 = 0,$$

$$b_1 (-2b_0 k - l) \tanh(\eta) = 0,$$

$$b_1 - b_0^2 k - b_0 l - m = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerin çözümleri,

$$b_1 = \frac{-1}{k}, \quad b_0 = \frac{-l}{2k}, \quad m = \frac{l^2 - 4}{4k} \quad (4.42)$$

şeklindedir. (4.40) ve (4.42) denklemleri (4.38) ve (4.41) denklemlerinin içine yazılıp düzenlenirse (4.37) denklemin çözümü,

$$V = \frac{-12 \tanh(\eta)^2 - \lambda + 8}{6} \quad (4.43)$$

şeklindedir. $U' = V$ alınır ve düzenlenirse, (2.9) denklemin çözümü,

$$U_1(\eta) = -\frac{1}{6}\eta(4 + \lambda) + 2 \tanh \eta \quad (4.44)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde aynı işlemler $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \coth^i \eta$ denklemi içinde yapılırsa,

$$V(\eta) = \frac{-12a_1 \coth(\eta)b - \lambda + 8}{6} \quad (4.45)$$

denklemini elde edilir. $U' = V$ alınır ve düzenlenirse, (2.9) denklemin çözümü,

$$U_2(\eta) = -\frac{1}{6}\eta(4 + \lambda) + 2 \coth \eta \quad (4.46)$$

şeklinde olur. (4.44) ve (4.46) çözümleri birbirleriyle benzer hiperbolik fonksiyonlar türünden elde edilmiştir ve bu çözümler (Başkonuş, vd., 2017)' deki (3.6) ile verilen çözümle uyumlu çözümlerdir.

Durum 2: (4.39) Riccati denkleminde $k = 1, l = 0$ için $\varphi' = \varphi^2 + m$ olur. Buradan da,

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} -\sqrt{-m} \tanh(\sqrt{-m}\eta), & m < 0 \\ -\frac{1}{\eta} & m = 0 \\ \sqrt{m} \tan(\sqrt{m}\eta), & m > 0 \end{cases}$$

çözümleri elde edilir. Buradan da (2.9) denklemin çözümü,

$$m < 0 \text{ için, } V(\eta) = \frac{12 \tanh(\sqrt{-m}\eta)^2 m - 8m - \lambda}{6}, \quad U' = V \text{ alınır düzenlenirse,}$$

$$U_3(\eta) = \frac{1}{6} \eta (4m + \lambda) + 2 \tanh \eta \quad (4.47)$$

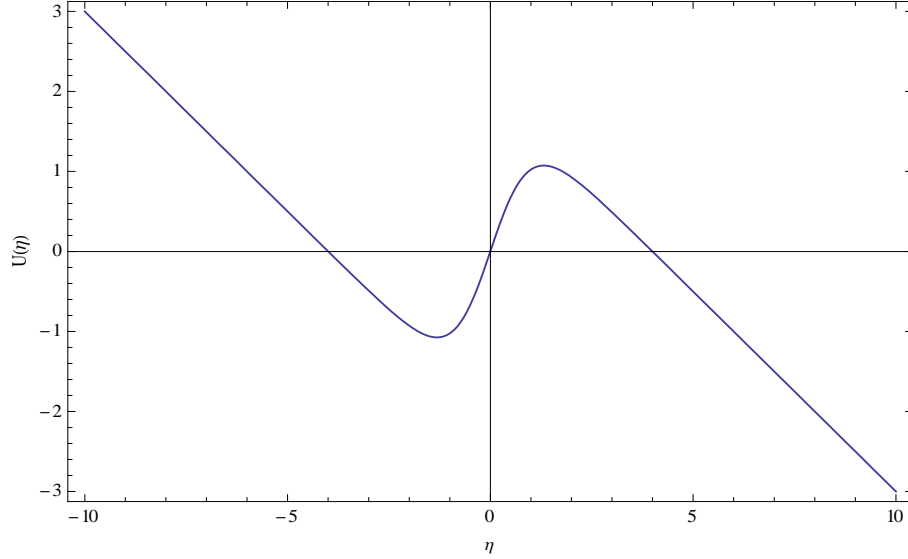
$$m = 0 \text{ için, } V(\eta) = \frac{-\eta^2 \lambda - 12}{6\eta^2}, \quad U' = V \text{ alınır düzenlenirse,}$$

$$U_4(\eta) = \frac{2}{\eta} - \frac{\eta \lambda}{6} \quad (4.48)$$

$$\text{ve } m > 0 \text{ için, } V(\eta) = \frac{-12 \tan(\sqrt{m}\eta)^2 m - 8m - \lambda}{6} \quad U' = V \text{ alınır ve düzenlenirse,}$$

$$U_5(\eta) = -\frac{1}{6} \eta (4m + \lambda) + 2 \tanh \eta \quad (4.49)$$

şeklinde çözümleri elde edilir. Burada (4.47) ve (4.49) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar türünden aynı çözümlerdir ve grafikleri şekil 4.3 ile gösterilmiştir. (4.46) çözümü ise hiperbolik tipten (4.44) çözümünü ile uyumlu çözümdür. (4.47), (4.49) çözümleri $m=1$ için (4.44) çözümüne dönüşür. (4.47), (4.49) çözümleri (Başkonuş, vd., 2017)'deki (3.6) ile verilen çözümle uyumlu çözümlerdir ve (4.47), (4.49) çözümleri şekil 4.3'teki grafikte (Başkonuş, vd., 2017)'deki Fig.1 ile grafiği aynıdır.



Şekil 4.3. CBS denkleminin (4.44), (4.47) ve (4.49) çözümleri ($m = 1, \lambda = -1$)

4.3 Kudryashov Metodu ve Homojen Denge Metodu ile Çözülen Denklemler

4.3.1 Boiti-Leon-Manna-Pempinelli (BLMP) denkleminin çözümleri

(2.10) ile verilen (2+1) boyutta BLMP denkleminin KdV denkleminin farklı bir formudur (Boiti a, 1986, Boiti b, 1987). BLMP denkleminin tam çözümleri farklı metotlar kullanılarak daha önce bir çok bilim insanı tarafından incelenmiştir (Zamiri, 2015; Arbadi vd., 2016). Bu tez kapsamında ise BLMP denkleminin Homojen Denge metodu ve Kudryashov metodu ile farklı çözümleri elde edilmiş ve literatür karşılaştırması yapılmıştır.

(2.10) ile verilen BLMP denkleminde k_1, k_2, V_p sabitler, U bağımlı ve x, y, t bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$U(x, y, t) = U(\eta), \quad \eta = k_1 x + k_2 y + V_p t \quad (4.50)$$

dönüşümü yapılırsa, (2.10) denkleminin

$$V_p U'' + k_1^3 U^{(4)} - 6k_1^2 U'' U' = 0 \quad (4.51)$$

denklemini elde edilir. (4.51) denklemini bir kez integralenirse c keyfi integral sabiti olmak üzere,

$$V_p U' + k_1^3 U''' - 3k_1^2 (U')^2 + c = 0 \quad (4.52)$$

denklemini elde edilir. $U' = W$ alınır ve denklem (4.52) de yerine yazılırsa,

$$V_p W + k_1^3 W''' - 3k_1^2 W^2 + c = 0 \quad (4.53)$$

adi diferansiyel denklem elde edilir (Esen, 2018).

4.3.1.1 BLMP denkleminin Kudryashov metodu ile tam çözümleri

(4.53) ile verilen BLMP denkleminde lineer olmayan en yüksek dereceli W^2 terimi ile en yüksek mertebeden lineer olan W''' terimleri arasında dengeleme terimi için karşılaştırma yapılırsa. Dengeleme terimi $m=2$ olur. Bu yüzden (4.53)'ün çözüm önerisi,

$$W = a_0 + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 \quad (4.54)$$

şeklinde. Burada a_0, a_1, a_2 sabitler ve $\varphi' = \varphi^2 - \varphi$ denkleminin çözümü olan

$$\varphi = \frac{1}{1 + e^\eta}, \quad (4.54) \text{ denklemini sağlar. (4.54) denklemini ve bu denkleminin türevleri}$$

alınarak (4.53) de yerlerine yazılırsa,

$$\varphi^4 : 3a_2 k_1^2 (-a_2 + 2k_1) = 0,$$

$$\varphi^3 : 2k_1^2 (-3a_1 a_2 + a_1 k_1 - 5a_2 k_1) = 0,$$

$$\varphi^2 : V_p a_2 - 6a_0 a_2 k_1^2 - 3a_1^2 k_1^2 - 3a_1 k_1^3 + 4a_2 k_1^3 = 0,$$

$$\varphi^1 : a_1(V_p - 6a_0k_1^2 + k_1^3) = 0,$$

$$\varphi^0 : V_p a_0 - 3a_0^2 k_1^2 + c = 0.$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler çözülürse,

$$a_2 = 2k_1, a_1 = \frac{-5a_2 k_1}{3a_2 - k_1}, a_0 = \frac{V_p + k_1^3}{6k_1^2}, c = \frac{-V_p^2 + k_1^6}{12k_1^2}. \quad (4.55)$$

sonuçları elde edilir. (4.55) denklemleri (4.54)' de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$W = \frac{V_p + 12k_1^3 \varphi^2 - 12k_1^3 \varphi + k_1^3}{6k_1^2}$$

elde edilir. Kudryashov metodu gereği,

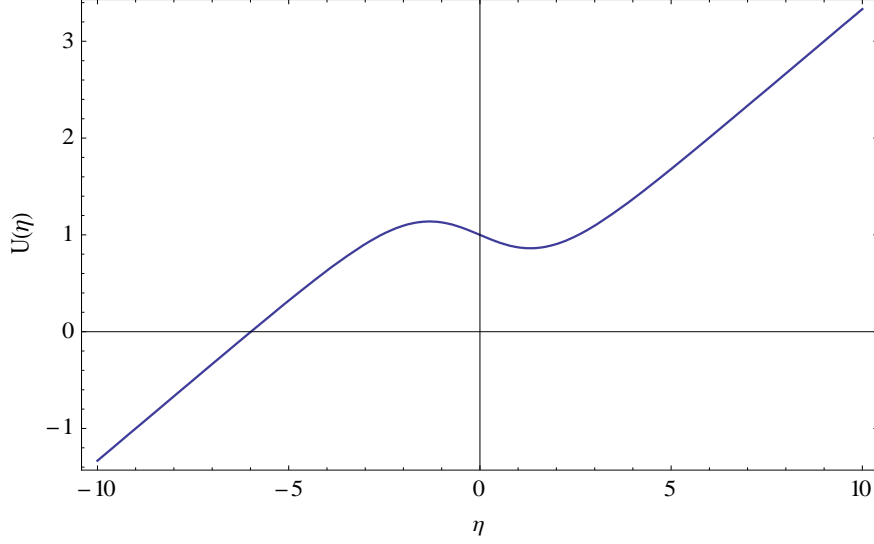
$$\varphi' = \varphi^2 - \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{1 + e^\eta} \quad \text{olduğundan ve } U' = W \text{ kabul edildiğinden}$$

$$U(\eta) = \frac{2k_1}{1 + e^\eta} + \frac{k_1 \eta}{6} + \frac{V_p \eta}{6k_1^2}$$

elde edilir. En son olarak düzenlenirse,

$$U(\eta) = \frac{k\eta}{6} + \frac{V_p \eta}{6k^2} + \frac{2k}{1 + \cosh(\eta) + \sinh(\eta)} \quad (4.56)$$

sonucuna ulaşılır. (4.56) çözümün grafiği şekil 4.4 ile verilmiştir.



Şekil 4.4. BLMP denkleminin (4.56) ile verilen çözümü ($k = 1, V_p = 1$)

(4.56) çözümü (Esen,2018)' deki (4.82b) çözüm ile uyumlu hiperbolik tipten bir çözümdür ve grafi de (Esen,2018)' deki Şekil 4.3 ile uyumlu grafik elde edilmiştir.

4.3.1.2 BLMP denkleminin Homojen Denge metodu ile tam çözümleri

(4.53) ile verilen BLMP denkleminde lineer olmayan en yüksek dereceli W^2 terimi ile en yüksek mertebeden lineer olan W terimleri arasında dengeleme terimi hesabı yapılırsa, $m + 2 = 2m$, $m = 2$ elde edilir. Dengeleme terimin değeri $m = 2$ olduğu için (2.10) denklemin çözüm önerisi,

$$W = d_0 + d_1\varphi + d_2\varphi^2 \quad (4.57)$$

şeklindedir. Burada d_0, d_1, d_2 sabitlerdir. Metot gereği, Riccati denklemi,

$$\varphi' = h_2\varphi^2 + h_1\varphi + h_0 \quad (4.58)$$

olmak üzere, (4.57) denklem ve türevleri alınıp (4.53) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\varphi^4 : -3d_2^2(d_2 - 2h_2^2k_1) = 0,$$

$$\varphi^3 : 2k_1^2(-3d_1d_2 + 5d_2h_1h_2k_1 + d_1h_2^2k_1) = 0,$$

$$\varphi^2 : -3d_1^2k_1^2 + 3d_1h_1h_2k_1^3 + d_2(6d_0k_1^2 + 4h_1k_1^3 + 8h_0h_2k_1^3 + V_p) = 0,$$

$$\varphi^1 : -6d_0d_1k_1^2 + 6d_2h_0h_1k_1^3 + d_1(h_1^2k_1^3 + 2h_0h_2k_1^3 + V_p) = 0,$$

$$\varphi^0 : c - 3d_0^2k_1^2 + h_0(2d_2h_0 + d_1h_1)k_1^3 + d_0V_p = 0.$$

şeklinde denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse,

$$d_0 = \frac{h_1^2k_1^3 + 8h_0h_2k_1^3 + V_p}{6k_1^2}, \quad d_1 = 2h_1h_2k_1, \quad d_2 = 2h_2^2k_1,$$

$$c = \frac{h_1^4k_1^6 - 8h_0h_1^2h_2k_1^6 + 16h_0^2h_2^2k_1^6 - V_p^2}{12k_1^2} \quad (4.59)$$

çözümleri elde edilir. (4.59) çözümleri (4.57) de yerlerine yazılırsa;

$$W = \frac{12h_2^2k_1^3\varphi^2 + 12h_2h_1k_1^3\varphi + 8h_2h_0k_1^3 + h_1^2k_1^3 + V_p}{6k_1^2}$$

elde edilir. Burada özel olarak $h_2 = 1$, $h_1 = -1$, $h_0 = 0$ alınırsa

$$W = \frac{V_p + 12k_1^3\varphi^2 - 12k_1^3\varphi + k_1^3}{6k_1^2}$$

elde edilir. $U' = W$ kabul edildiğinden çözüm

$$U(\eta) = \frac{k\eta}{6} + \frac{V_p\eta}{6k^2} + \frac{2k}{1 + \cosh(\eta) + \sinh(\eta)} \quad (4.60)$$

elde edilir. Bu çözümde Kudryashov metodu ile elde edilen (4.56) çözümü ile aynıdır.

Durum 1: (4.58) Riccati denklemi için φ' ve φ^2 arasında dengeleme hesabı yapılırsa, dengeleme terim değeri, $m+1=2m$, $m=1$ şeklinde olur. Buradan Riccati denkleminin özel çözümü olan $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \eta$ denkleminde (4.58) denklemin çözüm önerisi,

$$\varphi = b_0 + b_1 \tanh(\eta) \quad (4.61)$$

elde edilir. (4.61) denklemini (4.58)'de yerine yazılırsa,

$$-b_1(1+h_2b_1)[\tanh(\eta)]^2 = 0,$$

$$-b_1(h_1+2h_2b_0)\tanh(\eta) = 0,$$

$$-h_1b_0 - b_0^2h_2 + b_0 + h_0 = 0.$$

denklemler elde edilir. Daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$\varphi = -\frac{1}{2h_2}(h_1+2\tanh(\eta)), \quad h_2h_0 = \frac{h_1^2}{4} - 1.$$

denklemleri elde edilir. (4.58) ve (4.61) denklemleri (4.53)'de yerine yazılırsa,

$$W = -\frac{4}{3}k_1 + \frac{V_p}{6k_1^2} + 2k_1 \tanh^2 \eta$$

elde edilir. Burada $U'=W$ tekrardan düzenlenirse, (2.10) ile verilen BLMP denkleminin çözümü,

$$U(\eta) = \frac{(4k_1^3 + V_p)}{6k_1^2} \eta - 2k_1 \tanh \eta \quad (4.62)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta = k_1 x + k_2 y + V_p t$ 'dir.

Benzer şekilde $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \coth^i \eta$ denklemi içinde $U(\eta) = U(x, y, t)$ olmak üzere aynı işlemler yapıldığında (2.10) ile verilen BLMP denkleminin çözümü,

$$U(\eta) = \frac{(4k_1^3 + V_p)}{6k_1^2} \eta - 2k_1 \coth \eta \quad (4.63)$$

şeklinde elde edilir. (4.62), (4.63) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar cinsinden (Esen, 2018)'deki (4.72b) çözümü ile uyumlu çözümlerdir.

Durum 2: (4.58) Riccati denkleminde $h_2 = 1$, $h_1 = 0$ için (4.58) Riccati denklemi $\varphi' = \varphi^2 + h_0$ biçiminde olur. Buradan da,

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} -\sqrt{-h_0} \tanh(\sqrt{-h_0} \eta), & h_0 < 0 \\ -\frac{1}{\eta} & h_0 = 0 \\ \sqrt{h_0} \tan(\sqrt{h_0} \eta), & h_0 > 0 \end{cases}$$

çözümleri elde edilir. Buradan da,

$h_0 < 0$ için ve $\varphi(\eta) = -\sqrt{-h_0} \tanh(\sqrt{-h_0} \eta)$ için,

$$W = \frac{4k_1 h_0}{3} + \frac{V_p}{6k_1^2} - 2h_0 k_1 \tanh^2 \sqrt{-h_0} \eta$$

elde edilir. $U' = W$ ve $U(\eta) = U(x, y, t)$ kullanılırsa,

$$U(\eta) = \frac{(-4k_1^3 h_0 + Vp)\eta}{6k_1^2} - \sqrt{-h_0 k_1} \tanh(\sqrt{-h_0} \eta) \quad (4.64)$$

çözümü elde edilir. (4.64) çözümü (4.62) ve (4.63) çözümleri ile uyumlu hiperbolik tipten çözümlerdir.

$$h_0 = 0, \quad \varphi(\eta) = -\frac{1}{\eta} \text{ için,}$$

$$W = \frac{V_p}{6k_1^2} - \frac{2k_1}{\eta^2}, \text{ dir. Burada } U' = W \text{ 'dan,}$$

$$U(\eta) = -\frac{2k_1}{\eta} + \frac{V_p \eta}{6k_1^2} \quad (4.65)$$

çözümü elde edilir (4.65) çözümü rasyonel tipten bir çözümdür ve (Esen, 2018)' de (4.77) numaralı çözümle aynıdır.

$$h_0 > 0 \text{ için, ve } \varphi(\eta) = \sqrt{h_0} \tan(\sqrt{h_0} \eta) \text{ için de,}$$

$$W = \frac{4k_1 h_0}{3} + \frac{V_p}{6k_1^2} + 2h_0 k_1 \tan^2 \sqrt{h_0} \eta, \text{ dir.}$$

Buradan da $U' = W$ ve $U(\eta) = U(x, y, t)$ olmak üzere,

$$U(\eta) = \frac{(-4k_1^3 h_0 + Vp)\eta}{6k_1^2} + \sqrt{h_0 k_1} \tan(\sqrt{h_0} \eta) \quad (4.66)$$

çözümüne ulaşılır. (4.62), (4.63), (4.64) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar cinsinden birbirleriyle aynı ve (Esen,2018)'de (4.72b) ile verilen çözümle uyumludur. (4.65) çözümü rasyonel fonksiyonlar cinsindedir ve (Esen,2018)'de (4.77) nolu çözümle

aynıdır. (4.66) ile verilen çözüm ise trigonometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiştir ve (Esen, 2018)'de (4.86) ile verilen trigonometrik çözümle uyumludur.

4.3.2 Gardner denkleminin tam çözümleri

(2.11) ile verilen Gardner denklemi (Dağhan ve Dönmez, 2016) tarafından direkt integrasyon, $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right), \left(\frac{1}{G}\right)$ metodu ile çözümü elde edilmiştir. Bu tezde elde edilen bu çözümlerden farklı olarak Kudryashov ve Homojen Denge metotları uygulanarak tam çözümleri elde edilmiştir.

(2.11) ile verilen Gardner denklemine

$$U(\eta) = U(x, t), \eta = x - V_p t \quad (4.67)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$-V_p U' + aUU' + bU^2U' + pU''' = 0 \quad (4.68)$$

denklemini elde edilir. Burada $U = U(\eta)$, $U' = \frac{dU}{d\eta}$ 'dir.

(4.68) ile verilen denklem integrallenebilir ve bir kez integralenirse c keyfi integrasyon sabiti olmak üzere,

$$pU'' - V_p U + \frac{a}{2}U^2 + \frac{b}{3}U^3 + c = 0 \quad (4.69)$$

formunda adi diferansiyel denkleme dönüşür (Dağhan ve Dönmez, 2016).

4.3.2.1 Gardner denkleminin Kudryashov metodu ile tam çözümleri

(4.69) denkleminde dengeleme terimi hesabı yapılırsa metot gereği $U = \sum_{n=0}^m a_n \varphi^n$ çözüm

önerisinden

$$U' = \sum_{n=0}^m a_n n \varphi^{n-1} \varphi' = \sum_{n=0}^m a_n n \varphi^{n+1} (\varphi^2 - \varphi)$$

$$U'' = \sum_{n=0}^m a_n n [(n+1)\varphi^{n+2} - (2n+1)\varphi^{n+1} + n\varphi^n]$$

olmak üzere burada en yüksek mertebeli lineer terimin derecesi $(m+2)$ olur. Lineer

olmayan terim için ise $U = \sum_{n=0}^m a_n \varphi^n$ çözüm önerisinden,

$$U^3 = \sum_{n=0}^m a_n^3 \varphi^{3n} + \dots$$

şeklinde bulunur. Bu yüzden en yüksek dereceli lineer olmayan terim $a_n^3 \varphi^{3m}$ 'dir ve derecesi $3m$ 'dir. Buradan da metot gereği dengeleme terimi hesabı ile $m+2 = 3m$, $1 = m$ elde edilir. O halde dengeleme terimi $m=1$ olduğu için (2.11) denklemin çözümü

$$U = a_0 + a_1 \varphi \tag{4.70}$$

formunda aranır. Burada (4.70) denklemini ve denklemin türevleri (4.69) denkleminde yerlerine yazılır ve düzenlenirse,

$$2a_1^3 b \varphi^3 + 6a_1^2 a_o b \varphi^2 + 3a_1^2 a \varphi^2 + 6a_1 a_o^2 b \varphi + 6a_1 a_o a \varphi + 12a_1^2 a_o b \varphi^2 - 18a_1 p \varphi^2 + 6a_1 p \varphi - 6a_1 \varphi V_p + 2a_0^3 b + 3a_0^2 + 6a_0 V_p + 6c = 0$$

şeklinde denklemi elde edilir. Bu denklmde φ ve φ 'nın kuvvetleri sıfır olmayacağından φ ve φ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve bu şekilde aşağıdaki,

$$\varphi^3 : 2a_1(a_1^2b + 6b) = 0$$

$$\varphi^2 : 3a_1(2a_1a_0b + a_1a - 6p) = 0$$

$$\varphi^1 : 6a_1(a_0^2b + a_0a + p - V_p) = 0$$

$$\varphi^0 : 2a_0^3b + 3a_0^2a - 6a_0V_p + 6c = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse,

$$a_0 = \frac{-(\sqrt{\frac{-6p}{b}b + a})}{2b}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{-6p}{b}}, \quad V_p = \frac{-a^2 - 2bp}{4b},$$

$$c = \frac{a(a^2 + 6bp)}{24b^2}. \quad (4.71a)$$

ve

$$p = \frac{-a_1^2b}{6}, \quad a_1 = \frac{-2a_0b - a}{b}, \quad V_p = \frac{2a_0^2b^2 + 2a_0b - a^2}{6b},$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{a^4 - 24ab^2c - a^2}}{2ab} \quad (4.71b)$$

şeklinde çözümlere ulaşılır. Bulunan bu çözümlerden (4.71a) denklemleri, (4.70) denkleminde yerleştirilirse,

$$U(\eta) = \frac{-e^\eta \sqrt{\frac{-6p}{b}} b + \sqrt{\frac{-6p}{b}} b - e^\eta a - a}{2b(e^\eta + 1)}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçlar düzenlenirse hiperbolik tipten olan,

$$U(\eta) = -\frac{1}{2b} \left(a + \sqrt{-6pb} \tanh \frac{\eta}{2} \right) \quad (4.72)$$

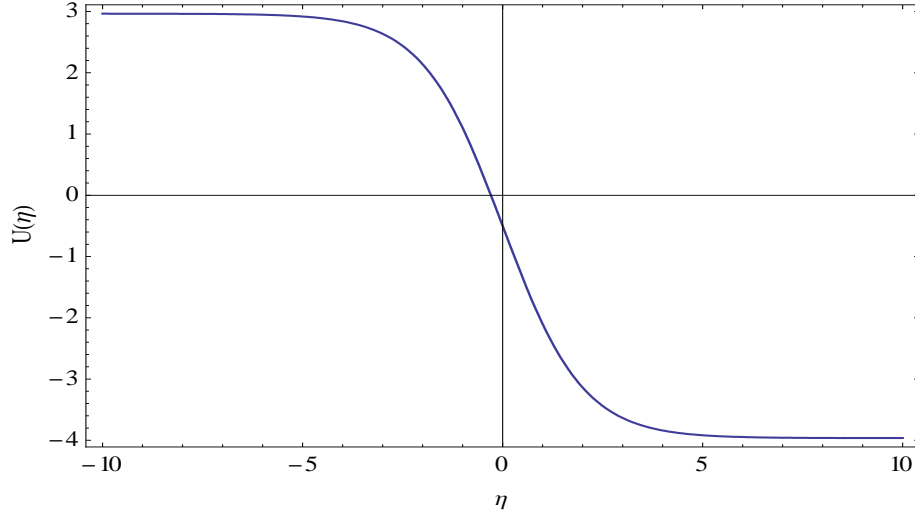
denklemini elde edilir. (4.72) denklemini, (Wazwaz, 2007)'deki 16 numaralı çözümlerle benzer çözümdür ve aynı şekilde (4.71b) denklemleri, (4.70) denkleminde yerleştirilirse,

$$U(\eta) = \frac{-2\sqrt{a^4 - 24ab^2c} \frac{1}{1+e^\eta} + \sqrt{a^4 - 24ab^2c} - a^2}{2ab}$$

denklemini elde edilir. Burada bu çözüm düzenlendiğinde ise,

$$U(\eta) = -\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - 24ab^2c} \tanh \left(\frac{\eta}{2} \right)}{2ab} \quad (4.73)$$

şeklinde çözüm elde edilir. (4.73) çözümü (4.72) çözümü ile hiperbolik tipten benzer bir çözümdür ve (4.72)'nin grafiği şekil 4.5 ile verilmiştir.



Şekil 4.5 Gardner denkleminin (4.72) ile verilen çözümün grafi
($a = 0.1, b = 1, p = -1$)

4.3.2.2 Gardner Denkleminin Homojen Denge metodu ile tam çözümleri

(2.11) ile verilen Gardner denkleminin (4.7) dönüşümü uygulanmasıyla ve gerekli integraller alınmasıyla elde edilen (4.69) formunda elde edilen adi diferansiyel denkleminin metot gereği dengeleme hesabı yapıldığında,

$U = \sum_{n=0}^m a_n \varphi^n$ çözüm önerisi elde edilir. Bu çözüm önerisi ve türevleri alındığında

$$U' = \sum_{n=0}^m a_n n \varphi^{n-1} \varphi' = \sum_{n=0}^m a_n n \varphi^{n+1} (\varphi^{n+1} - \varphi^n)$$

$$U'' = \sum_{n=0}^m a_n n \left[(n+1) \varphi^{n+2} - (2n+1) \varphi^{n+1} + n \varphi^n \right]$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden en yüksek mertebeli lineer terimin derecesi

$m+2$ şeklinde olur. Lineer olmayan terim ise yine $U = \sum_{n=0}^m a_n \varphi^n$ çözüm önerisinden

$$U^3 = \sum_{n=0}^m a_n^3 \varphi^{3n} + \dots$$

denkleminde en yüksek dereceli lineer olmayan terim $a_n^3 \varphi^{3m}$ olduğundan en yüksek dereceli lineer olmayan terimin derecesi $3m$ 'dir. Bu yüzden metot gereği dengeleme hesabı ile $m + 2 = 3m$, $1 = m$ eşitliği elde edilir.

Dolayısıyla dengeleme terimi 1 olduğu için yine çözüm önerisi (4.70) formunda aranır. (4.70) denklemindeki φ ,

$$\varphi' = k\varphi^2 + l\varphi + m \quad (4.74)$$

Riccatti denkleminin çözümüdür. Burada k, l, m sabitlerdir. (4.70) denklemi ve türevleri alınır ve (4.69) denkleminde kullanılırsa,

$$U' = a_1 \varphi' = a_1 (k\varphi^2 + l\varphi + m)$$

$$U'' = 2a_1 k \varphi \varphi' + a_1 l \varphi' = 2a_1 k \varphi (k\varphi^2 + l\varphi + m) + a_1 l (k\varphi^2 + l\varphi + m)$$

$$= 2a_1 k^2 \varphi^3 + 2a_1 k l \varphi^2 + 2a_1 k m \varphi + a_1 k l \varphi^2 + a_1 l^2 \varphi + a_1 l m$$

$$= 2a_1 k^2 \varphi^3 + 3a_1 k l \varphi^2 + 2a_1 k m \varphi + a_1 l^2 \varphi + a_1 l m$$

.

.

.

şeklinde olur. Buradan da U ve türevleri (4.69) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$(2a_1^3 b \varphi^3 + 6a_1^2 a_0 b \varphi^2 + 3a_1^2 a \varphi^2 + 6a_0^2 a_1 b \varphi + 6a_0 a_1 a \varphi + 12a_1 k^2 p \varphi^3 + 18a_1 k l p \varphi^2 + 12a_1 k m p \varphi + 6a_1 l^2 p \varphi + 6a_1 l m p - 6a_1 V_p \varphi + 2a_0^3 b + 3a_0^2 a - 6a_0 V_p + 6c) / 6 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde φ ve kuvvetleri sıfır olmayacağından φ ve kuvvetlerinin katsayılarından oluşan

$$\varphi^3 : \left(\frac{a_1(a_1^2 b + 6k^2 p)}{3} \right) = 0,$$

$$\varphi^2 : \left(\frac{a_1(2a_1 a_0 b + a_1 a + 6klp)}{2} \right) = 0,$$

$$\varphi^1 : (a_1 a_0^2 + a_0 a + 2kmp + l^2 p - V_p) = 0,$$

$$\varphi^0 : \left(\frac{6a_1 lmp + 2a_0^3 b + 3a_0^3 b + 3a_0^2 a - 6a_0 V_p + 6c}{6} \right) = 0.$$

cebirsel denklemleri yukarıdaki gibi sıfırdır. Bu cebirsel denklemler çözüldüğünde ise,

$$p = \frac{-a_1^2 b}{6k^2}, \quad a_0 = \frac{a_1 bl - ak}{2bk}, \quad V_p = \frac{-4a_1^2 b^2 km + a_1^2 b^2 l^2 - 3a^2 k^2}{12bk^2},$$

$$c = \frac{a(4a_1^2 b^2 km - a_1^2 b^2 l^2 + a^2 k^2)}{24b^2 k^2} \quad (4.75)$$

şeklinde denklemler bulunur. Burada $k = 1, l = -1, m = 0$ için Kudrasov metoduyla elde edilen (4.72) çözümü elde edilmektedir.

Durum 1: (4.74) Riccati denklemleri için φ' ve φ^2 arasında dengeleme hesabı yapılırsa, $m + 1 = 2m, m = 1$ elde edilir. Burada Riccati denkleminin özel çözümü olan

$$\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \tanh^i \eta \text{ denkleminde (4.74) denklemin çözüm önerisi}$$

$$\varphi = b_0 + b_1 \tanh(\eta) \quad (4.76)$$

biçimindedir. (4.76) denklemi (4.74) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & -b_1 \tanh(\eta)^2 k - 2b_1 b_0 \tanh(\eta) k - b_1 \tanh(\eta)^2 - b_1 \tanh(\eta) l + b_1 \\ & -b_0^2 k - b_0 l - m = 0 \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse aşağıdaki,

$$-b_1 (b_1 k + l) [\tanh(\eta)]^2 = 0,$$

$$b_1 (-2b_0 k - l) \tanh(\eta) = 0,$$

$$b_1 - b_0^2 k - b_0 l - m = 0$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler çözümlendiğinde,

$$b_1 = \frac{-1}{k}, \quad b_0 = \frac{-l}{2k}, \quad km = \frac{l^2 - 4}{4} \quad (4.72)$$

sonuçları elde edilir. (4.75) ve (4.77) denklemleri (4.70) ve (4.76) denklemlerinin içine yazılır ve düzenlenirse, aşağıdaki,

$$U_1(\eta) = \frac{-2a_1 \tanh(\eta) b - ak}{2bk} \quad (4.78)$$

çözümüne ulaşılır.

Aynı işlemler $\varphi = \sum_{i=0}^m b_i \coth^i \eta$ denklemi içinde uygulandığı takdirde,

$$U_2(\eta) = \frac{-2a_1 \coth(\eta) b - ak}{2bk} \quad (4.79)$$

sonucuna ulaşılır. (4.78) ve (4.79) çözümleri (Wazwaz, 2007)' deki 16 numaralı çözümle benzer hiperbolik tipten çözümlerdir.

Durum 2: (4.74) Riccati denklemini için $k = 1, l = 0$ eşitliği kullanılır ise, $\varphi' = \varphi^2 + m$ şeklindedir. Bu nedenle de bu denklemin çözümü olan φ ,

$$\varphi = \begin{cases} -\sqrt{-m} \tanh(\sqrt{-m}\eta), & m < 0 \\ -\frac{1}{\eta} & m = 0 \\ \sqrt{m} \tan(\sqrt{m}\eta), & m > 0 \end{cases}$$

şeklinde çözümleri elde edilir. Bu aralık incelendiğinde,

$m < 0$ için,

$$U_3(\eta) = \frac{-2\sqrt{-m}a_1 \tanh(\sqrt{-m}\eta) b - a}{2b}, \quad (4.80)$$

$m = 0$ için,

$$U_4(\eta) = \frac{-2a_1 b - a\eta}{2b\eta}, \quad (4.81)$$

ve $m > 0$ için

$$U_5(\eta) = \frac{2\sqrt{m}a_1 \tan(\sqrt{m}\eta) b - a}{2b} \quad (4.82)$$

çözümleri elde edilir. (4.80) ile verilen denklem (4.78) ve (4.79) denklemleri ile benzer hiperbolik tipten çözümlerdir. (4.81) rasyonel tipten literatürle uyumlu çözümdür ve (4.82) trigonometrik tipten çözümü ise literatürde bulunan çözümlerden farklı çözümlerdir.

Durum 3: Benzer şekilde (2.11) ile verilen Gardner denkleminin Homojen Denge metodu ile bir diğer çözümü için, (4.74) ile verilen Riccati denkleminde farklı olarak,

$$\varphi' = k(1 - \varphi^2) \quad (4.83)$$

şeklinde Riccati denklemi alınır ise, bu Riccati denklemin çözümü olan $\varphi = \tanh(k\mu)$, $\varphi = \coth(k\mu)$ denklemler (4.69) denklemini sağlar. (2.11) ile verilen Gardner denkleminin Homojen Denge metodu ile diğer bir çözümü için de dengeleme terim hesabı (4.69) denklemi için yine aynı olduğundan dengeleme terimi $m = 1$ 'dir. Bu yüzden çözüm önerisi yine (4.70) denklemi ile aynı olur. Dolayısıyla (4.69) denklemi için, (4.70) denklemi ve (4.70) denkleminin türevleri alınır ve (4.69) de yerlerine yazılırsa,

$$2a_1^3 b \varphi^3 + 6a_1^2 a_0 b \varphi^2 + 3a_1^2 a \varphi^2 + 6a_1 a_0^2 b \varphi + 6a_1 a_0 a \varphi + 12a_1 k^2 p \varphi^3 - 12a_1 k^2 p \varphi - 6a_1 V_p \varphi + 2a_0^3 b + 3a_0^2 a - 6a_0 V_p + 6c = 0$$

denklemi elde edilir. Burada yine aynı şekilde φ ve φ 'nin kuvvetleri sıfır olmayacağından φ ve φ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenir ve,

$$\varphi^3 : \frac{a_1 (a_1^2 b + 6k^2 p)}{3} = 0,$$

$$\varphi^2 : \frac{a_1^2 (2a_0 b + a)}{2} = 0,$$

$$\varphi^1 : (a_0^2 b + a_0 a - 2k^2 p - V_p) = 0,$$

$$\varphi^0 : \frac{(2a_0^3 b + 3a_0^2 a - 6a_0 V_p + 6c)}{6} = 0.$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözümlenirse aşağıdaki,

$$p = \frac{-a_1^2 b}{6k^2}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{-3a_0^2 b - 3a_0 a + 3V_p}{b}}, \quad a_{0(1)} = \frac{\sqrt{a^2 + 4bV_p} - a}{2b},$$

$$c = \frac{(\sqrt{a^2 + 4bV_p})a^2 + 4(\sqrt{a^2 + 4bV_p})bV_p - a^3 - 6abV_p}{12} \quad (4.84)$$

sonuçlarına ulaşılır. (4.83) denkleminde $\varphi = \tanh k\eta$ ya da $\varphi = \coth k\eta$ olmak üzere (4.84) denklemi, (4.69) denkleminde yerleştirilirse de,

$$U_6(\eta) = \frac{\sqrt{a^2 + 4bV_p} - a}{2b}, \quad (4.85)$$

elde edilir.

4.3.3 Schamel-KdV denkleminin tam çözümleri

(2.12) ile verilen Schamel- KdV denkleminde daha önce (Wafaa M. Taha, vd., 2013; Dönmez ve Dağhan, 2016) tarafından farklı metotlar uygulanmıştır. Bu çalışmada ise Schamel- KdV denkleminde Homojen Denge ve Kudryashov metodu uygulamaları gösterilmiştir.

(2.12) ile verilen Schamel-KdV denkleminde,

$$U = U(\eta), \quad \eta = x - V_p t \quad (4.86)$$

dönüşümü uygulanarak,

$$-V_p U' + aU^2 U' + bUU' + pU''' = 0 \quad (4.87)$$

denklemini elde edilir. Burada $U' = \frac{dU}{d\eta}$, dir. (4.87) denklemini bir kez integrallenecek,

$$-V_p U + \left(\frac{2a}{3}\right)U^3 + \left(\frac{b}{2}\right)U^2 + pU'' + c = 0 \quad (4.88)$$

denkleminde ulaşılır. Burada c integral sabitidir. Denklem (4.88) de $\psi = U^{\frac{1}{2}}$, $U = \psi^2$ alınır ve dzenlenirse,

$$\psi\psi'' + (\psi')^2 - \left(\frac{V_p}{2p}\right)\psi^2 + \left(\frac{a}{3p}\right)\psi^3 + \left(\frac{b}{4p}\right)\psi^4 + \frac{c}{2p} = 0 \quad (4.89)$$

denklemini elde edilir (Dönmez ve Dağhan, 2016).

4.3.3.1 Schamel-KdV Denkleminin Kudryashov Metodu ile Tam Çözümleri

(4.89) denkleminde dengeleme terim hesabı yapılırsa $m=1$ elde edilir. Bu yüzden çözüm önerisi,

$$\psi = a_0 + a_1\varphi, \quad (4.90)$$

şeklinde olur. Burada Kudryashov metodu gereği $\varphi' = (\varphi^2 - \varphi)$ Bernoulli denkleminin çözümünü olan $\varphi = \frac{1}{1+e^\eta}$, (4.89) denklemin çözümünü sağlar. Burada ψ ve türevleri,

$$\psi' = a_1\varphi' = a_1(\varphi^2 - \varphi)$$

$$\psi'' = a_1(2\varphi\varphi' - \varphi') = a_1(2\varphi(\varphi^2 - \varphi) - (\varphi^2 - \varphi)) = a_1(2\varphi^3 - 3\varphi^2 + \varphi)$$

.

.

.

şeklindedir ve ψ 'nin kuvvetleri,

$$\psi^2 = a_0^2 + a_1^2\varphi^2 + 2a_0a_1\varphi$$

.

.

.

şeklindedir. Bu ψ ve türevleri (4.89) denkleminde yerlerine yazılır ve dzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& 3a_1^4 b \varphi^4 + 12a_1^3 a_0 b \varphi^3 + 4a_1^3 a \varphi^3 + 18a_1^2 a_0^2 b \varphi^2 + 12a_1^2 a_0 a \varphi^2 - 6a_1^2 V_p \varphi^2 + \\
& 36a_1^2 p \varphi^4 - 60a_1^2 p \varphi^3 + 24a_1^2 p \varphi^2 + 12a_1 a_0^3 b \varphi + 12a_1 a_0^2 a \varphi - \\
& 12a_0 a_1 V_p \varphi + 24a_0 a_1 p \varphi^3 - 36a_0 a_1 p \varphi^2 + 12a_1 a_0 p \varphi + 3a_0^4 b + 4a_0^3 a - 6a_0^2 V_p + 6c = 0
\end{aligned}$$

şeklinde denklem elde edilir. Burada φ ve kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\varphi^4 : 3a_1^2 (a_1^2 b + 12p) = 0,$$

$$\varphi^3 : 4a_1 (3a_1^2 a_0 b + a_1^2 a - 15a_1 p + 6a_0 p) = 0,$$

$$\varphi^2 : 6a_1^2 (3a_1 a_0^2 b + 2a_1 a_0 a - a_1 V_p + 4a_1 p - 6a_0 p) = 0,$$

$$\varphi^1 : 12a_1 a_0 (a_0^2 b + a_0 a - V_p + p) = 0,$$

$$\varphi^0 : 3a_0^4 b + 4a_0^3 a - 6a_0^2 V_p + 6c = 0.$$

şeklinde elde edilen denklem sistemleri çözüldüğünde,

$$a_0 = \frac{-2 \left(\sqrt{\frac{-3p}{b}} \right) a + 15p}{5 \left(\sqrt{\frac{-3p}{b}} \right) b}, \quad a_{1,1} = 2 \left(\sqrt{\frac{-3p}{b}} \right),$$

$$V_p = \frac{2(-4a^2 - 25bp)}{25b}, \quad a = \frac{5\sqrt{-3bp}}{2} \quad (4.91)$$

terimleri bulunur. Bu sonuçlar, (4.90)' da yerlerine yazılır ve $\psi = U^{\frac{1}{2}}$, $U = \psi^2$ olmak üzere düzenlenirse,

$$U(\eta) = \frac{2 \left(-2\sqrt{\frac{-3p}{b}}\sqrt{-3bp\varphi} + \sqrt{\frac{-3p}{b}}\sqrt{-3bp} - 6p\varphi^2 + 6p\varphi - 3p \right)}{b}$$

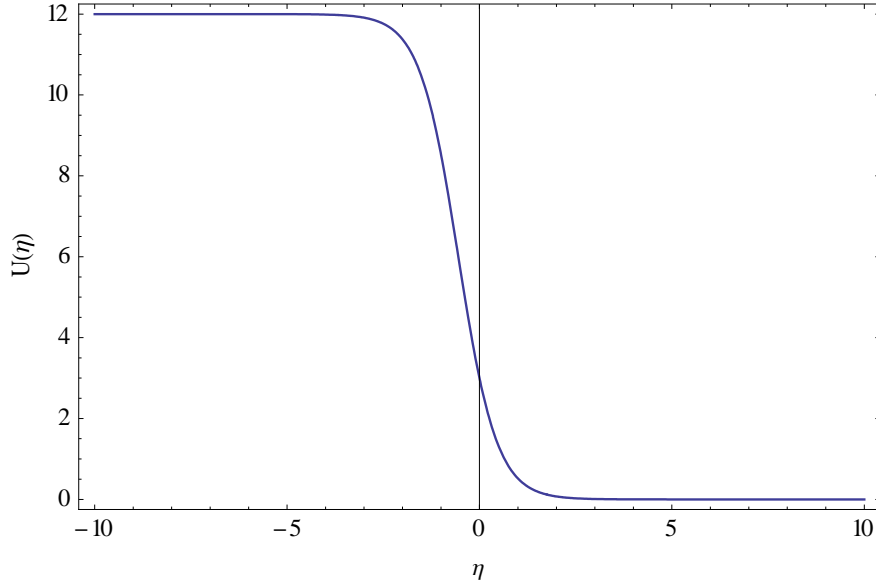
çözümü elde edilir. Buradan da $\varphi = \frac{1}{1+e^\eta}$ alınırsa,

$$U(\eta) = \frac{2 \left(e^{2\eta}\sqrt{\frac{-3p}{b}}\sqrt{-3bp} - \sqrt{\frac{-3p}{b}}\sqrt{-3bp} - 3e^{2\eta}p - 3p \right)}{b(e^{2\eta} + 2e^\eta + 1)}$$

şeklindeki çözüm düzenlenmiş halde,

$$U(\eta) = \frac{-6 \cosh \eta + 6\sqrt{\frac{-p}{b}}\sqrt{-bp} \sinh \eta}{b(2 \cosh \eta + \sinh \eta)} \quad (4.92)$$

formunda elde edilir. Bu çözüm hiperbolik fonksiyonlar türünden elde edilmiştir. (4.92) çözümü grafiğinden de anlaşılacağı gibi (Wafaa, vd., 2013)'daki 35 numaralı çözümle uyumlu çözümdür ve grafiği şekil 4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.6. S-KdV denkleminin (4.92) ile verilen çözümü ($b = -1$, $p = 1$)

4.3.3.2 Schamel-KdV Denkleminin Homojen Denge metodu ile tam çözümleri

(4.89) denklemde $(\psi')^2$ ile $\left(\frac{b}{4p}\right)\psi^4$ terimleri arasında dengeleme hesabı yapılırsa

dengeleme terimi $(m+1)2 = 4m$, $m=1$ elde edilir. Bu yüzden çözüm önerisi

(4.90) ile aynı elde edilir. Burada $\varphi = \tanh(k\eta)$, $\varphi = \coth(k\eta)$, Riccati dekleminin

$(\varphi' = k(1-\varphi^2))$ çözümleridir. ψ ve türevleri (4.89) denklemde yerlerine yazılırsa,

$$3a_1^4 b \varphi^4 + 12a_1^3 a_0 b \varphi^3 + 4a_1^3 a \varphi^3 + 18a_1^2 a_0^2 b \varphi^2 + 12a_1^2 a_0 a \varphi^2 - 6a_1^2 V_p \varphi^2 + 36a_1^2 k^2 p \varphi^4 - 48a_1^2 k^2 p \varphi^2 + 12a_1^2 k^2 p + 12a_1 a_0^3 b \varphi + 12a_1 a_0^2 a \varphi - 12a_0 a_1 V_p \varphi + 24a_0 a_1 k^2 p \varphi^3 - 24a_0 a_1 k^2 p \varphi + 3a_0^4 b + 4a_0^3 a - 6a_0^2 V_p + 6c = 0$$

denklemini elde edilir. Burada yine aynı şekilde φ ve kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$\varphi^4 : 3a_1^2 (a_1^2 b + 12k^2 p) = 0,$$

$$\varphi^3 : 4a_1 (3a_1^2 a_0 b + a_1^2 a + 6a_0 k^2 p) = 0,$$

$$\varphi^2 : 6a_1^2 (3a_0^2 b + 2a_0 a - V_p - 8k^2 p) = 0,$$

$$\varphi^1 : 12a_1 a_0 (a_0^2 b + a_0 a - V_p - 2k^2 p) = 0,$$

$$\varphi^0 : 12a_1^2 k^2 p + 3a_0^4 b + 4a_0^3 a - 6a_0^2 V_p + 6c = 0.$$

cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde,

$$b = \frac{-12k^2 p}{a_1^2}, a_0 = \frac{a_1^2 a}{30k^2 p}, V_p = \frac{2(a_1^2 a^2 - 300k^4 p^2)}{75k^2 p},$$

$$c = 0, \quad a_{1,1} = \frac{30k^2 p}{a}, \quad a_{1,2} = \frac{-30k^2 p}{a}. \quad (4.93)$$

elde edilir. (4.93) denklemleri, (4.90) denkleminin içine yazılır ise

$$\psi = \frac{30k^2 p(1-\varphi)}{a}$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm ve (4.93) denklemleri ve $\psi = U^{\frac{1}{2}}$, $U = \psi^2$ denklemleri (4.90) denkleminin içine yazılır ve $(\varphi' = k(1-\varphi^2))$ Riccati denkleminin çözümü olan $\varphi = \tanh(k\eta)$ yerleştirilir ve düzenlenirse,

$$U_{1,1} = \frac{900k^4 p^2 (\tanh(k\eta)^2 + 2 \tanh(k\eta) + 1)}{a^2},$$

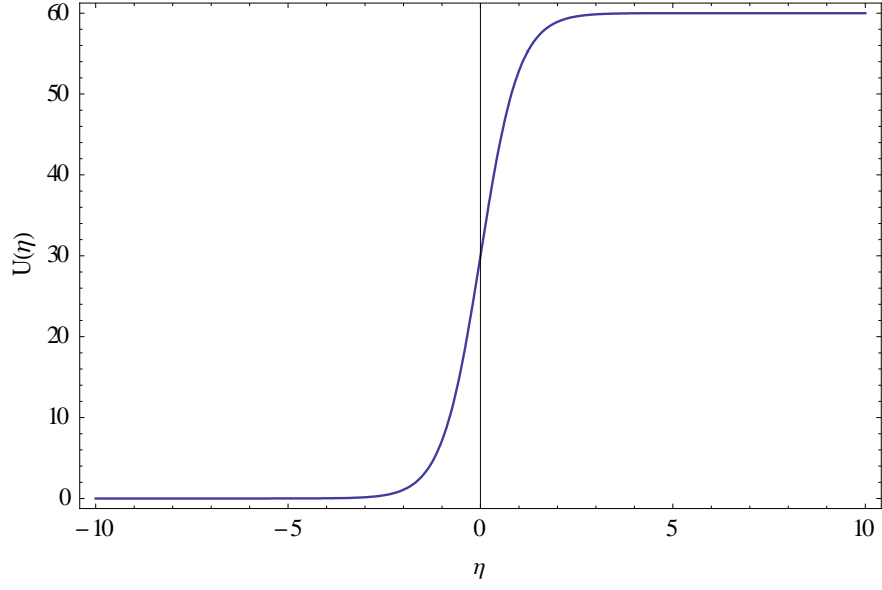
$$U_{1,2} = \frac{900k^4 p^2 (\tanh(k\eta)^2 - 2 \tanh(k\eta) + 1)}{a^2}. \quad (4.94)$$

çözümleri elde edilir. Benzer şekilde $\varphi = \coth(k\eta)$ alınır ve aynı işlemler yapılırsa,

$$U_{1,3} = \frac{900k^4 p^2 (\coth(k\eta)^2 + 2 \coth(k\eta) + 1)}{a^2},$$

$$U_{1,4} = \frac{900k^4 p^2 (\coth(k\eta)^2 - 2 \coth(k\eta) + 1)}{a^2}. \quad (4.95)$$

çözümleri elde edilir. (4.94) ve (4.95) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar cinsinden (Wafaa, vd., 2013)'daki 35 numaralı çözümle uyumlu çözümlerdir. Şekil 4.1 ile verilen (4.94) ve (4.95) çözümlerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.7. S-KdV denkleminin (4.94) ve (4.95) ile verilen çözümü
($k = 1$, $p = 1$, $\alpha = 1$)

BÖLÜM V

SONUÇLAR

Bu tezde Kudryashov ve Homojen Denge metotları fizik ve mühendislikte kullanılan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Ayrıca literatür çalışması yapılarak bu metotlarla çözülen denklemler hakkında daha fazla bilgi elde edilmiştir. Bu iki metotda dengeleme terimi esasına dayanmaktadır. Kullanılan bu metotların kolay bir algoritmaya sahip olması ve yapılan hesaplamaların bilgisayar ile rahatça elde edilebilmesi birçok önemli konuyu aydınlığa kavuşturmasından dolayı bu metotların bu tür lineer olmayan diferansiyel denklemler için önemli metotlar olduğunu göstermektedir. Bu metotların birbirinden farkı Kudryashov metodu Homojen Denge metoduna göre daha kısa ve kolay bir metottur. Bu yüzden denklem hakkında hızlı bir şekilde çözüme ulaşmak istendiğinde Kudryashov metodu kullanmak Homojen Denge metoduna göre daha uygundur. Fakat Kudryashov metodu, Homojen Denge metodunun özel bir formudur. Bu yüzden Homojen Denge metodu, Kudryashov metoduna göre daha genel bir metottur ve Kudryashov metodu ile çözülen her lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem aynı zamanda Homejen Denge metodu ile de çözülebildiği bu çalışmada gösterilmiştir. Bu metotlarla elde edilen çözümler incelenen denklemlerde yerlerine yazılarak çözümlerin doğruluğu sağlanmıştır.

Bu çalışmada Kudryashov metodu ile Fisher denkleminin analitik çözümler daha önce literatürde bulunduğu için bu tezde tekrarlanarak aynı sonuçlar elde edilmiştir (Kudryashov, 2012).

CDG ve SK denklemlerine ise Kudryashov metodu uygulandığında integral sabiti sıfırdan farklı alınmıştır. Kudryashov metodu kullanılarak elde edilen CDG denkleminin (4.15) numaralı çözümü literatürde bulunan (Wazwaz, 2008)'deki 26 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip bir çözümdür. Bu çözümün grafiği şekil 4.1. ile verilmiştir. Kudryashov metodu kullanılarak elde edilen SK denkleminde elde edilen (4.21) çözümü de literatürde bulunan (Shakeel ve Mohyud-dın, 2014)'deki 32 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip bir çözümdür. Bu çözümün grafiği şekil 4.2. ile verilmiştir. Bu soliton dalga çözümleri ise fiziksel açıdan analiz etmek için önemlidir.

Homojen Denge metodu ile Benjamin Bona Money denklemi daha önce çözüldüğü için bu çalışmada tekrarlanarak aynı sonuçlar elde edilmiştir (Abdel Rady vd., 2010).

Yapılan literatür araştırması kadarıyla (2+1) boyutlu Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) denkleminin ise Homojen Denge metodu ile çözümleri ilk kez bu çalışmada elde edilmiştir. (4.47) ve (4.49) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar türünden birbirleriyle aynı çözümlerdir ve bu çözümler $m=1$ içinde (4.44) çözümüne dönüşür. (4.47) ve (4.49) çözümlerin grafikleri ve bu çözümlerde $m=1$ için olan (4.44) çözümünün grafiği şekil 4.3. ile verilmiştir. (4.46) çözümü ise hiperbolik tipten çözümdür ve (4.44), (4.46), (4.47), (4.49) çözümleri (Başkonuş, vd., 2017)'deki (3.6) ile verilen çözümle uyumlu çözümlerdir ve şekil 4.3'teki grafik (Başkonuş, vd., 2017)'deki Fig.1 grafiği ile aynıdır.

Birçok bilim insanı tarafından ele alınan BLMP denkleminin farklı metotlar kullanılarak tam çözümleri elde edilmiştir (Ardabi vd., 2016; Zamiri, 2015). Bu tezde ise BLMP denkleminin Homojen Denge metodu ve Kudryashov metodu ile farklı çözümleri elde edilmiş ve literatür karşılaştırması yapılmıştır. BLMP denkleminin Homojen Denge metodu kullanılarak elde edilen (4.62), (4.63), (4.64) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar cinsinden (Esen, 2018)'de (4.72b) ile verilen çözümle uyumludur. (4.65) çözümü rasyonel fonksiyonlar cinsindedir ve (Esen, 2018)'de (4.77) nolu çözümle aynıdır. (4.66) ile verilen çözüm ise trigonometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiştir ve (Esen, 2018)'de (4.86) ile verilen trigonometrik çözümle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. BLMP denkleminin Kudryashov metodu kullanılarak elde edilen (4.56) çözümü ise, (Esen, 2018)'de (4.82b) ile uyumlu hiperbolik tipten bir çözümdür ve şekil 4.4 ile verilen grafiği de (Esen, 2018)'de şekil 4.3. ile uyumludur.

Bu tezde Gardner denklemi için yapılan literatür çalışmasına göre ilk kez Kudryashov ve Homojen Denge metotları uygulanmıştır. Gardner denkleminin Kudryashov metodu uygulanarak (4.72) ile verilen çözüm (Wazwaz, 2007)'deki 16 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip çözümdür ve grafiği (4.72)'nin grafiği şekil 4.5. ile verilmiştir. (4.73) ile verilen çözüm (Wazwaz, 2007)'deki 50 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip çözümdür. Gardner Denkleminin Homojen Denge metodu kullanılarak elde edilen

(4.78), (4.79) ve (4.80) çözümleri (4.72) çözümü ile ve (Wazwaz, 2007)'deki 16 numaralı çözümle uyumlu hiperbolik tip çözümlerdir.

Schamel- KdV denklemine daha önce (Wafaa, vd., 2013) ve (Dönmez ve Dağhan, 2017) tarafından farklı metotlar uygulanmıştır. Homojen Denge metodu ise ilk kez bu tezde uygulanmıştır. Schamel- KdV denkleminin Homojen Denge metodu kullanılarak elde edilen (4.94) ve (4.95) çözümleri hiperbolik fonksiyonlar cinsinden (Wafaa, vd., 2013)'daki 35 numaralı çözümle uyumlu çözümlerdir ve bu çözümlerin grafikleri şekil 4.6. ile verilmiştir. Schamel- KdV denkleminin Kudryashov metodu kullanılarak elde edilen (4.92) çözümü grafiğinden de anlaşılacağı gibi (Wafaa, vd., 2013)'daki 35 numaralı çözümle uyumlu çözümdür ve grafiği şekil 4.7. de gösterilmiştir.

Bu tezde denklemlerin çözümleri Reduce programı yardımı ile çözülmüş ve Mathematica programı yardımı ile de bu denklemlerin çözümlerinin kontrolü sağlanmıştır. Ayrıca bazı denklemlerin çözüm grafikleri de Mathematica programı kullanılarak verilmiştir.

KAYNAKLAR

Abdel Rady, A.S., Osman, E.S., and Khalfallah, M., “The homogeneous balance method and its application to the Benjamin–Bona–Mahoney (BBM) equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 1385-1390, 2010.

Akbari, M., “Application of Kudryashov method for the Ito equations”, *Applications And Applied Mathematics*, 12, 136-142, 2017.

Ardabi, S. and Najafi, M., “Soliton solutions of nonlinear evolution equations in Math.”, *Optik* 127, 4270-4274, 2016.

Arnous, A. H., “Solitary wave solutions of space-time fdes using Generalized Kudryashov method”, *Acta Universitatis Apulensis*, 42, 41-51, 2015.

Asadi, N. and Nadjafikhah, M., “Geometry of Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation”, *Journal of Science and Technology* 8, 1-7, 2015.

Aslan, I., “Exact and explicit solutions to some nonlinear evolution equations by utilizing the (G'/G)-expansion method”, *Appl. Math. Comput.* 215(2), 857-563, 2009.

Bai, C.-J. and Zhao, H. “New solitary wave and jakobi periodic wave excitations in (2+1)- dimensional Boiti- Leon- Manna- Pempinelli system”, *International Journal of Modern Physics B*, 15, 2407-2420, 2006.

Başkonuş, H. M., Sulaiman, T. A. and Bulut, H., “New solitary wave solutions to the (2+1) dimensional Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff and the Kadomtsev Petviashvili hierarchy equations”, *Indian J Phys*, 91, 1237-1243, 2017.

Başkonuş, M., Bazı Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri, Doktora Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 2014.

Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J., “Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems”, *Philos Trans. R. Soc. London, Ser. A.* 272, 47-48, 1972.

Betchewe, G., Victor, K.K., Thomas, B. B. and Crepin, K. T., “New solutions of the Gardner equation: Analytical and numerical analysis of its dynamical understanding.”, *Appl. Math. Comput.*, 223, 377–388, 2013.

Biswas, A., “Soliton Perturbation Theory for the Gardner Equation. ”*Adv. Stud. Theor. Phys.* 2(16), 787–794, 2008.

Boiti, M., Leon, J-P. J., Manna, M. And Pempinelli, F., “On a spectral transform of a Korteweg-de Vries equation in two spatial dimensions”, *Inverse Problems*, 2, 271-279, 1986.

Bozdağ, H., Kısmi diferansiyel denklemlerin Q-koşullu simetrisi, Yüksek Lisans Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 2014.

Cüvelek, E., Simetrik düzgün uzun dalga denkleminin genişletilmiş deneme denklem ve Genelleştirilmiş Kudryashov metotları ile çözümlerinin irdelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 2016.

Çuha, S., Korteweg-De Vries denklemlerinin bazı analitik ve yaklaşık çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Denizli, 2014.

Dağhan, D. and Dönmez, O., “Analytic Solutions of the Schamel-KdV Equation by Using Different Methods: Application to a Dusty Space Plasma”, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21, 1, 208-215, 2017

Dağhan, D. and Dönmez, O., “Exact Solutions of the Gardner Equation and their Applications to the Different Physical Plasmas”, *Braz. Journal Phys.*, 321–333, 46, 2016.

Darvishi, M. T., Najafi, M., Kavitha, L. and Venkatesh, M., “Stairand Step Soliton solutions of the integrable (2+1)- Dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation”, *Commun. Theor. Phys.* 58, 785-794, 2012.

Demiray, S. T. and Bulut, H., “New exact solutions for generalized Gardner equation”, *Kuwait J. Sci.*, 44, 1-8, 2017.

Duran, S., Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga çözümleri ve bu çözümlerin analizleri, Doktora Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 15-38, 2012.

Esen, R. K., Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümleri ve farklı fiziksel sistemlere uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Niğde, 2018.

Fan, E. and Zhang, H., “ A note on the homogeneous balance method”, *Physics Letters A*, 246, 403-406, 1998.

Fan, E., “Two new applications of the homogeneous balance method”, *Physics Letters A*, 265, 353-357, 2000.

Gilson, C. R., Nimmo, J. J. C. and Willow, R., “(2+1)-Dimensional Generalized of the AKNS shallow water wave equation”, *Physics Letter A*. 180, 337-345, 1993.

Işık, Y., Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin taşıyıcı dalga çözümleri için bazı analitik metotlar, Yüksek Lisans Tezi, *Dicle Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü*, Diyarbakır, 2015.

Jiang, B. and Bi, Q., “A study on the bilinear Caudrey_Dodd_Gibbon equation”, *Nonlinear Analysis*, 72 ,430_4533, 2010.

Jie, J., Wu, J. and Zhang, J., “Homogeneous Balance method for an Inhomogeneous KdV equation: Böcklund Transformation and Lax Pair”, *International Journal of Nonlinear Science*, 9, 69-71, 2010.

Kabir, M. M., Khajeh, A., Abdi Aghdam, E. and Koma, Y., “ Modified Kudryashov method for finding exact solitary wave solutions of higher-order nonlinear equations” *Math. Meth. Appl. Sci.*, 34, 213–219, 2011.

Kamchatnov, A. M., Kuo, Y.-H., Lin, T.-C., Horng, T.-L., Gou, S.-C., Clift, R., El, G. A. and Grimshaw, R. H. J., “Undular bore theory for the Gardner equation” *Phys. Rev.*, 86, 036605, 2012.

Kangangil, F., “Travelling wave solutions of the Schamel–Korteweg–de Vries and the Schamel equations”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24 , 526–531, 2016.

Kaplan, M., Bekir, A. and Akbulut, A., “A generalized Kudryashov method to some nonlinear evolution equations in mathematical physics”, *Nonlinear Dyn*, 85, 2843–2850, 2016.

Karaagac, B., “A Numerical Approach to Caudrey_Dodd_Gibbon Equation Via Collocation Method Using Quintic B-Spline.”, *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 9, 1-8, 2019.

Koca K., Kısmi türevli denklemler, *Gündüz yayıncılık*, Ankara, 233s, 2001.

Kudryashov N. A., “Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 24, 1217- 1231, 2004.

Kudryashov N. A., “ One method for finding exact solution of nonlinear differential equations “, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17, 2248-2253, 2012.

Kumar, M. and Tiwari, A. K., “Soliton solutions of BLMP equation by Lie symmetry approach”, *Computers and Mathematics with Applications*, 75, 1434-1442, 2018.

Kumar, R., Gupta, R. K. and Bhatia, S. S., “Invariant solutions of variable coefficients generalized Gardner equation”, *Nonlinear Dyn*, 83, 2013-2111, 2016.

Li, Y. and Li, D., “New exact solutions for the (2+1)-dimensional Boiti- Leon-Manna-Pempinelli equation”, *Applied Mathematical Sciences*, 12, 579-587, 2012.

Lin, L., “Quasi-Periodic Waves and Asymptotic Property for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation”, *Commun. Theor. Phys. (Beijing China)* 54, 208-214, 2010.

Luo, L., “New Exact Solutions and Backlund Transformation for Boiti-Leon- Manna-Pempinelli Equation”, *Physics Letter A*. 375, 1059-1063, 2011.

Mirzazadeh, M., Eslami, M. and Biswas, A., “Dispersive optical solitons by Kudryashov's method.”, *Optik*, 125, 6874–6880, 2014.

Naher, H., Farah, A. A. and Akbar, M. A., “The (G'/G)-Expansion Method for Abundant Traveling Wave Solutions of Caudrey-Dodd-Gibbon Equation”, *Research Article*, 218216, 11, 2011.

Oğuz, C., Kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için tam çözüm yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, *Yaşar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmir, 2011.

Özdemir, E., Korteweg-de Vries denkleminin üzerine bir çalışma, Yüksek Lisans Tezi, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Sakarya, 2009.

Pan, X. J., Dai, C. Q. and Mo, L. F., “Analytical solutions for the stochastic Gardner equation”, *Computers and mathematics with applications*, 61, 2138-2141, 2011.

Pandir, Y., Gurefei Y. and Misirli, E., “A new approach to Kudryashov’s method for solving some nonlinear physical models”, *International Journal of Physical Sciences Vol.7(21)*, 2860-2866, 2012.

Ryabov, P. N., Sinelshchikov, D. I. and Kochanov, M. B., “Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations.” *Applied Mathematics and Computation*, 218, 3965–3972, 2011.

Salas, A. H., " Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method”, *Applied Mathematics and Computation*, 205, 291-297, 2008.

Senthilvelan, M., “ On the extended applications of Homogenous Balance method”, *Applied Mathematics and Computation*, 123, 381-388, 2001.

Shakeel, M. and Mohyud-din, S.T., “Solution of Fifth Order Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera Equation by the Alternative (G'/G) -Expansion Method with Generalized Riccati Equation”, *Walailak Journal of Science and Tecnology*, 12, 949-960, 2015.

Tahami, M. and Najafi, M., “Multi-wave solutions for the generalized (2+1)-dimensional nonlinear evolution equations”, *Optik*, 136, 228-236, 2017.

Tu, J. M., Tian, S. F., Xu, M. J. and Zhang T. T., “Quasi-periodic waves and solitary waves to a Generalized KdV-Caudrey-Dodd-Gibbon Equation from fluid dynamics”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 20, 823-848, 2016.

Uğurlu, Y., Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri, Doktora Tezi, *Yaşar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 108, 2010.

Vassilev, V. M., Djondjorov, P. A., Hadzhilazova, M. T. and Miadenov, I. M., “Traveling wave solutions of the Gardner equation and motion of plane curves governed by the mKdV flow”, *AIP Conference Proceedings*, 86, 1404, 2011.

Yang, H., Li, W. and Yang, B., “The Extended Multiple (G'/G) -Expansion Method and Its Application to the Caudrey-Dodd-Gibbon Equation”, *Research Article*, 138801, 6, 2014.

Zamiri, A., “The (G'/G) -Expansion Method for the (2+1)-Dimensional Boiti- Leon-Manna-Pempinelli Equation”, *J. Basic. Appl. Sci. Res.* 3, 522-527, 2013.

Zayed, M. E. and Alurffi, K. A. E., “The Homogeneous Balance method and its applications for nonlinear evolution equations”, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33, 307-318, 2014.

Zhang, S. and Wang, Z., “Improved Homogeneous Balance Method for Multi-Soliton Solutions of Gardner Equation with Time-Dependent Coefficients”, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 1992-9978, 592-600, 2016.

Zhao, X., Wang, Li. and Sun W., “The repeated homogeneous balance method and its applications to nonlinear partial differential equations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 28 , 448–453, 2006.

Zhao, X. and Tang, D., “A new note on a homogeneous balance method”, *Physics Letters A*, 297, 59-67, 2002.

Zuntao, F., Shida, L. and Liu, S., “New kinds of solutions to Gardner equation.” *Chaos, Solitons & Fract.* 20, 301–309, 2004.

Yi, W., He, X-D. and Yang X-F., “The homogeneous balance of undetermined coefficients method and its application”, *Open Math.*, 14, 816-826, 2016.

Wafaa M. Taha, M. S. M. Noorani and I. Hashim, “New Exact Solutions of on-Acoustic Wave Equationsby (G'/G) -Expansion Method”, *Research Article ID*, 810729, 11, 2013.

Wang, M., Zhou, Y. and Li, Z., “Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics”, *Physics Letters A*, 216, 67-75, 1996.

Wazwaz, A.-M., “Analytic study of the fifth order integrable nonlinear evolution equations by using the tanh method.”, *Appl. Math. Comput.*, 174, 289–299, 2006.

Wazwaz, A. M., “New solitons and kink solutions for the Gardner equation”, *Science Direct.*, 12, 1395-1404, 2007.

Wazwaz, A.-M., “Multiple-soliton solutions for the fifth order Caudrey–Dodd–Gibbon (CDG) equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 197, 719–724, 2008.

Wazwaz, A.- M., “Multiple soliton solutions for (2+1)-dimensional Sawada–Kotera and Caudrey–Dodd–Gibbon equations.”, *Mathematical Methods in the Applied Science*, 10, 1002-1460, 2011.

Xu, Y-G., Zhou, X-W. and Yao, L., “Solving the fifth order Caudrey–Dodd–Gibbon (CDG) equation using the exp-function method”, *Applied Mathematics and Computation*, 206, 70-73, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Çiğdem Türkmen 16.11.1989 tarihinde Niğde ilinin Ulukışla ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini Niğde ilinin Ulukışla ilçesine bağlı Hasangazi köyünde ve lise öğrenimini ise 2004-2008 tarihleri arasında Niğde ilinin Bor ilçesinde Şehit Nuri Pamir Lisesinde tamamladı. Lisans eğitimini 2009 yılında girdiği Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun olarak tamamladı.



TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından uluslararası konferansda aşağıda detayları verilen sözel bildiri sunulmuştur. Ayrıca, iki adet makale çalışması yayın için hazırlanmaktadır.

Türkmen Ç. and Yıldız G., “Application of Homogeneous Balance Method to the Schamel-Korteweg-de-Vries Equation”, *Uluslararası Türk Dünyası Fen ve Mühendislik Kongresi (UTUFEM 2019)*, Niğde, 17-18 Haziran (2019).

Yıldız G. and Türkmen Ç. “Application of Kudryashov Method to Some Equations Used in Physics Science”, *(Yayın İçin Hazırlanmakta)*.

Yıldız G. and Türkmen Ç. “Exact Solutions of the BLMP Equation Using the Homogeneous Balance Method and the Generalized Kudryashov Method”, *(Yayın İçin Hazırlanmakta)*.

